arXiv:2603.15529v1 [math.GR] 16 Mar 2026

仿射考克斯特复形中的附属集

Megan Masters

2026年3月17日

摘要

我们将考克斯特群中元素 x 的附属集引入为满足关于布鲁哈特序的条件 $x \not\leq y$ 的元素 y 所构成的集合。这一概念为研究布鲁哈特区间及其通过折叠廊道进行的诠释提供了互补视角。我们确立了附属集的一般性质，并证明在仿射考克斯特群中，任意固定元素的附属集都是有限的。对于秩二仿射考克斯特复形，我们还利用下降集和平行反射的构形描述了附属集边界的几何结构。这些结果为布鲁哈特序的结构提供了新的几何视角。

1 引言

建筑理论由雅克·蒂茨于20世纪50年代提出 [19], ，为理解代数结构和李理论结构提供了一个几何框架。建筑理论最初旨在描述半单代数群和李群 [20], ，此后已发展成为几何群论、表示论和组合学中的核心研究对象[1, 16]。建筑中最基本的例子包括考克斯特复形。这些组合与几何结构编码了考克斯特群的反射对称性，并作为局部对象，用于构建更复杂的建筑。

给定一个考克斯特系统（W， S），与之关联的考克斯特复形可实现为一个单纯复形，其极大单形称为小室，与 W [11]中的元素构成双射。小室的邻接对应于乘以简单反射。在仿射情形下，该复形可以嵌入欧几里得空间，使得群中的反射对应于关于仿射超平面的反射 [5]。本文聚焦于仿射 Coxeter 复形，尤其是秩为 2 的情形。

在我们的考克斯特复形中，我们研究穿过小室 [15] 的行走，并将其称为廊道。本文聚焦于从小室到小室的廊道。包括 Schwer [18], 在内的其他论文则讨论从顶点出发并在顶点结束的廊道。廊道及其正折叠在广泛的数学领域中都有应用。廊道的正折叠最早由 Gaussent 和 Littelmann 于 2005年 [8] 引入。它们可用于计算霍尔–利特尔伍德多项式 [17]„ 也曾被用于研究米尔科维奇–维洛嫩多面体 [7]。折叠廊道与仿射德利涅–卢斯蒂格簇之间也存在联系 [14]。

在考克斯特群中，我们可以定义一种称为布鲁哈特序的偏序。该偏序最初是作为旗流形 [6], 上的舒伯特簇的偏序引入的，随后扩展到一般的半单代数群 [4]。对魏尔群中布鲁哈特序的研究始于20世纪60年代 [21]。给定一个考克斯特群 W及元素 x， $y \in W$，若每当 y 写成一个约化表达式时，都有 $x \leq y$在布鲁哈特序中

$$y = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k},$$

存在一个子字 $s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \cdots s_{i_{j_m}}$，其中 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq k$是 x [3]的一个约化表达式。

与元素 $w \in W$ 相关联的是其**影**，定义为所有能够作为型 w的正向折叠廊道终点的群元素所构成的集合。在平凡定向的情形下（本文讨论的正是这种情形）， w 的影恰好与布鲁哈特区间 $[1, w]$重合。因此，折叠廊道的几何为布鲁哈特序提供了一种直观且组合性的模型。关于影的应用概述，参见 [18] 。

尽管下布鲁哈特区间 $[1, w]$ 可以通过影 [9], 作简单描述，但从廊道的角度来看，更一般的布鲁哈特区间 $[y, z]$ 则不那么容易直接理解。理解这类区间是一个经典问题，具有广泛的意义。例如，布鲁哈特区间在舒伯特簇 [2] 的几何以及 Kazhdan–Lusztig 多项式 [12]理论中都发挥着基础作用。

本文研究上布鲁哈特区间 $[x, \infty)$的几何性质。这里，我们要问的是，对于哪些 y， x 属于 y 的影? 等价地，用布鲁哈特序来表述，对于哪些 y， $x \leq y$成立? 这自然引出了 x的**前影** 这一概念，即所有其影包含 x的元素所构成的集合。在无限 Coxeter 群中，尤其是在仿射考克斯特群中，前影是无限集合。因此，研究它们的补集往往更为容易。这正是本文核心定义的出发点。

定义 1.1。给定一个元素 $x \in W$，我们将 x 的**附属集** Annex(x) 定义为由所有满足 x 不在 y 的影中的巷室 y 组成的集合。

当我们的考克斯特群是仿射的时，以下结果成立。

定理 1.2。考虑一个仿射 *Coxeter* 群 W。设 $w \in W$。那么 w 的附属集是有限集。

接下来，我们将探讨这一对象的几何性质，并将范围限定在秩 2 Coxeter 复形上。这些复形构成平面的铺砌。此项探讨的一个核心内容是以下定理，它描述了相邻平行反射对一个元素长度的影响。

定理 1.3。假设我们有三个相邻的平行反射 H_{r_0}、 H_{r_1} 和 H_{r_2}，满足

$$\ell(r_2 r_1 x) = \ell(r_1 x) + 1 = \ell(x) + 2.$$

那么 $\ell(r_0 x) = \ell(x) \pm 1$。

该定理使我们能够对附属集的边界进行归纳论证，从而得到以下定理。

定理 1.4. 设 W 是一个秩 *2* 仿射 *Coxeter* 复形。设 $w \in W$ 和 $\ell(ws_i) < \ell(w)$。设 $r_1, \ldots, r_n \in W$ 是一个相邻平行反射序列，使得

$$\ell(r_t \cdots r_1 w s_i) = \ell(r_{t-1} \cdots r_1 w s_i) + 1,$$

并且对于所有 $1 \leq t \leq n$，都有 $r_t \cdots r_1 w s_i \neq r_{t-1} \cdots r_1 w$。假设 w 和 H_{r_1} 之间没有与 H_{r_1} 平行的超平面。那么 $r_n \cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。

我们还证明，对于每个 t， $\ell(r_{t-1} \cdots r_1 w) < \ell(r_t \cdots r_1 w)$。由此很容易得出，$r_n \cdots r_1 w s_i$ 必定位于附属集的边界上。

本文首先在第 2 节介绍考克斯特复形和廊道的背景，并定义折叠和平凡影。我们将说明考克斯特复形与根系之间的联系，以及影与群上的布鲁哈特序之间的关系。随后，在第 3 节中，我们定义附域的新记法，并给出附域的一些结果，包括在仿射复形中这些集合是有限的。最后，在第 4 节中，我们证明一个定理，从而完整描述秩 2 时附域的边界。

2 背景

我们从一个带有表示的考克斯特群 $(W,\ S)$ 开始

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle,$$

其中 $m_{ii} = 1$ 对所有 i 成立，且 $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 对所有 $i \neq j$成立。令 I 为S的指标集。上述表示所定义的考克斯特群的**秩** 为 n，即该表示中生成元的数量。我们可以构造这个群的考克斯特复形。维数最大的单形称为**巷室**。它们的维数为 $n-1$，并且与 W中的元素构成双射。于是，任意两个巷室 $x,\ y$相邻，当且仅当对于某个属于生成元集合的 s_i，有 $x = ys_i$。我们将巷室之间的单形称为**面板**。它们的维数为 $n-2$。如果一个面板属于x 和 $y = xs_i$，我们就称该面板的**型** 为 i。关于这一构造的详细说明，见 [16]。

2.1 仿射考克斯特群

现在我们为仿射考克斯特群固定以下记号。稍后将会看到，限制在仿射考克斯特群的范围内，使我们能够证明关于附域的一些优美结果。特别是，这些集合是有限的。

定义 2.1. 仿射考克斯特群是一个无限考克斯特群，它有一个正规阿贝尔子群，且商群有限。

Exam **˜例 2.2.** 考虑仿射考克斯特群 A_2的例子。它有如下表示 n

$$\tilde{A}_2 = \langle s_0, s_1, s_2 \mid s_i^2 = 1, (s_0 s_1)^3 = (s_0 s_2)^3 = (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle.$$

与该考克斯特系统关联的考克斯特复形是由等边三角形铺成的平面镶嵌。

例 2.3. 仿射考克斯特群通常可通过考察有限考克斯特群与平移群的半直积得到。

下一个命题可由有限和仿射考克斯特群的 Dynkin 图分类得出。详情参见 [11, 第 4]章。

命题 2.4. 设 W 是由某些反射 S生成的仿射考克斯特群。设 $S' \subsetneq S$ 是 S的任意真子集，且 $W_{S'}$ 是 W 由 S'生成的子群。那么$W_{S'}$ 是有限的。

2.2 反射与墙

我们希望考察底层考克斯特群的结构如何体现在考克斯特复形中。这里我们将形式化定义考克斯特复形中墙的概念，并确定考克斯特群中与考克斯特复形几何实现中的反射构成双射的元素集合。

定义 2.5. 若元素 $r \in W$ 是元素$s_i \in S$的共轭，则称其为**反射**。反射 r 的**墙** H_r 是考克斯特复形中在 r 通过左乘作用于该复形时被 r 固定的单形集合。于是 H_r 是一个余维 1 的子复形。

B根据此定义，一个面板位于一面墙上，当且仅当它被反射固定 H_r r .

例 2.6. 当考克斯特复形是仿射时，墙与几何实现中的超平面一一对应。

命题 2.7。 [16, 命题 2.6] 考克斯特群的反射集合与相应考克斯特复形中的墙集合之间存在双射。

证明。设 p 是一个室 x 的 i-面板。那么，唯一一个固定 p 并交换 x 和 xs_i 的反射是映射 $r = xs_ix^{-1}$。因此，从反射到墙的映射是一个双射。 □

定义 2.8。 设 H 是考克斯特复形的一个超平面。该超平面将小室集合分为两部分。定义包含单位 alcove 的部分为**恒等半空间** $H^{\mathbf{1}}$，不包含单位 alcove 的部分为**无穷半空间** H^{∞}。

注 2.9。 注意，若 $H = H_r$,

$$H^{\mathbf{1}} = \{x \in W \mid \ell(rx) > \ell(x)\} \text{ and } H^{\infty} = \{x \in W \mid \ell(rx) < \ell(x)\}.$$

2.3 根系

接下来，我们回顾一个事实：仿射 Coxeter 复形自然地由根系产生。我们遵循 Humphreys [10, 第 3] 章的惯例，固定以下记号。

定义 2.10。 考虑一个 n 维向量空间 E，其定义在 $\mathbb{R}$ 上，带有内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$。对于 $\alpha \in E\backslash\{0\}$，定义

$$\alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

此外，定义集合

$$H_\alpha = \{x \in E \mid \langle x, \alpha \rangle = 0\}.$$

H_α 中的**正交反射** 是映射 $s_\alpha \colon E \to E$，满足

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha \rangle \alpha^{\vee}.$$

现在固定一个 E 的根系 Φ。我们希望考察与该根系相关的有限魏尔群和仿射魏尔群。

定义 2.11。 根系 Φ 的**（有限）魏尔群** W_0 是由反射 s_α（$\alpha \in R$）生成的群。

对于 $\alpha \in R$，超平面 H_α 是与根正交的超平面，它们将 E 划分为有限个开区域，称为**魏尔室**。

现在我们扩展反射的定义，以构造相应的无限群。对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们固定反射 $s_{\alpha;k}$：$E \to E$ 为

$$s_{\alpha;k}(x) = x - (\langle x, \alpha \rangle - k)\alpha^{\vee}.$$

现在，对于根系中的每个根 γ，以及每个 $k \in \mathbb{Z}$，我们都有超平面 ne

$$H_{\gamma,k} = \{x \in E \mid \langle x, \gamma \rangle = k\}.$$

定义 2.12。根系的**仿射魏尔群** W Φ是由反射 $s_{\alpha;k}$（其中 $\alpha \in R$、 $k \in \mathbb{Z}$）生成的群。

注 2.13。 所有仿射 Coxeter 复形都可以通过这种根系构造得到。如上所述，超平面对应于复形的墙。详情请参见 [11, 第4]章。

2.4 廊道

现在，我们将在考克斯特复形中行走，从一个小室移动到另一个小室。我们将明确如何折叠这些行走，并回顾它们与群中布鲁哈特序的联系。本节主要遵循 [9, 第 4]章。

De定义 2.14。 给定一个考克斯特复形 Σ，**组合廊道** 是一个序列

$$\gamma = (c_0, p_1, c_1, p_2, \ldots, p_n, c_n),$$

其中 c_i 是小室（若考克斯特复形是有限的，则是室）， p_i 是Σ的面板，并且对所有 $i = 1, .., n$， p_i 包含于 c_{i-1} 且 c_i。组合廊道 γ 的长度为 n，这表示该序列中小室的数量。若不存在一条更短的廊道以 c_0 为起点、以 c_n为终点，则称 γ 为**极小**。

定义2.15。 设 $\gamma = (c_0, p_1, c_1, p_2, \ldots, p_n, c_n)$ 是一条组合廊道。 γ的**型** 是 I中的字 $f = j_1 \ldots j_n$，其中面板 p_i的型为 j_i。

下面的命题对极小廊道所穿过的墙进行了分类。详情请参见 [16, 第 2] 章。

命题 2.16。 设 W 为一个考克斯特群。设 H_r 为一面墙， $x \in W$ 为一个小室， γ 为从 **1** 到 x的一条极小廊道。若 $\ell(rx) < \ell(x)$，则 γ 恰好穿过 H_r 一次。若 $\ell(rx) > \ell(x)$，则 γ 不穿过 H_r。

2.4.1 折叠廊道

按照我们对廊道的定义，相邻的两个小室有可能实际上是同一个小室。我们称具有这一性质的廊道为折叠廊道。为对这些廊道进行分类，我们将引入廊道的 (W, S)-型。它编码了廊道中所有被穿过或接触到的面板的型。我们还将定义装饰化的 (W, S)-型。它还编码了廊道中折叠的位置。装饰化的 (W, S)-型，连同足迹函数和起始小室，可用于计算廊道的终端小室。

定义 2.17。给定一个组合廊道 $\gamma = (c_0, p_1, c_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, c_n)$，其属于 Σ，如定义 2.14 所述，若在 γ 中可以找到一个指标 i 使得 $c_i = c_{i-1}$，则称 γ 为**折叠的**（或**停顿**）。此时称 γ 在面板 p_i 处有一个**折叠**。若 γ 中没有折叠，则称 γ 为**未折叠的**（或**不停顿的**）。

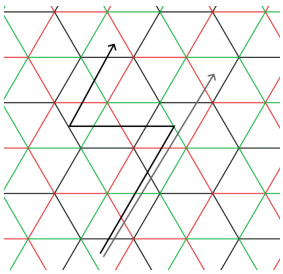
定义 2.18。给定一个长度为 $n+1$ 的廊道 $\gamma = (c_0, p_1, c_1, p_2, \ldots\ldots, p_n, c_n)$，定义**折叠集**$\mathrm{F}(\gamma)$ 为 $\{1, \ldots, n\}$ 的子集，使得 $i \in \mathrm{F}(\gamma)$ 当且仅当 γ 在面板 p_i 处有一个折叠。

为了表示一条廊道，我们在考克斯特复形的几何表示中画出一条路径，使其经过该廊道中的每个室和面板。我们朝廊道的终端巷室画一个箭头。

注意，由于 W 在 Σ上有自然的左作用， W 也作用于 Σ中的廊道集合。例如， $x \in W$将 $\gamma = (c_0, p_1, c_1, \ldots, p_n, c_n)$ 映射为廊道 $x \cdot \gamma = (xc_0, xp_1, xc_1, \ldots, xp_n, xc_n)$。

2.4.2 廊道与字

现在，我们希望将考克斯特复形中的廊道映射为生成集中的字。为此，我们回顾廊道的（带装饰的）(W, S)-型的定义。



˜图1： A_2中的两条廊道。灰色廊道是未折叠的，黑色廊道在两个面板处发生了折叠。

定义2.19。 考虑一条廊道 $\gamma = (c_0,\ p_1,\ c_1,\ \ldots,\ p_n,\ c_n)$。设面板 p_i 属于 γ，其型为$j_i \in I$。我们将其$(W,\ S)$**-型** $\tau(\gamma)$定义为如下字

$$\tau(\gamma) := s_{j_1} \ldots s_{j_n}.$$

注意，根据定义2.15，若 γ的型为 f，则 γ的$(W,\ S)$-型为s_f。

定义2.20。 廊道 $\gamma = (c_0,\ p_1,\ c_1,\ \ldots,\ p_n,\ c_n)$的**装饰**$(W,\ S)$**-型** $\tilde{\tau}(\gamma)$是装饰词

$$\tilde{\tau}(\gamma) := s_{j_1} \ldots \tilde{s}_{j_i} \ldots s_{j_n},$$

其中，我们在字中对应于廊道的一次折叠 $c_{i-1} = c_i$ 的元素s_{j_i} 上方加波浪号。

现在我们陈述一些简单的引理，初步揭示折叠廊道与布鲁哈特序之间的联系。

引理2.21。 [9,引理4.8]设 c_0 是我们考克斯特复形 Σ中的一个固定小室 .

（i） S 中的字与起始于 c_0的未折叠廊道之间存在一个双射。（ii） S 中的装饰词与起始于 c_0的廊道之间存在一个双射。

引理2.22。 [9,引理4。9]设 γ 为一条廊道。则

1. 当且仅当 $\tau(\gamma) = \tilde{\tau}(\gamma)$时， $F(\gamma) = \varnothing$。2. 当且仅当 $F(\gamma) = \varnothing$ 且 $\tau(\gamma)$是约化的时， γ是极小的。

定义2.23。 考虑 Σ中的一条廊道 $\gamma = (c_0,\ p_1,\ c_1,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ c_n)$。通过删去所有满足以下条件的对$(p_i,\ c_i)$，我们构造一条称为 γ的**足迹ft**(γ)的新廊道：字母s_{j_i} 在 $\tilde{\tau}(\gamma)$中带有波浪号。

以下引理由廊道的型的定义直接推出。

引理 2.24。 设 $\gamma = (c_0,\ p_1,\ c_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_n,\ c_n)$ 是一个型为$w = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$的展开组合廊道。那么 $c_n = c_0 \cdot w$。此外，如果 c_0 和 c_n 之间还存在另一条型为 v 的未折叠廊道，那么作为群元素有 $w = v$ 。

2.4.3 廊道的折叠与展开

现在，我们要取一条折叠廊道，并构造一条具有相同 (W, S) 型的未折叠廊道。同样，如果我们有一条未折叠廊道，就要构造一组具有相同 (W, S) 型的折叠廊道。其基本思想是，将廊道的某些部分关于考克斯特复形中的超平面反射。下面我们将对此进行形式化。

图 2 给出了一个例子。如果要在某个面板处折叠或展开，就必须固定该面板之前的廊道部分，然后沿着包含该面板的超平面反射廊道的其余部分。

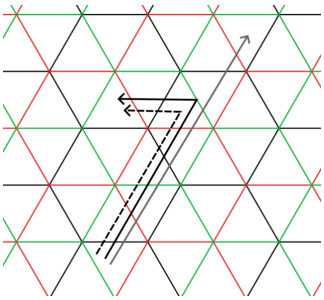


图 2：黑色部分表示一个廊道。灰色直线表示对应的未折叠廊道，虚线表示其足迹。

定义 2.25。考虑一个廊道 $\gamma = (c_0, p_1, c_1, \ldots\ldots, p_n, c_n)$。设 H_i 为包含面板 p_i 的墙，且 r_i 为关于 H_i 的反射。对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，令

$$\gamma^i := (c_0, p_1, \ldots, p_i, r_i c_i, r_i p_{i+1}, r_i c_{i+1}, \ldots, r_i p_n, r_i c_n).$$

如果 γ 在面板 γ 处被折叠，我们称 γ^i 为 γ 在 p_i 处的**展开**。否则，我们称之为**折叠** g.

引理 2.26. [9, 引理 4.16] 对于所有 $i = 1, \ldots, n$, $\tau(\gamma) = \tau(\gamma^i)$。因此，折叠和展开不会改变廊道的 (W, S) 型。此外，$(\gamma^i)^i = \gamma$。

引理 2.27. [9, 引理 4.17] 对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，$(\gamma^i)^j = (\gamma^j)^i$，也就是说，折叠可交换。

基于这一性质，我们可以定义相对于子集 J 的 $\{1, \ldots, n\}$ 的**多重折叠**，即（展）折叠 γ^J。现在，多重折叠不会影响 (W, S) 型。于是，γ^J 的折叠集将是 $F(\gamma)$ 与 J 的对称差。因此，如果 J 和 K 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的子集，则 $(\gamma^J)^K = \gamma^{J \Delta K}$。由此可得以下推论。

推论 2.28. 给定任意廊道 γ，存在一个子集 $J \subset \{1, \ldots, n\}$，使得 γ^J 未折叠，且 γ 与 γ^J 具有相同的 (W, S)-型。

现在我们固定 W 与考克斯特复形中各小室之间的一个双射。我们将与恒等元对应的小室记为 1。

定义 2.29. 设 $w, x \in W$。设 γ 为任意一条始于 1、终于 w 的廊道。若存在 γ 的一个折叠 γ^I，使得 γ^I 的终端巷室为 x，则记作 $w \rightharpoonup x$。

注 2.30. 此定义不依赖于廊道的选取。这是因为平凡定向（允许所有折叠）是辫群不变的。详情请参见 [9, 第 5 章]。

定义 2.31。考虑一个考克斯特系统 (W, S)。设 $w \in W$。w 的**（平凡）影** 是集合

$$\mathrm{Sh}(w) := \{x \in W \mid w \rightharpoonup x\}.$$

注 2.32。 本文将讨论范围限制在平凡影。我们可以通过在考克斯特复形上指定一个定向来构造更复杂的影。这将限制我们对折叠的选择。更多细节请见 [9]。

定义 2.33。 设 $x = s_1 \dots s_n$ 是 $x \in W$ 的一个约化表达式。设 $y \in W$。我们称 $y \leq x$，如果存在一个形如 $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ 的 y 的约化表达式，且满足 $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n$。这种序称为 **布鲁哈特序**。

下述 命题回顾了布鲁哈特序与元素的影之间的联系 t.

命题 2.34。 [9] 对于 x, $y \in W$, $y \leq x$ 当且仅当 $y \in \mathrm{Sh}(x)$。

证明。 假设 $y \leq x$。设 $x = s_1 \dots s_n$ 和 $y = s_{i_1} \dots s_{i_k}$。设 γ 为从 1 出发、型为 $s_1 \dots s_n$ 的廊道。那么 γ 终止于 x。设 $I = \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_k\}$。那么 γ^I 终止于 y。
现在假设 $y \in \mathrm{Sh}(x)$。令 γ 为一个型为 $s_1 \dots s_n$、从 1 开始并在 x 结束的廊道。那么，对于某个 I, γ^I 的足迹在 y 结束。定义 $i_1, \dots, i_k$，使得 $I = \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_k\}$ 且 $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n$。于是 $y = s_{i_1} \dots s_{i_k}$，从而 $y \leq x$。 □

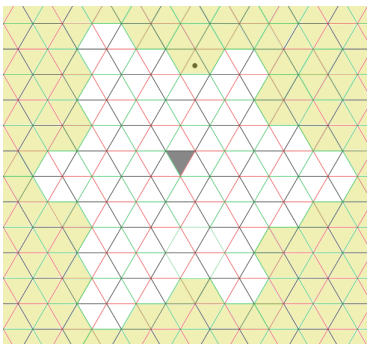
因此，我们有平凡布鲁哈特区间 $[1, x]$ 等于 x 的影。

3 小室的附属集

我们已经看到，平凡布鲁哈特区间可以用廊道的折叠，因而也可以用影来进行漂亮的描述。我们希望对任意布鲁哈特区间 $[y, z]$ 也有类似的描述。这些区间出现在数学的许多不同领域中。例如，它们在研究舒伯特簇 [2], 时发挥着重要作用，并且是 Kazhdan–Lusztig 多项式 [12] 的基础。有关布鲁哈特序应用的详细信息，请参见 [3] 。如果 $x \in [y, z]$，则有 $x \in [1, z]$ 以及 $y \in [1, x]$。第一个陈述，即 $x \in [1, z]$，就是平凡影。但第二个陈述，即 $y \in [1, x]$，要求我们找出所有满足 y 属于 x 的平凡影的 x 。本文将研究这一集合的几何。

定义 3.1. 令 x 为考克斯特复形 Σ 中的一个小室。将 x 的**前影** 定义为

$$\mathrm{PSh}(x) = \{y \in \Sigma \mid x \in \mathrm{Sh}(y)\}.$$



F图 3：黄色阴影标出的巷室属于 $x = s_0 s_1 s_2 s_0 s_1 s_0 s_2$ 的前影。

对于无限 Coxeter 群，这些集合都是无限的。因此，我们转而希望对所有不在前影中的小室进行分类。我们将这个集合称为附属集，并将在下文的定理 1.2 中看到它是一个有限集。

定义 3.2. 将 x 的**附属集** Annex(x) 定义为 x 的前影的补集，即

$$\mathrm{Annex}(x) = \{y \in \Sigma \mid x \notin \mathrm{Sh}(y)\}.$$

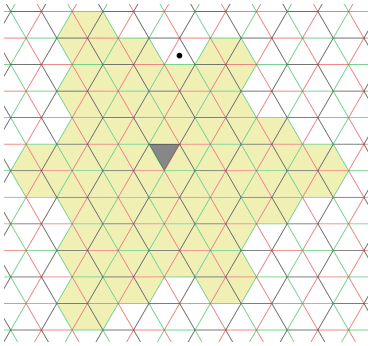


图 4: $x = s_0s_1s_2s_0s_1s_0s_2$ 的附属集是黄色阴影标出的巷室集合。

注 3.3. 注意，$y \in$ Annex(x) 当且仅当 $x \not\leq y$ 作为群元素满足布鲁哈特序。

Rema理 3.4. 我们希望计算布鲁哈特区间 $[x, y]$。使用我们的记号，我们有 e

$$[x, y] = \mathrm{Sh}(y) \cap \mathrm{PSh}(x) = \mathrm{Sh}(y) - \mathrm{Annex}(x).$$

3.1 附属集的基本性质

我们首先证明所有考克斯特群的附属集的一些基本性质。

Le引理 3.5. 若 $x \in$ PSh(w)，则 PSh(x) $\subseteq$ PSh(w)，因此 Annex(w) $\subseteq$ Annex(x) .

证明。设 $y \in$PSh(x)。那么 $x \leq y$。现在，由于 $x \in$ PSh(w)，所以 $w \leq x$；由于布鲁哈特序是偏序，因此 $w \leq y$。故 $y \in$PSh(w)。 □

命题 3.6。 设 W 是一个考克斯特群，且 $r \in W$ 是一个反射。设 $x \in W$ 满足 $\ell(rx) > \ell(x)$。那么 $rx \in$ PSh(x)。

证明。设 H 是由 r固定的墙。考虑从恒等元到 $c_n = rx$的任意一条极小廊道 $\gamma = (1, p_1, c_1, \ldots, p_n, c_n)$。由于 r 使 rx的长度减小，根据命题 2.16，γ 必定恰好经过 H 一次，设发生在面板 p_i处。在 p_i处折叠廊道 γ。这得到廊道

$$(1, p_1, c_1, \ldots, p_i, rc_i, rp_{i+1}, rc_{i+1}, \ldots, rp_n, rc_n)$$

它从恒等元出发，终止于 $r(rx) = x$。因此，$rx \in$ PSh(x)。 □

推论 3.7. 设 W 是一个考克斯特群，$r \in W$ 是一个反射。设 $x, w \in W$ 满足 $x \in$PSh(w) 且 $\ell(rx) > \ell(x)$。那么 $rx \in$ PSh(w)。

证明. 根据命题 3.6，$rx \in$ PSh(x)。现在，由于 $x \in$ PSh(w)，根据引理 3.5，PSh(x) $\subseteq$PSh(w)。因此 $rx \in$PSh(w)。 □

推论 3.8。 设 W 是一个考克斯特群，且 $r \in W$ 是一个反射。设 $x, w \in W$ 满足 $x \in$ Annex(w)，且 $\ell(rx) < \ell(x)$。那么 $rx \in$Annex(w)。

我们陈述以下引理，它将有助于通过归纳论证对附属集进行分类。

引理 3.9. [13, 引理 2.1] 设 (W, S) 是一个考克斯特群，$s \in S$ 并且 $u, w \in W$ 满足 $w \leq u$。若 $\ell(w) < \ell(ws)$ 且 $\ell(us) < \ell(u)$，则 $ws \leq u$ 且 $w \leq us$。

现在我们可以对可能出现在附属集 Annex(w 边界上的面板类型进行分类).

命题 3.10. 设 (W, S) 是一个考克斯特系统。考虑一个元素 $w \in W$。若对某个 $s_i \in S$，有 $\ell(ws_i) > \ell(w)$，则附属集 Annex(w) 的边界不包含任何型为 s_i 的面板。

证明。 假设 $\ell(ws_i) > \ell(w)$，且附属集 Annex(w) 的边界包含一个型为s_i的面板。那么存在 $y \in W$，使得 $y \in$ Annex(w)，但 $ys_i \in$ PSh(w)。因此 $w \leq ys_i$，但 $w \not\leq y$。若 $\ell(y) > \ell(ys_i)$，根据考克斯特群的交换性质，$ys_i \leq y$，因此 $w \leq y$，这就构成了矛盾。因此 $\ell(y) < \ell(ys_i)$，从而 $\ell((ys_i)s_i) < \ell(ys_i)$。根据假设，$\ell(w) < \ell(ws_i)$，故应用引理 3.9 可得 $w \leq ys_is_i = y$。这再次与 $y \in$ Annex(w) 矛盾。因此，Annex(w) 不包含任何型为 s_i 的面板。 □

推论 3.11。 若 $y \in$ 附属集(w) 且 $\ell(ws_i) > \ell(w)$，则 $ys_i \in$ 附属集(w)。

证明。 若 $ys_i \notin$ 附属集(w)，则由于 $y \in$附属集(w)，附属集(w) 的边界包含一个型为 s_i 的面板。但 $\ell(ws_i) > \ell(w)$，这与命题 3.10 矛盾。 □

因此，我们现在已经对附属集边界上可能出现的面板进行了分类。接下来，我们引入右下降集的概念，并证明附属集是有限的。

定义 3.12。 令 $w \in W$。定义集合

$$D_R(w) = \{i \in I \mid \ell(ws_i) < \ell(w)\}$$

为 w的**右下降集**。

命题 3.13。 令 $w \in W - \{1\}$。设 $k \notin D_R$(w)。令 $W_{S-\{k\}} = \langle s_i \mid i \in I - \{k\}\rangle$。则

$$\text{Annex}(ws_k) \subseteq \text{Annex}(w) \cdot W_{I-\{k\}} = \{xy \mid x \in \text{Annex}(w), y \in W_{I-\{k\}}\}.$$

证明。 考虑 $x \in$附属集(ws_k)。现在可以假设 $x \notin$ 附属集(w)，否则取 $1 \in W_{I-\{k\}}$，便可立即得出 $x \in$ 附属集(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$。因此，x 必须包含一个等于 w的子字，但不能包含一个等于 ws_k的子字。

设 $x = yy'$，其中 y 和 y' 是由生成元构成的极小字，而 y 在满足性质 $w \leq y$的条件下是极小的。由于 $w \neq e$，y 必非空；又因为$\ell(ws_k) > \ell(w)$，它不能以 s_k 结尾。因此，对于某个满足 $\ell(z) < \ell(y)$ 的 $i \in I - \{k\}$，有 $y = zs_i$。由于 y 在满足性质 $w \leq y$的条件下是极小的，因此有 $w \not\leq z$。所以 $z \in$ 附属集(w)。
现在考虑字 y'。如果 y' 包含了 s_k，那么显然 x 会包含一个等于 ws_k的子字，这就产生了矛盾。因此，$y' \in W_{I-\{k\}}$。于是，$x = zs_iy'$，其中$z \in$ 附属集(w)且 $s_iy' \in W_{I-\{k\}}$。因此，$x \in$ 附属集(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$。 □

我们现在能够证明定理 1.2：如果有一个仿射 Coxeter 群，那么任何元素的附属集都是有限的。

证明。（定理 1.2）对 w的长度使用归纳法。若 $\ell(w) = 0$，则 Annex(w) =Annex(1) = $\varnothing$。若 $\ell(w) = 1$，则对某个 $k \in I$，有 $w = s_k$。因此，若一个字包含 s_k，它必定属于前影，因而

$$\mathrm{Annex}(w) \subseteq W_{I-\{k\}},$$

根据命题 2.4，由于 W 是仿射的，它是一个有限集。

现在假设对于任意满足 $\ell(w) < t$且 $t > 0$的 $w \in W$，该断言成立。考虑一个满足 $\ell(z) = t$的元素$z \in W$。于是 $z \neq e$，因此选取 $k \in D_R(z)$。令 $w = zs_k$，于是 $\ell(w) = t - 1 < t$。现在，

$$\mathrm{Annex}(z) = \mathrm{Annex}(ws_k) \subseteq \mathrm{Annex}(w) \cdot W_{I-\{k\}}.$$

但是 W由于 W 是仿射的，$I-\{k\}$ 是有限的；又由归纳法，附属集(w)是有限的，因此附属集(z)是有限的 . □

最后，我们证明，在 $D_R(ws_k) = \{k\}$这一特定情形下，这个结论不仅是一个包含关系，而且是一个等式。

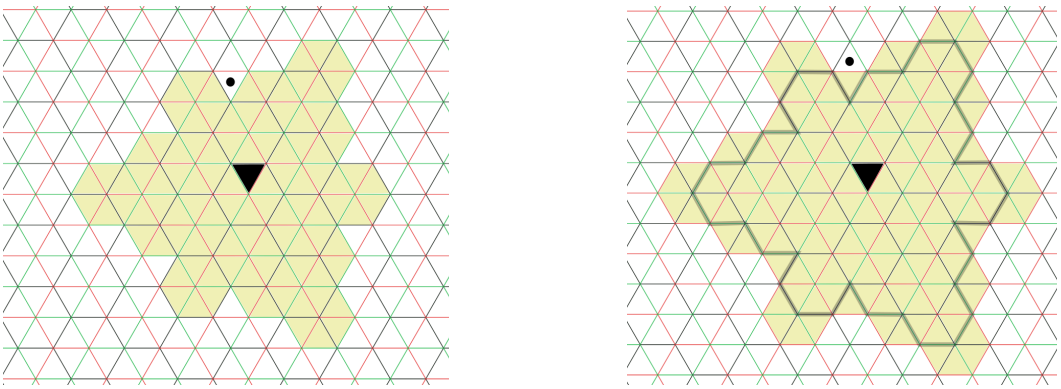
命题 3.14。取 $w \in W - \{e\}$。令 $k \notin D_R(w)$。若 $D_R(ws_k) = \{k\}$，则附属集(ws_k) =附属集(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$。

证明。根据命题 3.13，Annex(ws_k) $\subseteq$ Annex(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$。因此，令 $x \in$ Annex(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$。设 $x = yy'$，其中 $y \in$Annex(w) 且 $y' \in W_{I-\{k\}}$。首先注意，若 $x \in$Annex(w)，且因此$\ell(y') = 0$，则 $x \in$ Annex(ws_k)，因为 $\ell(ws_k) > \ell(w)$。现在我们对 y' 的长度进行归纳。于是，假设若 $\ell(y') = n - 1$，则 $x = yy' \in$ Annex(ws_k)。

现在假设 $\ell(y') = n > 0$。那么取 $i \in I - \{k\}$，使得 $\ell(y's_i) < \ell(y')$。根据假设，$yy's_i \in$ Annex(ws_k)。于是，由于 $J_{ws_k} = I - \{k\}$，$\ell(ws_ks_i) > \ell(ws_k)$，因此根据推论 3.11，$yy's_is_i \in$ Annex(ws_k)。因此，$x \in$Annex(ws_k)。

S因此，根据归纳法，对于任意 $x \in$ Annex(w) $\cdot W_{I-\{k\}}$，必有 $x \in$ Annex(ws_k) . □

图5展示了这一命题的归纳应用。



(a) 小室 $s_0s_2s_1s_0s_2s_0$的附属集。 (b) 小室 $s_0s_2s_1s_0s_2s_0s_1$的附属集。

图5：(a)中是小室 $w = s_0s_2s_1s_0s_2s_0$的附属集，其中有 $D_R(w) = \{1\}$。(b)中是小室 ws_1的附属集。我们可以通过扩展集合，将形如 $yW_{\{0,2\}}$的每个元素都纳入其中，从图(a)得到图(b)，其中 y 是(a)中的一个阴影阿尔科夫。这样会包含(a)中的所有小室，它们在(b)中显示为高亮区域。

最后，如果我们的小室位于 Coxeter 复形的基本室中，我们将证明附属集具有一种对称性。回顾一下，小室 x 位于关于 W_0 的基本室中，当且仅当对于所有 $i \neq 0$，$\ell(s_ix) > \ell(x)$。

命题 3.15。 如果 W 是一个仿射 Coxeter 复形，且小室 x 位于基本室中，那么 Annex(x) 在 $W_0 = W_{I-\{0\}}$ 的左作用下保持不变。

证明。 该陈述等价于：若 $w \in W_0$ 且 $z \in$Annex(x)，则 $wz \in$Annex(x)。注意，由于 x 位于基本室中， x 的任意约化词都以s_0开头。

我们先证明，若 $z \in W$ 位于基本室中且 $w \in W_0$，则 $z \in$Annex(x) 当且仅当 $wz \in$ Annex(x)。先假设 $z \in$ Annex(x)，且 $wz \notin$ Annex(x)。于是 $x \leq wz$。现在 wz 是约化的，因为 z 在 $W_0 \cdot z$中是极小的。但对于 $i \neq 0$，不存在一个以 s_i 开头且等于 x 的约化词。由于任何等于 w 的约化词都只包含 s_i （对于$i \neq 0$），我们必有 $x \leq z$。这与 $z \in$Annex(x) 这一事实矛盾。现在假设 $wz \in$ Annex(x)。显然 $z \leq wz$，因为 z 在 $W_0 \cdot z$中是极小的。因此，若 $z \notin$ Annex(x)，则$x \leq z \leq wz$，这与 $wz \in$Annex(x)这一事实矛盾。
现在，对于任意 $z \in W$, $w \in W_0$，令 $z' = w'z$ 为 $W_0 \cdot z$ 中位于基本室内的元素，且满足 $w' \in W_0$。于是我们已经证明， $z = w^{-1}z' \in$ Annex(x) 当且仅当 $z' \in$ Annex(x)，因为 $w^{-1} \in W_0$。进而， $z' \in$ Annex(x) 当且仅当 $wz = (ww')z' \in$ Annex(x)，因为$ww' \in W_0$。 □

4 附属集的边界

我们的目标是证明定理 1.4，该定理有助于定义附属集的边界。为证明这一结论，我们首先需要对元素 $r_t \cdots r_1 w s_i$ 的下降集进行分类。随后，我们证明：如果有两个相邻反射 r_1 和 r_2，每次都使 x 的长度增加一，那么 $\ell(r_1 r_2 r_1 x) = \ell(x) \pm 1$。这两个结论共同构成一个归纳论证。

4.1 下降集

本节将给出一系列命题，说明元素 $r_t \cdots r_1 w s_i$ 的下降集包含哪些元素。在以下命题中，我们将证明，若定理的条件成立，则反射 r_n 会增加 w 和 $r_{n-1} \cdots r_1 w$ 的长度。由此可得， $\ell(r_n \cdots r_1 w s_i) < \ell(r_n \cdots r_1 w)$。关于半空间 H^1 和 H^∞ 的定义，请参见第 2.2 章。

命题 4.1. 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $x \in W$。设 $r_1, \ldots, r_n \in W$ 是一列相邻平行反射，满足

$$\ell(r_t \cdots r_1 x) > \ell(r_{t-1} \cdots r_1 x),$$

对所有 $1 \leq t \leq n$ 均成立。则对所有 $3 \leq t \leq n$， $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \subseteq H^{\mathbf{1}}_{r_t}$ 均成立。

证明。 假设对某个 $3 \leq t \leq n$ 有 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \not\subseteq H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。那么不可能有 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \not\subseteq H^{\infty}_{r_t}$，否则 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_t} = \varnothing$，但 $1 \in H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。同样也不可能有 $H^{\infty}_{r_{t-1}} \subseteq H^{\infty}_{r_t}$，因为这样一来 $H^{\infty}_{r_{t-1}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_t} = \varnothing$，但 $r_{t-1} \cdots r_1 x \in H^{\infty}_{r_{t-1}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。因此， $H^{\infty}_{r_{t-1}} \subseteq H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。
现在，由于 $H_{r_{t-1}}$ 和 H_{r_t} 相邻且平行，我们必有 $H^{\infty}_{r_{t-2}} \subseteq H^{\infty}_{r_{t-1}}$或 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-2}} \subseteq H^{\infty}_{r_{t-1}}$。若 $H^{\infty}_{r_{t-2}} \subseteq H^{\infty}_{r_{t-1}}$，则 $H^{\infty}_{r_{t-2}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} = \varnothing$，因此这不可能发生，因为$r_{t-2} \cdots r_1 x \in H^{\infty}_{r_{t-2}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}}$。若 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-2}} \subseteq H^{\infty}_{r_{t-1}}$，则 $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-2}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} = \varnothing$，但这不可能发生，因为$1 \in H^{\mathbf{1}}_{r_{t-2}} \cap H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}}$。因此，对于 $3 \leq t \leq n$， $H^{\mathbf{1}}_{r_{t-1}} \subseteq H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。 □

命题 4.2。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $x \in W$。考虑 W中的三个相邻平行反射 r_1、r_2和 r_3。那么 $r_3r_2r_1$和 r_2的作用相同，因此 $r_3r_2r_1 = r_2$。

证明。 考虑通过根系构造仿射 Coxeter 复形。于是，对于某个正根 α，由 r_1、r_2 和 r_3 固定的超平面分别为 $H_{\alpha,\, m}$、 $H_{\alpha,\, m+1}$ 和 $H_{\alpha,\, m+2}$，其中 $m \in \mathbb{Z}$。然后，我们可以明确计算任意向量 x 在 $r_3r_2r_1$的作用下被映到何处。令 $(\gamma,\ x) = k$。

$$\begin{aligned}
r_3r_2r_1(x) &= r_3r_2(x - (k-m)\gamma^\vee) \\
&= r_3(x - (k-m)\gamma^\vee - ((\gamma, x - (k-m)\gamma^\vee) - (m+1))\gamma^\vee) \\
&= r_3(x - (k-m)\gamma^\vee - k\gamma^\vee + 2(k-m)\gamma^\vee + (m+1)\gamma^\vee \\
&= r_3(x + \gamma^\vee) \\
&= x + \gamma^\vee - ((\gamma, x + \gamma^\vee) - (m+2))\gamma^\vee \\
&= x + \gamma^\vee - k\gamma^\vee - 2\gamma^\vee + m\gamma^\vee + 2\gamma^\vee \\
&= x - (k - (m+1))\gamma^\vee \\
&= r_2(x).
\end{aligned}$$

因此， $r_3r_2r_1$ 和 r_2 是相同的作用。因此， $r_3r_2r_1 = r_2$ 作为 W 忠实地作用在该复形上。 □

命题 4.3。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $x \in W$。设 $r_1, \ldots, r_n \in W$ 是一列相邻平行反射，使得

$$\ell(r_t \cdots r_1 x) > \ell(r_{t-1} \cdots r_1 x),$$

对所有 $1 \le t \le n$，其中 $n \ge 3$。那么，对所有 $1 \le t \le n$， $x \in H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。

证明。 根据假设， $\ell(r_1x) > \ell(x)$，因此 $x \in H^{\mathbf{1}}_{r_1}$。现在，由命题 4.1， $H^{\mathbf{1}}_{r_2} \subseteq H^{\mathbf{1}}_{r_3}$。因此，$H^{\infty}_{r_3} \subseteq H^{\infty}_{r_2}$。现在， $\ell(r_3r_2r_1x) > \ell(r_2r_1x)$，所以 $r_3r_2r_1x \in H^{\infty}_{r_3}$。接着，由命题 4.2， $r_3r_2r_1 = r_2$，并且我们有 $r_2x \in H^{\infty}_{r_3}$。因此，$r_2x \in H^{\infty}_{r_2}$，所以 $x \in H^{\mathbf{1}}_{r_2}$。现在，再次由命题 4.1，对所有 $3 \le t \le n$， $H^{\mathbf{1}}_{r_2} \subset H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。因此，对所有 $1 \le t \le n$， $x \in H^{\mathbf{1}}_{r_t}$。 □

命题 4.4。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $w \in W$ 和 $i \in D_R(w)$。令$r_1, \ldots, r_n \in W$为一列相邻平行反射，使得

$$\ell(r_t \cdots r_1 w s_i) > \ell(r_{t-1} \cdots r_1 w s_i),$$

对所有 $1 \le t \le n$，以及满足 $n \ge 3$ 的 $r_1ws_i \ne w$，均有此结论。于是 $w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。

证明。 由命题 4.3， $ws_i \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。现在，若 $w \in H^{\infty}_{r_n}$，根据命题 4.1 的 $H^{\infty}_{r_n} \subseteq H^{\infty}_{r_1}$，我们有 $w \in H^{\infty}_{r_1}$。但 $\ell(r_1ws_i) > \ell(ws_i)$，因此 $ws_i \in H^{\mathbf{1}}_{r_1}$。所以， w 中的 s_i 面板位于超平面 H_{r_1} 上。因此， $r_1ws_i = w$，这就产生了矛盾。于是 $w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。 □

命题 4.5。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $w \in W$ 和 $i \in D_R(w)$。令$r_1, \ldots, r_n \in W$为一列相邻平行反射，使得

$$\ell(r_t \cdots r_1 w s_i) > \ell(r_{t-1} \cdots r_1 w s_i),$$

并且 $r_t \cdots r_1 ws_i \ne r_{t-1} \cdots r_1 w$，对于所有 $1 \le t \le n$。那么 $r_{n-1} \cdots r_1 w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。

证明。 如果 $r_{n-1}\cdots r_1 w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$，那么 $r_{n-1}\cdots r_1 w$和 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i$位于 H_{r_n}的两侧。因此，$r_{n-1}\cdots r_1 w$和 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i$的 s_i面板位于 H_{r_n}中。因此， r_n的作用将$r_{n-1}\cdots r_1 w s_i$映射到 $r_{n-1}\cdots r_1 w$。但我们假设 $r_t\cdots r_1 w s_i \neq r_{t-1}\cdots r_1 w$。所以 $r_{n-1}\cdots r_1 w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。 □

推论 4.6。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $w \in W$ 和 $i \in D_R(w)$。设$r_1,\ldots,r_n \in W$是相邻平行反射序列，使得

$$\ell(r_t\cdots r_1 w s_i) = \ell(r_{t-1}\cdots r_1 w s_i) + 1,$$

并且对所有 $1 \le t \le n$， $r_t\cdots r_1 w s_i \neq r_{t-1}\cdots r_1 w$。那么 $i \notin D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$。

证明。 对 n 使用归纳法。根据假设， $i \notin D_R(w s_i)$。
现在假设 $i \notin D_R(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i)$。根据命题 4.5， $r_{n-1}\cdots r_1 w \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。因此，

$$\ell(r_n\cdots r_1 w) > \ell(r_{n-1}\cdots r_1 w) = \ell(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i) + 1 = \ell(r_n\cdots r_1 w s_i).$$

因此， $i \notin D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$。 □

接下来的结果证明 $\bigcap_{t<n} D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$ 非空。为此，我们先证明：若 $j \in D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$，则对所有 $1 \le t \le n$， $j \in D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$，除非对于某个 l， $r_l\cdots r_1 w s_i = r_{l-1}\cdots r_1 w s_i s_j$。
然后我们证明，在超平面不构成单位 alcove 边界的一些条件下，若 $j \in D_R(x)$，则 $j \in D_R(r_2 r_1 x)$。这表明，在这些条件下，若 $j \in D_R(x) \cap D_R(r_1 x)$，则 $j \in \bigcap_{t\le n} D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$。
接着我们证明，对于 $t < n$，这一条件必定成立，因此 $\bigcap_{t<n} D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$ 非空。

命题 4.7。 设 W 是一个仿射 Coxeter 复形。设 $w \in W$ 和 $i \in D_R(w)$。设$r_1,\ldots,r_n \in W$是一个相邻平行反射序列，使得

$$\ell(r_t\cdots r_1 w s_i) = \ell(r_{t-1}\cdots r_1 w s_i) + 1,$$

对所有 $1 \le t \le n$均成立。设 $j \in D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$。若对所有 $1 \le t \le n$均有 $r_t\cdots r_1 w s_i \neq r_{t-1}\cdots r_1 w s_i s_j$，则对所有 $1 \le t \le n$均有 $j \in D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$。

证明。 我们将证明 $j \in D_R(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i)$。这样我们便可立即得出，对所有 $1 \le t \le n$均有 $j \in D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$。
根据假设， $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。现在还要注意，若 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j \in H^{\infty}_{r_n}$，则 r_n的作用会将 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i$映到$r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j$。但我们假设这不成立，因此$r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j \in H^{\mathbf{1}}_{r_n}$。现在

$$\ell(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i) = \ell(r_n\cdots r_1 w s_i) - 1 = \ell(r_n\cdots r_1 w s_i s_j) > \ell(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j).$$

因此 $j \in D_R(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i)$。 □

引理 4.8。 考虑欧几里得空间中的两个平行超平面 H_1, H_2，设 r_1 和 r_2是它们对应的反射。设 H_3 是第三个超平面。那么 $r_2 r_1 H_3$ 与 H_3平行。

证明。 设 $H_1 = H_{\gamma,\ n_1}$, $H_2 = H_{\gamma,\ n_2}$ 和 $H_3 = H_{\alpha,\ m}$，其中 γ 和 α是向量。设 $v \in H_3$ 是位于 H_3 上的任意向量。我们来计算 $r_2 r_1 v$。

$$\begin{aligned} r_2 r_1 v &= r_2(v - ((v,\gamma) - n_1)\gamma^\vee) \\ &= v - ((v,\gamma) - n_1)\gamma^\vee - (v - ((v,\gamma) - n_1)\gamma^\vee, \gamma) - n_2)\gamma^\vee \\ &= v + (n_2 - n_1)\gamma^\vee. \end{aligned}$$

Now

$$(r_2r_1v,\alpha)=(v+(n_2-n_1)\gamma^\vee,\alpha)=m+(n_2-n_1)(\gamma^\vee,\alpha).$$

现在 $k=(\gamma^\vee,\ \alpha)\in\mathbb{Z}$，这是由根系的公理得出的。因此 $r_2r_1v\in H_{\alpha,\ m+(n_2-n_1)k}$，对所有 $v\in H_3$均成立。因此 $r_2r_1H_3=H_{\alpha,\ m+(n_2-n_1)k}$，它与 H_3平行。 □

命题 4.9。设 $x\in W$。设 H_1，H_2为平行超平面，且设 r_1和 r_2为它们所对应的反射。假设 $j\in D_R(x)$。设 $H_3=H_{xs_jx^{-1}}$和 $H_4=H_{r_2r_1xs_jx^{-1}r_1r_2}$，并假设单位 alcove 不位于 H_3 和 H_4之间。则 $j\in D_R(r_2r_1x)$。

证明。根据引理 4.8，H_3和 H_4平行。于是 $H_3^{\mathbf{1}}\not\subseteq H_4^{\infty}$，因为这样 $H_3^{\mathbf{1}}\cap H_4^{\mathbf{1}}=\varnothing$，这与矛盾相矛盾。此外 $H_3^{\infty}\not\subseteq H_4^{\mathbf{1}}$，因为这样单位 alcove 将位于 H_3和 H_4之间。因此 $H_3^{\infty}\subseteq H_4^{\infty}$或 $H_3^{\mathbf{1}}\subseteq H_4^{\mathbf{1}}$。

现在，r_2r_1 是两个平行反射的复合，因此它是一个平移。它将 H_3 映射到 H_4。由于 $H_3^{\infty}\subseteq H_4^{\infty}$或 $H_3^{\mathbf{1}}\subseteq H_4^{\mathbf{1}}$，

$$r_2r_1\cdot H_3^{\mathbf{1}}=H_4^{\mathbf{1}}\quad\text{and}\quad r_2r_1\cdot H_3^{\infty}=H_4^{\infty}.$$

于是，由于 $x\in H_3^{\infty}$, $r_2r_1x\in H_4^{\infty}$。因此，$r_2r_1xs_j\in H_4^{\mathbf{1}}$，所以 $j\in D_R(r_2r_1x)$。 □

推论 4.10。设 W 是一个仿射考克斯特复形。设 $x\in W$。设 $r_1,\dots,r_n\in W$ 是一个相邻平行反射序列，使得

$$\ell(r_t\cdots r_1x)=\ell(r_{t-1}\cdots r_1x)+1,$$

对所有 $1\le t\le n$ 均成立。假设存在一个 $j\in D_R(x)\cap D_R(r_1x)$。令 H_t 为分隔 $r_t\cdots r_1x$ 和 $r_t\cdots r_1xs_j$ 的超平面。假设没有两个 H_t 以原点为界。则对所有 $1\le t\le n$，$j\in D_R(r_t\cdots r_1x)$。

命题 4.11。设 W 是一个秩 2 仿射考克斯特复形。设 $w\in W$ 和 $i\in D_R(w)$。设 $r_1,\dots,r_n\in W$ 是一个相邻平行反射序列，使得

$$\ell(r_t\cdots r_1ws_i)=\ell(r_{t-1}\cdots r_1ws_i)+1,$$

以及 $r_t\cdots r_1ws_i\neq r_{t-1}\cdots r_1w$，对所有 $1\le t\le n$ 都成立。假设在 w 与 H_{r_1}之间没有平行于 H_{r_1}的超平面。要么 $\bigcap_t D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$ 非空，要么存在 $j\in D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$ 使得 $r_n\cdots r_1ws_i=r_{n-1}\cdots r_1ws_is_j$。

证明。假设 $\bigcap_t D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$ 为空，并且我们找不到满足$r_n\cdots r_1ws_i=r_{n-1}\cdots r_1ws_is_j$的 $j\in D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$。令 $k\in D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$。由推论 4.6，$i\notin D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$，因此 $s_k\neq s_i$。现在，若在某处 $r_k\cdots r_1ws_i=r_{k-1}\cdots r_1ws_is_k$，则所有$r_t\cdots r_1ws_i$中型为 s_k的面板都必须平行于反射超平面。因此，对于 $r_n\cdots r_1ws_i$，其 s_k 面板要么位于 H_{r_n}上（这不可能发生，因为那样一来 $r_n\cdots r_1ws_i=r_{n-1}\cdots r_1ws_is_k$），要么位于下一条平行直线上，但那样 $j\notin D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$，这也不可能发生。因此，对于任意 t，$r_k\cdots r_1ws_i\neq r_{k-1}\cdots r_1ws_is_k$，由命题 4.7 可知，对所有 t，$j\in D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$。 □

推论 4.12。假设命题 4.11 的条件在 w、s_i 和 r_1、.....、r_n 上成立。那么交集 $\bigcap_{t<n}D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$ 非空。

证明。如果它为空，那么 $\bigcap_t D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$ 为空。根据命题 4.11，存在一个 $j\in D_R(r_n\cdots r_1ws_i)$，使得 $r_n\cdots r_1ws_i=r_{n-1}\cdots r_1ws_is_j$。但是，同样根据命题 4.11，存在一个 $k\in D_R(r_{n-1}\cdots r_1ws_i)$，使得 $r_{n-1}\cdots r_1ws_i=r_{n-2}\cdots r_1ws_is_k$。现在，小室 $r_{n-1}\cdots r_1ws_i$ 有两个面板，即 s_j 和 s_k，它们位于相邻的平行超平面上。但这是不可能的，因为 $r_{n-1}\cdots r_1ws_i$ 是一个单形。因此，$\bigcap_{t<n}D_R(r_t\cdots r_1ws_i)$ 非空。 □

现在我们可以证明：要么 $\bigcap_{t\le n} D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$ 非空，要么 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w) 蕴含 $r_n\cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。这意味着，在证明主定理时，我们可以假设所有 $r_t\cdots r_1 w s_i$ 共享一个公共下降面板。

引理 4.13. 假设命题 4.11 的条件对 w、 s_i 和 r_1、.....、r_n 成立。假设 H_{r_0} 和 H_{r_1} 以恒等元为界。若存在 $j \in D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$ 使得 $r_n\cdots r_1 w s_i = r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j$，则 $j \notin D_R(w)$。

证明。 注意， ws_i 的 s_j 型面板必定位于 H_{r_0} 超平面或 H_{r_1} 超平面上。因此，由于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 以恒等元为界， $j \notin D_R(ws_i)$。于是 i， $j \notin D_R(ws_i)$，故 ws_i 在陪集 $ws_i W_{\{s_i,s_j\}}$ 中是极小的。因此， w 在此陪集中不是极大的；又由于 $i \in D_R(w)$，我们必有 $j \notin D_R(w)$。 □

推论 4.14. 假设命题 4.11 的条件对 w、 s_i 和 r_1、.....、r_n 成立。假设 H_{r_0} 和 H_{r_1} 以恒等元为界。若 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)，且存在 $j \in D_R(r_n\cdots r_1 w s_i)$ 使得 $r_n\cdots r_1 w s_i = r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j$，则 $r_n\cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。

推论 4.15。 假设命题 4.11 的条件适用于 w、 s_i 和 r_1、.....、r_n。假设 H_{r_0} 和 H_{r_1} 界定恒等元。如果 $r_{n-1}\cdots r_1 w s_i \in$ Annex(w)，且 $\bigcap_{t\le n} D_R(r_t\cdots r_1 w s_i)$ 为空，那么 $r_n\cdots r_1 w s_i \in$ Annex(w)。

证明。 命题 4.11 证明了

$$r_n\cdots r_1 w s_i = r_{n-1}\cdots r_1 w s_i s_j$$

对某个 $k \in D_R(r_{n-1}\cdots r_1 w s_i)$ 成立。结论由推论 4.14 得出。 □

4.2 相邻平行反射

现在我们要证明，对于三个相邻的平行反射 H_{r_0}、 H_{r_1} 和 H_{r_2}，若满足

$$\ell(r_2 r_1 x) = \ell(r_1 x) + 1 = \ell(x) + 2,$$

且 H_{r_0} 和 H_{r_1} 界定 x，那么 $\ell(r_0 x) = \ell(x) \pm 1$。我们将此作为定理 1.3 来证明。该定理将使我们能够进行归纳论证，从而总可以假设恒等元位于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 之间。我们首先证明，如果反射 r_0 增加了 x 的长度，那么它只能使长度增加 1。

引理 4.16. 设有三个相邻平行反射 H_{r_0}, H_{r_1} andH_{r_2}，满足

$$\ell(r_2 r_1 x) = \ell(r_1 x) + 1 = \ell(x) + 2,$$

并且 $\ell(r_0 x) > \ell(x)$。设 x 介于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 之间。那么 $\ell(r_0 x) = \ell(x) + 1$。

证明。 由于 $\ell(r_0 x) > \ell(x)$ 且 $\ell(r_1 x) > \ell(x)$，单位 alcove 必定位于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 之间。因此 $r_0 x \in H^1_{r_1}$。现在 $r_2 r_1 = r_1 r_0$，所以

$$\ell(r_0 x) < \ell(r_1 r_0 x) = \ell(r_2 r_1 x) = \ell(x) + 2,$$

所以 $\ell(x) < \ell(r_0 x) < \ell(x) + 2$。因此， $\ell(r_0 x) = \ell(x) + 1$。 □

因此，当 $\ell(r_0 x) > \ell(x)$ 时，该陈述成立。现在我们假设命题中的假设成立，且 $\ell(r_0 x) < \ell(x)$。接下来我们证明，如果 $r_1 x$ 与 H_{r_2} 共享一个面板，那么该命题成立。

引理 **4.17.** 假设有三个相邻平行反射 H_{r_0}、 H_{r_1} 和 H_{r_2}，使得 t hat

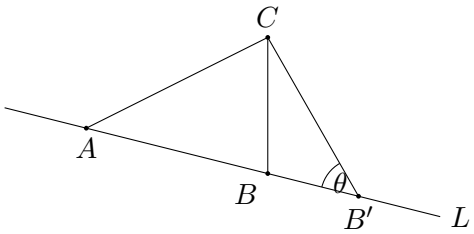
$$\ell(r_2r_1x) = \ell(r_1x) + 1 = \ell(x) + 2,$$

以及 $\ell(r_0x) < \ell(x)$。假设 x 位于 H_{r_0} 与 H_{r_1}之间。假设存在一个生成元s_i，使得 $r_1xs_i = r_2r_1x$。那么 $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。

证明。我们知道 $r_2r_1 = r_1r_0$，因此 $r_1xs_i = r_1r_0x$。所以， $xs_i = r_0x$，从而 $\ell(r_0x) = \ell(x) \pm 1$。因此，由于 $\ell(r_0x) < \ell(x)$， $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。 □

接下来我们证明一些几何结论，这将帮助我们得出 r_0x、 x、 r_1x 和 r_2r_1x具有某些共同的下降类型。这将有助于我们构建归纳论证。

引理4.18。设 ΔABC 是一个三角形，且每个角都不大于 $\pi/2$。设 L是经过 A 和 B的直线，另设 B' 是位于 L上的另一点，它与 B位于 A 的同一侧，并且离 A更远。那么，三角形 $\Delta AB'C$ 中 B' 处的角仍不大于 $\pi/2$。



证明。设 $\gamma = \vec{AB}$，并设 $\delta = \vec{AC}$。现在 $(\gamma, \delta) \geq 0$，因为 A处的角至多为 $\pi/2$。同理，$(\gamma, \gamma - \delta) \geq 0$，且 $(\delta, \delta - \gamma) \geq 0$。现在，对于 $k > 1$，有 $A\vec{B'} = k\gamma$。现在，$(\gamma, \gamma - \delta) \geq 0$ 意味着 $(\gamma, \gamma) \geq (\gamma, \delta)$。因此，对于 $k > 1$， $k^2(\gamma, \gamma) \geq k(\gamma, \delta)$。现在， B'与 A之间的向量是$-k\gamma$，而 B' 与 C 之间的向量是 $\delta - k\gamma$。现在

$$(-k\gamma, \delta - k\gamma) = (k\gamma, k\gamma - \delta) = k^2(\gamma, \gamma) - k(\gamma, \delta) \geq 0.$$

因此， B' 处的角至多为 $\pi/2$。 □

命题4.19。设小室 x 位于 H_{r_0} 与 H_{r_1} 之间，其顶点为 A, B, C。假设C 属于原点的轨道，且位于 H_{r_1} 上。设 $H = H_{xs_0x^{-1}}$。包含 x 、由 H_{r_0} 和 H 确定的扇形区域的扇形角至多为 $\pi/2$。

证明。注意到 A 和 B 位于 H_{r_0} 与 H_{r_1} 之间。令 L 为经过 A 和 B 的直线。因此，现在 A 和 B 在 L 上位于 H_{r_1} 的同一侧。不失一般性，假设沿着 L， B 比 A 更靠近 H_{r_1}。现在， x 的任一内角都不大于 $\pi/2$。因此，根据引理4.18，若将 B 沿着 L 移至 H_{r_1}，此点处的角仍不大于 $\pi/2$。这恰好是由 H_{r_0} 和 H 所定义且包含 x 的扇形角。 □

推论 4.20。假设 x 被 H_{r_0} 和 H_{r_1} 夹住，且 x 中属于原点的轨道的顶点位于 H_{r_1} 上。令 $H_{r_1} = H_{\alpha,\ n}$，$H_{r_2} = H_{\alpha,\ n+1}$ 满足 $n \geq 0$，并令 $H = H_{xs_0x^{-1}} = H_{\beta,\ m}$ 满足 $m \geq 0$。那么 $(\alpha, \beta) \geq 0$。

接下来我们将通过几个命题证明：如果没有单形 x 位于 H_{r_0} 和$0 \in D_R(x)$上，那么 s_0 也属于 r_0x、 r_1x 和 r_2r_1x的右下降集。

引理 4.21。设 r_0, r_1 和 r_2 是平行的相邻反射。假设 x 位于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 之间。假设 $H = H_{xs_ix^{-1}}$，且由 H_{r_0} 和 H 界定并包含 x 的扇形区域的扇形角至多为 $\pi/2$。那么 $i \in D_R(r_2r_1x)$。

证明。取$H_{r_1} = H_{\alpha,n}$, $H_{r_2} = H_{\alpha,n+1}$，使得 $n \geq 0$，并取 $H = H_{xs_0x^{-1}} = H_{\beta,m}$，使得 $m \geq 0$。现在，对于任意顶点 v， $r_2r_1(v) = v + \alpha^\vee$。现在令 v 为 H 上的任意顶点。现在，$(\beta, \alpha^\vee) \geq 0$。那么 $r_2r_1(v)$ 满足

$$(\beta, r_2r_1(v)) = (\beta, v + \alpha^\vee) = m + (\beta, \alpha^\vee),$$

因此 $r_2r_1H = H_{\beta,\ m+(\beta,\alpha^\vee)}$, 其中 $m + (\beta,\ \alpha^\vee) > m$.

现在令 v' 为 x 中原点轨道上的顶点。现在 v' 不在 H上，且 $0 \in D_R(x)$，因此 H 必须分隔原点与 v'。由于 $m > 0$，这意味着 $(\beta,\ v') > m$。于是，

$$(\beta, r_2r_1(v')) = (\beta, v' + \alpha^\vee) > m + (\beta, \alpha^\vee).$$

所以 $r_2r_1(v') \in r_2r_1H^\infty$。因此， $i \in D_R(r_2r_1x)$。 □

推论 4.22。设 r_0, r_1 和 r_2 为平行且相邻的反射。假设 x 被限制在 H_{r_0} 与 H_{r_1}之间，且 x 中原点轨道上的顶点位于 H_{r_1}上。那么，若$0 \in D_R(x)$，则 $0 \in D_R(r_2r_1x)$。

引理 4.23。设 $H_r = H_{\alpha,\ n}$ 和 $H_{\beta,\ m}$ 为两个非平行超平面，使得 $n \geq 0$ 和$m \geq 0$。假设 $(\alpha,\ \beta) < 0$。若 v 满足 $(\alpha,\ v) > n$ 和 $(\beta,\ v) > m$，则要么原点位于三个超平面 H_r、 $H_{\beta,\ m}$ 和 $rH_{\beta,\ m}$上，要么 rv 被 $rH_{\beta,\ m}$与原点分隔开。

证明。首先注意，对某个 t，有 $rH_{\beta,\ m} - H_{\beta-(\alpha^\vee,\beta)\alpha,\ t}$。现在考虑同时位于 H_r 和 $rH_{\beta,\ m}$ 上的顶点 v'。现在，$(\alpha,\ v) = n$，且 $(\beta,\ v) = m$。于是，

$$t = (\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha, v') = m - (\alpha^\vee, \beta)n.$$

注意，$(\alpha^\vee,\ \beta) < 0$。因此 $t \geq 0$。首先，假设 $t = 0$。那么 $m = 0$ 和 $n = 0$。于是原点同时位于 H_r 和 $H_{\beta,\ m}$ 上，因此它必定位于这三条直线上。

现在假设 $t > 0$，并令 v 满足 $(\alpha,\ v) > n$ 且 $(\beta,\ v) > m$。于是，

$$\begin{aligned}(\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha), rv) &= (\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha, v - ((\alpha, v) - n)\alpha^\vee) \\ &= (\beta, v) - (\alpha^\vee, \beta)(\alpha, v) - [(\alpha^\vee, v) - n][(\alpha^\vee, \beta) - (\alpha^\vee, \beta)(\alpha^\vee, \alpha)] \\ &= (\beta, v) - (\alpha^\vee, \beta)(\alpha, v) + [(\alpha, v) - n](\alpha^\vee, \beta) \\ &= (\beta, v) - (\alpha^\vee, \beta)n \\ &> m - (\beta^\vee, \alpha)n = t.\end{aligned}$$

因此，由于 $t > 0$， $H_{\beta-(\alpha^\vee,\beta)\alpha,\ t}$ 必须将 rv 与原点分隔开。 □

引理 4.24。假设 $i \in D_R(x)$ 是 x 和 r_1x 的共享下降面板类型。那么 $i \in D_R(r_0x)$。

证明。假设 $H = H_{xs_ix^{-1}} = H_{\beta,m}$，且 $m \geq 0$，以及 $H_{r_0} = H_{\alpha,n}$，且 $n \geq 0$。若 $(\alpha, \beta) \geq 0$，则根据引理 4.21， $i \in D_R(r_0x)$。因此，假设 $(\alpha, \beta) < 0$。考虑 x 的顶点 v，它不在 H 上。于是 $(\alpha, v) > n$，且 $(\beta, v) > m$。根据引理 4.23，原点要么位于 H_{r_0} 与 H 的交集上，要么 r_0H 将 rv 与原点分隔开。假设第一种情况成立。那么 $m = n = 0$。再取单位 alcove 的另一个顶点 v'。于是 $(\alpha, v') \leq 0$，且 $(\beta, v') \leq 0$。现在 $(\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha, v') \leq 0$。若 $(\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha, v') = 0$，则 $(\alpha, v') = (\beta, v') = 0$。但这与事实矛盾，因为 H 与 H_{r_0} 的交集是原点。因此，$(\beta - (\alpha^\vee, \beta)\alpha, v') < 0$，所以 r_0H 将 v 与 v' 分隔开。由此， r_0H 将 r_0x 与原点分隔开，因此 $i \in D_R(r_0x)$。

□

命题 4.25。假设 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$。若 $0 \in D_R(x)$，则 $0 \in D_R(r_0x) \cap D_R(r_1x) \cap D_R(r_2r_1x)$。

证明。若 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$，则原点的轨道中 x 的顶点 v 必须位于 H_{r_1} 上。因此，由推论 4.22，$s_0 \in r_2 r_1 x$。现在假设 $0 \notin D_R(r_1 x)$。若 $r_2 r_1 x = r_1 x s_0$，则由于 $r_2 r_1 = r_1 r_0$，$r_0 x = x s_0$。但这与 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$ 矛盾。因此 $r_1 x$ 和 $r_1 x s_0$ 必须位于 H_{r_1} 的同一侧。因此 $r_1 x s_0 \in H^1_{r_2}$。现在，

$$\ell(r_1 x s_0) = \ell(r_1 x) + 1 = \ell(r_2 r_1 x) = \ell(r_2 r_1 x s_0) + 1.$$

但这与 $r_1 x s_0 \in H^1_{r_2}$ 矛盾。因此 $0 \in D_R(r_1 x)$。

现在我们要应用推论 4.22：从 $r_1 x$ 出发，先关于 r_1 反射，再关于 r_0 反射。现在 $r_1 x$ 由 H_{r_2} 和 H_{r_1} 界定，而 $r_1 x$ 中属于原点的轨道的顶点位于 H_{r_1} 上。此外，我们刚刚证明了 $0 \in D_R(r_1 x)$。因此，根据推论 4.22，$0 \in D_R(r_0 r_1 r_1 x) = D_R(r_0 x)$。 □

这里我们证明一些与所考虑的超平面的法向量有关的基本结果。注意，若 α_1 和 α_2 是两个线性无关的向量，且 α_i' 满足 $(\alpha_i', \alpha_i) = 0$ 且 $(\alpha_i', \alpha_j) \geq 0$，那么当且仅当 $(\alpha_i', \beta) \geq 0$ 对于 $i = 1, 2$ 成立时，β 才位于 α_1 和 α_2 之间的非优角内。

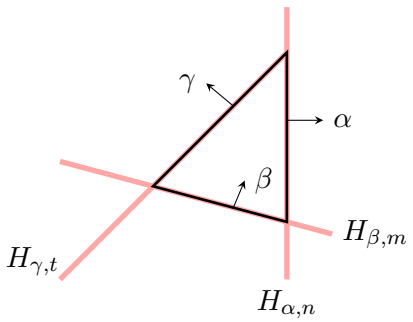
引理 4.26. 设 Φ 是一个秩 2 根系。设 α, γ 是构成根基的两个根。设δ 是位于 α 与 γ之间的另一个向量。那么 $\delta = t_1 \alpha + t_2 \gamma$，其中 $t_1, t_2 \geq 0$。

证明。由于 α, γ 构成根基，$(\alpha, \gamma) \leq 0$。设 α' 是垂直于 α 的向量，使得 $(\alpha', \gamma) \geq 0$。那么 $(\alpha', \delta) \geq 0$。现在 $\delta = t_1 \alpha + t_2 \gamma$，因此

$$0 \leq (\delta, \alpha') = t_2(\gamma, \alpha'),$$

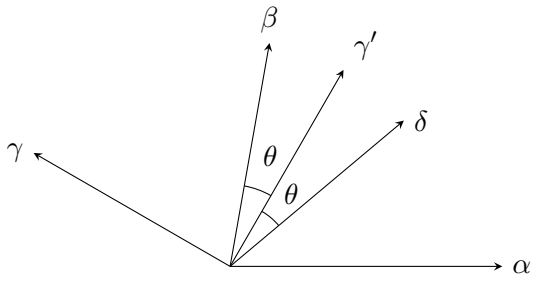
因此 $t_2 \geq 0$。类似地，$0 \leq (\delta, \beta') = t_1(\gamma, \beta')$，所以 $t_1 \geq 0$。 □

引理 4.27. 设 x 是一个小室，并假设 x 是 $xW_0 = xW_{\{1,2\}}$中的一个最小长度元素。设 $H_{\alpha,n}$、$H_{xs_0x^{-1}} = H_{\beta,m}$和 $H_r = H_{\gamma,t}$是 x的三个边界超平面，其中 $n, m, t \geq 0$。假设 $rH_{\beta,m} = H_{\delta,k}$。那么 δ 位于 α 与 γ之间。



证明。注意，β 位于 α 和 γ之间。设 θ_1 为 α 与 β之间的角，设 θ_2 为 β 与 γ之间的角。现在，由于$H_{\beta, m} = H_{xs_0x^{-1}}$，$H_{\beta, m}$ 与$H_{\alpha, n}$ 的交集，以及$H_{\beta, m}$ 与$H_r = H_{\gamma, t}$ 的交集，都不可能属于原点的轨道。因此，通过观察秩 2 Coxeter 复形中可能出现的角，可得 $\pi/3 \leq \theta_1 \leq \pi/2$，并且$\pi/3 \leq \theta_2 \leq \pi/2$。

现在令 γ' 为与 γ 垂直的向量，使得 $(\gamma', \alpha) \geq 0$。那么 $(\gamma', \beta) \geq 0$。现在，由于 $\theta_2 \leq \pi/2$，β 必定位于 γ 和 γ' 之间。由于 $\theta_2 \geq \pi/3$，γ' 与 β 之间的角 θ_3 为$0 \leq \theta_3 \leq \pi/6$。现在，$\delta$ 是 β 关于包含 γ' 的超平面的反射。因此，γ' 与 δ 之间的角等于 θ_3，所以至多为 $\pi/6$。因此，由于 γ 与 γ' 之间的角为 $\pi/2$，而 γ' 与 α 之间的角至少为 $\pi/6$，δ 必定位于 α 和 γ 之间。



□

定义 4.28。 若元素 $x \in W$ 与 xW_0 中的极小元相邻，则称 $x \in W$ 在 xW_0 中是**预极小**的。

利用这些事实，我们现在可以证明，在某些情况下，预极小元的下降集必定包含 s_0 。

命题 4.29. 设 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$，且设 x 在 xW_0 中是预极小的。进一步设极小元 y 与 H_{r_1} 共享一个面板。那么 $0 \in D_R(x)$ 。

证明。设 $H_{r_0} = H_{\alpha,\ n+1}$、$H_{ys_0y^{-1}} = H_{\beta,\ m}$ 和 $H_r = H_{\gamma,\ t}$ 是 y 的三个边界超平面，其中 n、m、$t \geq 0$。设 v 是不在 $H_{\beta,\ m}$ 上的 y 的顶点。则 $(\beta, v) > m$，$(\alpha, v) = n+1$，且 $(\gamma, v) = t$。现在 $H_{xs_0x^{-1}} = rH_{ys_0y^{-1}} = H_{\delta,\ k}$，其中 $\delta = \beta - (\gamma^\vee, \delta)\gamma$。设 v' 是位于 $H_{\beta,\ m}$ 以及 $H_{\gamma,\ t}$ 上的顶点。它也位于 $H_{\delta,\ k}$ 中。因此，

$$k = (\delta, v') = (\beta, v') - (\gamma^\vee, \delta)(\gamma, v') = m - (\gamma^\vee, \delta)t.$$

现在若 $m - (\gamma^\vee,\ \delta)t > 0$，则已证，因为 $(\delta,\ v) > m - (\gamma^\vee,\ \delta)t$。因此，假设 $m - (\gamma^\vee,\ \delta)t < 0$。现在，$\delta$ 位于 α 和 γ 之间，它们构成一个根基。因此，对于 $k_1,\ k_2 \geq 0$，有 $\delta = k_1\alpha + k_2\gamma$。于是

$$0 > (\delta, v') = k_1(\alpha, v') + k_2(\gamma, v'),$$

这就产生了矛盾，因为 $(\alpha,\ v')$，$(\gamma,\ v') \geq 0$。

最后，假设 $m - (\gamma^\vee,\ \delta)t = 0$。那么 $k_1(\alpha,\ v') + k_2(\gamma,\ v') = 0$。我们有

$$k_1, k_2, (\alpha, v'), (\gamma, v') \geq 0.$$

首先注意，$(\alpha,\ v') > 0$，因此必有 $k_1 = 0$。现在，若 $k_2 = 0$，则 v' 是原点。若 $(\gamma,\ v') = 0$，原点必位于 $H_{\gamma,\ t}$ 和 $H_{\delta,\ k}$ 上。但这两条直线的交集是 v'，因此 v' 是原点。无论哪种情况，这都与 $(\alpha,\ v') > 0$ 这一事实矛盾。 □

推论 4.30。 如果 x 不与 H_{r_1} 和 $0 \in D_R(x)$共用一个面板，那么 $xs_0 \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。

证明。 设 v 是 x 中位于原点的轨道上的顶点。那么 v 位于 H_{r_1}上。关于 $H_{xs_0x^{-1}}$ 的反射必定会将 v 移出 H_{r_1}，否则 x 就会与 H_{r_1}共用一个面板。但这样一来，v就在原点的轨道上，因此存在一个平行于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 并经过v的超平面。此外，由于 s_0 面板在关于 $H_{xs_0x^{-1}}$的反射下保持不变，而 s_0 面板不在 H_{r_0} 或 H_{r_1}上，v 仍必定位于 H_{r_0} 和 H_{r_1}之间。因此，由于 H_{r_0} 和 H_{r_1} 相邻，v 必定位于 H_{r_0}上。 □

引理 4.31. 如果 x 与 H_{r_0}不共享面板，那么 $D_R(r_0x) \cap D_R(x) \cap D_R(r_1x) \cap D_R(r_2r_1x)$非空。

证明. 根据命题 4.11， x、 r_1x和 r_2r_1x要么具有共享下降面板类型，要么存在一个生成元 s_j 使得 $r_1xs_j = r_2r_1x$。假设它们没有共享下降面板类型。但此时，由于 $r_2r_1 = r_1r_0$，我们有 $r_1xs_j = r_1r_0x$。因此， $xs_j = r_0x$，所以x 与 H_{r_0}共享一个面板。这就产生了矛盾。因此， x、 r_1x 和 r_2r_1x 具有共享下降面板类型，记为 s_i。现在，根据引理 4.24， $i \in D_R(r_0x)$。 □

我们接下来证明，可以找到一列生成元，使我们可以假设： x与 H_{r_1}共享一个面板，或 x 与 H_{r_0} 共享一个单形。

命题 4.32。 存在一列生成元 s_{i_1}， ....., s_{i_n}，使得

$$i_k \in D_R(r_0xs_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(xs_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_1xs_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_2r_1xs_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}),$$

以及 $r_1xs_{i_1}\cdots s_{i_n} \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。

证明。 如果 $x \cap H_{r_0} \neq \varnothing$，则结论成立。因此假设 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$。于是令 v 为 x 中位于原点轨道上的顶点。现在 v 必位于 H_{r_1}上。再令 $x' \in W_0^v$ 为极小元。我们对 $\ell(x) - \ell(x')$进行归纳。

首先考虑 x' 与 H_{r_0}共享一个面板的情形。这里，我们的基例是 $\ell(x) - \ell(x') = 1$，因此 x 是预极小的。现在，根据引理 4.29， $0 \in D_R(x)$。所以，根据引理 4.25， $0 \in D_R(r_0x) \cap D_R(r_1x) \cap D_R(r_2r_1x)$。现在 x 不与 H_{r_0}共享一个面板，因此 $xs_0 \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。所以我们选取 s_0的序列，结论得证。现在考虑 x' 不与 H_{r_0}共享一个面板的情形。这里，我们的基例是 $\ell(x) - \ell(x') = 0$，因此 $x = x'$。然后 $0 \in D_R(x)$，同样的论证给出 s_0的序列。

现在假设对于 $\ell(x)-\ell(x') < n, n > 1$，命题成立。令 x 满足 $\ell(x)-\ell(x') = n$。现在存在一个共享的公共下降面板类型，记为 s_i。现在，若 $s_i = s_0$，则由推论 4.30 可得结论。否则， $xs_i \in xW_0$ 满足 $\ell(xs_i) - \ell(x') = n - 1$，因此根据归纳法，存在一个序列 $s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}$，使得

$$i_k \in D_R(r_0xs_is_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(xs_is_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_1xs_is_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_2r_1xs_is_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}),$$

并且 $r_1xs_is_{i_1}\cdots s_{i_n} \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。所以我们只需取序列 $s_i, s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}$。

现在要考虑的最后一种情况是： x与 H_{r_1} 和 $x = x'$共用一个面板。于是， x、 r_1x和 r_2r_1x 必定共享递减面板类型 s_0。如果 $xs_0 \cap H_{r_0} \neq \varnothing$，那么我们就完成了。否则， xs_0 在 xs_0W_0 中不是极小的，因为 $0 \notin D_R(xs_0)$。因此，如上所示，存在一个序列s_{i_1}， ....., s_{i_n}，使得

$$i_k \in D_R(r_0xs_0s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(xs_0s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_1xs_0s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_2r_1xs_0s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}),$$

且 $r_1xs_0s_{i_1}\cdots s_{i_n} \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。因此，我们只需取序列 s_0， s_{i_1}， ....., s_{i_n}。 □

现在我们只需证明，若 $x \cap H_{r_0} \neq \varnothing$，则 $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。然后，借助归纳法，我们便可得出结论：当 $x \cap H_{r_0} = \varnothing$ 时，该命题也成立。

引理 4.33. 若 x 在 $xW_0 \cap H_{r_0}^{\infty}$中是极小的，则 x 与 H_{r_0}共享一个面板。

证明. 若 x 不与 H_{r_0} 共享面板，那么 x 中两个型不是 s_0 的面板都必须是递增的，否则它在 $xW_0 \cap H_{r_0}^{\infty}$中就不是极小的。但这样一来， x 在 xW_0中就会是极小的，这与 $x \in H_{r_0}^{\infty}$这一事实矛盾。 □

命题 4.34. 若 $x \cap H_{r_0}$ 非空且 $\ell(r_0x) < \ell(x)$，则 $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。

证明. 设 x' 在 $xW_0 \cap H_{r_1}^{\infty}$中为极小。对 $\ell(x) - \ell(x')$ 使用归纳法。若 $x = x'$，则根据引理 4.33， x 与 H_{r_1}共享一个面板，因此显然 $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。

现在假设对于 x，当 $\ell(x) - \ell(x') < n$ for $n > 0$ 时，命题成立。取 x 使得 $\ell(x) - \ell(x') = n$。现在，如果 x 与 H_{r_0} 共用一个面板，则结论显然成立。否则，根据引理 4.31， r_0x 、 x 、 r_1x 和 r_2r_1x 共用一个公共下降面板类型 $s_i \neq s_0$。现在， $\ell(r_2r_1xs_i) = \ell(r_2r_1x) - 1 = \ell(r_1x) = \ell(r_1xs_i) + 1$，且 $\ell(r_1xs_i) = \ell(r_1x) - 1 = \ell(x) = \ell(xs_i) + 1$，因此由归纳法可得 $\ell(r_0xs_i) = \ell(xs_i) - 1$。现在， $i \in D_R(r_0x)$，所以 $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。 □

我们现在可以证明定理 1.3。

证明。 如果 $\ell(r_0x) > \ell(x)$，或者 $x \cap H_{r_0} \neq \varnothing$，那么结论成立。因此现在假设 $\ell(r_0x) < \ell(x)$ 且$x \cap H_{r_0} = \varnothing$。现在，由引理 4.32，存在一列生成元 s_{i_1}，……， s_{i_n}，使得

$$i_k \in D_R(r_0xs_{i_1} \cdots i_{k-1}) \cap D_R(xs_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}) \cap D_R(r_2r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}),$$

且 $r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_n} \cap H_{r_0} \neq \varnothing$。现在 $\ell(r_2r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) = \ell(r_2r_1x) + n = \ell(r_1x) + n + 1 = \ell(r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) + 1$，并且 $\ell(r_1xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) = \ell(r_1x) + n = \ell(x) + n + 1 = \ell(xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) + 1$，所以由引理 4.34， $\ell(r_0xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) = \ell(xs_{i_1} \cdots s_{i_n}) - 1$。因此， $\ell(r_0x) = \ell(x) - 1$。 □

4.3 定理 1.4 的证明

现在我们可以利用这些结果，通过归纳法证明定理 1.4。我们首先在元组 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$ 上定义性质（†）。

定义 4.35。元组 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$ 满足**性质（†）**，当且仅当

1. $r_1, \ldots\ldots, r_n$是一组 $n \geq 2$平行反射，使得 H_{r_i}与 $H_{r_{i-1}}$和$H_{r_{i+1}}$相邻；
2. $w \in W$ 位于 H_{r_0} 与 H_{r_1}之间；
3. $i \in D_R(w)$，

$$\ell(r_t \cdots r_1ws_i) = \ell(r_{t-1} \cdots r_1ws_i) + 1,$$

并且对所有 $1 \leq t \leq n$， $r_t \cdots r_1ws_i \neq r_{t-1} \cdots r_1w$。

注 4.36. 我们将证明，若 (†) 在 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$ 上成立，则 $r_n \cdots r_1ws_i$ ∈附属集(w)。注意，若 $n = 1$，由于 $\ell(r_1ws_i) = \ell(w)$，且 $w \neq r_1ws_i$，我们的结论显然成立。

现在，我们证明在恒等元由 H_{r_0} 和H_{r_1}限定的每种情况下，归纳步骤均成立。我们仅考虑这一条件，因为当恒等元不由 H_{r_0} 和 H_{r_1} 限定时，定理 1.3 告诉我们 $\ell(r_0ws_i) = \ell(ws_i) - 1$。在这种情况下，我们以元组 $((r_0,\ r_1, \ldots\ldots, r_n)\ r_0w,\ s_i)$ 进行归纳论证。

引理 4.37. 假设恒等元由 H_{r_0}和 H_{r_1}限定。若 (†) 对 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$ 成立，且对所有 $0 \leq t \leq n$， $k \in D_R(r_t \cdots r_1ws_i)$ 均成立，则 (†) 对 $((r_1, \cdots, r_n)\ ws_i,\ s_k)$。 成立。

证明。 首先注意， ws_i 也必须由 H_{r_0} 和 H_{r_1}界定，否则 $i \notin D_R(w)$。然后$k \in D_R(ws_i)$，并且

$$\begin{aligned}\ell(r_t \cdots r_1ws_is_k) &= \ell(r_t \cdots r_1ws_i) - 1 \\ &= \ell(r_{t-1} \cdots r_1ws_i) \\ &= \ell(r_{t-1} \cdots r_1ws_is_k) + 1.\end{aligned}$$

另请注意，对于所有 $1 \leq t \leq n$， $r_t \cdots r_1ws_is_k \neq r_{t-1} \cdots r_1ws_i$；否则 $k \notin D_R(r_{t-1} \cdots r_1ws_i) \cap D_R(r_t \cdots r_1ws_i)$。因此，(†) 对 $((r_1, \ldots, r_n)\ ws_i, s_k)$ 成立。 □

首先，我们考虑在 $|D_R(w)| = 1$ 的情形下证明的归纳步骤。

命题 4.38. 假设对于任意元组 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$，若 $\ell(w) < m$ 且满足 (†)，则 $r_n \cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。假设 H_{r_0} 和 H_{r_1} 界定恒等元，$\ell(w) = m$，$|D_R(w)| = 1$，且 $((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ w,\ s_i)$ 上满足 (†)。则 $r_n \cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。

证明. 首先，假设 $\{r_t \cdots r_1 w s_i \mid 0 \le t \le n\}$ 全都具有相同的下降面板类型，记作 $s_k \ne s_i$。现在，根据引理 4.37，$((r_1, \ldots\ldots, r_n)\ ws_i,\ s_k)$ 满足 (†)，且 $\ell(ws_i) < \ell(w)$。因此$ws_i \not\le r_n \cdots r_1 w s_i s_k$. 现在假设 $w \le r_n \cdots r_1 w s_i$。那么，由于 $k \in D_R(r_n \cdots r_1 w s_i)$，$k \notin D_R(w)$，$ws_i \le w \le r_n \cdots r_1 w s_i s_k$。但这与假设矛盾，因此 $r_n \cdots r_1 w s_i \in$ 附属集(w)。

现在假设 $\{r_t \cdots r_1 w s_i \mid 0 \le t \le n\}$ 不全都具有公共下降面板类型。那么，根据引理 4.12，$\{r_t \cdots r_1 w s_i \mid 0 \le t \le n-1\}$ 具有公共下降面板类型，记为 $s_k \ne s_i$，并且存在一个 s_j 使得 $r_{n-1} \cdots r_1 w s_i s_j = r_n \cdots r_1 w s_i$。现在，根据引理 4.37，(†) 在 $((r_1、\ldots\ldots、r_{n-1})\ ws_i、\ s_k)$ 上成立，因此

$$ws_i \not\le r_{n-1} \cdots r_1 w s_i s_k.$$

假设 $w \le r_n \cdots r_1 w s_i$。根据推论 4.14，$w \le r_{n-1} \cdots r_1 w s_i$。但此时 $k \in D_R(r_{n-1} \cdots r_1 w s_i)$，$k \notin D_R(w)$，所以 $ws_i \le w \le r_{n-1} \cdots r_1 w s_i s_k$。但这就产生了矛盾，因此 $r_n \cdots r_1 w s_i \in$附属集(w)。 □

接下来我们证明，若 $|D_R(w)| = 2$，则对于某个 $i \in \{1, 2\}$，$D_R(w) = \{0, i\}$。

引理 4.39. 若 $w \in W$ 和单位 alcove 均由两个平行相邻超平面 H_{r_0} 和 H_{r_1} 所界定，则 w 不可能是 wW_0 中的极大元。

证明. 设 v 是原点的轨道中 w 的顶点。那么 v 必定位于 H_{r_0} 或 H_{r_1} 上。不妨设其位于 H_{r_i} 上。由于 H_{r_i} 将 $r_i w$ 与恒等元分隔开，因此 $\ell(r_i w) > \ell(w)$。但此时 $r_i v = v$，故 $r_i w W_0 = w W_0$。因此，$r_i w \in w W_0$，所以 w 不是 wW_0 中的极大元。 □

推论 4.40. 若 $w \in W$ 和单位 alcove 均由两个平行相邻超平面 H_{r_0} 和 H_{r_1} 所界定，且 $|D_R(w)| = 2$，则 $0 \in D_R(w)$。

证明。若 $|D_R(w)| = 2$，但 $0 \notin D_R(w)$，则 $D_R(w) = \{1, 2\}$，因此其在 wW_0 中极大，这与引理 4.39 矛盾。 □

现在我们可以证明，在这些条件下，ws_i 在 wW_0 中不极小的唯一情形，是元素 $s_0 s_i$ 的阶为二时。我们还可以进一步证明，$s_0 s_i$ 的阶绝不会大于三。

命题 4.41。设 $w \in W$ 和单位 alcove 都由两条平行相邻超平面 H_{r_0} 和 H_{r_1} 所界，并设 $D_R(w) = \{0, i\}$。若 $(s_0 s_i)^2 \ne 1$，则 ws_i 在 wW_0 中极小。

证明。注意到 $0 \in D_R(w)$，因此由 $ws_i \in wW_0$ 和 $ws_i \le w$，有 $0 \in D_R(ws_i)$。假设 ws_i 在 wW_0 中不极小。则 $D_R(ws_i) = \{0, j\}$，$j \notin \{0, i\}$。现在 w 在 $wW_{\{s_0, s_i\}}$ 中极大，并且由于 $(s_0 s_i)^2 \ne 1$，我们有 $i \in D_R(ws_i s_0)$。现在 ws_i 在 $ws_i W_{\{s_0, s_j\}}$ 中极大，因此 $j \in D_R(ws_i s_0)$。于是 i，$j \in D_R(ws_i s_0)$，故 $ws_i s_0$ 在 $ws_i s_0 W_0$ 中极大。但 w 和恒等元都由 H_{r_0} 和 H_{r_1} 所界，且 $i \in D_R(w)$，$0 \in D_R(ws_i)$，所以 $ws_i s_0$ 由 H_{r_0} 和 H_{r_1} 所界。因此，根据引理 4.39，它不可能在其 W_0 陪集中极大，从而得到矛盾。因此，ws_i 必须在 $ws_i W_0$ 中极小。 □

引理 4.42. 假设 $w \in W$ 和单位 alcove 都由两个平行相邻超平面 H_{r_0} 和 H_{r_1}围成，并且假设 $D_R(w) = \{0, i\}$。那么元素 $s_0 s_i$的阶不为 4。

˜证明. 假设 s_0s_i 的阶为 4。那么我们必有一个考克斯特复形 B_2 。因此， s_1s_2 的阶也必为 4。于是，任意极大顶点都具有穿过该顶点的超平面的所有方向。因此， w 的顶点 v 必位于 H_{r_0} 或 H_{r_1}上。不妨设它位于 H_{r_t}上。那么 $\ell(r_tw) > \ell(w)$，但 r_t 固定 v。所以 $r_tw \in wW_{\{s_0,s_i\}}$。因此， w 不可能是 $wW_{\{s_0,s_i\}}$中的极大元，故 $D_R(w) \neq \{0,i\}$。 □

现在，我们可以通过对 w的长度进行归纳，来证明定理 1.4。这里，我们用性质（†）的形式重述该定理。

定理 4.43. 如果(†) 在$((r_1,\dots,r_n)\ w,s_i)$上成立，那么 $r_n\cdots r_1ws_i \in$附属集(w)。

证明。 我们对 $\ell(w)$进行归纳。

如果 $\ell(w) = 0$，那么 $w = 1$，并且（†）不可能成立，因为 $D_R(w) = \varnothing$。如果 $\ell(w) = 1$，则 $w = s_i$ 对某个 s_i 成立，并且 $D_R(w) = \{i\}$。因此，假设（†）对（$(r_1,\dots,r_n)\ \ w,s_i$）成立。现在， $\ell(r_1ws_i) =\ell(ws_i) + 1 = 1$。因此，$r_1ws_i = s_j$。注意， $j \neq i$。现在，如果 $n > 1$，那么 H_{r_1}和 H_{r_2}都不界定 w或$ws_i = 1$。因此，由于 H_{r_0}和 H_{r_1} 界定了 w 和 $ws_i = 1$，恒等元的任何顶点都不在 H_{r_2}上。因此，反射 r_2 不固定原点的任何顶点。因此，$r_2r_1ws_i = r_2s_j$ 不可能属于任何极大抛物子群。但是，任何长度为二的元素都必须属于一个极大抛物子群。因此，如果（†）对（$(r_1,\dots,r_n)\ \ w,s_i$）成立，那么 $n = 1$，这就导致了矛盾。

现在假设，如果在 $((r_1,\dots,r_n)\ w,\ s_i)$ 上对 $\ell(w) < m$ 成立，那么 $r_n\cdots r_1ws_i \in$附属集(w)。

现在假设 $\ell(w) = m$。注意，根据推论 1.3， $\ell(r_0w) = \ell(w) \pm 1$。首先假设 $\ell(r_0w) = \ell(w) - 1$。那么很容易看出，(†) 在 $((r_0,\ r_1,\ \dots,\ r_n)\ r_0w,\ s_i)$ 上成立。因此，根据归纳法， $r_n\cdots r_1r_0r_0ws_i \in$附属集$(r_0w) \subseteq$附属集$(w)$。所以我们可以假设 $\ell(r_0w) > \ell(w)$，从而 H_{r_0} 和 H_{r_1} 夹住单位 alcove。

现在我们首先假设 $D_R(w) = \{i\}$。那么，由于 s_i 是 w 和 H_{r_0}的下降面板，且 H_{r_1} 夹住单位 alcove，H_{r_0} 和 H_{r_1} 必须夹住 ws_i。现在先假设 $ws_i,\ r_1ws_i,\ \dots,\ r_n\cdots r_1ws_i$ 共有一个公共下降面板 $s_k \neq s_i$。因此 $k \notin D_R(w)$。现在如果 $w \leq r_n\cdots r_1ws_i$，那么 $ws_i \leq w \leq r_n\cdots r_1ws_is_k$。但让我们考虑 $((r_1,\ \dots,\ r_n)\ ws_i,\ s_k)$。现在

$$\ell(r_t\cdots r_1ws_is_k) = \ell(r_t\cdots r_1ws_i) - 1 = \ell(r_{t-1}\cdots r_1ws_i) = \ell(r_{t-1}\cdots r_1ws_is_k) + 1,$$

且对任意 $0 \leq t \leq n$，否则 ws_is_k 不会被 H_{r_0} 和 H_{r_1}所界定，进而 s_k 就不会是 ws_i的下降面板。因此，(†) 对 $((r_1,\ \dots\dots,\ r_n)\ ws_i,\ s_k)$ 成立。所以，由归纳法可得 $ws_i \not\leq r_n\cdots r_1ws_is_k$，因此若 $w \leq r_n\cdots r_1ws_i$，就会得到矛盾。于是， $r_n\cdots r_1ws_i \in$Annex(w)。

现在假设 $ws_i,\ r_1ws_i,\ \dots\dots,\ r_{n-1}\cdots r_1ws_i$ 有一个公共下降面板 $s_k \neq s_i$，并且存在一个面板类型 s_j 使得 $r_{n-1}\cdots r_1ws_is_j = r_n\cdots r_1ws_i$。若 $w \leq r_n\cdots r_1ws_i$，由推论 4.14 可得 $w \leq r_{n-1}\cdots r_1ws_i$。于是 $k \notin D_R(w)$， $k \in D_R(r_{n-1}\cdots r_1ws_i$，因此 $ws_i \leq w \leq r_{n-1}\cdots r_1ws_is_k$。现在，(†) 对 $((r_1,\ \dots\dots,\ r_{n-1})\ ws_i,\ s_k)$ 成立，因此 $ws_i \not\leq r_{n-1}\cdots r_1ws_is_k$，这就产生了矛盾。所以 $r_n\cdots r_1ws_i \in$Annex(w)。

现在假设 $|D_R(w)| = 2$。现在 w 在 wW_0中不是极大，因此 $0 \in D_R(w)$。于是，对某个 $i \in \{1,2\}$，有 $D_R(w) = \{0,i\}$。假设 (†) 对 $((r_1,\dots,r_n)\ w,s_0)$ 成立。先假设 $(s_0s_i)^2 = 1$。现在 w 在 $wW_{\{s_0,s_i\}}$中是极大。根据上面的同一论证，我们只需考虑所有 ws_0、r_1ws_0、$\dots$、$r_n\cdots r_1ws_0$ 共享一个公共下降面板类型 $s_k \neq s_0$ 的情形。如果 $s_k \neq s_i$，则由引理 4.37 即得结论。因此，假设它们都以 s_i 为下降面板类型。现在 $0 \in D_R(r_t\cdots r_1w)$ 且 $i \in D_R(r_t\cdots r_1ws_0)$，所以，由于 $(s_0s_i)^2 = 1$， $r_t\cdots r_1w$ 在其 $W_{\{s_0,s_i\}}$陪集中是极大。因此， $i \in D_R(r_t\cdots r_1w)$。因此，(†) 对 $((r_1,\dots,r_n)\ ws_i,s_0)$ 成立。于是由归纳法得出 $ws_i \not\leq r_n\cdots r_1ws_is_0$。现在若 $w \leq r_n\cdots r_1ws_0$，则 $ws_i \leq r_n\cdots r_1ws_0s_i = r_n\cdots r_1ws_is_0$，这就产生了矛盾。若 (†) 对 $((r_1,\dots,r_n)\ w,s_i)$ 成立，同样的论证也适用。

现在假设 $(s_0s_i)^3 = 1$。由引理 4.41 和 4.29，w 必须是预极小的，即 ws_i在 $wW_0 = ws_iW_0$ 中是极小的。先假设 (†) 对 $((r_1, \ldots, r_n)\ w,\ s_0)$ 成立。我们可以假设所有 ws_0，r_1ws_0，$\ldots$，$r_n \cdots r_1ws_0$ 共享一个公共下降面板类型 $s_k \neq s_0$。如果 $s_k \neq s_i$，则由引理 4.37 即得结论。因此，假设 $s_k = s_i$。现在，根据推论 4.12，要么所有ws_0s_i，$r_1ws_0s_i$，$\ldots$，$r_n \cdots r_1ws_0s_i$ 共享一个公共下降面板类型，要么除 $r_n \cdots r_1ws_0s_i$ 外的所有对象共享一种下降面板类型。

情形 1：所有 ws_0s_i、$r_1ws_0s_i$、.. 、$r_{n-1} \cdots r_1ws_0s_i$ 共享一种公共下降面板类型。这种类型不能是 s_i。

情形 1a：首先假设它是 $s_k \neq s_0$。那么 (†) 对 $((r_1$、$\ldots$、$r_n)\ ws_0s_i$、$s_k)$ 成立。因此，根据归纳法，$ws_0s_i \not\leq r_n \cdots r_1ws_0s_is_k$。但是现在，如果 $w \leq r_n \cdots r_1ws_0$，那么 $ws_i \leq r_n \cdots r_1ws_0s_i$。现在 ws_i 是极小的，因此 $k \notin D_R(ws_i)$。所以 $ws_0s_i \leq ws_i \leq r_n \cdots r_1ws_0s_is_k$，这就产生了矛盾。

情形 1b：现在假设它们都共享 s_0 作为公共下降面板类型。现在，$0 \in D_R(r_t \cdots r_1w)$，$i \in D_R(r_t \cdots r_1ws_0)$，并且 $0 \in D_R(r_t \cdots r_1ws_0s_i)$。因此，由于 $(s_0s_i)^3 = 1$，w 必须是 $wW_{\{s_0,s_i\}}$ 中的极大元。于是 $i \in D_R($ $r_t \cdots r_1w)$，$0 \in D_R(r_t \cdots r_1ws_i)$，并且 $i \in D_R(r_t \cdots r_1ws_is_0)$。所以 (†) 对 $((r_1$、$\ldots$、$r_n)\ ws_is_0$、$s_i)$ 成立。因此，$ws_is_0 \not\leq r_n \cdots r_1ws_is_0s_i$。但是，如果 $w \leq r_n \cdots r_1ws_0$，那么 $ws_is_0 \leq r_n \cdots r_1ws_0s_is_0 = r_n \cdots r_1ws_is_0s_i$，这就产生了矛盾。

情形 2：所有 ws_0s_i、$r_1ws_0s_i$、……、$r_{n-1} \cdots r_1ws_0s_i$ 共享一种公共下降面板类型，并且存在一个 s_j 使得 $r_{n-1} \cdots r_1ws_is_j = r_n \cdots r_1ws_i$。将上述相同的论证应用于 $((r_1$、……、$r_{n-1})\ w$、$s_0)$，我们可以得出 $w \not\leq r_{n-1} \cdots r_1ws_0$。但是，根据推论 4.14，$w \not\leq r_n \cdots r_1ws_0$。

如果 (†) 对 $((r_1$、……、$r_n)\ w$、$s_i)$ 成立，则同样的论证也适用。

现在，根据引理 4.42，s_0s_i 在 $D_R(w) = \{0, i\}$ 时不可能具有 4 阶。因此这些情形涵盖了所有可能性，我们的归纳法也就完成了。 □

Now 将定理 4.43 与命题 4.5 结合起来，即可轻松得到下一个推论。

推论 4.44。若 (†) 在 $((r_1, \ldots, r_n)\ w, s_i)$ 上成立，则 $r_n \cdots r_1ws_i$ 位于附属集(w) 的边界上。

例 4.45。这里我们来看一个应用此定理的例子。我们考虑图 4 中小室 $x = s_0s_1s_2s_0s_1s_0s_2$ 的附属集。

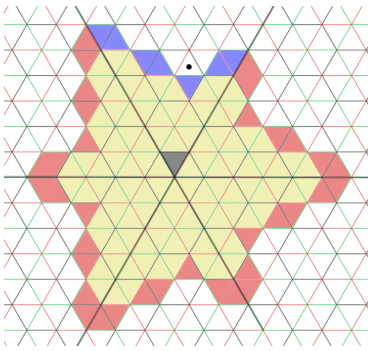


图 6：根据定理 1.4，紫色小室位于附属集中。接着，根据推论 4.44，我们知道这些元素位于附属集的边界上。然后，根据命题 3.15，由于我们的元素位于基本室中，根据对称性，我们知道红色小室也必定位于附属集的边界上。这就完全确定了该附属集。

参考文献

[1] Abramenko, P., and Brown, K. S. 建筑，第 248 卷，数学研究生教材。施普林格，纽约，2008年。理论与应用。[2] Billey, S., and Lakshmibai, V. 舒伯特簇的奇异轨迹，数学进展第 182 卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2000年。[3] Björner, A., and Brenti, F. 考克斯特群的组合学，数学研究生教材第 231 卷。施普林格，纽约，2005年。[4] Chevalley, C. 关于空间 G/B 的胞腔分解。载于《代数群及其推广：经典方法》（宾州州立大学公园，PA，1991），纯数学专题讨论会论文集第 56 卷第 1 部。美国数学会，普罗维登斯，RI，1994年，第 1–23 页。附有 Armand Borel 撰写的序言。[5] Davis, M. W. 考克斯特群的几何与拓扑，伦敦数学学会专著丛书第 32 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2008年。[6] Ehresmann, C. 关于某些齐性空间的拓扑。数学年刊（第 2 辑）35，2（1934），396–443。[7] Ehrig, M. 通过仿射建筑研究 MV 多面体。杜克数学杂志 155，3（2010），433–482。[8] Gaussent, S., and Littelmann, P. LS 廊道、路径模型与 MV 循环。杜克数学杂志 127，1（2005），35–88。[9] Graeber, M., and Schwer, P. 考克斯特群中的阴影。组合学年刊 24，1（2020），119–147。[10] Humphreys, J. 李代数与表示论导论。施普林格，1972年。[11] Humphreys, J. E. 反射群与考克斯特群，剑桥高等数学研究丛书第 29 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[12] Kazhdan, D., and Lusztig, G. 考克斯特群与赫克代数的表示。数学创刊 53，2（1979），165–184。[13] Marietti, M. 任意考克斯特群中的布鲁哈特区间与抛物陪集，2022年。arXiv:2205.07733。[14] Milićević, E., Schwer, P., and Thomas, A. 仿射德利涅–卢斯蒂格簇的维数：通过带标记的折叠阿尔科夫漫步与根算子实现的新方法。美国数学会回忆录 261，1260（2019），v+101。[15] Ram, A. 阿尔科夫漫步、赫克代数、球函数、晶体与列严格杨表，2006年。arXiv:math/0601343。[16] Ronan, M. 建筑物讲义。芝加哥大学出版社，芝加哥，IL，2009年。已更新并修订。[17] Schwer, C. 廊道、霍尔–利特尔伍德多项式与球面赫克代数的结构常数。国际数学研究论文集（2006），文章编号 75395，共 31 页。[18] Schwer, P. 荒野中的阴影——折叠廊道及其应用，2021年。arXiv:2109.02293。

[19] Tits，J．关于复半单群代数类比的问题。载于高等代数研讨会，*1956*年*12*月*19*日至*22*日于布鲁塞尔举行，比利时数学研究中心。Ceuterick 出版社，鲁汶，1957年，第261–289页。[20] Tits, J. 关于建筑及其应用。载于国际数学家大会论文集（温哥华，不列颠哥伦比亚省，*1974*），第*1*卷（1975年），加拿大数学大会，魁北克省蒙特利尔，第209–220页。[21] Verma，D.-N．复半单李代数某些诱导表示的结构。《美国数学会通报》第*74*卷（1968年），第160–166页。