arXiv:2603.15543v1 [math.CO] 16 Mar 2026

定向荷兰风车图的 Drazin逆与游走结构

C. MENDES ARA´UJO、FAUSTINO MACIALA 和 PEDRO PATR´ICIO

Abstract. 我们研究了一类称为定向荷兰风车图的有向图所对应邻接矩阵的 Drazin可逆性。通过分析预定长度的游走并利用最小多项式的结构，我们得到 Drazin逆的显式表达式，并确定其指标。该方法将组合计数与代数矩阵分析相结合，给出了一种构造性刻画，并推广了关于路径、有向圈和二部图的已知结果。除其固有的理论价值外，该框架还为受循环反馈支配的离散模型提供了有益见解，并可作为在结构化网络中进行广义逆符号计算的基础。

1. Introduction

离散数学和谱图论中的一个基本问题，是分析有向图中游走的结构与计数，尤其是具有循环或规则模式的有向图。包含重复圈的有向图广泛出现于网络动力学、符号系统、流模型和离散时间反馈过程中。它们的邻接矩阵将组合连接关系转化为代数形式，为图论与矩阵分析之间搭建了自然的桥梁。

在这一框架下，确定与图相关矩阵的（伪）可逆性，并获得此类逆的显式表达式，发挥着至关重要的作用。经典成果包括对轮图距离矩阵逆的研究（[1]），以及对树（[8]）和二部图（[3, 10]）邻接矩阵可逆性的研究。这些研究已扩展至各种图类的广义逆，包括群逆和Drazin逆（[7, 6, 9, 11]）。文献 [2]介绍了一种基于一般矩阵的图论研究方法。

邻接矩阵广义逆的研究，尤其是Drazin逆，为奇异系统、吸收马尔可夫链以及网络上的微分方程提供了深入见解。尽管路径、有向圈和二部图的显式Drazin逆已有所知，但对更复杂有向图推导闭式表达式仍然是一项挑战。

定向荷兰风车图由多个有向圈在一个公共顶点处合并构成，兼具递归结构与组合丰富性。其简单的递归结构使游走能够被精确计数，同时从代数角度看仍呈现出非平凡的性质。尽管这是一类受限的图，它们仍是研究局部循环模式如何影响伪可逆性，以及广义逆如何刻画基于游走的性质的有用模型。本文计算其邻接矩阵的Drazin逆，确定其Drazin指标，并刻画固定长度游走的结构。我们的方法兼具构造性与组合性：刻画最小多项式，计算Drazin指标，并确定由唯一的固定长度游走连接的精确顶点对。这些结果揭示了图的组合结构如何直接决定Drazin逆的支撑，并有助于理解图拓扑与矩阵伪可逆性之间的相互作用。

Date：2026年3月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 15A09, 15A10, 05C20。
Key words and phrases. Drazin逆、Drazin指标、最小多项式、有向图。

本文中，我们始终考虑实矩阵。矩阵 $n \times n$ A 的Drazin逆，记作 A^D，是以下方程组的唯一解 $A^{k+1}X = A^k$， $XAX = A$，以及 $AX = XA$，其中 k 是某个非负整数。满足条件的最小 k 称为 A 的Drazin指标，记作ind(A)。当ind(A) ≤ 1时， A称为群逆，记作$A^{\#}$。关于Drazin逆和群逆的一般理论，可参见 [4, 5]。

设 ψ_A 和 Δ_A 分别表示A的最小多项式和特征多项式。众所周知：

$$\psi_A \mid \Delta_A \mid \psi_A^n,$$

这意味着 ψ_A 和 Δ_A 具有相同的不可约因子。若 0 是A的一个特征值，则其作为 ψ_A 的根的重数称为 A的指标，记为 $i(A)$，且它等于 Drazin指标：ind(A) $= i(A)$。当 $\psi_A(\lambda) = \lambda^{i(A)} f(\lambda)$，且 gcd($\lambda$， $f(\lambda)$) $= 1$ 时， A 的 Drazin 逆可表示为 A 的幂与 A 的一个多项式的组合，从而得到实用的计算方法。

设 G 是一个有向图，其顶点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。其邻接矩阵$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if there is an edge from } v_i \text{ to } v_j \text{ in } G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

G 中的游走是一个顶点序列 $P = \langle v_1、 v_2、 \ldots\ldots、 v_r \rangle$，其中每一对相邻顶点之间都有一条有向边。 P的长度记为 $|P|$，等于 $r - 1$，即游走中边的数量。若 $Q = \langle w_1、 \ldots\ldots、 w_s \rangle$ 是另一个满足 $w_1 = v_r$的游走，则我们将通过连接 P和Q而在 G 中得到的游走记为 $Q \circ P$，即

$$Q \circ P = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r, w_2, \ldots, w_s \rangle.$$

注意到 $|Q \circ P| = |P| + |Q|$。

在接下来的章节中，我们将确定定向荷兰风车图的邻接矩阵的一个消去多项式，求出其 Drazin指标，并推导 Drazin逆的公式。我们的方法具有构造性和组合性，立足于对游走及其与矩阵幂之间关系的分析。

2. Oriented Dutch windmill graphs

定向荷兰风车图 D_n^m是通过取m 个有向圈 C_n （其中 $n \geq 3$）并将所有副本的一个公共顶点识别为同一顶点而构造的有向图。图1 展示了有向图 D_3^4，它由四个长度为 3 且共享一个公共顶点的有向圈副本构成。

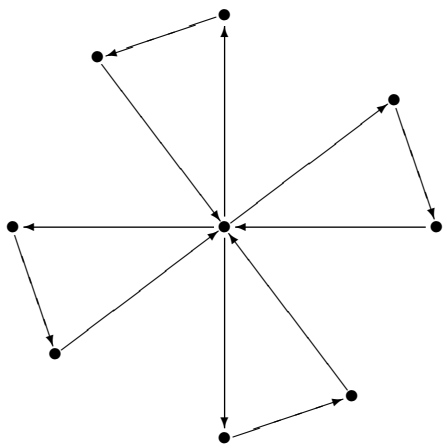

Figure 1. 定向荷兰风车图 D_3^4。

众所周知，Drazin指标在相似变换下保持不变，因为相似矩阵具有相同的最小多项式。此外，Drazin逆本身也与相似变换相容：若 $B = UAU^{-1}$，则 $B^D = UA^DU^{-1}$。

在此背景下，当我们假设图 D_n^m 具有给定的顶点集和有向边集时，我们实际上是在隐含地考虑顶点的一种特定标记。然而，对同一图采用不同的标记，会得到置换相似的邻接矩阵。由于相似性（包括置换相似性）保持最小多项式和Drazin逆不变，因此，与 D_n^m 的同构副本相对应的所有邻接矩阵都具有相同的谱性质和Drazin性质。因此，无论选择哪种特定标记，我们的分析都仍然成立。

不失一般性，以下我们考虑由下式定义的定向荷兰风车图 $D_n^m = (V, E)$

$$V = \{1, 2, \ldots, m(n-1)+1\},$$

以及由有向边 (a, b) 组成的边集 E，其确定方式如下：

$a = 1$ and $b = (k-1)(n-1)+2$, for $k \in \{1, \ldots, m\}$

or

$a = (k-1)(n-1)+i$ and $b = a+1$, for $k \in \{1, \ldots, m\}$ and $i \in \{2, \ldots, n-1\}$

or

$a = (k-1)(n-1)+n$ and $b = 1$, for $k \in \{1, \ldots, m\}$.

我们首先介绍一些关于图 D_n^m 中特定长度游走的记号和初步结果。

对于每个 $k \in \{1, \ldots, m\}$，令 C^k 表示有向圈

$$\Big\langle 1, (k-1)(n-1)+2, \ldots, (k-1)(n-1)+(n-1), (k-1)(n-1)+n, 1 \Big\rangle,$$

这是一个长度为 n 的有向圈，始于并终于顶点 1。注意，有向圈C^1，C^2，……，C^m 表示有向圈 C_n 的 m 个副本，它们都共享公共顶点 1。令 V^k 表示由有向圈 C^k 构成的顶点集，其中每个 k =1，2，……，m。

引理 2.1. </style}设 。当且仅当满足以下条件之一时，在 中存在一条长度为 、从顶点 到顶点 的游走，其中， $j \in V^k$:

$$i = 1 \text{ and } j = (k-1)(n-1)+n,$$

or

$$i = (k-1)(n-1)+2 \text{ and } j = 1,$$

or

$$i = (k-1)(n-1)+\ell \text{ and } j = i-1 \text{ for some } \ell \in \{3, \ldots, n\}.$$

此外，在上述每种情况下，在 D_n^m 中都恰好存在一条长度为 $n-1$、从 i 到 j 的此类游走。

证明。令 $i, j \in V^k$。

若 $i = j$，则在 D_n^m 中从 i 到 j 的最短游走是平凡游走 $P = \langle i \rangle$，其长度为 $|P| = 0$。若 $i = j = 1$，则在 D_n^m 中从 i 到 j 的任意非平凡游走都可表示为

$$C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1},$$

其中 $s \in \mathbb{N}$和 r_1，…，$r_s \in \{1, \ldots, m\}$。每条这样的游走长度为 $sn \geq n$。若 $i = j \neq 1$，则从 i 到 j 在 D_n^m中的任何非平凡游走都必须经过顶点 1，并且可以描述为以下两种形式之一：

$$Q_{1i} \circ Q_{i1}$$

or

$$Q_{1i} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中 Q_{i1} 和 Q_{1i} 分别是 C^k 中从 i 到 1 以及从 1 到 i的最短路径， $s \in \mathbb{N}$和 r_1，…，$r_s \in \{1, \ldots, m\}$。这些游走的长度分别为 n和 $(s+1)n > n$。

现在，假设 $i \neq j$。我们区分三种情况：

(I) $i = 1$

由于 $j \in V^k$，存在 $\ell \in \{2, ..., n\}$，使得 $j = (k-1)(n-1) + \ell$。在 D_n^m 中，从 1 到 j 的最短游走为

$$P_{1j} = \Big\langle i = 1, (k-1)(n-1) + 2, \ldots, (k-1)(n-1) + (\ell - 1), (k-1)(n-1) + \ell = j \Big\rangle,$$

长度为 $\ell - 1$。在 D_n^m 中，从 1 到 j 的任意其他游走都可以写成

$$P_{1j} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1},$$

其中 $s \in \mathbb{N}$ 和 r_1、.....、$r_s \in \{1, \ldots, m\}$，总长度为 $sn + |P| > n$。因此，当且仅当 $\ell = n$ 时，存在一条长度为 $n-1$、在 D_n^m 中从 $i = 1$ 到 j 的游走，即 $j = (k-1)(n-1) + n$。此时， P_{1j} 是 D_n^m 中从 $i = 1$ 到 j 的唯一一条长度为 $n-1$ 的游走。

(II) $j = 1$

由于 $i \in V^k$，存在 $\ell \in \{2, ..., n\}$ 使得 $i = (k-1)(n-1) + \ell$。在 D_n^m中从 i 到 1 的最短游走为

$$P_{i1} = \Big\langle i = (k-1)(n-1) + \ell, (k-1)(n-1) + (\ell + 1), \ldots, (k-1)(n-1) + n, 1 = j \Big\rangle,$$

其长度为 $n - \ell + 1$。从 i到 1 的 D_n^m中的任何其他游走都可以表示为

$$C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ P_{i1},$$

其中 $s \in \mathbb{N}$和 r_1，.....，$r_s \in \{1, \ldots, m\}$，其长度为 $sn + (n - \ell + 1) > n$。因此，当且仅当 $\ell = 2$时，存在一条长度为 $n-1$、从 i到 $j = 1$ 的游走，即 $i = (k-1)(n-1) + 2$。在此情况下，该游走是唯一的。

(III) $i \neq 1$ 和 $j \neq 1$。

Let

$$i = (k-1)(n-1) + \ell, \quad j = (k-1)(n-1) + \ell',$$

对于某个 ℓ，$\ell' \in \{2, \ldots, n\}$，满足 $\ell \neq \ell'$。

若 $\ell < \ell'$，则在 D_n^m 中从 i 到 j 的最短游走为

$$P_{ij} = \Big\langle i = (k-1)(n-1) + \ell, (k-1)(n-1) + (\ell + 1), \ldots, (k-1)(n-1) + (\ell' - 1), (k-1)(n-1) + \ell' = j \Big\rangle,$$

长度为 $\ell' - \ell < n - 1$。在 D_n^m 中从 i 到 j 的任何其他游走均可描述为

$$P_{ij} \circ Q_{1i} \circ Q_{i1}$$

或表示为

$$P_{ij} \circ Q_{1i} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中， Q_{i1} 和 Q_{1i} 分别是 C^k 中从 i到 1 以及从 1 到 i的最短路径，$s \in \mathbb{N}$ 和 r_1、.....、$r_s \in \{1, \ldots, m\}$。这些游走的长度分别为 $n + |P_{ij}| > n$ 和 $(s+1)n + |P_{ij}| > n$。因此，若 $\ell < \ell'$，则不存在一条从 i 到 j、长度为 $n-1$ 的游走。若 $\ell > \ell'$，则在 D_n^m 中从 i 到 j 的最短游走经过顶点 1，且表示为

$$P_{ij} = \Big\langle i = (k-1)(n-1) + \ell, (k-1)(n-1) + (\ell + 1), \ldots, (k-1)(n-1) + n, 1, (k-1)(n-1) + 2, \ldots, (k-1)(n-1) + \ell' = j \Big\rangle,$$

总长度为 $(n - \ell + 1) + (\ell' - 1) = n - \ell + \ell'$。在 D_n^m 中从 i 到 j 的任何其他游走均可描述为

$$Q_{1j} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中， Q_{i1} 和 Q_{1j} 分别是 C^k 中从 i 到 1 以及从 1 到 j的最短路径，$s \in \mathbb{N}$和 r_1、.....、$r_s \in \{1, \ldots, m\}$。从 i到 j的每条此类游走的长度为

$sn+|P_{ij}|>n$。因此，若 $\ell>\ell'$，则当且仅当 $\ell'=\ell-1$时， D_n^m中存在一条从 i 到 j、长度为 $n-1$的游走。在这种情况下， P_{ij} 是 D_n^m中从i到 j、长度为 $n-1$ 的唯一游走。□

此类游走的存在性与唯一性凸显了每个有向圈严格的定向与标记方式。前述引理为确定 *Drazin* 逆的精确支撑奠定了组合学基础。

引理2.2。设 $k,r\in\{1,\dots,m\}$ 且 $k\neq r$。当且仅当存在$\ell\in\{3,\dots,n\}$ 使得.....时，在 D_n^m 中存在一条长度为 $n-1$、从顶点 $i\in V^k\setminus\{1\}$ 到顶点 $j\in V^r\setminus\{1\}$ 的游走

$$i=(k-1)(n-1)+\ell \ \text{ and } \ j=(r-1)(n-1)+(\ell-1).$$

此外，在这种情况下，该游走是唯一的。

证明。由于 $i\in V^k\setminus\{1\}$ 且 $j\in V^r\setminus\{1\}$，存在 $\ell,\ell'\in\{2,\dots,n\}$，使得

$$i=(k-1)(n-1)+\ell \ \text{ and } \ j=(r-1)(n-1)+\ell'.$$

考虑游走

$$P_{ij}=\Big\langle i=(k-1)(n-1)+\ell,(k-1)(n-1)+(\ell+1),\dots,(k-1)(n-1)+n,1,$$
$$(r-1)(n-1)+2,\dots,(r-1)(n-1)+\ell'=j\Big\rangle.$$

这条游走先在 C^k 中从 i 到 **1**，然后在 C^r 中从 **1** 到 j。它是 D_n^m 中从 i 到 j 的最短游走，长度为 $(n-\ell+1)+(\ell'-1)=n-\ell+\ell'$。要使其等于$n-1$，必须满足 $\ell\geq 3$ 和 $\ell'=\ell-1$。从 i 到 j 的任何其他 D_n^m 中的游走都可以表示为

$$Q_{1j}\circ C^{r_s}\circ\ldots\circ C^{r_1}\circ Q_{i1},$$

其中， C^k 中从 i 到 **1** 的最短路径为 Q_{i1}， C^r 中从 **1** 到 j 的最短路径为 Q_{1j}， $s\in\mathbb{N}$ 和 r_1、.....、 $r_s\in\{1,\dots,m\}$。从 i 到 j 的这类游走的长度均为$sn+|P_{ij}|>n$。因此，当且仅当$\ell\geq 3$ 和 $\ell'=\ell-1$时， D_n^m 中存在一条长度为 $n-1$、从 i 到 j 的游走；在这种情况下，该游走 P_{ij} 是唯一的。□

引理2.3. 对于任意一对顶点 $i,\ j\in V$，若 P是 D_n^m中从 i 到 j、长度为 $2n-1$ 的游走，则以下情形恰有一种成立：

(a) $i=1$，且存在 $k\in\{1,\dots,m\}$，使得 $j=(k-1)(n-1)+n$。在此情形下，游走 P 可写为

$$P=P_{1j}\circ C^s,$$

其中， $s\in\{1,\dots,m\}$ 和 P_{1j} 是 D_n^m中从 i到 j、长度为 $n-1$ 的唯一游走；

(b) $j=1$，且存在 $k\in\{1,\dots,m\}$，使得 $i=(k-1)(n-1)+2$。在此情形下，游走 P 可表示为

$$P=C^s\circ P_{i1},$$

其中， $s\in\{1,\dots,m\}$ 和 P_{i1} 是 D_n^m中从 i到j、长度为 $n-1$ 的唯一游走；

(c) 存在 $k,r\in\{1,\dots,m\}$ 和 $\ell\in\{3,\dots,n\}$，使得 $i=(k-1)(n-1)+\ell$,$j=(r-1)(n-1)+(\ell-1)$，且游走 P可写为

$$P=Q_{1j}\circ C^s\circ Q_{i1},$$

其中 $s\in\{1,\dots,m\}$，且拼接 $Q_{1j}\circ Q_{i1}$构成了 D_n^m 中从 i 到 j 的唯一一条长度为 $n-1$ 的游走。

证明。在 D_n^m中长度为 $2n-1$ 的任意游走 P都必须恰好包含其中一个有向圈C^1, ..., C^m，其余的 $n-1$条边必须构成一条从 i到 j的游走。因此， P可分解为一个长度为 n的有向圈 C^s，以及一条连接 i与 j、长度为 $n-1$ 的游走。

长度为 $n-1$ 的 D_n^m中所有可能的游走均在引理 2.1 和 2.2中分类。这三种情况 (a)-(c) 分别对应此类游走可能的类型之一，而加入有向圈则补足了额外的 n条边，使总长度达到$2n-1$。

因此，从 i 到 j 的每条长度为 $2n-1$ 的游走，必定恰好属于所述形式之一。□

以下结果可由前述引理以及有向图 D_n^m 恰好包含 m 个有向圈 C_n 这一事实直接推出。

引理 2.4。设 $i,j \in V$。在 D_n^m 中，存在一条从顶点 i 到顶点j、长度为 $2n-1$ 的游走，当且仅当在 D_n^m 中存在一条从 i 到 j、长度为 $n-1$ 的游走。在这种情况下，在 D_n^m 中恰好存在 m 条从 i 到 j 、长度为 $2n-1$ 的不同游走。

如下所述，最后这两个引理可以直接推广。

引理 2.5。设 $i,j \in V$，且 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $p \geq 2$。若 P 是 D_n^m 中一条从顶点 i 到顶点 j、长度为 $pn-1$ 的游走，则以下情况恰有一种成立：

(a) $i=1$，并且存在 $k \in \{1,\ldots,m\}$ 使得 $j=(k-1)(n-1)+n$。在这种情况下，P 可以表示为

$$P = P_{1j} \circ C^{r_{p-1}} \circ \ldots \circ C^{r_1},$$

其中 r_1，……，$r_{p-1} \in \{1,\ldots,m\}$，且 P_{1j}是 D_n^m 中从i 到 j 的长度为 $n-1$的唯一游走；

(b) $j=1$，并且存在 $k \in \{1,\ldots,m\}$ 使得 $i=(k-1)(n-1)+2$。于是，P可以写成

$$P = C^{r_{p-1}} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ P_{i1},$$

其中 r_1，……，$r_{p-1} \in \{1,\ldots,m\}$，且 P_{i1}是 D_n^m 中从i 到 j 的长度为 $n-1$的唯一游走；

(c) 存在 k，$r \in \{1,\ldots,m\}$和 $\ell \in \{3,\ldots,n\}$ 使得 $i=(k-1)(n-1)+\ell$，$j=(r-1)(n-1)+(\ell-1)$ 和 P可表示为

$$P = Q_{1j} \circ C^{r_{p-1}} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中 r_1、……、$r_{p-1} \in \{1,\ldots,m\}$ 和 $Q_{1j} \circ Q_{i1} = P_{ij}$ 是 D_n^m中从 i到 j的唯一一条长度为$n-1$ 的游走。

证明。构造一条 P长度为 $pn-1$、从 i到 j的游走，$p-1$需先拼接长度为 n的有向圈，再接上一条长度为 $n-1$、从 i到 j的游走。引理 $n-1$ 给出了这类长度为 2.1 和 2.2的游走的存在性和结构，而涉及 $p-1$ 有向圈的所有组合都会产生有效游走。这三种情况涵盖了所有能够容纳此类游走的可能配置。□

引理 2.6。设 i，$j \in V$，并设 $p \in \mathbb{N}$满足 $p \geq 2$。当且仅当在 D_n^m中存在一条从顶点 i到顶点 j、长度为 $pn-1$的游走时，在 D_n^m中存在一条从 i到 j、长度为 $n-1$ 的游走。在这种情况下，在 D_n^m中从 i到 j、长度为 $pn-1$ 的游走总数恰为 m^{p-1}。

证明。根据前一个引理，当且仅当存在一条从 i到 j、长度为 $n-1$ 的游走时，才存在一条从 i 到 j 、长度为 $pn-1$ 的游走。每条这样的长度为 $pn-1$ 的游走都必须恰好包含 $p-1$ 个有向圈 $C^{r_1},\ldots,C^{r_{p-1}}$，这些有向圈可以从 D_n^m 中的 m 个可用有向圈里独立选取。由于允许重复，因此共有 m^{p-1} 种这样的组合。□

这一结果量化了有向图中长游走的数量如何随可用有向圈的数量变化。它还体现了该结构的规律性：有向圈的重复出现会使可行游走的计数呈乘法增长。

现在我们给出一组结果，用以刻画并计数 D_n^m 中的游走。这些结果将在下一节的证明中发挥关键作用。

命题 2.1. 对于所有 $i,j \in V$， D_n^m 中从顶点 i 到顶点 j、长度为 $2n-1$ 的游走数恰好是从 i 到 j、长度为 $n-1$ 的游走数的 m 倍。

证明。设 i， $j \in \{1,\ldots,m(n-1)+1\}$。根据引理 2.1 和 2.2，要么不存在从 i 到 j 的长度为 $n-1$ 的游走 D_n^m，要么存在唯一一条这样的游走。此外，根据引理 2.4，存在从 i到 j的长度为 $2n-1$的游走，当且仅当这两个顶点之间存在长度为 $n-1$ 的游走。在这些情况下，长度为$2n-1$的游走数恰好为 m。□

如下所示，这一结果可自然推广到更长长度的游走。

命题 2.2。设 $p \in \mathbb{N}$且 $p \geq 2$。对于所有 i， $j \in V$， D_n^m中从顶点 i到顶点 j的长度为 $pn-1$的游走数，是从 i到 j的长度为$n-1$的游走数的 m^{p-1}倍。

证明。设 i， j属于 $\{1,\ldots,m(n-1)+1\}$。与之前一样，根据引理 2.1和 2.2，从 $n-1$到 i不存在长度为 j的游走，或者恰好存在一条。引理 2.6 指出，存在这样一条长度为 $pn-1$ 的游走，当且仅当 $n-1$与 i之间存在长度为 j的游走；在这种情况下，恰好有 m^{p-1}条长度为 $pn-1$的此类游走。□

引理 2.7。对于每个 $i \in V \setminus \{1\}$，在 D_n^m中都恰好存在一条长度为 n、从 i到其自身的游走。

证明。由于 $i \in V \setminus \{1\}$，存在 $k \in \{1,\ldots,m\}$和 $\ell \in \{2,\ldots,n\}$，使得$i=(k-1)(n-1)+\ell$。从 i到其自身的最短游走是 $\langle i \rangle$，长度为 0。该游走

$$P = \Big\langle i=(k-1)(n-1)+\ell, (k-1)(n-1)+(\ell+1), \ldots, (k-1)(n-1)+n, 1, \\ (k-1)(n-1)+2, \ldots, (k-1)(n-1)+(\ell-1), (k-1)(n-1)+\ell = i \Big\rangle$$

长度为 n，并始终位于有向圈 C^k 内，最终返回 i。任何其他从 i 出发又回到自身的游走都必须包含一个或多个额外的圈，并且可以写成

$$Q_{1i} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中， Q_{i1} 和 Q_{1i} 分别是 C^k 中从 i到 1 以及从 1 到 i的最短路径，$s \in \mathbb{N}$ 和 r_1、……、$r_s \in \{1,\ldots,m\}$。这些从 i 出发又回到自身的游走长度为 $(s+1)n$，严格大于 n。□

引理 2.8。对于每个 $k \in \{1,\ldots,m\}$，在 D_n^m 中都恰好存在一条长度为 $n-2$ 的游走，从顶点 $(k-1)(n-1)+2$ 到 $(k-1)(n-1)+n$。

证明。令 $k \in \{1,\ldots,m\}$, $i=(k-1)(n-1)+2$ 和 $j=(k-1)(n-1)+n$。 D_n^m 中从 i到 j的最短游走为

$$P_{ij} = \Big\langle i=(k-1)(n-1)+2, (k-1)(n-1)+3, \ldots, (k-1)(n-1)+n = j \Big\rangle,$$

长度为 $n-2$。从 i 到 j 的任何其他游走都必须经过顶点 1 绕行，并且可以写成

$$P_{ij} \circ Q_{1i} \circ Q_{i1}$$

or

$$P_{ij} \circ Q_{1i} \circ C^{r_s} \circ \ldots \circ C^{r_1} \circ Q_{i1},$$

其中， Q_{i1} 和 Q_{1i} 分别是 C^k 中从 i到 1 以及从 1 到 i的最短路径，$s \in \mathbb{N}$ 和 r_1、……、$r_s \in \{1,\ldots,m\}$。这些从 i 到 j 的游走长度分别为 $n+|P_{ij}|$ 和 $(s+1)n+|P_{ij}|$，均严格大于 $n-2$。□

引理 2.9。对于每个 $k \in \{1,\ldots,m\}$，在 D_n^m中从顶点 $(k-1)(n-1)+2$ 到 $(k-1)(n-1)+n$，恰好存在一条长度为$2n-2$ 的游走。

证明。令 $k \in \{1, \ldots, m\}$， $i = (k-1)(n-1)+2$ 和 $j = (k-1)(n-1)+n$。如引理 2.8所示，从 i到 j 的最短游走为

$$P_{ij} = \Big\langle i = (k-1)(n-1)+2, (k-1)(n-1)+3, \ldots, (k-1)(n-1)+n = j \Big\rangle,$$

长度为 $n-2$。若附加路径 $Q_{1i} \circ Q_{i1}$，即从 i 到 1 再返回的最短往返游走，则总游走

$$P_{ij} \circ Q_{1i} \circ Q_{i1}$$

长度为 $n + |P_{ij}| = 2n-2$。任何从 i 到 j 且包含一个或多个额外有向圈的更长游走，其长度都必然超过此长度。□

3. Adjacency matrices of oriented Dutch windmill graphs

设 M 表示定向荷兰风车图 D_n^m的邻接矩阵。容易验证，$\mathsf{rank}(M) = m(n-2)+2$。此外， M 可逆当且仅当 $m = 1$，此时 $M^{-1} = M^T$。

本节余下部分，我们将重点讨论 $m > 1$的情形。我们将证明 M不是群可逆的，确定其 Drazin指标为 $n-1$，并推导其 Drazin逆的显式表达式。

回顾可知， M^k的 $(i,\ j)$ 项给出了在 D_n^m中从顶点 i到顶点 j 的长度为 k的游走数。

下面的定理在确定 M 的Drazin指标以及推导其Drazin逆的闭式表达式方面发挥着核心作用。

定理 3.1。设 M 是定向荷兰风车图D_n^m的邻接矩阵。则以下陈述成立：

(1) $M^{2n-1} = mM^{n-1}$; (2) $M^{n-1} \neq 0$; (3) $M^{2n-2} \neq mM^{n-2}$;
(4) $M^n \neq mI$，其中 I 是 m阶单位矩阵 $(n-1)+1$; (5) $M^{n^2-1} = m^{n-1}M^{n-1}$。

证明。(1.) 根据命题 2.1，对于任意一对顶点 i、 $j \in V$，从 i 出发到 j 在 D_n^m中的长度为 $2n-1$ 的游走数恰好等于 m 倍的从 i 到 j的长度为 $n-1$的游走数。因此，我们有

$$(M^{2n-1})_{ij} = m(M^{n-1})_{ij} \quad \text{for all } i, j,$$

由此得到 $M^{2n-1} = mM^{n-1}$。

(2.) 引理 2.1 确保存在长度为 $n-1$ 的游走，位于 D_n^m中，因此 $M^{n-1} \neq 0$。

(3.) 反设 $M^{2n-2} = mM^{n-2}$。考虑位置 $(2, n)$ 处的元素。根据引理 2.8，从顶点 2 到顶点 n 恰好存在一条长度为 $n-2$ 的游走，因此 $(M^{n-2})_{2,n} = 1$，进而 $(mM^{n-2})_{2,n} = m$。然而，引理 2.9指出，从 2 到 n 恰好存在一条长度为 $2n-2$ 的游走，因此 $(M^{2n-2})_{2,n} = 1$，这与元素相同的假设矛盾。因此， $M^{2n-2} \neq mM^{n-2}$。

(4.) 根据引理 2.7，我们知道 M^n的所有对角元素（位置 (1，1) 处的元素除外）均等于 1。由于 $m > 1$，因此可得 $M^n \neq mI$，其中 I是与 M阶数相同的单位矩阵。

(5.) 最后，根据命题 2.2，从任意顶点 n^2-1 到任意顶点i j 的长度为 m^{n-1} 的游走数量，是这两个顶点之间长度为 $n-1$ 的游走数量的 m^{n-1} 倍。因此，

$$(M^{n^2-1})_{ij} = m^{n-1}(M^{n-1})_{ij} \quad \text{for all } i, j,$$

这意味着 $M^{n^2-1} = m^{n-1}M^{n-1}$。 □

这一结果表明，有向图的游走结构对其邻接矩阵施加了强有力的代数约束。例如，关系 $M^{2n-1} = mM^{n-1}$ 反映了这样一个事实：所有长度为 $2n-1$ 的游走，都是通过在长度为 $n-1$ 的游走后延伸一个完整的有向圈得到的，其中 m 种选择对应于可用的 m 个有向圈。

3.1. **Drazin指标**。 根据定理 3.1(1.)，我们知道多项式

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2n-1} - m\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda^n - m)$$

消去邻接矩阵 M。此外，定理 3.1(2.)-(4.) 表明，多项式

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda^{n-1}, \quad \varphi_2(\lambda) = \lambda^{2n-2} - m\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^n - m), \quad \varphi_3(\lambda) = \lambda^n - m$$

不是 M 的消去多项式。因此， $\varphi(\lambda)$ 是形如 $\lambda^{n-1}g(\lambda)$ 的最低次数消去多项式，其中 $\gcd(\lambda, g(\lambda)) = 1$ ，且对于某个 $h(\lambda)$，有 $\psi_A(\lambda) = \lambda^{n-1}h(\lambda)$，并且 $\gcd(\lambda, h(\lambda)) = 1$。根据这些事实，我们推导出以下结果。

定理 3.2。 定向荷兰风车图 D_n^m 的邻接矩阵的 Drazin指标为 $n-1$。

*Drazin*指标等于 $n-1$ 这一事实反映了通过邻接矩阵的幂完整捕捉有向图循环结构所需的最小游走长度。这凸显了有向图反馈结构的深度如何决定其广义逆的代数复杂度。

由上述结果可知，定向荷兰风车图的邻接矩阵不存在群逆，因为其 Drazin指标满足 $n-1 \geq 2$。

3.2. **Drazin逆**。 奇异方阵 A 的 Drazin逆可通过所谓的核-幂零分解求得，如下所示。给定奇异方阵 A，存在可逆矩阵 U 和 C，以及幂零矩阵 N，使得 $N^k = 0 \neq N^{k-1}$，其中某个正整数为 k，并且

$$A = U \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} U^{-1}.$$

在此情形下， A 的 Drazin逆为

$$A^D = U \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{-1},$$

其中 $\text{ind}(A) = k$。

现在，设 A 为方阵，并假设 $k =$ind(A)，且存在矩阵 X 使得 $A^k = A^{k+1}X$。那么，应用核-幂零分解可得， A 的 Drazin逆可表示为

$$A^D = A^k X^{k+1}.$$

当 A 的一个消去多项式具有形式$\chi_A(\lambda) = \lambda^k g(\lambda)$，且 $\gcd(\lambda, g(\lambda)) = 1$ 并且 $g(\lambda) = g_0 + g_1\lambda + \cdots + g_\ell\lambda^\ell$，其中 $\ell \geq 1$ 时，这一表达式尤其适用。从

$$0 = A^k g(A) = A^k(g_0 I + g_1 A + \cdots + g_\ell A^\ell),$$

我们得到

$$g_0 A^k = A^{k+1}(-g_1 I - g_2 A - \cdots - g_\ell A^{\ell-1}),$$

由此可得

$$A^k = A^{k+1}X, \quad \text{with} \quad X = -\frac{1}{g_0}(g_1 I + g_2 A + \cdots + g_\ell A^{\ell-1}).$$

将其应用于我们的情形，根据定理3.1(1.)，我们知道

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda^n - m)$$

是 M的消去多项式，其中 $g(\lambda) = \lambda^n - m$，满足 $\gcd(\lambda, g(\lambda)) = 1$。因此，由于 ind$(M) = n-1$ 根据定理 3.2，我们令

$$X = -\frac{1}{-m}M^{n-1} = \frac{1}{m}M^{n-1},$$

使得

$$M^{n-1} = M^n X.$$

那么， M 的Drazin逆为

$$M^D = M^{n-1}X^n = \frac{1}{m^n}M^{n-1}M^{(n-1)n} = \frac{1}{m^n}M^{n^2-1}.$$

由定理3.1(5)，可得

$$M^D = \frac{1}{m^n}m^{n-1}M^{n-1} = \frac{1}{m}M^{n-1}.$$

因此， M 的 Drazin逆只是 M^{n-1}的一个倍数，其中标量因子为 $\frac{1}{m}$。为确定其非零元素，我们使用引理2.1 和2.2，它们描述了 D_n^m中长度为 $n-1$ 的游走结构。这些结果表明， M^D的非零元素（均等于 $\frac{1}{m}$）仅出现在满足以下条件的位置（i,j）：

(i.) $i=1$ 和 $j=(k-1)(n-1)+n$，对某个 $k\in\{1,\dots,m\}$；(ii.) $i=(k-1)(n-1)+2$ 和 $j=1$，对某个 $k\in\{1,\dots,m\}$；(iii.) $i=(k-1)(n-1)+\ell$ 和 $j=i-1$，对某个 $k\in\{1,\dots,m\}$ 和 $\ell\in\{3,\dots,n\}$；(iv.) $i=(k-1)(n-1)+\ell$和 $j=(r-1)(n-1)+(\ell-1)$，其中 k、 $r\in\{1,\dots,m\}$和 $\ell\in\{3,\dots,n\}$互不相同。

这些位置恰好对应于定向荷兰风车图 D_n^m中由长度为 $n-1$的游走连接的顶点对，正如前述引理所详述的。

由前述结果可得以下定理。

定理3.3。 设 M 为定向荷兰风车图D_n^m的邻接矩阵，其中 $m\geq 2$ 和 $n\geq 3$。则 M 的Drazin逆为

$$M^D = \frac{1}{m}M^{n-1}.$$

此外， M^D中唯一的非零元素均等于 $\frac{1}{m}$，且恰好出现在满足以下条件之一的位置(i,j):

(1) $i=1$和 $j=(k-1)(n-1)+n$，其中 $k\in\{1,\dots,m\}$；(2) $i=(k-1)(n-1)+2$和 $j=1$，其中 $k\in\{1,\dots,m\}$；(3) $i=(k-1)(n-1)+\ell$和 $j=i-1$，其中 $k\in\{1,\dots,m\}$和 $\ell\in\{3,\dots,n\}$；(4) $i=(k-1)(n-1)+\ell$和 $j=(r-1)(n-1)+(\ell-1)$，其中 $k,r\in\{1,\dots,m\}$和 $\ell\in\{3,\dots,n\}$互不相同。

这些位置恰好对应于在 D_n^m中由长度为$n-1$ 的游走连接的顶点对。

这一结果表明，Drazin逆反映了有向图中精确的游走关系。每个非零元素都对应顶点之间一条唯一的长度为 $n-1$ 的游走，凸显了组合游走结构与代数伪逆之间的密切联系。

Conclusion

我们确定了定向荷兰风车图的邻接矩阵的Drazin指标，并给出了其Drazin逆的显式表达式。结果揭示了这些有向图的组合结构如何决定其代数可逆性，以及游走计数方法如何自然地导出涉及矩阵幂的多项式恒等式。

本文提出的构造性框架拓展了关于路径、圈和二部图的现有结果，同时展示了递归结构有向图丰富的代数性质。该框架凸显了有向圈的数量和排列方式与其邻接矩阵所满足的代数关系之间的直接对应关系。

除了理论意义之外，这种方法还可应用于离散动力学模型，以及结构化网络中广义逆的符号计算。未来的研究可以探索将类似方法应用于更广泛的合并有向图类别，或荷兰风车结构的加权版本，在这些情形下，代数

与组合学视角的结合或可为复杂离散系统的谱分析带来更多见解。

Acknowledgements

本研究部分由葡萄牙基金通过FCT（葡萄牙科学技术基金会）资助，项目编号为UID/00013/2025。

Data Availability

本研究期间未生成或分析任何数据集。所有结果均为理论结果，并完整包含于本文稿中。

Conflict of interest

作者声明不存在利益冲突。

References

[1] R. Balaji、R. B. Bapat和S. Goel。具有偶数个顶点的轮图距离矩阵的一个逆公式。《线性代数及其应用》，610：274–292，2021。[2] R. B. Bapat。《图与矩阵》。Universitext丛书。施普林格，伦敦，2014。[3] R. B. Bapat和E. Ghorbani。三角矩阵和二部图的逆。《线性代数及其应用》，447：68–73，2014。[4] A. Ben-Israel和T. N. E. Greville。《广义逆：理论与应用》。施普林格-弗拉格，纽约，第二版，2003。[5] S. L. Campbell和C. D. Meyer Jr. 线性变换的广义逆。Pitman，伦敦，1979。[6] M. Catral、D. D. Olesky和P. van den Driessche。具有路径图的矩阵的群逆。《线性代数电子期刊》，17：219–233，2008。[7] M. Catral和P. van den Driessche。二部矩阵的Drazin逆的分块表示。《线性代数电子期刊》，18：98–107，2009。[8] C. D. Godsil。树的逆。《组合数学》，5(1)：33–39，1985。[9] J. J. McDonald、R. Nandi和K. C. Sivakumar。与某些图类相关的矩阵的群逆。《线性代数电子期刊》，38：204–220，2022。[10] C. McLeman和A. McNicholas。图可逆性。《图与组合》，30：977–1002，2014。[11] K. C. Sivakumar和R. Nandi。有向圈、轮图和扫帚图邻接矩阵的群逆。《计算与应用数学》，41(5)：196，2022。

C. Mendes Araújo, CMAT – Centro de Matemática and Departamento de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal*Email address*: clmendes@math.uminho.pt

Faustino Maciala, CMAT – Centro de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal; Departamento de Ciências da Natureza e Ciências Exatas do Instituto Superior de Ciências da Educação de Cabinda – ISCED-Cabinda, Angola.
Email address: fausmacialamath@hotmail.com

Pedro Patrício, CMAT – Centro de Matemática and Departamento de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal*Email address*: pedro@math.uminho.pt