arXiv:2603.15562v1 [math.CV] 16 Mar 2026

开黎曼曲面上全纯映射的曲率估计

Yunling Chen 和 Dinh Tuan Huynh

摘要。我们应用射流微分技术，为开黎曼曲面 M建立高斯曲率估计；该曲面配备了由非恒定全纯映射诱导的共形度量，而此映射在次数足够高的一般超曲面上高度分歧。

1. 引言

设 M是开黎曼曲面，且 $n \geq 3$。设 $f = (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$是一个共形极小浸入。$f$的 (1，0)-微分 $\partial f = (\partial f_1, \ldots\ldots, \partial f_n)$ 是一个处处不为零的全纯映射，满足方程

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial f_i)^2 = 0 \quad \text{everywhere on } M.$$

共形极小浸入 f 的广义高斯映射 $g\colon M \to Q_{n-2} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ 定义为

$$g(z) := \left[\frac{\partial f_1}{\partial z} : \cdots : \frac{\partial f_n}{\partial z}\right],$$

其中 $Q_{n-2} = \left\{ [z_1 : \ldots\ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^{n-1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0 \right\}$ 是 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 中的超二次曲面，且 $z = x + iy$是 M上的全纯坐标图。简记为 高斯映射 ，该共形极小浸入g 确实是全纯的 [15]。这使人们得以运用复分析方法研究欧氏空间中的极小曲面，并推动了该理论的诸多基础性发展。

在 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 的低维情形下，将射影圆锥曲线 Q_1 与黎曼球面 $\mathbb{CP}^1$ 等同后，可以将高斯映射 g 视为定义在 M 上的亚纯函数。当 M 非平坦且完备时，人们证明了许多类似于小皮卡定理的结果，适用于 g。例如，Osserman [28] 证明，补集 $\mathbb{CP}^1 \setminus g(M)$ 在 $\mathbb{CP}^1$ 中的对数容量为零。Xavier [36] 通过证明该补集至多包含 6 个点，改进了这一结果。Fujimoto [17], 得到了尖锐结果，证明 g 至多可以避开 4 个点。此外，Fujimoto [16] 为高斯映射引入了非积分亏量的概念，并建立了非积分缺陷关系。这一关系类似于奈望林纳理论中的经典缺陷关系，并对此前的小皮卡型定理进行了量化。

2020 数学主题分类。 53A10,32H30。关键词与短语。 值分布理论、高斯映射、极小曲面、双曲性。

关于这些结果，Fujimoto [17] 证明，若共形极小浸入 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$中的高斯映射 g 避开至少 5 个互不相同的点，则存在一个常数 C，它仅取决于被避开的点，使得

$$|K(q)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(q) \leq C, \tag{1.1}$$

其中 $K(q)$ 是 M 在 q 处的高斯曲率，而 $\mathrm{d}(q)$ 是从 q 到 M 边界的测地距离。

受全纯曲线值分布理论的启发，关于高维共形极小浸入的高斯映射的许多推广结果已相继建立。值得注意的是，Fujimoto [19] 证明，若完备极小曲面 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 的广义高斯映射遗漏了一族 $q > {}^{n}{}_{(n+1)\,2}$ 个处于一般位置的超平面 $\mathbb{CP}^{n-1}$，则该映射必为线性退化的。随后，Ru [32] 通过证明在这些条件下，这类广义高斯映射必为常数，进一步加强了这一结果。在定量方面，文献 [18, 19, 20]中建立了若干高维非积分缺陷关系。此外，Osserman-Ru [29]针对遗漏超过 1.1式所示的 ${}^{n}{}_{(n+1)\,2}$ 个处于一般位置的超平面的广义高斯映射，得到了曲率估计 $\mathbb{CP}^{n-1}$，从而将 Fujimoto 的结果推广到了高维情形。最近，Chen-Li-Liu-Ru [8]利用由全纯映射诱导的加权共形度量，推广了曲率估计结果：。不久之后，Si 在较弱的假设下推广了他们的结果：高斯映射在一族处于一般位置且重数充分高的超曲面上分歧。

研究高斯映射的一项关键工具源自值分布理论中的第二主定理。作为小皮卡定理在高维情形下的推广，Kobayashi猜想提出，一般高次数超曲面在射影空间中是双曲的，其补集也是如此。近几十年来，这一猜想取得了重大进展 [2, 4, 5, 6, 10, 13, 14, 31, 35], ，也拓展了第二主定理的适用范围[22]。因此，自然会想到为开黎曼曲面上的共形极小浸入的高斯映射寻求双曲性结果的类似结论。第二位作者将 [22]中的主要结果推广到从 $\mathbb{C}$中的有界圆盘出发的全纯映射，从而证明了一个完备极小曲面的广义高斯映射为常值 $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$，且该曲面省略了 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 中次数足够高的一般超曲面。随后， [7]建立了射影簇之间全纯映射的非积分缺陷关系的一个定量结果。

本文旨在给出从开黎曼曲面 M 到 $\mathbb{CP}^n$的全纯映射的曲率估计，其中该映射以足够高的重数在次数足够大的一个一般超曲面上分歧。首先，我们证明高斯曲率估计（1.1）可由某个适当的对数喷微分的存在性推出。

定理 1.1。设 M 是一个开黎曼曲面，且 $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 是一个非常值全纯映射。对于正整数 p，考虑 M 上由下式给出的共形度量

$$\mathrm{d}s^2 = \|F\|^{2p}|\omega|^2,$$

其中， F 是 f 的约化表示， ω 是 M上的全纯1–形式。设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是一个次数为 d的一般小林双曲超曲面，满足 $f(M) \not\subset D$。假设对于

两个正整数 m、 $\tilde{m}$ 满足 $\tilde{m} > 2pm$，子集

$$\mathrm{Bs}\left(E_{n,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\tilde{m}}\right)\cap(\mathbb{CP}^n\setminus D)$$

维数至多为零。还假设 f 在 D 上以至少 μ 的重数分歧，且

$$\frac{1}{\mu}<\frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m}-2p\right).$$

那么存在一个仅依赖于 D 的正常数 C，使得

$$|K(q)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(q)\leq C, \tag{1.2}$$

其中 $K(q)$ 是度量$\mathrm{d}s^2$ 下 M在 q 处的高斯曲率，而$\mathrm{d}(q)$ 是同一度量下从 q 到 M 边界的测地距离。

基于 Green-Griffiths 喷丛方面的最新进展，我们证明定理1.1的假设对次数足够大的一般超曲面成立。

推论 1.2. 设 M 是一个开黎曼曲面，且 $f\colon M\to\mathbb{CP}^n$ 是一个非常值全纯映射。对任意正整数 p，考虑 M 上的如下共形度量:

$$\mathrm{d}s^2=\|F\|^{2p}|\omega|^2,$$

其中 F 是 f 的约化表示， ω 是 M上的全纯1–形式。设 $D\subset\mathbb{CP}^n$ 是次数为

$$d\geq d_{n,p}=\begin{cases}16n(p+5n-2)\left(\sqrt{2n}\,\frac{\log\log(2n)}{2}+3\right)^{2n}, & \textit{for } 2\leq n\leq 39;\\ \left(1+\frac{2p-5}{10n+1}\right)(n\log n)^n, & \textit{whenever } n\geq 40\end{cases}$$

使得 $f(M)\not\subset D$。假设 f在 D上分歧，且重数至少为 μ，其中 $\mu>d$.。则存在一个仅依赖于 C 的正常数 D，使得对每个 $q\in M$，曲率估计(1.2)成立。

现在我们概述定理1.1证明中的一些关键思路。我们的目标是在不假设度量1.2完备性的情况下，建立曲率估计（$\mathrm{d}s^2$。为此，沿用 [8] 和 [30], 中的方法，我们需要利用沿一般超曲面 D的适当对数喷微分，得到两个主要结果：关于从开黎曼曲面到 D的非恒定全纯映射的非积分缺陷关系，以及关于从单位圆盘出发、在 D上分歧的全纯映射族的正规性判据。第一个结果涉及非积分缺陷关系（见定理3.5），是通过调整 [7, 定理15]证明中的类似论证得到的。这将 Fujimoto 的技巧从基于朗斯基行列式构造的特殊喷微分推广到一般的对数喷微分。第二个结果是一个正规性判据（见定理4.3），它源于 [22], 中建立的对数喷微分版第二主定理的一个变体，其中全纯映射的源取为单位圆盘。最后，利用上述两个结果，按照 [8] 中的类似论证（另见 [30]），即可证明定理1.1。

2. 对数喷射微分的第二主定理

2.1. 对数喷微分。设 X 是一个维数为 n的复射影簇。对于一点 $x \in X$，考虑全纯芽$(\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$。如果两个这样的芽在$x$附近的某个局部坐标系下具有相同的 k 阶泰勒展开，则称它们等价。解析芽 $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$的等价类称为 k阶喷流，记作 $j_k(f)$，它与局部坐标的选择无关。若 k阶喷流 $j_k(f)$满足 $\mathrm{d}\ f(0) \neq 0$，则称其为正则的。给定一点 $x \in X$，记 $j_k(X)_x$ 为所有解析芽$(\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$的 k阶喷流所构成的向量空间，令

$$J_k(X) := \bigcup_{x \in X} J_k(X)_x,$$

并考虑自然投影

$$\pi_k\colon J_k(X) \to X.$$

那么 $J_k(X)$ 具有以 X 为底空间的全纯纤维丛结构，称为 k上的喷丛 X。一般而言， $J_k(X)$ 不是向量丛。当 $k = 1$ 时，1-喷丛 $J_1(X)$ 与切丛 T_X 有典范同构。

对于开子集 $U \subset X$、截面 $\omega \in H^0(U, T_X^*)$ 以及 k-喷射 $j_k(f) \in J_k(X)|_U$，拉回 $f^*\omega$ 的形式为 $A(z)\,\mathrm{d}\ z$，其中 A 是 U 上的解析函数。由于每个导数 $A^{(j)}\ (0 \leq j \leq k-1)$ 都有良好定义，且与 f 在等价类 $j_k(f)$ 中的表示无关，解析 1- 形式 ω 诱导出全纯映射

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}\colon J_k(X)|_U \to \mathbb{C}^k; \\ &j_k(f)(z) \mapsto \left(A(z), A(z)^{(1)}, \ldots, A(z)^{(k-1)}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

因此，在一个开 子集 U 上，全纯余标架 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \neq 0$ 给出一个平凡化

$$H^0(U, J_k(X)) \to U \times (\mathbb{C}^k)^n,$$

具有以下新的 nk 个独立坐标:

$$\sigma \mapsto (\pi_k \circ \sigma; \tilde{\omega}_1 \circ \sigma, \ldots, \tilde{\omega}_n \circ \sigma),$$

其中 $\tilde{\omega}_i$ 定义如（2.1）所示。分量 $x_i^{(j)}$ （$1 \leq i \leq n$， $1 \leq j \leq k$）称为 $\tilde{\omega}_i \circ \sigma$ 的喷射坐标。在更一般的情形下，若 ω 是定义在 U 上的亚纯1-形式层的一个截面，则诱导映射 $\tilde{\omega}$ 是亚纯的。

现在，假设 $D \subset X$ 是 X 上的正规交叉除子。这意味着，对每个点 $x \in X$，都存在一些以 x 为中心的局部坐标 z_1，……， z_ℓ， $z_{\ell+1}$，……， z_n $(\ell = \ell(x))$，使得 D 定义为

$$D = \{z_1 \ldots z_\ell = 0\}.$$

按照 Iitaka 的说法， [23], 关于沿着 X 的对数余切丛 D，记作 $T_X^*(\log D)$对应于由以下对象生成的局部自由层

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{z_1}, \ldots, \frac{\mathrm{d}z_\ell}{z_\ell}, z_{\ell+1}, \ldots, z_n.$$

若全纯截面 $s \in H^0(U, J_k(X))$ 定义在开子集 $U \subset X$ 上，且对于任意截面 $\omega \in H^0(U', T^*_X(\log\ D))$ 及任意开子集 $U' \subset U$， $\tilde{\omega} \circ s$ 都是解析的，则称其为对数k-jet 场。这类对数 k-jet 场定义了 $J_k(X)$ 的一个子层；它是关于 X 的全纯纤维丛的截面层。该纤维丛称为沿着 D 的对数 k-jet 丛，记作 $J_k(X, -\log\ D)$（见 [26]）。

点 $x \in X$ 处的阶数为 k 、次数为 m 的对数喷微分是定义在 $J_k(X, -\log\ D)$ 在 x上方的纤维上的多项式$Q(f^{(1)}, \dots, f^{(k)})$，满足以下加权齐次性：

$$Q(j_k(f \circ \lambda)) = \lambda^m Q(j_k(f)) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*).$$

考虑这些符号

$$\mathrm{d}^j \log z_i\ (1 \le j \le k, 1 \le i \le \ell) \quad \text{and} \quad \mathrm{d}^j z_i\ (1 \le j \le k, \ell+1 \le i \le n).$$

令 $\mathrm{d}^j \log z_i$ 或 $\mathrm{d}^j z_i$ 的权为 j。那么，沿 D 在 x 处的阶数为 k、权为m 的对数喷微分，是关于上述符号所对应变量的次数为 m的加权齐次多项式。记由这类多项式张成的向量空间为 $E^{GG}_{k,m}T^*_X(\log\ D)_x$，并令

$$E^{GG}_{k,m}T^*_X(\log D) := \bigcup_{x \in X} E^{GG}_{k,m}T^*_X(\log D)_x.$$

根据 Fa`a di bruno 公式 [9, 24],，可以验证 $E^{GG}_{k,m}T^*_X(\log\ D)$具有向量丛结构，其基底为 X，称为对数 ***Green-Griffiths*** 向量丛 [21]。$E^{GG}_{k,m}T^*_X(\log\ D)$ 的整体截面称为沿 D、阶数为 k且权为 m的对数喷微分 。局部地，对数喷微分形式可写为

(2.2)
$$\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha_1|+2|\alpha_2|+\cdots+k|\alpha_k|=m}} A_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \Big(\prod_{i=1}^{\ell} (\mathrm{d} \log z_i)^{\alpha_{1,i}} \prod_{i=\ell+1}^{n} (\mathrm{d}\, z_i)^{\alpha_{1,i}} \Big) \dots \Big(\prod_{i=1}^{\ell} (\mathrm{d}^k \log z_i)^{\alpha_{k,i}} \prod_{i=\ell+1}^{n} (\mathrm{d}^k\, z_i)^{\alpha_{k,i}} \Big),$$

其中 $\alpha_\lambda = (\alpha_{\lambda,\ 1},\ \dots\dots,\ \alpha_{\lambda,\ n}) \in \mathbb{N}^n (1 \le \lambda \le k)$ 是长度为$|\alpha_\lambda| = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_{\lambda,\ i}$，的多重指标，而 $A_{\alpha_1,\ \dots\dots,\ \alpha_k}$ 是局部定义的全纯函数。

赋予 $\mathrm{d}^s_{z_i} z_i$ 权 s 后，可以将 $\mathrm{d}^j \log\ z_i$ 重写为变量$\mathrm{d}^s_{z_i} z_i (1 \le s \le j)$ 的等压多项式，其系数为整数，即

$$\mathrm{d}^j \log z_i = \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_j) \in \mathbb{N}^j \\ \beta_1+2\beta_2+\cdots+j\beta_j=j}} b_{j\beta} \Big(\frac{\mathrm{d}\, z_i}{z_i} \Big)^{\beta_1} \dots \Big(\frac{\mathrm{d}^j\, z_i}{z_i} \Big)^{\beta_j},$$

其中 $b_{j\beta} \in \mathbb{Z}$。反过来，也可以将 $\mathrm{d}^j_{z_i} z_i$表示为变量 $\mathrm{d}^s \log z_i\ (1 \le s \le j)$ 的权为 j、具有整数系数 [5] 的等压多项式。因此，也可以使用以下对数喷微分的平凡化：

(2.3)
$$\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_k \in \mathbb{N}^n \\ |\beta_1|+2|\beta_2|+\cdots+k|\beta_k|=m}} B_{\beta_1,\dots,\beta_k} \Big(\prod_{i=1}^{\ell} (\frac{\mathrm{d}\, z_i}{z_i})^{\beta_{1,i}} \prod_{i=\ell+1}^{n} (\mathrm{d}\, z_i)^{\beta_{1,i}} \Big) \dots \Big(\prod_{i=1}^{\ell} (\frac{\mathrm{d}^k\, z_i}{z_i})^{\beta_{k,i}} \prod_{i=\ell+1}^{n} (\mathrm{d}^k\, z_i)^{\beta_{k,i}} \Big),$$

其中 $\beta_\lambda = (\beta_{\lambda,1}, \ldots, \beta_{\lambda,n}) \in \mathbb{N}^{n(1\le\lambda\le k)}$ 是长度为 $|\beta_\lambda| = \sum_{1\le i\le n}\beta_\lambda$ 的多重指标,i，并且 $B_{\beta_1,\ldots,\beta_k}$ 是局部定义的全纯函数。

Demailly [12] 改进了 Green-Griffiths 理论，并考察了子丛 $E_{k,\,m}T^*_X(\log\ D)$，其截面是对数喷微分，在源空间 $\mathbb{C}$ 的任意重参数化下保持不变。更确切地说，对于任意 ϕ: (ℂ, 0) $\to$ (ℂ, 0)，一个 k-射流双全纯映射的芽，$E_{k,\,m}T^*_X(\log\ D)$ 的纤维满足

$$Q(j_k(f\circ\phi)) = (\phi'(0))^m\, Q(j_k(f)).$$

丛 $E^{GG}_{k\,,\,m}T^*_X(\log\ D)$ 和 $E_{k,\,m}T^*_X(\log\ D)$ 是研究（对数）双曲性猜想的基本工具。根据基本消失定理， [12, 35], 对于 X 上的任意丰沛线丛 $\mathcal{A}$，$E^{GG}_{k\,,\,m}T^*_X(\log\ D)\otimes\mathcal{A}^{-1}$（或 $E_{k,\,m}T^*_X(\log\ D)\otimes\mathcal{A}^{-1}$）的非平凡整体截面会给出相应的代数微分方程，而所有整曲线 f: $\mathbb{C}\to X\setminus D$ 都必须满足该方程。也就是说，任意整曲线 f: $\mathbb{C}\to X\setminus D$都包含在 $E^{GG}_{k\,,\,m}T^*_X(\log\ D)\otimes\mathcal{A}^{-1}$（或 $E_{k,\,m}T^*_X(\log\ D)\otimes\mathcal{A}^{-1}$）的基 locus 中。然而，尽管做出了许多努力，只有在 $X=\mathbb{CP}^n$ 且超曲面 D 的次数足够大时，控制基 locus 才仍然可行（见[2, 5, 13, 14, 35]）。

2.2. 第二主定理。 正如 Bloch 的著名格言所说：“在有限圆盘中尚未实现的事情，在整个无限平面中也不会出现” [3], ，我们研究从有界圆盘 $\Delta_R := \{z\in\mathbb{C}:\ |z|<R\}$ 到 $0<R<\infty$ 的全纯映射的第二主定理。令 $E=\sum\alpha_i\, a_{i}$
为 Δ_R 中的一个有效除子，其中 $\alpha_i\ge 0$，且对所有 i 都有 $a_i\in\Delta_R$。令 $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。对于任意$0<t<R$，记

$$n^{[k]}(t,E) := \sum_{a_i\in\Delta_t\cap E}\min\{k,\alpha_i\},$$

E 在圆盘 Δ_t 上的 k-截断次数。那么对于 $0<r<R$， E 的截断计数函数（截断级别 k）通过对数平均定义：

$$N^{[k]}(r,E) := \int_0^r \frac{n^{[k]}(t,E)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

当 $k=\infty$ 时，我们省略上标，分别简写为 $n(t,\ E)$ 和 $N(r,\ E)$，代替 $n^{[\infty]}(t,\ E)$ 和 $N^{[\infty]}(r,\ E)$。

设 f: $\Delta_R\to\mathbb{CP}^n$ 是一个全纯圆盘，其在 $[z_0:\ \cdots:\ z_n]$ 的齐次坐标中的约化表示为 $f=[f_0:\ \cdots:\ f_n]$。设 $D=\{Q=0\}$ 是 $\mathbb{CP}^n$ 中由次数为 $d\ge 1$ 的齐次多项式 $Q\in\mathbb{C}[z_0,\ldots,z_n]$ 定义的一个除子。若 $f(\Delta_R)\not\subset D$，则我们将 f 关于 D 的k截断计数函数定义为

$$N^{[k]}_f(r,D) := N^{[k]}\big(r,(Q\circ f)_0\big),$$

其中 $(Q\circ f)_0$ 表示 Δ_R中 $Q\circ f$ 的零除子。

f 关于除子 D 的逼近函数 定义为

$$m_f(r,D) := \int_0^{2\pi} \log \frac{\left\|f(re^{i\theta})\right\|^d \|Q\|}{\left|Q(f)(re^{i\theta})\right|} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

其中， $\|Q\|$ 是 Q 的系数绝对值的最大值，并且

$$\left\|f(z)\right\| := \max\{|f_0(z)|,\ldots,|f_n(z)|\}.$$

由柯西不等式 $\left|Q(f)\right| \le \|Q\| \cdot \|f\|^d$，可得 $m_f(r, D) \ge 0$。

最后， f 的*Cartan* 阶函数 定义为

$$T_f(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left\|f(re^{i\theta})\right\| \mathrm{d}\theta.$$

采用上述记号，奈望林纳理论包含以下两个基本定理（全面介绍请参见 [27, 33]）。

定理 2.1 （第一基本定理）。设 f： $\Delta_R \to \mathbb{CP}^n$ 是全纯曲线，且 $D \subset \mathbb{CP}^n$是次数为 d 的超曲面，使得 f（Δ_R） $\not\subset D$。那么对于任意 $0 < r < R$，有

$$m_f(r,D) + N_f(r,D) = d\,T_f(r) + O(1).$$

因此，可得 *Nevanlinna* 不等式:

$$N_f(r,D) \le d\,T_f(r) + O(1). \tag{2.4}$$

对于 $\mu_0 \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$， f 相对于 D 的通常 μ_0截断缺陷定义为

$$\delta_{f,D}^{[\mu_0]} = \liminf_{r\to\infty}\left(1 - \frac{N_f^{[\mu_0]}(r,D)}{d\,T_f(r)}\right). \tag{2.5}$$

因此，直接由第一基本定理可得 $0 \le \delta_f^{[\mu_0]}{}_{,\ D} \le 1$.

反过来，在更深层次上，所谓的第二主定理旨在用适当的计数函数之和从上方界定阶函数。这类结果已在若干特殊情形下得到证明，而且大多依赖于以下关键估计。

定理 2.2 (对数导数引理 [34])。 设 g: $\Delta_R \to \mathbb{CP}^1$ 是一个非常数亚纯函数，且 $k \ge 1$ 是一个正整数。那么对于任意 $0 < r < R$，以下估计成立:

$$m_{\frac{g^{(k)}}{g}}(r) := m_{\frac{g^{(k)}}{g}}(r,\infty) = O\left(\log\frac{1}{R-r}\right) + O(\log T_g(r)) \qquad \|,$$

其中，记号 $\|$ 表示该估计对所有 $0 < r < R$ 都成立，但可能不包括一个子集$E \subset (0, R)$；该子集的测度 $\int_E \mathrm{d}R - r \overset{<\infty.}{\text{——}}$有限

定理 2.3 (第二主定理)。 设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是次数为 d的超曲面。设 $f: \Delta_R \to \mathbb{CP}^n$ 是一个非常数全纯圆盘，满足 $f(\Delta_R) \not\subset D$。假设

$$\mathscr{P} \in H^0\big(\mathbb{CP}^n, E_{k,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\widetilde{m}}\big)$$

是一个非平凡的负扭对数 k-喷微分，使得

$$\mathscr{P}\big(j_k(f)\big) \not\equiv 0, \tag{2.6}$$

则有

$$T_f(r) \leq \frac{m}{\widetilde{m}} N_f^{[1]}(r, D) + o(\log(T_f(r)) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right) \quad \| . \tag{2.7}$$

证明。 这是定理 2.2 的直接推论，并运用了 [22, 定理 31]中的类似技巧。 □

推论 2.4（缺陷关系）。 假设与定理 *2.3*中的相同。若 $R = \infty$，或 $R < \infty$ 且 $\limsup_{r\to R} \frac{T_f(r)}{\log(R-r)} = \infty$，则有如下 *1*-截断缺陷关系

$$0 \leq \delta_{f,D}^{[1]} \leq 1 - \frac{\widetilde{m}}{md}.$$

证明。 当 $R = \infty$时，来自 [22, 定理 31] 的第二主定理给出

$$T_f(r) \leq \frac{m}{\widetilde{m}} N_f^{[1]}(r, D) + o(\log(T_f(r)). \tag{2.8}$$

另一方面，当 $R < \infty$ 且 $\limsup_{r\to R} \frac{T_f(r)}{\log(R-r)} = \infty$时，不等式（2.7）成立。根据截断缺陷（2.5）的定义，可得所述结果。 □

推论 2.5 （分歧估计）。 保持定理 *2.3* 中的相同假设，并假设 f 在 D 上分歧，且重数至少为 μ。若 $R = \infty$，或 $R < \infty$ 且$\limsup_{r\to R} \frac{T_f(r)}{\log(R-r)} = \infty$，则有如下分歧估计

$$\mu \leq \frac{md}{\widetilde{m}}.$$

证明。 若 f 在 D 上分歧，且重数至少为 μ，则 Nevanlinna 不等式（2.4）给出

$$N_f^{[1]}(r, D) \leq \frac{1}{\mu} N_f(r, D) \leq \frac{d}{\mu} T_f(r) + O(1).$$

结合（2.7）和（2.8，我们推导出所述界。 □

2.3. **高消失阶对数喷微分的存在性**。 为确保存在满足（2.6）的对数喷微分，我们采用 [25], 改进[10] 以及 [31]。

推论 2.6. 设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是次数为 d 的一般超曲面。对于任意正整数 p，如果 D 的次数 d 足够大，即

$$d \geq d_{n,p} = \begin{cases} 16n(p+5n-2)\left(\sqrt{2n}\,\frac{\log\log(2n)}{2}+3\right)^{2n}, & \textit{for } 2 \leq n \leq 39; \\ \left(1+\frac{2p-5}{10n+1}\right)(n\log n)^n, & \textit{whenever } n \geq 40. \end{cases} \tag{2.9}$$

则 存在足够大的整数 $m \gg 1$ 和 $\tilde{m} \geq (2p+1)m > 2pm$，使得子集

$$B := \mathrm{Bs}\left(E_{n,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\tilde{m}}\right) \cap (\mathbb{CP}^n \setminus D),$$

其中 $\mathrm{Bs}(\cdot)$ 表示基 *locus*，其维数至多为零。

此外，设 $f\colon \Delta \to \mathbb{CP}^n$ 是一个非常数全纯圆盘，满足 $f(\Delta) \not\subset D$。那么存在一个非平凡的负扭对数 n-喷微分

$$\mathscr{P} \in H^0\left(\mathbb{CP}^n, E_{n,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\tilde{m}}\right)$$

具有上述 m、$\tilde{m}$，且满足

$$\mathscr{P}\left(j_k(f)\right) \not\equiv 0.$$

证明。 令 $U_{r,d}$ 表示在 $\mathbb{CP}^r$ 中次数为 d 的光滑超曲面空间，其中 r为任意正整数，并考虑环境空间 $\mathbb{CP}^r \times U_{r,d}$。定义万能超曲面

$$\mathcal{X}_{r,d} = \left\{(p,X) \in \mathbb{CP}^r \times U_{r,d} \,\middle|\, p \in X\right\}.$$

令 $\pi_2\colon \mathbb{CP}^r \times U_{r,d} \to U_{r,d}$ 为典范投影，令 T_{π_2} 为相对切空间。对于正整数 $k, m, \tilde{m}$，我们设

$$\mathrm{Bs}_{k,m,\tilde{m}} = \mathrm{Bs}\left(H^0\left(\mathbb{CP}^r \times U_{r,d}, E_{k,m}T^*_{\pi_2}(\log \mathcal{X}_{r,d}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^r}(-\tilde{m})\right)\right).$$

令 $Z_{r,d} \subset (\mathbb{CP}^r \times U_{r,d}) \setminus \mathcal{X}_{r,d}$ 表示由满足 $p \in (\mathbb{CP}^r \setminus X) \cap \mathrm{Bs}_{k,m,\tilde{m}}$ 的点对 (p,X) 构成的轨迹。

根据 [31, 定理 3.6], ，若对于某个点对 (n,d_n)，轨迹 Z_{n,d_n} 在 $(\mathbb{CP}^n \times U_{n,d_n}) \setminus \mathcal{X}_{n,d_n}$ 中的余维至少为 1（相应地，对于点对 $(2n-1,d_{2n-1})$，轨迹 $Z_{2n-1,d_{2n-1}}$在 $\left(\mathbb{CP}^{2n-1} \times U_{2n-1,d_{2n-1}}\right) \setminus \mathcal{X}_{2n-1,d_{2n-1}}$中的余维至少为 1），则轨迹 $Z_{n,d_{2n-1}}$ 的余维至少为 n，且位于 $\left(\mathbb{CP}^n \times U_{n,d_{2n-1}}\right) \setminus \mathcal{X}_{n,d_{2n-1}}$中。因此，根据定义，对于一般万能超曲面$D \in U_{n,d_{2n-1}}$，集合

$$\mathrm{Bs}\left(E_{k,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\tilde{m}}\right) \cap (\mathbb{CP}^n \setminus D)$$

在 $\mathbb{CP}^n$中维数至多为 0。

为确保存在这样的配对（n， d_{2n-1}），使其满足 $k=n$ 以及某些 m， $\tilde{m}$，我们沿用 [25, 命题 3.1 和第 43] 页中的技巧与记号。次数 d_{2n-1}的下界由多项式方程的最大根决定

$$d^{2n-1}I_0 + d^{2n-2}I_1 + \cdots + I_{2n-1} = 0,$$

其中 $I_0 > 0$ 和 $I_q (q = 0, \ldots\ldots, 2n-1)$ 取决于给定的 m, $\widetilde{m}$。应用 Fujiwara界，可得

$$\max |\text{roots}| \leq 2 \max_{1 \leq p \leq 2n-1} \sqrt[p]{\frac{|I_p|}{I_0}}.$$

保留 [25, 第 12] 页中的估计，并采用 [11], 中关于倾斜向量场极点阶数的改进界 $5n-2$，我们选择参数如下：

$$c = 2p + 5(2n-1) - 1, \quad l = \sqrt{2n-1}\, \frac{\log\log(2n-1)}{2}.$$

因此，扭曲阶数为 $\widetilde{m} \geq cm - (5(2n-1) - 2)m = (2p+1)\, m > 2pm$。量 $\binom{c+2}{2}$ 在 [10, 25], 中以 $\binom{5n+1}{2}$ 的形式出现，此处将其替换为 $p + 5n - 2$。接着由 [25, 第 12 页及 43] 可得

$$\begin{aligned}
\max |\text{roots}| &\leq 8(2n-1) \left(\frac{c+2}{2}\right) (l+3)^{2n-1} \\
&\leq 16n(p+5n-2) \left(\sqrt{2n}\, \frac{\log\log(2n)}{2} + 3\right)^{2n} \\
&\leq \frac{16n(p+5n-2)}{80n^2+8n} \cdot \left[100n^2 \left(\frac{\log\log(2n)}{2} + 3\right)^{2n}\right] \\
&\leq \left(1 + \frac{2p-5}{10n+1}\right) (n\log n)^n \cdot C_n,
\end{aligned}$$

其中 $C_n \leq e^{2n\log_{\text{双对数}}(2n) - n\text{双对数}\ n - n\text{对数}\ 2 + \frac{2\sqrt{n3}\sqrt{2}}{\text{双对数}(2n)}} 100n^2 < 1$ 当 $n \geq 40$ 时，由 [25, 第 43] 页可得。令

$$d_{n,p} = \begin{cases} 16n(p+5n-2)\left(\sqrt{2n}\, \frac{\log\log(2n)}{2} + 3\right)^{2n}, & \text{for } 2 \leq n \leq 39; \\ \left(1 + \frac{2p-5}{10n+1}\right)(n\log n)^n, & \text{whenever } n \geq 40. \end{cases}$$

于是，对于次数为 $d \geq d_n$ 的一个一般超曲面 $D \subset \mathbb{CP}^{n\,,\,p}$，我们得到所需的性质。

对于第二个结论，由于子集 B 的维数至多为 0 且 $\mathbb{CP}^n$ 是紧的，因此它要么为空，要么由有限个点组成。由于 f 不是常数且像 $f(\Delta) \not\subset D$ 是连通的，我们得到所需结论。□

3. 由对数喷微分得到的非积分缺陷关系

在本节中，我们研究从开黎曼曲面 M 到全纯映射的非积分亏量。设 $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 是一个全纯映射，其约化表示为 $f = [f_0 \colon \cdots \colon f_n]$。设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是一个次数为 d 的超曲面，使得 $f(M) \not\subset D$。对于任意 $p \in M$，令 $\nu^f(D)(p)$ 表示 $f(M)$ 与 D 在点 $f(p)$ 处的交数。我们回顾 Fujimoto [15] 引入的非积分亏量定义。

定义 3.1. 对于任意正整数 μ_0，定义

$$\alpha^f_{\mu_0}(D) := \inf\{\eta \geq 0 : \eta \textit{ satisfies the condition } (\star)\},$$

其中，条件$(\star)$ 表示存在一个次调和函数 $u\colon M \to [-\infty, \infty)$，它在集合 $M \setminus f^{-1}(D)$ 上为调和函数，并满足以下两个条件：

(C1). 函数 e^u 属于 C^∞ 和 $e^u \leq \|f\|^{d\eta}$类，其中

$$\|f\| := \sqrt{\|f_0\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2}.$$

(C2). 对于每个 p 点 $\xi \in f^{-1}(D)$ 以及围绕 ξ的全纯局部坐标 z，函数

$$u(z) - \min\{\nu^f(D)(\xi), \mu_0\}\log|z-\xi| \quad \in [-\infty, \infty)$$

是次调和的。

于是，定义 f 关于被 μ_0 截断的 D 的非积分亏量为

$$\delta^f_{\mu_0}(D) := 1 - \alpha^f_{\mu_0}(D).$$

请注意，我们对条件的定义$(\star)$ 与 [7], 中所用的定义不同，但这两种表述实际上是等价的（见 [34, 第 175]页）。

命题 3.2 ([15])**：** 非积分亏量具有以下性质：

(1) $0 \leq \delta^f_{\mu_0}(D) \leq \delta^{[\mu_0]}_{f,D} \leq 1$，其中 $\delta^{[\mu_0]}_{f\,D}$ 是通常的 μ_0 截断缺陷，定义见 *(2.5)*。*(2)* 若 $f(M) \cap D = \emptyset$，则非积分亏量 $\delta^f_{\mu_0}(D) = 1$；更一般地，若存在定义在 M 上的有界全纯函数 g，其在每一点$\xi \in f^{-1}(D)$处的零点重数至少为 $\nu^f(D)(\xi)$，则结论亦成立。*(3)* 若存在正整数 $\mu \geq \mu_0$，使得 f 在 D 上分歧，且重数至少为 μ，则

$$\delta^f_{\mu_0}(D) \geq 1 - \frac{\mu_0}{\mu}. \tag{3.1}$$

以更一般的方式，Fujimoto [15] 引入了以下 C^*_p-条件 .

定义 3.3。 对于正整数 p，全纯映射 $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 满足 C^*_p-条件，当且仅当存在定义在 M 上的次调和函数 u，使得 e^u 属于 C^∞ 类，并且

$$\lambda e^u \leq \|f\|^p,$$

其中，λ 是定义在 M 上的正实值函数，且对于定义在 M 上满足$\mathrm{d}z \neq 0$的全局全纯函数 z，有$\mathrm{d}s^2 = \lambda^2|\mathrm{d}z|^2$ 。

注记 3.4。 在 $x = (x_1, \ldots, x_m)\colon M \to \mathbb{R}^m$ 是浸入$\mathbb{R}^m$中的极小曲面的情况下，广义高斯映射为 $f = [f_0 : \cdots : f_{m-1}]\colon M \to \mathbb{CP}^{m-1}$。由 $\mathbb{R}^m$ 上的标准度量在 M 上诱导的度量 $\mathrm{d}s^2$ 为

$$\mathrm{d}s^2 = 2\|f\|^2|\mathrm{d}z|^2.$$

根据定义，映射 f 满足 C^*_1条件。类似地，对于共形度量$\mathrm{d}s^2 = 2\|f\|^{2p}|\mathrm{d}z|^2$，这样的 f满足 C^*_p条件。

定理 3.5. 设 M 是一个关于共形度量$\mathrm{d}s^2$完备的开黎曼曲面。设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是一个次数为 d的超曲面。假设存在充分大的 $m \gg 1$和 $\tilde{m} > 2pm$，使得子集

$$B \coloneqq \mathrm{Bs}\left(E_{n,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\widetilde{m}}\right) \cap (\mathbb{CP}^n \setminus D)$$

至多为零维。令 $f\colon \quad M \to \mathbb{CP}^n$ 为满足C_p^*条件且 $f(M) \not\subset D$的非常值全纯映射。则有如下估计

$$\delta_1^f(D) \leq 1 - \frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right).$$

~~证明。 </style>~~取带有度量 ~~d(d)~~ 的普遍覆盖：，显然(， $\mathrm{d}\widetilde{s}^2$)也是完备的。并且提升映射 $f\coloneqq f\circ\Pi\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 也满足 C_p^*条件~~~~，且 $f(M) \not\subset D$。因此，我们可以假设 M是单连通的。于是，根据一致化定理， M 要么与 $\mathbb{C}$ 共形等价，要么就是单位圆盘 Δ。

当 $M = \mathbb{C}$，或者 $M = \Delta$但 上极限~~$\overline{\lim_{r\to 1}}$~~ $T_f(r)\log(1-r) = \infty$时，由推论 2.4 可得，对于任意$p \in \mathbb{Z}_{>0}$，都有

$$\delta_1^f(D) \leq \delta_{f,D}^{[1]} \leq 1 - \frac{\widetilde{m}}{md} < 1 - \frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right).$$

因此，我们只需研究 $M = \Delta$ 且 $\limsup_{r\to 1} T_f(r)\log(1-r) < \infty$的情形。

反设

$$\delta_1^f(D) > 1 - \frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right).$$

根据定义，存在一个非负数 $\eta < \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right)$，以及一个定义在 M 上的次调和函数u，其中 e^u 属于 $\mathcal{C}^\infty$ 类，使得

$$e^u \leq \|f\|^{d\eta}, \tag{3.2}$$

并且在每个点 $\xi \in f^{-1}(D)$的某邻域内，函数

$$u(z) - \log|z - \xi|$$

是次调和的，其中 z 是 ξ 附近的局部全纯坐标。

另一方面，由于集合 B 的维数至多为 0，根据推论 2.6，存在一个非平凡的负扭对数 n-jet微分

$$\mathscr{P} \in H^0\left(\mathbb{CP}^n, E_{k,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\widetilde{m}}\right)$$

$\tilde{m}-2p>0$，使得 $\mathscr{P}\big(j_k(f)\big)\not\equiv 0$。令 $D_{\mathscr{P},\ f}$表示 $\mathscr{P}(j_k(f))$的极点除子。则 2.3 中 $\mathscr{P}$ with m 的局部表达式给出

$$D_{\mathscr{P},f}\le m\sum_{z\in\Delta}\min\{\mathrm{ord}_z\, f^*D,1\}.$$

因此，函数

$$v:=\log\left|\frac{\mathscr{P}(j_k(f))}{\|f\|^{\tilde{m}}}\right|+mu \tag{3.3}$$

在 Δ上是次调和函数，其中 u 定义于（3.2）中。

由于 f 满足 C_p^*-条件，存在一个定义在 Δ 上的次调和函数 w，使得 e^w 属于 C^∞ 类，并且

$$\lambda e^w\le\|f\|^p, \tag{3.4}$$

其中 λ 满足 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2|\mathrm{d}z|^2$。令 $t=\frac{2p}{\tilde{m}-\eta dm}$，则由于 $\frac{\tilde{m}}{m}>2p$，有 $0<mt<1$。接下来考虑以下次调和函数

$$\varphi:=2w+tv=2w+t\left(\log\left|\frac{\mathscr{P}(j_k(f))}{\|f\|^{\tilde{m}}}\right|+mu\right).$$

综合（3.2）、（3.3）、（3.4），可得

$$\begin{aligned}e^\varphi\lambda^2\le&\|f\|^{2p}e^{tv}\\ \le&\|f\|^{2p}e^{tmu}\left(\frac{|\mathscr{P}(j_k(f))|}{\|f\|^{\tilde{m}}}\right)^t\\ \le&\|f\|^{2p+\eta dmt}\left(\frac{|\mathscr{P}(j_k(f))|}{\|f\|^{\tilde{m}}}\right)^t=|\mathscr{P}(j_k(f))|^t.\end{aligned}$$

由 [7, 引理 22] 可知，对于 $0<mt<l<1$ 和 $0<r_0<r<R<1$，存在一个常数 K_1 使得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^\varphi\lambda^2(re^{i\theta})d\theta\le&\int_0^{2\pi}|\mathscr{P}(j_k(f))|^t(re^{i\theta})d\theta\\ \le&K_1\left(\frac{R}{r(R-r)}T_f(r)\right)^l.\end{aligned}$$

取 $R=r+\frac{1-r}{eT_f\ r()}$，由 [34, 引理 4.1.7], 可得，对于所有 $r\in[0,1)$，除去一个满足 $\int_E\frac{dt}{1-t}<\infty$的集合 E 后，均有 $T_f(R)\le eT_f(r)$。因此我们推得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}e^\varphi\lambda^2(re^{i\theta})d\theta\le&K_2\left(\frac{1}{1-r}T_f(r)\right)^l\\ \le&K_3\frac{1}{(1-r)^l}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^l,\end{aligned}$$

对于所有 $r \notin E$，其中最后一个不等式成立是因为 上极限$\overline{\lim_{r\to 1}}_{-}^{T_f(r)\log(1-r)} < \infty$。适当调整参数后，由 [34, 命题 4.1.8] 可得，对于所有 $r \in [0,1)$，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\varphi}\lambda^2(re^{i\theta})d\theta &\leq K\frac{1}{(1-r)^l}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^l \\ &\leq K'\frac{1}{(1-r)^{l'}},\end{aligned}$$

其中 $l < l' < 1$ 且 K为适当的正常数， K'。因此

$$\iint_{\Delta}\left(e^{\varphi}\lambda^2\right)(re^{i\theta})rdrd\theta \leq \int_0^1 K'\frac{r}{(1-r)^{p'}}dr < \infty,$$

这与 Yau 估计 [37]，即 $\iint_{\Delta} e^u d\sigma = \infty$，矛盾。 □

结合这一结果与命题3.2，我们得到以下结论。

推论 3.6。设 M 是一个开黎曼曲面，且 $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 是一个全纯映射。假设 M 关于由下式给出的共形度量是完备的

$$\mathrm{d}s^2 = \|F\|^{2p}|\omega|^2,$$

其中 F 是 f 的约化表示，且 ω 是 M上的一个全纯1-形式。设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是一个次数为 d 的超曲面，使得 $f(M) \not\subset D$。假设存在充分大的 $m \gg 1$和 $\tilde{m} > 2pm$，使得子集

$$\mathrm{Bs}\left(E_{n,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\widetilde{m}}\right)\cap(\mathbb{CP}^n\setminus D)$$

维数至多为零。则以下陈述成立：

(1) $\delta_1^f(D) \leq 1 - \frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right)$.(2) 如果 f 在 D 上以至少 μ的重数分歧，则

$$\frac{1}{\mu} \geq \frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m} - 2p\right).$$

(3) 特别地，如果 f 的像避开 D，那么 f 必为常数。

4. 曲率估计

定理 1.1 可通过沿用 [8, 定理2]证明中的类似论证得出。首先，我们考虑以高重数在高次数超曲面上分歧的全纯映射所构成的正规族。

4.1. 全纯映射的正规族。 记 $\mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{CP}^n)$ 为从 Δ到 $\mathbb{CP}^n$ 的所有全纯映射的集合。

定义 4.1. 设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{CP}^n)$ 是一个全纯映射族。若 $\mathcal{F}$ 关于紧开拓扑在 $\mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{CP}^n)$ 中相对紧，则称其为正规族。

以下关于全纯映射族正规性的判别准则将在证明中发挥作用。

引理 4.2 ([1])**.** 族 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{CP}^n)$ 不是正规族，当且仅当存在一个紧集 $K \Subset \Delta$，以及一个点列 $\{p_i\}_{i\geq 1} \subset K$ 满足 $\{p_i\} \to p_0 \in \Delta$，一个全纯映射序列 $\{f_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{F}$，一个参数列 $\{\rho_i\}_{i\geq 1} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 满足 $\{\rho_i\} \to 0$，使得映射序列

$$g_i(\zeta) \coloneqq f_i(p_i + \rho_i \zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

在紧子集上一致收敛于 $\mathbb{C}$ 上的一个非常数全纯映射 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^n$.

定理 4.3。 设 $D \subset \mathbb{CP}^n$ 是一个次数为 d 的 ***Kobayashi*** 双曲超曲面。设 $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{CP}^n)$ 是从 Δ 到 $\mathbb{CP}^n$ 的非常值全纯映射族。假设每个 $f \in \mathcal{F}$ 在 D 上的分歧重数至少为 μ，并且存在一个非平凡的负扭对数 k-喷微分

$$\mathscr{P} \in H^0\big(\mathbb{CP}^n, E_{k,m}T^*_{\mathbb{CP}^n}(\log D) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{-\widetilde{m}}\big)$$

使得

$$\mathscr{P}\big(j_k(f)\big) \not\equiv 0.$$

若 $\mu > \underset{\sim}{md}$，则 $\mathcal{F}$ 是正规族。m

证明。 反设 $\mathcal{F}$不是正规族。那么由引理 4.2，存在一个全纯映射序列 $\{f_i\}_i \subset \mathcal{F}$、一个点列 $\{p_i\}_i \subset K \Subset \Delta$ 满足 $\{p_i\}_i \to p_0 \in \Delta$，以及一个正数序列 $\{\rho_i\}_i \to 0$使得全纯映射序列

$$\begin{aligned} g_i\colon \Delta_{r_i} &\to \mathbb{CP}^n \quad (r_i \to \infty), \\ z &\mapsto f_i(p_i + \rho_i z), \end{aligned}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧集上一致收敛于非常值全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^n$经过取子列后。由 Hurwitz 定理，要么 f 的像包含于 D，要么 f在 D 上以至少 μ的重数分歧。第一种情况与 D的双曲性矛盾，而第二种情况与推论2.5矛盾。因此， $\mathcal{F}$ 在 Δ上正规。□

4.2. 技术引理。我们汇集一些证明主定理所需的结果。

引理 4.4。 [8, 定理 3] 设 M 是一个开黎曼曲面，且 $f\colon M \to \mathbb{CP}^n$ 是一个非常值全纯映射。在 M 上考虑由下式给出的共形度量

$$\mathrm{d}s^2 = \|F\|^{2p}|\omega|^2,$$

其中 $F=[f_0\cdots:\ f_n]$ 是 f 的约化表示， ω 是 M上的全纯1–形式。如果f 避开了 $\mathbb{CP}^n$中某个超平面的一个邻域 U ，那么存在一个只依赖于 U 的常数 C ，使得

$$|K(q)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(q)\leq C,$$

其中， $K(q)$ 是曲面在 q 处的高斯曲率，而 $\mathrm{d}(q)$是从 q 到 M边界的测地距离。

引理 4.5。 [29, 引理 2。1] 取一个半径 $0<r<1$。令 R 表示圆盘 $\Delta_r\subsetneq\Delta$的双曲半径。考虑一个共形度量$\mathrm{d}s^2=\lambda^2(z)|\mathrm{d}z|^2$ ，定义在 Δ_r 上，使得从原点到边界的测地距离 $\{|z|=r\}$ 大于或等于 R。若度量 $\mathrm{d}s^2$ 下的高斯曲率满足 $-1\leq K\leq 0$，则任意点到原点的度量 $\mathrm{d}s^2$ 距离均大于或等于双曲距离。

引理 4.6。 [29, 引理 2。2] 设 $\{\mathrm{d}s_i^2\}_{i\geq 1}$ 是单位圆盘Δ上的一列共形度量，其高斯曲率对所有 i均满足 $-1\leq K_i\leq 0$ 。假设 Δ 是关于度量 $\mathrm{d}s_i^2$的半径为 R_i 的测地圆盘。若 $\lim\limits_{i\to\infty}R_i=\infty$，且序列 $\{\mathrm{d}s_i^2\}_{i\geq 1}$在 Δ 的任意紧集上一致收敛于度量 $\mathrm{d}s^2$，则任意点到原点的度量 $\mathrm{d}s^2$ 距离均大于或等于相应的双曲距离。特别地，这种度量$\mathrm{d}s^2$ 是完备的。

引理 4.7。 [8, 命题 1] 设 M 为一个开单连通黎曼曲面，且令$\{f_i\colon\ M\to\mathbb{CP}^n\}_{i\geq 1}$ 为一列全纯映射。对于每个 $i\geq 1$ 以及正整数 p，我们考虑 M 上的如下共形度量序列:

$$\mathrm{d}s_i^2=\|F_i\|^{2p}|\mathrm{d}z|^2,$$

其中 $F_i=[f_{i,0}:\ f_{i,\ 1}:\ \cdots:\ f_{i,\ n}]$ 是 f_i的一个固定约化表示。记 K_i 为关于$\mathrm{d}s_i^2$的高斯曲率。若序列 $\{f_i\}_{i\geq 1}$ 在 M 的每个紧子集上一致收敛于非常值全纯映射 g，且序列 $\{|K_i|\}_{i\geq 1}$ 一致有界，则以下陈述之一成立:

（1） $\{K_i\}_{i\geq 1}$ 存在一个子列收敛于0。（2）对于每个 $0\leq j\leq n$，存在 $\{f_{i,j}\}_{i\geq 1}$ 的一个子列 $\{f_{i_k,j}\}_{k\geq 1}$ 收敛于 M上的全纯函数 h_j。此外， h_0、……、 h_n 没有公共零点。

4.3. **定理1.1的证明**。

定理*1.1*的证明。 反设曲率估计（1.2）不成立。则存在一个全纯映射序列 $\{g_i\colon\ M_i\to\mathbb{CP}^n\}_{i\geq 1}$，每个映射都定义在一个开黎曼曲面 M_i 上，并且在 D 处分歧，重数至少为 μ ，满足

$$\frac{1}{\mu}<\frac{1}{d}\left(\frac{\widetilde{m}}{m}-2p\right),\tag{4.1}$$

以及一个点列 $\{p_i\in M_i\}_{i\geq 1}$ ，使得

$$|K_i(p_i)|\mathrm{d}_i^2(p_i)\to\infty\quad\text{as } i\to\infty,$$

相对于诱导共形度量 $\mathrm{d}s_i^2$。

对于每个 $i \geq 1$，如有必要，取 M_i 的普遍覆盖后，我们可以假设 M_i 是单连通的。根据一致化定理，M_i 因此与 $\mathbb{C}$或单位圆盘 Δ共形等价。由推论2.5可排除第一种情况，因为重数 μ满足（4.1）。此后我们可以假设每个 $M_i = \Delta$都以 $p_i = 0$为原点。

按照 [8,第465], 页中的同样论证，我们还可以假设每个黎曼曲面 M_i 都可选为一个测地圆盘，其半径为 $R_i \to \infty$，相对于共形度量$\mathrm{d}s_i^2$，并且

$$K_i(p_i) = -\frac{1}{4} \quad \text{and} \quad -1 \leq K_i \leq 0.$$

事实上，我们可以假设 M_i 是以 p_i 为中心的测地圆盘，并令

$$M_i^* := \{p \in M_i : \mathrm{d}_i(p, p_i) \leq \mathrm{d}_i(p_i)/2\}.$$

那么，记 $\mathrm{d}_i^*(p)$ 为从 p到 ∂M_i^*的测地距离，高斯曲率 $|K_i|$ 在 M_i^*上有一致上界，并且当 p 趋于 ∂M_i^*时，$\mathrm{d}_i^*(p)$趋于零。因此，存在一个内点 $p_i^* \in M_i^*$使得

$$|K_i(p_i^*)|(\mathrm{d}_i^*(p_i^*))^2 = \max_{p \in M_i^*} |K_i(p)|(\mathrm{d}_i^*(p))^2,$$

因此有

$$|K_i(p_i^*)|(\mathrm{d}_i^*(p_i^*))^2 \geq |K_i(p_i)|(\mathrm{d}_i^*(p_i))^2 = \frac{1}{4}|K_i(p_i)|(\mathrm{d}_i(p_i))^2 \to \infty.$$

因此，我们可以将每个 M_i替换为 M_i^*，其中 $|K_i(p_i^*)|(\mathrm{d}_i^*(p_i^*))^2 \to \infty$，并对 M_i^*进行重新缩放，使得 $K_i(p_i^*) = -\frac{1}{4}$。我们仍用 $\mathrm{d}_i^*(\cdot)$ 表示重新缩放后的测地距离。同样，我们可以假设 M_i^* 是以 p_i^* 为中心的测地圆盘，并令

$$M_i^{**} := \{p \in M_i^* : \mathrm{d}_i(p, p_i^*) \leq \mathrm{d}_i^*(p_i^*)/2\}.$$

于是 $p \in M_i^{**}$推出 $\mathrm{d}_i^*(p) \geq |\mathrm{d}_i^*(p_i^*) - \mathrm{d}_i(p, p_i^*)| \geq \frac{\mathrm{d}_i^*(p_i^*)}{2}$，并且

$$|K_i(p)|(\mathrm{d}_i^*(p))^2 \leq |K_i(p_i^*)|(\mathrm{d}_i^*(p_i^*))^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{d}_i^*(p_i^*))^2 \leq (\mathrm{d}_i^*(p))^2.$$

也就是说，对所有 $p \in M_i^{**}$，都有 $|K_i(p)| \leq 1$。此外，M_i^{**}的半径 R_i满足

$$2R_i \geq \mathrm{d}_i(p_i^*, \partial M_i^{**}) = \frac{\mathrm{d}_i^*(p_i^*)}{2} \to \infty.$$

替换 将每个 M_i 按 M_i^{**} 进行...，我们便得到所需的开黎曼曲面序列。

回到全纯映射序列 $\{g_i\colon M_i \to \mathbb{CP}^n\}_{i\geq 1}$，由推论 2.6、定理 4.3 以及假设 (4.1) 可知，族 $\{g_i\}_{i\geq 1}$ 是正规族。因此，抽取一个子列后，我们可以假设族 $\{g_i\}_{i\geq 1}$ 在 Δ的任意紧子集上一致收敛于全纯映射 g。对于每个 i，我们固定一个约化表示 $g_i = [g_{i,0} : g_i, 1 : \cdots : g_{i,n}]$。由引理 4.7，对于每个 $0 \leq j \leq n$，存在一个全纯函数$\{g_{i,j}\}_{i\geq 1}$ 的子列，它在 Δ 的每个紧子集上收敛于全纯函数 h_j，并且，

函数 h_0、……、h_n 没有公共零点。显然，我们有 $g = [h_0 : \cdots : h_n] : \Delta \to \mathbb{CP}^n$。

现在断言 g 是常数。事实上，假设并非如此，则根据引理 4.6和之前的构造，度量 $\mathrm{d}s^2 = \|g\|^{2p}|\mathrm{d}z|^2$ 在 Δ上是完备的。此外，根据 Hurwitz 定理，要么 g 在 D 上是分歧的，且重数至少为 μ，满足（4.1），要么 g 的像必须包含于 D中。这与推论 3.6 以及 D 的双曲性假设相矛盾。

现在，假设 $g(\Delta) = \{Q\} \in \mathbb{CP}^n$。取一个超平面 H，其不包含点Q，并选择两个不相交的邻域 U_1，U_2 分别是 H，Q。根据引理 4.4，对于g: $\Delta \to \mathbb{CP}^n \setminus U_1$，存在一个常数 C，其取决于 U_1，使得

$$|K(p)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(p) \le C.$$

选取 $0 < r < 1$，使得圆盘 Δ_r 的双曲半径 R 满足 $R > 2C$。由于序列 $\{g_i\}_{i\ge1}$ 在 Δ_r上均匀收敛于 g，因此对于充分大的 $i \gg 1$，我们得到其像 $g_i(\Delta_r) \subset U_2$，从而省略 U_1。这意味着对于这样充分大的 i，我们有

$$|K_i(0)|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}_i(r) \le C,$$

其中 $\mathrm{d}_i(r) = \mathrm{d}_i(0, \partial\Delta_r)$ 是相对于度量 $\mathrm{d}s_i^2$ 的测地距离。再次根据我们的构造，$K_i(0) = -\frac{1}{4}$ 对所有 i 均成立，由此可得

$$\mathrm{d}_i(r) \le 2C, \quad \text{for } i \gg 1. \tag{4.2}$$

回顾我们的构造：在度量 $\mathrm{d}s_i^2$ 下，$M_i = \Delta$ 是半径为 $R_i \to \infty$ 的测地圆盘。我们可以将 M_i 重新参数化为 $\Delta_{r_i} = \{w : |w| < r_i\}$，其中 r_i 的选取使得圆盘 Δ_{r_i} 的双曲半径也为 R_i。于是，对于上述选取的 r，圆 $\{z : |z| = r\}$ 对应于圆 $\{w : |w| = r_i r\}$。由于 $R_i \to \infty$，有 $r_i \to 1$ as $i \to \infty$。这意味着 $\{|w| = r_i r\}$ 的双曲半径趋近于 $\{|w| = r\}$ 的双曲半径，即 $R > 2C$。另一方面，由于 $-1 \le K_i \le 0$ 在 M_i 上，引理 4.5 表明，相对于度量 $\mathrm{d}s_i^2$，从原点到圆 $\{z : |z| = r\}$ 上任意一点的距离，或者等价地，从原点到圆 $\{w : |w| = r_i r\}$ 上任意一点的距离，不小于从原点到 $\{w : |w| = r_i r\}$ 上任意一点的双曲距离。因此我们有 $\mathrm{d}_i(r) \ge R > 2C$，这与 (4.2) 矛盾。定理 1.1 的证明至此完成。□

推论 *1.2* 的证明。 这直接由定理1.1和推论2.6得出，其中我们取$\widetilde{m} = (2p+1)m$。 □

致谢

D.T. Huynh 获得越南国家科学技术发展基金会（NAFOSTED）资助，资助编号为 101.04-2025.19。Yunling Chen 感谢北京数学与系统科学研究院提供了良好的科研环境。

参考文献

[1] Gerardo Aladro 和 Steven G. Krantz。《复数域中的正规性判据》。数学分析与应用杂志，161(1):1–8，1991年。↑15[2] Gergely B´erczi 和 Frances Kirwan。非约化几何不变理论与双曲性。《数学发明》，235(1):81–127，2024年。↑2，6[3] A. Bloch。论满足某代数簇方程且不规则性超过维数的亚纯函数系。《数学杂志》，5:19–66，1926年。↑6[4] Damian Brotbek。一般超曲面的双曲性。《高等科学研究所数学出版物》，126:1–34，2017年。↑2[5] Damian Brotbek 和 Ya Deng。高次数一般超曲面补集的 Kobayashi 双曲性。《几何与泛函分析》，29(3):690–750，2019年。↑2，5，6[6] Benoit Cadorel。利用 Green-Griffiths 射流微分研究多项式次数一般超曲面的双曲性。预印本 arXiv:2406.19003，2024年。↑2[7] Qili Cai、Min Ru 和 Chin Jui Yang。映入代数簇的全纯映射的非积分缺陷关系。数学分析与应用杂志，556(1-3):130217，2026年。↑2，3，11，13[8] X. Chen、Y. Li、Z. Liu 和 M. Ru。带诱导度量的开黎曼曲面上的曲率估计。《数学杂志》，298(1-2):451–467，2021年。↑2，3，14，15，16，17[9] Gregory M. Constantine 和 Thomas H. Savits。带应用的多变量 Fa`a di Bruno 公式。《美国数学会会刊》，348(2):503–520，1996年。↑5[10] Lionel Darondeau。关于对数 Green-Griffiths 猜想。《国际数学研究通知》，(6):1871–1923，2016年。↑2，9，10[11] Lionel Darondeau。射流空间的倾斜向量场。《数学杂志》，282(1-2):547–575，2016年。↑10[12] Jean-Pierre Demailly。Kobayashi 双曲射影簇的代数判据与射流微分。载于《代数几何——圣克鲁斯 1995》，第62卷《纯数学专题讨论会论文集》，第285–360页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。↑6[13] Jean-Pierre Demailly。Kobayashi 猜想与 Green-Griffiths-Lang 猜想的最新结果。《日本数学杂志》，15(1):1–120，2020年。↑2，6[14] Simone Diverio、J¨oel Merker 和 Erwan Rousseau。有效代数退化。数学新进展，180:161–223，2010年。↑2，6[15] Hirotaka Fujimoto。关于 $\mathbf{R}^m$ 中完备极小曲面的高斯映射。《日本数学会杂志》，35(2):279–288，1983年。↑1，10，11[16] Hirotaka Fujimoto。$\mathbf{R}^m$ 中完备极小曲面的高斯映射的值分布。《日本数学会杂志》，35(4):663–681，1983年。↑1，3[17] Hirotaka Fujimoto。关于极小曲面高斯映射的例外值个数。《日本数学会杂志》，40(2):235–247，1988年。↑1，2[18] Hirotaka Fujimoto。极小曲面高斯映射的修正缺陷关系。《微分几何杂志》，29(2):245–262，1989年。↑2[19] Hirotaka Fujimoto。极小曲面高斯映射的修正缺陷关系。II。《微分几何杂志》，31(2):365–385，1990年。↑2[20] Hirotaka Fujimoto。极小曲面高斯映射的修正缺陷关系。III。《名古屋数学杂志》，124:13–40，1991年。↑2[21] Mark Green 和 Phillip Griffiths。代数几何在整全纯映射中的两个应用。载于《1979 年陈省身专题讨论会》（国际专题讨论会论文集，加利福尼亚州伯克利，1979），第41–74页。施普林格，纽约—柏林，1980年。↑5[22] Dinh Tuan Huynh、Duc-VietVu 和 Song-Yan Xie。与高次数一般超曲面相交的射影空间中的整全纯曲线。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），69(2):653–671，2019年。↑2，3，8

[23] 饭高茂。《代数几何》，北荷兰数学图书馆第24卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1982年。代数簇双有理几何导论，数学研究生教材第76卷。 ↑4[24] Joel Merker。一般型射影超曲面中整全纯曲线的代数微分方程：最优次数下界。载于《流形上的几何与分析》，数学进展第308卷，第41–142页。Birkhäuser/施普林格，尚贝里，2015年。 ↑5[25] Joel Merker和The-Anh Ta。Green-Griffiths猜想和Kobayashi猜想中的 $d \geqslant (\sqrt{n}\log\ n)^n$ 和 $d \geqslant (n\log n)^n$ 。《越南数学学报》，47(1):305–358，2022年。 ↑9，10[26] 野口润次郎。对数喷射空间与de Franchis定理的推广。载于《多复变函数论研究》，数学论题E9，第227–249页。Friedr. Vieweg，不伦瑞克，1986年。 ↑5[27] 野口润次郎和J¨org Winkelmann。《多复变函数中的奈望林纳理论与丢番图逼近》，数学科学基础丛书第350卷。施普林格，东京，2014年。 ↑7[28] Robert Osserman。 E^3 和 E^n中极小曲面的整体性质。《数学年刊》(第二辑)，80:340–364，1964年。↑1[29] Robert Osserman和Min Ru。关于高斯映射遗漏一组超平面的R^m 中极小曲面的高斯曲率估计。《微分几何杂志》，46(3):578–593，1997年。 ↑2，16[30] Si Duc Quang。黎曼曲面上全纯映射关于超曲面的曲率估计与分歧。《法国数学会通报》，151(1):91–115，2023年。 ↑2，3[31] Eric Riedl和David Yang。格拉斯曼流形方法在双曲性、Chow等价和Seshadri常数中的应用。《代数几何杂志》，31(1):1–12，2022年。 ↑2，9[32] Min Ru。浸入R^{n}的极小曲面的高斯映射。《微分几何杂志》，34(2):411–423，1991年。↑2[33] Min Ru。奈望林纳理论及其与丢番图逼近的关系。世界科学出版社有限公司，哈肯萨克，新泽西州，第二版， [2021] ©2021年。 ↑7[34] Min Ru。《奈望林纳理论中的极小曲面》，De Gruyter数学研究第92卷。De Gruyter，柏林， [2023] ©2023年。 ↑7，11，13，14[35] 萧荫堂。复射影空间中一般高次数超曲面的双曲性。《数学发明》，202(3):1069–1166，2015年。 ↑2，6[36] Frederico Xavier。完备非平坦极小曲面的高斯映射不能遗漏球面上的7个点。《数学年刊》(第二辑)，113(1):211–214，1981年。 ↑1[37] 丘成桐。完备黎曼流形的一些函数论性质及其在几何学中的应用。《印第安纳大学数学杂志》，25(7):659–670，1976年。 ↑14中国科学院数学与系统科学研究院，中国，北京100190

电子邮箱地址: chenyl25@amss.ac.cn

数学系 ，教育大学 ，顺化大学 ，黎利街34号 ，顺化市 ，越南

电子邮件地址：dinhtuanhuynh@hueuni.edu.vn