arXiv:2603.15579v1 [math.AG] 16 Mar 2026

ON 超曲面奇点不变量

MIRCEA MUSTAŢĂ

To Bernard Teissier, with admiration, on the occasion of his 80th birthday

Abstract. 设超曲面由 f 在光滑复代数簇 X中定义，并设点 P 位于该超曲面上，我们考虑不变量 $\beta_P(f)$，它由 P处的对数典范阈值 $\mathfrak{m}_P \cdot J_f$给出，其中 $\mathfrak{m}_P$是定义 P的理想，而 J_f是 f的雅可比理想。我们证明，这一不变量满足对数典范阈值 f 的大部分形式性质，并给出一些例子。Dano Kim [Kim21] 曾问这一不变量是否总是给出 f 在 P处的最小指数的上界。受此启发，我们提出了另一个关于最小指数的问题，针对一个较弱的版本给出肯定答案，并讨论一些例子。

1. Introduction

设 X 是一个光滑、不可约的 n维复代数簇，并设 $P \in X$。假设 $f \in \mathcal{O}_X(X)$非零，从而定义超曲面 Z，且 $P \in Z$。衡量 Z在 P处奇异性的重要不变量是对数典范阈值 $\mathrm{lct}_P(f)$。由于它是使得对 (X, tZ) 为对数典范的最大 $t > 0$，因此在双有理几何中发挥着重要作用。在 P 处的对数典范阈值还可以更一般地定义于在 P处消失的非零理想上。

对数典范阈值的一种精细化是最小指数 $\widetilde{\alpha}_P(f)$，Saito [Sai93], 在这一一般性框架下引入了最小指数；不过，在 20 世纪 80 年代，Varchenko、Steenbrink、Malgrange、Teissier、Loeser 等人已针对具有孤立奇点的超曲面对其进行了广泛研究，并称之为 *Arnold*指数。最小指数 $\widetilde{\alpha}_P(f$通过以下公式确定对数典范阈值

$$\mathrm{lct}_P(f) = \min\left\{\widetilde{\alpha}_P(f), 1\right\}.$$

因此，当 $\mathrm{lct}_P(f) = 1$时，最小指数值得关注，也就是说，数对 (X, Z) 是对数典范的。注意，$\widetilde{\alpha}_P(Z) = \infty$当且仅当 P 是 Z 的光滑点；Saito 在同上指出，$\widetilde{\alpha}_P(f) > 1$当且仅当 Z 在 P 处具有有理奇点。

当 [Tei80], Bernard Teissier 猜想，当 Z 在 P处有孤立奇点时，下界如下：

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \geq \frac{1}{\theta_P(f)+1} + \frac{1}{\theta_P(f|_{H_1})+1} + \ldots + \frac{1}{\theta_P(f|_{H_1\cap\ldots\cap H_{n-1}})},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B05,14J17, 32S25。作者的部分研究经费来自NSF资助DMS-2301463和Simons Collaboration资助*Moduli of Varieties*。

其中 H_1、……、H_{n-1} 是 X 中包含 P 的一般光滑超曲面。这里，θ 不变量在 X 上（对每个限制也类似）定义如下：$\theta_P(f)$ 是满足以下性质的正有理数 $\frac{r}{s}$ 中的最小值：在 P 的某个邻域内，$\mathfrak{m}_P^r$ 包含于 J_f^s（即 J_f^s 的整闭包）中，其中 $\mathfrak{m}_P$ 是定义 P 的理想，而 J_f 是 f 的雅可比理想。这篇短文的动机来自 Dano Kim [Kim21]，的一项结果：他证明了 Teissier 猜想中的界，但针对的不是最小指数，而是 $\mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f)$。与此同时，Teissier 猜想已在 [DM23]，中通过改进 Loeser 的方法 [Loe84] 得到解决。然而，关于这两个不等式比较的问题仍未解决：

问题 1.1。 ([Kim21]) 按照上述记号，如果 $P \in Z$ 是一个奇点，我们是否总有

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f)? \tag{1}$$

根据雅可比理想，可以得到最小指数的一个下界，见 [CKM22，定理 1。2]：我们有 $\widetilde{\alpha}_P(f) \geq$ 对数典范阈值$_P(f, J_f^2)$。

在问题 1.1中，我们无需假设 Z 在 P处有孤立奇点，但很容易看出，在这种情况下只需给出肯定答案即可（见下文备注 3.5 ）。 [Kim21] 注意到，由于 f在 P附近属于 $\mathfrak{m}_P J_f$ 的整闭包，我们总有

$$\mathrm{lct}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f),$$

因此，当 Z 在 P处没有有理奇点时，上述问题显然有肯定答案。我们在第 1.1节中作几点评论，并给出若干肯定回答问题 3的例子。

如果这个问题能够得到肯定的回答，将会很有意义，因为这样便可用概念上更易处理的右端项来给出最小指数的上界。尽管利用对数消解可以得到最小指数的下界（见[MP20，推论 D]），但给出上界并不容易。目前唯一可用的上界是一个涉及 P 的重数的基本上界：如果 $\mathrm{mult}_P(f) = d \geq 2$，那么 $\widetilde{\alpha}_P(f) \leq_d^n$ （见 [MP20，定理 E(3)]），以及这一上界的加权版本（见 [CDM25，命题 2。1]）。

–

受问题 1.1 的启发，在第 2 节中，我们将更详细地考察不变量 $\mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f)$，为简化记号，将其记为 $\beta_P(f)$。正如我们将看到的，理想的对数正则阈值的一般性质意味着 $\beta_P(f)$ 的行为类似于对数正则阈值（或最小指数）。

从另一个方向出发，但仍受问题 1.1 的启发，我们提出如下问题

问题 1.2。 如果对于某个理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_P$， $f \in \mathfrak{m}_P\mathfrak{a}$，是否可以推出

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P\mathfrak{a})?$$

关于一个更乐观的问题，其肯定答案将意味着问题 1.1中的断言成立，见下文的问题 3.6 。我们在定理 3.8 中证明，在满足问题 1.2中的假设时，有较弱的不等式 $\widetilde{\alpha}_P(f) \leq$对数典范阈值$_P(\mathfrak{a}$。我们还在例$\mathfrak{a}$中讨论了3.10为单项式理想的情形。

致谢。谨以此文献给 Bernard Teissier，我很荣幸。他的工作对奇点理论产生了深远影响，他友善且鼓舞人心的品格也激励了一代又一代数学家投身这一领域。

2. The invariant $\beta_P(f)$

设 X 是一个维数为 n的光滑不可约复代数簇。假设$f \in \mathcal{O}_X(X)$和 $P \in X$满足 $f(P) = 0$。设 Z是由 f定义的超曲面。记 $\mathfrak{m}_P$ 为在 P 中定义 X的理想。关于 X中理想的对数典范阈值的定义及基本事实，请参阅 [Laz04，第 9]章，或 [Mus12]。

回忆一下，雅可比理想 J_f 定义如下。对于每个点 $Q \in X$，我们在 Q的某个邻域 U中选取代数坐标[1] x_1、……、 x_n，然后在 U中用理想 $\left(f、 \frac{\partial f}{\partial x_1}、……、 \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$定义 J_f。容易看出，这个理想只依赖于Z，而不依赖于坐标的选取，也不依赖于定义 Z的函数 f 。

定义 2.1. 用上述记号，记

$$\beta_P(Z) = \beta_P(f) := \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f).$$

注 2.2. 若 Z 是 X 中的任意超曲面，那么对于每个 $P \in Z$，仍可通过在 P 附近选取一个定义方程，并利用 J_f 与 f 的选取无关这一事实，来定义 $\beta_P(Z)$。

注 2.3. 雅可比理想的另一种形式是理想 J'_f，它在 $P \in Z$ 附近由 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ 定义，其中 $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 是 P 邻域中的代数坐标。这一定义同样与坐标的选取无关，但取决于方程 f 的选取。对于 P 的一个邻域， J'_f 和 J_f 的整闭包相同，因此根据 Laz04，推论 9.6.17]，若用 J'_f 替代 J_f，则 $\beta_P(Z)$ 的定义不会改变。

例 2.4. 我们有 $\beta_P(Z) \leq n$，当且仅当 P 是 Z 的光滑点时取等号。这是众所周知的事实的推论：若 P 属于理想 $\mathfrak{a}$的零点集，则 $\mathrm{lct}_P(\mathfrak{a}) \leq n$，当且仅当 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_P$在 P 的某个邻域内时取等号。

注记 2.5。 众所周知，在 P 的一个邻域内， f 属于 $\mathfrak{m}_P J_f$ 的整闭包，因此 同上所引 给出

$$\mathrm{lct}_P(f) \leq \beta_P(f).$$

[1]这意味着 $dx_1, \ldots\ldots, dx_n$ 平凡化了余切层。

例2.6。 若对于某个 $d \geq 2$，有 $f = x_1^d \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$，则 $\mathfrak{m}_0 J_f = (x_1, \ldots, x_n) x_1^{d-1}$。我们看到，对数消解由原点处的爆破给出，并且有

$$\beta_0(f) = \min\left\{\tfrac{1}{d-1}, \tfrac{n}{d}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{if } n = 1; \\ \frac{1}{d-1}, & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

我们注意到，结果取决于所考虑的环境环。这种情况是 $\beta_P(f)$与对数典范阈值$_P(f)$有所不同的一个方面；不过，鉴于 β_P的定义中包含极大理想，这并不令人意外。

例2.7. 假设 a 和 b是正整数，且 $a \geq b \geq 1$，并令 $f = x^a y^b \in \mathbf{C}[x, y]$。在这种情况下，我们有 $\mathfrak{m}_0 J_f = x^{a-1} y^{b-1} (x, y)^2$,；因此， $\mathfrak{m}_0 J_f$的一个对数消解由在原点处进行爆破给出，于是可知

$$\beta_0(f) = \min\left\{\tfrac{1}{a-1}, \tfrac{2}{a+b}\right\},$$

因此，若 $a \geq b + 2$，则 $\beta_0(f) = \frac{1}{a-1}$；若 $a = b$ 或 $a = b + 1$，则 $\beta_0(f) = \frac{2}{a+b}$。

例2.8. 假设 Z 在 P处有一个普通奇异点，也就是说， Z在 P处的射影切锥是光滑的。若 $\pi\colon Y \to X$ 是将 X 在 P 处爆破所得的映射，例外因子为 E，则在 P 附近有 $J_f \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y\big(-(d-1)E\big)$，其中 $d = \mathrm{mult}_P(Z)$，且 $\mathfrak{m}_P \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-E)$；因此， π是 $\mathfrak{m}_P J_f$在 P邻域内的一个对数消解，并且 $\beta_P(Z) = \frac{n}{d}$。 –

例 2.9. 设 $A = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$ 且令 $f = \det(A) \in \mathbf{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq r]$。在此情形下，我们有 $J_f = I_{r-1}(A)$，即由 A 的 $(r-1)$ 阶子式生成的理想。根据可追溯至 [Vai84] 的一个结果，通过依次吹起秩为 $\leq i$ 的矩阵轨迹（的严格变换），其中 $i = 0, \ldots, r-2$，即可得到 $(\mathbf{A}^{r^2}, J_f)$ 的对数消解。显然，这也给出了 $\mathfrak{m}_0 J_f$ 的对数消解，而简单计算可得 $\beta_0(f) = 4$。

在孤立奇点的情形下，我们有以下用米尔诺数表示的下界。回忆一下，若 Z 在 P 处有孤立奇点（也就是说，在 P的某个邻域内， Z的唯一可能奇点是 P），那么 Z在 P处的米尔诺数由 $\mu_P(Z) = \ell(\mathcal{O}_{X,P}/J'_f)$ 给出，其中 J'_f是备注 2.3 中讨论的雅可比理想的一个版本。

命题 2.10。 若 Z 是一个光滑的 n 维簇 X 中的超曲面，且在 P 处有孤立奇点，则

$$\beta_P(Z) \geq \frac{n}{1 + \mu_P(Z)^{1/n}}.$$

证明。 在下文中，我们用 $e(\mathfrak{a})$ 表示零维理想的希尔伯特-塞缪尔重数。设 f 是 Z 在 P附近的局部方程。由注 2.3，可得

$$\beta_P(Z) = \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J'_f),$$

因此根据 [dFEM04，定理 0。1], 我们得到

$$\beta_P(Z) \geq \frac{n}{e(\mathfrak{m}_P J'_f)^{1/n}}.$$

另一方面，由于 Teissier的Minkowski型不等式适用于重数[Tei77] ，可得

$$e(\mathfrak{m}_P J_f')^{1/n} \leq e(\mathfrak{m})^{1/n} + e(J_f')^{1/n} = 1 + e(J_f')^{1/n}.$$

最后，由于 J_f' 由一个正则序列生成，根据 [Mat89，定理 14。11]可知 $e(J_f') = \mu_P(Z)$。将这些结果综合起来，就得到命题中的不等式。

□

例 2.11。 如果 Z 是次数为 d 的$\mathbf{P}^{n-1}$中光滑射影超曲面上的仿射锥，那么 $\mu_0(Z) = (d-1)^n$，由例 2.8 可知，在这种情况下，命题 2.10 中的不等式取等号。

接下来我们证明，不变量 $\beta_P(Z)$ 满足 $\mathrm{lct}_P(Z)$ 的一些一般性质。正如我们将看到的，这些基本性质可以很容易地从理想的对数正则阈值的一般性质推导出来。

命题 2.12。 若 Z 是光滑簇 X中的一个超曲面，则集合

$$\{\beta_P(Z) \mid P \in Z\}$$

是有限的，并且对于每个 $c \geq 0$，集合

$$\{P \in Z \mid \beta_P(Z) \geq c\}$$

在 Z 中是开集。

证明。 令 $\pi\colon X \times Z \to Z$为投影，并令 $s\colon Z \to X \times Z$为由 $s(x) = (x, x)$ 给出的 π 的截面。我们考虑 $\mathfrak{a} = \mathcal{I}_\Delta \cdot \mathcal{O}_{X\times Z}$，其中 $\mathcal{I}_\Delta \subseteq \mathcal{O}_{X\times X}$ 是定义对角线的理想。由此可知，若 $\mathfrak{b} = (J_f \cdot \mathcal{O}_{X\times Z}) \cdot \mathfrak{a}$，则

$$\beta_P(Z) = \mathrm{lct}_{s(P)}(\mathfrak{b} \cdot \mathcal{O}_{\pi^{-1}(P)}).$$

命题中的断言随即由族中对数典范阈值的众所周知的性质得出（例如，参见 [Mus02，引理 4.8 和定理 4。9]）。□

注 2.13。 鉴于上述命题，定义不变量 $\beta_P(Z)$ 的整体版本是合理的，定义如下

$$\beta(Z) := \min\{\beta_P(Z) \mid P \in Z\}.$$

命题 2.14. 若 Z 是光滑簇 X中的超曲面，且 H 是 X 中的光滑超曲面，并且不包含于 Z，若 $Z|_H = Z \cap H \hookrightarrow H$ 是 H对应的超曲面，则

$$\beta_P(Z) \geq \beta_P(Z|_H) \quad \textit{for all} \quad P \in Z|_H.$$

证明. 我们不妨假设 Z由 $f \in \mathcal{O}_X(X)$ 定义，因此 $g = f|_H$定义了 Z_H。令 $\mathfrak{m}_P$和$\mathfrak{m}_P$ 分别表示在 X 和 H中定义 P 的理想。选取 P邻域内的一组代数坐标 $x_1, \ldots, x_n$，使得 H由 x_1 定义，于是可见，若

$$\mathfrak{a} = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

那么 $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_H = J_g$。由于 $\mathfrak{a} \subseteq J_f$，我们有

$$\mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P\mathfrak{a}) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P J_f) = \beta_P(Z).$$

另一方面，由于 $(\mathfrak{m}_P\mathfrak{a})\cdot \mathcal{O}_H = \mathfrak{m}_P J_g$，根据乘子理想限制定理（例如，参见 [Laz04，例 9.5。4]），可得

$$\mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P\mathfrak{a}) \geq \mathrm{lct}_P(\overline{\mathfrak{m}}_P J_g) = \beta_P(Z_H).$$

B结合这两个不等式，我们得到命题中的结论。 □

下一个结果将命题 2.12 推广到任意超曲面族的情形。

命题 2.15。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \to T$ 是复代数簇之间的光滑态射，并设 $s\colon T \to \mathcal{X}$是一个态射，使得 $\pi \circ s = \mathrm{Id}_T$。若 $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$是 T上的相对 ***Cartier*** 除子，包含 $s(T)$，并且对于每个（闭点）$t \in T$，记 $\mathcal{Z}_t$为 $\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$中的对应超曲面，则有以下结论：

i) 集合 $\{\beta_{s(t)}(\mathcal{Z}_t) \mid t \in T\}$ 是有限的。ii) 对于每个 $\beta \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$，集合

$$\{t \in T \mid \beta_{s(t)}(\mathcal{Z}_t) \geq \beta\}$$

在 T 中是开集。

~~证明。~~ 经过奇点消解 $\widetilde{T} \to T$，并转而考虑态射 $\widetilde{\mathcal{X}} \times_T \widetilde{T} \to \widetilde{T}$和 $\mathcal{Z} \times_T \widetilde{T}$后，我们看到可以假设 T（因而 $\mathcal{X}$ 也）是光滑的。在 $\mathcal{X}$ 上局部考察，我们还可以假设 $\mathcal{Z}$由 f定义，因此对于每个 $t \in T$，$\mathcal{Z}_t$由 $f_t = f|_{\mathcal{X}_t}$定义。此外，我们可以假设在 T 上有代数坐标 $y_1, \ldots, y_r$，并且在 $\mathcal{X}$ 上有 $x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_{r+n}$，使得对于 $1 \leq i \leq r$，$x_i = y_i \circ \pi$成立。令 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_{i+r}}$，其中$1 \leq i \leq n$，并令 $\mathfrak{a} = (f, f_1, \ldots, f_n)$，于是对于每个 $t \in T$，都有 $J_{f_t} = \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}_t}$。若 $\mathfrak{b}$ 是在 $\mathcal{X}$ 中定义 $s(T)$ 的理想，则

$$\beta_{s(t)}(\mathcal{Z}_t) = \mathrm{lct}_{s(t)}(\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{X}_t}).$$

那么，**i)** 和 **ii)** 中的断言可由族中理想的对数正则阈值的性质推出（例如，参见 [Mus02，引理 4.8 和定理 4。9]）。□

命题 2.16. 若 X 是一个光滑、不可约的 n 维代数簇，$f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ 非零，且 $P \in X$是一个点，满足 $f(P) = g(P) = 0$且 $f - g \in \mathfrak{m}_P^d$，其中 d为某个正整数，则

$$|\beta_P(f) - \beta_P(g)| \leq \tfrac{n}{d}.$$

证明. 假设蕴含 $J_f + \mathfrak{m}_P^{d-1} = J_g + \mathfrak{m}_P^{d-1}$，因此 $\mathfrak{m}_P J_f + \mathfrak{m}_P^d = \mathfrak{m}_P J_g + \mathfrak{m}_P^d$。命题中的断言随即由理想的对数典范阈值的相应性质得出，例如参见 [Mus12，性质 1。21]。 □

3. Two questions regarding minimal exponents

与上一节一样，设 X 是一个维数为 n 的光滑不可约复代数簇。我们考虑一个非零的 $f \in \mathcal{O}_X(X)$，它定义了一个超曲面 Z，且$P \in Z$。在这种情况下，可以为 f 关联一个伯恩斯坦-佐藤多项式 $b_f(s)$，它是由满足以下条件的多项式 $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ 构成的理想的首一生成元：

$$b(s)f^s \in \mathcal{D}_X[s] \cdot f^{s+1},$$

其中 $\mathcal{D}_X$ 是 X 上微分算子的环。由于 f 不可逆，我们有$b_f(-1) = 0$，Saito 将最小指数 $\widetilde{\alpha}(Z) = \widetilde{\alpha}(f)$ 定义为 [Sai93] 中 $b_f(s)/(s+1)$ 最大根的相反数（约定当 $b_f(s) = s+1$时，其值为 ∞；已知当且仅当 Z 是光滑超曲面时，情况才是如此）。局部版本 $\widetilde{\alpha}_P(Z)$ 的定义是用 P 的一个小开邻域替换 X 。根据 Kashiwara[Kas76]，的一个结果，当 $\widetilde{\alpha}(Z)$ 有限时，它是一个正有理数（与$b_f(s)$的所有根一样）。此外，根据 Lichtin 和 Koll´ar 的结果（见 [Kol97，定理 10.6]），有 $\min\{\widetilde{\alpha}_P(Z)\ 1\} = \mathrm{lct}_P(Z)$。此外，Saito 在 [Sai93] 中证明，$\widetilde{\alpha}(Z) > 1$ 当且仅当 Z 有有理奇点。

若 Z 是 X 中的任意超曲面，且 $P \in Z$，则我们通过选取 Z 在 P附近的局部方程，来定义 $\widetilde{\alpha}_P(Z)$。一般而言，最小指数具有与对数正则阈值相似的性质。关于其中一些结果的陈述和证明，参见[MP20]。

如引言中所述，我们考虑不变量 $\beta_P(Z)$的主要动机源自 Dano Kim 在 [Kim21]中提出的问题1.1。我们先给出几个例子，并就这个问题作一些说明。

例 3.1。若 Z在 P处有一个重数为 $d \geq 2$的普通奇点，则 $\beta_P(Z) =_d^n = \widetilde{\alpha}_P(Z)$，其中第一个等式见例2.8 ，第二个等式例如见 [MP20，定理 E(3)]。因此，在此情形下，(1)中等号成立。

例3.2。设 Z是 $\mathbf{A}^n$ 中由 $f = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$定义的超曲面，其中 $a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq 2$。在这种情况下，根据具有孤立奇点的加权齐次多项式的伯恩斯坦-佐藤多项式公式（见 [BGM86]），可得 $\widetilde{\alpha}_0(Z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$。另一方面，根据定义可得 $\beta_0(Z) =$ 对数典范阈值$_0(\mathfrak{a})$，其中 —

$$\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_1^{a_1-1}, \ldots, x_n^{a_n-1}).$$

由于单项式理想可通过环面态射给出的对数消解，因此，为了计算单项式理想的对数典范阈值，只需考虑$\mathbf{A}^n$上的单项式赋值，于是由一个众所周知的环面计算可得

$$\beta_0(Z) = \min_{u_1,\ldots,u_n>0} \frac{u_1+\ldots+u_n}{\min_i\{u_i\}+\min_i\{(a_i-1)u_i\}}.$$

为了验证不等式（1），我们因此需要证明，对每个 p， $q>0$以及每个 u_1，…，u_n满足 $u_i \geq p$且（a_i-1）$u_i \geq q$对所有 i均成立的情形，都有

$$\sum_{i=1}^n u_i \geq (p+q)\cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}. \tag{2}$$

然而，对每个 i，我们都有

$$a_iu_i = u_i+(a_i-1)u_i \geq p+q.$$

除以 a_i 并对所有 i求和，得到（2）。

例 3.3。 若 Z 由如例 2.9中的一个一般 $n\times n$ 矩阵的行列式定义，则我们已经看到 β_0（Z）$=4$，因此此时不等式（1）成立，因为 b_f（s）$=\prod_{i=1}^n$（$s+i$）蕴含 $\widetilde{\alpha}_0$（Z）$=2$（见 [LRWW17，定理4。1] 其中给出了伯恩斯坦-佐藤多项式的公式）。

注 3.4。 由注2.5 可知（这一点也已在 [Kim21]中指出），不等式（1）在 $\widetilde{\alpha}_P$（Z）$=$对数典范阈值$_P$（Z）时成立。因此，在问题 1.1 中，我们可以假设$\widetilde{\alpha}_P$（Z）>1，也就是说，Z在 P处有有理奇点。

注 3.5. 在问题 1.1 中，我们可以假设 Z 在 P 处有一个孤立奇点。事实上，经过适当选择后，用 P 的一个开邻域替换 X，我们可以假设存在代数坐标 $x_1,\ldots,x_n$，使得对所有 i，$x_i(P)=0$。对于所有 $d\geq 2$，令$f_d = f+\sum_{i=1}^n a_{d,i}x_i^d$，其中 $a_{d,1},\ldots,a_{d,n}\in \mathbf{C}$ 是一般的。由于 $(x_1^d,\ldots,x_n^d)$ 的零点集是 $\{P\}$，由克莱曼-贝尔蒂尼定理可知，由 f_d 定义的超曲面在 $X\smallsetminus\{P\}$ 中是光滑的。由命题 2.16，我们有

$$|\beta_P(f)-\beta_P(f_d)| \leq \tfrac{n}{d},$$

并且对最小指数也有类似的不等式

$$|\widetilde{\alpha}_P(f)-\widetilde{\alpha}_P(f_d)| \leq \tfrac{n}{d},$$

由 [MP20，命题 6.6(2)]。我们得出结论：如果不等式（1）对所有 f_d成立，那么它对 f也成立。

由于我们知道，对于每个 $P\in Z$， f都属于 $\mathfrak{m}_P J_f$ 的整闭包，因此，如果下面这个乐观的问题得到肯定回答，问题 1.1 也将得到肯定回答。

问题 3.6. 若 X 是光滑簇， $\mathfrak{a}$是 X 上余支撑于 $P\in X$的理想，且$f\in \mathcal{O}_X(X)$满足$f\in \mathfrak{m}_P\overline{\mathfrak{a}}$，那么我们是否有

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(\overline{\mathfrak{m}_P\mathfrak{a}})\big(=\mathrm{lct}_P(\mathfrak{m}_P\mathfrak{a})\big)?$$

当然，问题 1.2 是问题 3.6的较弱版本，其中我们将整闭包 $\mathfrak{m}_P\mathfrak{a}$ 替换为 $\mathfrak{m}_P\mathfrak{a}$。

注 3.7. 一般而言，对于每个理想 $J \subseteq \mathfrak{m}_P^2$，我们可以问：对于每个 $f \in J$，是否有$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq$ 对数典范阈值$_P(J)$（要求满足条件 $J \subseteq \mathfrak{m}_P^2$，以确保 f在 P处有奇点）。很容易举出一些不满足这一点的理想 J：例如，取$J = (f)$，其中 f满足 $\widetilde{\alpha}_P(f) > 1$。要得到余支撑为 P的例子，只需取 $J_d = (f) + \mathfrak{m}_P^d$，其中 $d \gg 0$，并利用 $\lim_{d\to\infty}$对数典范阈值$_P(J_d)$ $=$对数典范阈值$_P(f)$ 这一事实，该事实由 [Mus12, Property 1.21]给出。

下面的结果针对问题 1.2 给出了一个较弱的不等式。

定理 3.8. 设 X 是一个光滑不可约簇，$P \in X$ 是由理想$\mathfrak{m}_P$ 定义的一个点。若 $f \in \mathcal{O}_X(X)$ 非零，且 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_P$ 是 X 上的凝聚理想，使得 $f \in \mathfrak{m}_P\mathfrak{a}$，则

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{a}).$$

证明. 我们可以并且将假设 X 是仿射的。设 $x_1, \ldots, x_r$ 是 $\mathfrak{m}_P$ 的生成元，并记 $f = \sum_{i=1}^r g_i x_i$，其中 $g_1 \ldots, g_r \in \mathfrak{a}$。若 $\mathfrak{b} = (g_1, \ldots, g_r)$，则 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$，因此只需证明 $\widetilde{\alpha}_P(f)$ $\leq$ 对数典范阈值$_P(\mathfrak{b})$。

现在考虑 $g = \sum_{i=1}^r g_i y_i \in \mathcal{O}_Y(Y)$，其中 $Y = X \times \mathbf{A}^r$和 $y_1, \ldots, y_r$是 $\mathbf{A}^r$ 上的坐标函数。由 [Mus22，推论 1。2] 可得

$$\mathrm{lct}(\mathfrak{b}) = \widetilde{\alpha}(g). \tag{3}$$

注意，对于每个 η，集合 $\{(Q,\ t) \in Y \mid \widetilde{\alpha}_{(Q,t)}(g) \leq \eta\}$ 在 Y 中是闭的（例如，这可由以下事实推出：若 $U \subseteq V$ 是开子集，则 $b_{f|_U}(s)$ 整除 $b_{f|_V}(s)$）。首先，这意味着经过可能的替换，将 X 替换为 P 的一个开邻域后，我们可以假设对所有 $Q \in X$，都有 $\widetilde{\alpha}_{(P,0)}(g)$ $\leq \widetilde{\alpha}_{(Q,0)}(g)$。其次，由于相对于变量 y，g 是齐次的（次数为 1），这意味着对所有 $Q \in X$ 以及所有 $t \in \mathbf{A}^r$，都有 $\widetilde{\alpha}_{(Q,0)}(g) \leq \widetilde{\alpha}_{(Q,t)}(g)$。结合以上两点，我们得到

$$\widetilde{\alpha}_{(P,0)}(g) = \widetilde{\alpha}(g). \tag{4}$$

考虑一个 $\varphi\colon\ X \to Y$，它是 X 上簇之间的态射，且满足 $y_i \circ \varphi = x_i$。在这种情况下，最小指数在与超曲面相交时的变化给出

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \widetilde{\alpha}_{(P,0)}(g). \tag{5}$$

这是众所周知的结果，但由于缺少参考文献，我们仍给出证明。注意到$g \circ \varphi = f$。我们可以将 φ分解为 $p \circ i$，其中 $i\colon\ X \hookrightarrow X \times Y$是 φ的图，而 $p\colon\ X \times Y \to Y$是投影。我们有

$$\widetilde{\alpha}_{\varphi(P)}(g) = \widetilde{\alpha}_{(P,\varphi(P))}(h),$$

其中 $h = g \circ p$。另一方面，迭代应用 [MP20，定理 E(1)], 可得

$$\widetilde{\alpha}_{(P,\varphi(P))}(h) \geq \widetilde{\alpha}_P(h \circ i),$$

由此得到（5），因为 $h \circ i = f$ 且 φ（P）$=$（P，0）。结合（3）、（4）和（5），可得

$$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}(\mathfrak{a}) \leq \mathrm{lct}_P(\mathfrak{a}),$$

从而完成定理的证明。 □

注 3.9. 设 X 是一个光滑仿射簇，且 $P \in X$ 是由理想 $\mathfrak{m}_P$定义的一个点。设 $J \subseteq \mathfrak{m}_P$是由 f_1、……、f_r 生成的理想（我们可以且将假设它们在 C 上线性无关）。对于每个 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_r) \in \mathbf{C}^r$，令$g_\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i$。由最小指数的半连续性（见[MP20，定理 E(2)]）可知，对于一般的 λ，最小指数 $\widetilde{\alpha}_P(g)$是常数（设其等于 α），并且对所有 $\lambda \neq 0$，$\widetilde{\alpha}_P(g_\lambda) \leq \alpha$。此外，由 [CKM22，命题 3.1]可知，$\alpha \geq$对数典范阈值$_P(J)$。

以下命题等价：

i) 对所有非零的 $f \in J$，$\widetilde{\alpha}_P(f) \leq \mathrm{lct}_P(J)$。 ii) $\alpha = \mathrm{lct}_P(J)$。

蕴含关系 i)⇒ii) 显然；反过来，只需证明一般而言，对每个非零的 $h \in J$，都有 $\widetilde{\alpha}_P(h) \leq \alpha$。为此，与定理 3.8 的证明类似，我们考虑 $g = \sum_{i=1}^r f_i y_i \in \mathcal{O}_Y(Y)$，其中 $Y = X \times \mathbf{A}^r$。首先注意到，根据与一般超曲面相交时最小指数的行为（见[CDMO24，定理 1.2(ii)]），有

$$\widetilde{\alpha}_{(P,\lambda)}(g) = \widetilde{\alpha}_P(g_\lambda) = \alpha \quad \text{for general} \quad \lambda \in \mathbf{A}^r. \tag{6}$$

接下来证明：若 $h_1, \ldots, h_r \in \mathcal{O}_X(X)$ 满足 $w = \big(h_1(P) \ldots, h_r(P)\big)$ 是一般的，且 $h = \sum_{i=1}^r h_i f_i$，则 $\widetilde{\alpha}_P(h) \leq \alpha$。事实上，考虑态射 $\varphi\colon X \to Y$，其定义为$\varphi = (1_X, h_1, \ldots, h_r)$。仿照定理 3.8 的证明进行论证，由于 $h = g \circ \varphi$，我们有

$$\widetilde{\alpha}_P(h) \leq \widetilde{\alpha}_{(P,w)}(g) = \alpha,$$

其中等号由（6）得出。

现在假设 $h_1, \ldots, h_r \in \mathcal{O}_X(X)$ 任意，且满足 $h = \sum_{i=1}^r h_i f_i$ 非零。最小指数的半连续性（参见 [MP20，定理 E(2)]）意味着，若 $h' = \sum_{i=1}^r (h_i + u_i) f_i$，其中 $u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathbf{A}^r$ 为一般情形，则

$$\widetilde{\alpha}_P(h) \leq \widetilde{\alpha}_P(h') \leq \alpha,$$

其中第二个不等式是由上一段证明的断言得出的。

例 3.10。 若 $X=\mathbf{A}^n=\mathrm{Spec}\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ 且 $\mathfrak{a}\subseteq(x_1,\dots,x_n)^2$ 是一个单项式理想，则对每个 $h\in\mathfrak{a}$，都有 $\widetilde{\alpha}_0(h)$ ≤对数典范阈值$_0(\mathfrak{a})$（特别地，当 1.2 和 3.6 中的问题在 $\mathfrak{a}$ 是单项式理想时，答案为肯定）。事实上，首先注意到，由于

$$\lim_{d\to\infty}\mathrm{lct}_0(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^d)=\mathrm{lct}_0(\mathfrak{a}),$$

由于 $\mathfrak{m}=(x_1,\ .....,\ x_n)$（例如参见 [Mus12，性质 1.21]），只需证明当 $\mathfrak{a}$ 的零点集为 $\{0\}$ 时该断言成立。此外，由注 3.9 可知，只需证明：若 h 是 $\mathfrak{a}$ 的单项式生成元的一个一般线性组合，则 $\widetilde{\alpha}_0(h)$ =对数典范阈值$_0(\mathfrak{a})$。然而，这样的 h 关于其牛顿多面体是非退化的，并且由于 $\mathfrak{a}$ 的零点集为 $\{0\}$，根据克莱曼-贝尔蒂尼定理，由 h 定义的超曲面的奇点集由原点构成（原点是奇点这一事实源于 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}^2$）。在这种情况下，已知

$$\widetilde{\alpha}_0(h)=1/\min\left\{t>0\mid(t,\dots,t)\in P(\mathfrak{a})\right\},\tag{7}$$

其中 P（$\mathfrak{a}$）是理想 $\mathfrak{a}$ 的牛顿多面体（参见 [Var81], [EL82]，或 [Sai88]）。等式（7）右端等于对数典范阈值$_0$（$\mathfrak{a}$）是 Howald公式的推论（参见 [Laz04，定理 9.3。27]）。

References

[BGM86] J. Brian ´, *semi-quasi-homogènes* ´ Maisonobe, , 尼斯大学预印本（）。[25]

B. Dirks 和 M. Mustata, *section projective varieties* 用数学杂志》（），第 期，–。[24]

Q. Chen、B. Dirks、M. Mustata 和 S. Olano, *complete intersections* 《纯粹与应用数学杂志》（），–。[22]

Kollar 和 M. Mustata, *The log canonical threshold and rational singularities*, 预印本 arXiv: 2202 08425 2022 ↑2 10 。（）。, dFEM T. de Fernex、L. Ein 和 M. Mustata, [04] *Multiplicities and log canonical threshold*, 《代数几何杂志》 **13** 2004 3, 603 615 ↑4（），第 期，–。DM B. Dirks 和 M. Mustata, *Minimal exponents of hyperplane sections: a conjecture of Teissier*, 《欧洲数学学会杂志》（JEMS） **25** 2023 12, 4813 4840 ↑2（），第 期，–。Kim D. Kim, , 《纯粹与应用数学年鉴》（第4辑）200（[21] 2021），第5期，2305–2311。↑1, [82] *On a question of Teissier*, 2, 7, 8 EL F. Ehlers 和 K. C. Lo, *Minimal characteristic exponent of the Gauss-Manin connection of isolated singular point and Newton polyhedron* **259** 1982 4, 431 441 , 《数学刊》（），第 期，–。

[76] *B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions* Kas M. Kashiwara, , 《数学发明》 **38** 1976 77 1, 33 53 ↑7（/），第 期，–。Kol J. Kollar, , 《代数几何——圣克鲁兹 1995》，纯粹数学研讨会论文集，第[97] ´ *Singularities of pairs* 62, 1997, 221 287 ↑7 卷，美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州），第–页。Laz R. [04] *Positivity in algebraic geometry II* Lazarsfeld, ,《数学及其边缘领域成果》，第 49, 2004 ↑3 6 11 卷，施普林格出版社，柏林，。，，

Loe F. Loeser, ,《巴黎科学院报告》S´系列 I 数学 298（1984），第 [84] *Exposant d'Arnold et sections planes* 19, 485 488 ↑2 期，–。LRWW A. Lorincz、C. Raicu、U. Walther 和 J. Weyman, *and sub-maximal Pfaffians* [*Bernstein-Sato polynomials for maximal minors* **307** 2017 224 252 , 《数学进展》（），–。[89] ↑8 *Commutative ring theory* 2 Mat H. Matsumura, ,《剑桥高等数学研究》，第 8, 1989 ↑5 卷，剑桥大学出版社，剑桥，。Mus M. Mustat˘a, ,《美国数学会杂志》15[02]（2002），第3期，599–615。↑5, 6 ¸ *Singularities of pairs via jet schemes*

[Mus12] M. Mustaţ ̆a, *IMPANGA lecture notes on log canonical thresholds*, 《代数几何论文集》, 欧洲数学学会会议报告系列, 欧洲数学学会, 苏黎世, 2012, 第407–442页。Tomasz Szemberg 记录。 ↑3 7 9 11, , ,

[22] Mus , *Bernstein-Sato polynomials for general ideals vs. principal ideals*, 《美国数学会会刊》 **150** 2022 9, 3655 3662 ↑9 ( ), 第 期, –。 MP M. Mustata 和 M. Popa, *Hodge ideals for $\mathbb{Q}$-divisors,*

[20] *V-filtration, and minimal exponent*, 《Forum Mathematica Sigma》 **8** 2020 19, 41 ↑2 7 8 10 ( ), 论文编号 e 。, , , Sai M. Saito,

[88] *Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities*, 《数学年刊》281（ 1988 3, 411 417 ↑11), 第 期, –。Sai , , *spectrum and rational singularity*, 《数学年刊》295（1993）,

[93] *On b-function* 第1期, 51–74。 ↑1 7, Tei B. Teissier, *Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités*, 《数学年刊》（第

[77] 2辑）106（1977）, 第1期, 38–44。↑5[Tei80], *Polyèdre de Newton jacobien et équisingularité*, 《奇点研讨会》（巴黎, 1976/1977）, 巴黎第七大学数学出版物, 第7卷, 巴黎第七大学, 巴黎, 1980, 第193–221页; 英文译本见 arXiv: 1203 5595 ↑1 。 。 Vai I. Vainsencher,

[84] *Complete collineations and blowing up determinantal ideals*, 《数学年刊》267（ 1984 3, 417 432 ↑4),

[81] 第 期, –。 Var A. N. Varˇcenko, *Asymptotic Hodge structure on vanishing cohomology*, 《苏联科学院消息》数学系列45（1981）, 第3期, 540–591（俄文）。↑11

Department of Mathematics, University of Michigan, 530 Church Street, Ann Arbor, MI48109, USA*Email address*: mmustata@umich.edu