arXiv:2603.15595v1 [math-ph] 16 Mar 2026

Ruijsenaars–van Diejen–Takemura 哈密顿量作为有理 Heun 算子

SATOSHI TSUJIMOTO、LUC VINET 和 ALEXEI ZHEDANOV

ABSTRACT. 最一般的 Ruijsenaars-vanDiejen-Takemura 哈密顿量可表征为 Heun 算子，它们是二阶 q-差分算子，在极点位于 Askey-Wilson 网格上的初等有理函数上具有升阶作用。

1. INTRODUCTION

我们研究广义 Heun 算子，它们被定义为在一组初等有理函数上作用的升阶算子，这些函数的极点位于 Askey-Wilson 网格上。我们将发现，这些算子与某些可积模型背景下已确定的哈密顿量相一致。我们将说明，通过考察与一列或等价地与两列极点相关联的有理 Heun 算子，可以建立这种联系。以下先介绍一些背景。

Ruijsenaars [2] 和 van Diejen [3]的椭圆可积量子多体 BC_N模型，是 Inozemtsev 系统 [4] 的相对论性推广。它们的哈密顿量以q-差分算子的形式给出。Takemura 考察了它们的单粒子（$N = 1$）特例，并给出了单体哈密顿量的 [5] 四种退化形式 $A^{(i)}$，$i = 1$，2、3、4，这些形式本身也颇具研究价值。我们将其称为 RvDT 哈密顿量。最一般情形 $A^{(1)}$的表达式（采用本文记号）将在正文中给出。此外，我们还将在附录 A 中说明如何从文献 [6]给出的椭圆版本得到该算子。

Heun 方程 [7] 是具有四个正则奇点的标准化二阶 Fuchs 型微分方程。已知 [8] [9] ，求解 Inozemtsev BC_1-哈密顿量的本征态等价于求解 Heun 方程。可通过 Bethe 拟设方法 [9]求解。（另见 [10]。）因此，Inozemtsev 模型的薛定谔方程可视为标准 Heun 方程的多变量推广。由此可将 Ruijsenaars-van Diejen 模型视为 Heun 方程的多变量 q-推广，因此，Takemura 对单粒子相对论哈密顿量的各种退化形式，则是单变量微分 Heun 方程的不同 q-版本。

Heun 方程与数学的诸多领域相关，尤其可通过“反量子化”过程 [11]与 Painlev´e 方程建立联系。这种关系已被用于探索 q-Heun 方程 [9]。最近，作者与他人合作，提出了一种识别和研究 Heun 型算子（包括二阶微分算子或差分算子）的方法，该方法基于这类算子对一组初等函数所具有的某些升阶性质。研究者首先考察了单项式集合，以获得与 Askey 方案中的多项式相关的 Heun 算子 [12]。随后，通过考察算子对基本有理函数集合的作用，进一步拓展了研究范围 [1]。

由此构造出了最一般的二阶 q-差分算子，它作用于指数格上定义的多项式时，会使多项式的次数增加一，并将其称为大 q-Jacobi 型 q-Heun 算子 [13]。人们发现，这个 q-Heun 算子与 RvDT 哈密顿量 $A^{(3)}$ 相同。将其特化到小 q-Jacobi 情形，便得到 Hahn 引入的 q-Heun 算子 [14] ，它与 RvDT 哈密顿量 $A^{(4)}$ 相同。虽然这支持了将 RvDT 哈密顿量视为某些 Heun 算子的观点，但最少退化的哈密顿量 $A^{(1)}$ 和 $A^{(2)}$ 是否也能类似地认定为 Heun 算子，仍未有定论。

这在一定程度上促使人们探索通过有理函数上的升阶性质来定义的 Heun 算子。因此，在 [1] 开展了一项研究，其中将有理 Heun 算子定义为最一般的二阶 q-差分算子，它将任意 $[(n-1)/n]$ 型有理函数映射为 $[n/(n+1)]$型有理函数。这些算子是通过考察它们对初等有理函数 $(x - x_n)^{-1}, n = 0,1,...$的作用构造出来的，这些函数的极点位于

Askey-Wilson 网格 $x_n = \alpha q^n + (\alpha q^n)^{-1}$上。然而，与 RvDT 哈密顿量 $A^{(1)}$ 的联系尚未完全确立；本文将通过两种方式弥补这一点。一方面，我们将说明如何通过参数反演和规范变换，从与一个极点序列相关联的升阶 Heun 算子得到 $A^{(1)}$ 。另一方面，按照 [1], 中提出的一个想法，我们将发现，$A^{(1)}$ 也可以由与两个极点序列相关联的升阶 Heun 算子恢复。在这一框架下，要将 $A^{(2)}$ 识别为有理 Heun 算子，要求极点位于 q-线性网格上；这一点将另文详述 [15]。

我们可以指出，对于与 Askey 方案中的多项式族相关联的 Heun 算子，将这些算子定义为使定义在相应格上的单项式次数升高一阶的算子，这与多项式双谱算子的一般双线性表达式（相关的代数 Heun 算子[16]或三对角化过程）相一致。目前尚不清楚有理 Heun 算子是否也存在这种对偶方法，但它可能植根于近期在 [17]中发展的 Leonard 三元组理论。我们还可以补充说，由 Askey-Wilson 网格上多项式的升阶条件得到的 Heun-Askey-Wilson 算子，已在 [1] 中证明可以通过对 $A^{(1)}$取极限而得到。

本文旨在构造定义为二阶 q-差分算子、且对一组或两组极点位于 Askey-Wilson 网格上的初等有理函数具有升阶作用的 Heun 算子，具体安排如下。第 2 节明确给出两个定义性升阶条件。对于这些算子的一般形式，我们将通过施加由既定升阶作用导出的必要条件，在一组最小的初等有理函数上刻画相关的 Heun 算子。随后，我们将通过事后验证（尤其是在双极点序列的情形下）所构造的算子定义唯一且对一般初等有理函数具有所需作用，来证明这些条件的充分性。具体而言，我们首先在第 3 节确定一个涵盖所关注两种情形的算子W_{AW}。接着在后两节通过进一步特化构造所需的 Heun 算子：第 4 节构造与一列极点相关的算子 $W_{AW}^{(1)}$，第 5 节构造与两列极点相关的算子 $W_{AW}^{(2)}$。本文也将在此处讨论所用必要条件的充分性。第 6 节将把 $W_{AW}^{(2)}$ 认定为 Takemura 哈密顿算子 $A^{(1)}$，并说明 $W_{AW}^{(1)}$与 $W_{(2)\,AW}$等价；由此确立，由单列极点定义的 Heun 算子本质上也就是 Takemura 算子 $A^{(1)}$。最后，本文将简要总结并展望，随后附上前文提到的附录 A。

2. Raising properties

定义 2.1. 有理函数 $R(x)$ 称为类型 $[r/s]$，如果它可以写成 *as*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2.1}$$

其中 P和 Q 是互素多项式，且次数 $P = r$，次数$Q = s$。

注意：下文将限于简单情形，即 Q 只有单零点 .

取 $R_{n,m}(x)$为变量 $x = x(z)$上的一个类型为 $[(n+m+1)/(n+m+2)]$ 的有理函数，其极点规定在 $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$和 $x = y_0, y_1, \ldots, y_m$处。由于只允许单极点，这样的函数可进行如下形式的部分分式展开

$$R_{n,m}(x) = R_n(x; x_0, x_1, \ldots) + R'_m(x; y_0, y_1, \ldots), \tag{2.2}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{\xi_0}{x - x_0} + \frac{\xi_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{\xi_n}{x - x_n}, \tag{2.3}$$

$$R'_m(x) = \frac{\xi'_0}{x - y_0} + \frac{\xi'_1}{x - y_1} + \cdots + \frac{\xi'_m}{x - y_m}. \tag{2.4}$$

我们采用约定 $R_{n,\,-1}(x) = R_n(x)$ 以及 $R_{-1,\,m}(x) = R'_m(x)$。

由有序极点集合 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 和 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 标记的初等有理函数基如下：

$$\left\{\frac{1}{x-x_0},\frac{1}{x-x_1},\dots\right\};\qquad \left\{\frac{1}{x-y_0},\frac{1}{x-y_1},\dots\right\}. \tag{2.5}$$

因此，上文引入的函数 $R_n(x)$、$R'_m(x)$ 和 $R_{n,\,m}(x)$ 可表示为这些基元素的展开。接下来将介绍的升阶性质，是针对给定的排序而言的。

考虑一般的二阶 q-差分算子

$$W = A_1(z)\mathcal{T}^+ + A_2(z)\mathcal{T}^- + A_0(z)\mathcal{I}, \tag{2.6}$$

其中 $\mathrm{T}^{+}f(z) = f(zq)$，$\mathrm{T}^{-}f(z) = f(z/q)$，且 $\mathrm{I}f(z) = f(z)$。I

n 与多项式情形不同，升次数性质有几种类型 f or

比值有理函数。我们将考虑以下两种情况：

(i) 一列极点 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$：

$$W^{(1)}R_n(x) = \tilde{R}_{n+1}(x) = \frac{\tilde{\xi}_0}{x-x_0} + \cdots + \frac{\tilde{\xi}_n}{x-x_n} + \frac{\tilde{\xi}_{n+1}}{x-x_{n+1}}, \tag{2.7}$$

(ii) 两列极点 $\{x_n, y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$：

$$W^{(2)}R_{n,m}(x) = \tilde{R}_{n+1,m+1}(x) = \frac{\tilde{\xi}_0}{x-x_0} + \cdots + \frac{\tilde{\xi}_{n+1}}{x-x_{n+1}} + \frac{\tilde{\xi}'_0}{x-y_0} + \cdots + \frac{\tilde{\xi}'_{m+1}}{x-y_{m+1}}, \tag{2.8}$$

其中假设两列极点彼此独立，即 $y_n \notin \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$。

注意，增加两个，$W^{(1)}$ 因此一般极点，而 $W^{(2)}$ 作为另一个的特殊情形：

$$W^{(1)} : R_{n,-1} \to R_{n+1,-1} \quad (+1\text{ pole}) \qquad \text{and} \qquad W^{(2)} : R_{n,m} \to R_{n+1,m+1} \quad (+2\text{ poles}) \tag{2.9}$$

将构造两个分别满足条件 (2.7) 和 (2.8) 的有理 Heun 算子，其极点序列视情况取自一个或两个 Askey-Wilson 网格。对于 $x(z) = z + 1/z$，极点序列因此为：

$$x_n = x(\alpha q^n) = \alpha q^n + \alpha^{-1}q^{-n} \quad \text{and} \quad y_n = x(\beta q^n) = \beta q^n + \beta^{-1}q^{-n} \quad \text{with} \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \alpha \neq \beta \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

相应的 Heun 算子将分别称为 $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ 和 $W_{(2)\,\mathrm{AW}}$。

3. An intermediary step: the operator W_{AW}

3.1. 一般性质。 作为中间步骤，引入算子 W 会很方便。它定义在函数 $R_n \equiv R_{n,-1}$ 上，但按照升阶性质 (ii) 作用，即：

$$W : R_{n,-1} \to R_{n+1,0} \quad (+2\text{ poles}). \tag{3.1}$$

换句话说，W 增加两个极点，其中一个可称为 y_0。正如我们将看到的，很容易看出，$W^{(1)}$ 和 $W_{(2)}$ 在此都是 W 的特殊情形。因此，我们将先刻画 W，再通过添加适当条件得到 $W^{(1)}$ 和 $W_{(2)}$。

根据定义，算子 W 必须满足以下三个条件：

$$W\left\{\frac{1}{x-x_0}\right\} = \frac{\xi_{0,+}}{x-y_0} + \frac{\xi_{0,0}}{x-x_0} + \frac{\xi_{0,1}}{x-x_1} = r_1(x), \tag{3.2}$$

$$W\left\{\frac{1}{x-x_1}\right\} = \frac{\xi_{1,+}}{x-y_0} + \frac{\xi_{1,0}}{x-x_0} + \frac{\xi_{1,1}}{x-x_1} + \frac{\xi_{1,2}}{x-x_2} = r_2(x), \tag{3.3}$$

$$W\left\{\frac{1}{x-x_2}\right\} = \frac{\xi_{2,+}}{x-y_0} + \frac{\xi_{2,0}}{x-x_0} + \frac{\xi_{2,1}}{x-x_1} + \frac{\xi_{2,2}}{x-x_2} + \frac{\xi_{2,3}}{x-x_3} = r_3(x), \tag{3.4}$$

其中 x_n 和 y_n 的定义如式（2）所示。

由 (3.2)–(3.4)，可以求出代入 W 的表达式 (2.6) 中的函数 $A_i(z)$ 的显式表达式：

$$A_1(z) = \frac{(x(zq)-x_0)(x(zq)-x_1)(x(zq)-x_2)}{(x(zq)-x(z))(x(zq)-x(z/q))}\sum_{j=0}^{2}\frac{(x(z)-x_j)(x(z/q)-x_j)}{\prod_{\ell\in\{0,1,2\}\setminus j}(x_j-x_\ell)}r_{j+1}(x(z)), \tag{3.5}$$

$$A_2(z) = \frac{(x(z/q) - x_0)(x(z/q) - x_1)(x(z/q) - x_2)}{(x(z/q) - x(z))(x(z/q) - x(zq))} \sum_{j=0}^{2} \frac{(x(z) - x_j)(x(zq) - x_j)}{\prod_{\ell\in\{0,1,2\}\setminus j}(x_j - x_\ell)} r_{j+1}\left(x\left(z\right)\right), \tag{3.6}$$

$$A_0(z) = (x(z) - x_0) r_1(x(z)) - \frac{x(z) - x_0}{x(qz) - x_0} A_1(z) - \frac{x(z) - x_0}{x(z/q) - x_0} A_2(z). \tag{3.7}$$

注意，函数 $A_1(z)$ 和 $A_2(z)$ 之间满足以下关系：

$$A_2(z) = A_1(1/z), \tag{3.8}$$

如果 $x(1/z) = x(z)$，就像 $x(z) = z + z^{-1}$ 时的情况一样。

取 $\xi_{0,+} = \xi_{1,+} = \xi_{2,+} = 0$ 后，三个条件 (3.2)–(3.4) 即为类型 1 升算子 $W^{(1)}$ 的条件 (2.7)。为了使类型 2 升算子性质对所有非负整数 n，m 都成立，我们必须对作用于极点为 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 的有理函数的作用方式施加额外条件。

3.2. **将 W 限制在 Askey-Wilson 网格上。** 现在令 W 取值于极点由 (2) 给出的 Askey-Wilson 网格上。由 (3.5)–(3.7) 可得，满足 (3.2)–(3.4) 的算子 W 在该网格上的限制 W_{AW} 具有以下表达式：

$$W_{\mathrm{AW}} = A_1(z)\mathcal{T}^+ + A_2(z)\mathcal{T}^- + A_0(z)\mathcal{I}, \tag{3.9}$$

$$A_1(z) = \frac{(qz - \alpha)Q_{10}(z)}{z^2(1 - \alpha z)(\beta - z)(1 - \beta z)(1 - z^2)(1 - qz^2)}, \tag{3.10}$$

$$A_0(z) = c_0 + c_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + c_2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{c_3}{(1 - \beta z)(1 - \beta/z)} + \frac{c_4}{(1 - q^{-\frac{1}{2}}z)(1 - q^{-\frac{1}{2}}/z)} + \frac{c_5}{(1 + q^{-\frac{1}{2}}z)(1 + q^{-\frac{1}{2}}/z)} \tag{3.11}$$

以及 $A_2(z) = A_1(1/z)$，其中 $Q_{10}(z)$ 是关于 z 的 10 次多项式，定义为

$$Q_{10}(z) = \sum_{j=0}^{10} \rho_j z^j. \tag{3.12}$$

可以看出，全部 17 个系数 ρ_j 和 c_j 都是集合 $\Xi = \{\xi_{0,+}, \xi_{1,+}, \xi_{2,+}, \xi_{0,0}, \xi_{0,1}, \xi_{1,0}, \xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,0}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi_{2,3}\}$ 中元素的线性组合，

$$\rho_j = \sum_{\xi\in\Xi} d_{j,\xi}(\alpha,\beta,q)\,\xi, \quad c_j = \sum_{\xi\in\Xi} \tilde{d}_{j,\xi}(\alpha,\beta,q)\,\xi, \tag{3.13}$$

并且，通过考察它们之间的关系可知，12 个系数 $\rho_0, \ldots, \rho_9$ 和 c_0, c_3 是关于 Ξ 线性无关的叠加，其中包含 12 个参数；其余 5 个系数可表示为 $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_9\}$ 的叠加，如下所示：

$$\rho_{10} = \alpha^2 q^3 \rho_0, \quad c_1 = q\,(1+q)\left(1 + \beta^{-2}\right)\alpha\rho_0 + \frac{q\alpha\rho_1}{\beta} + \frac{\rho_9}{q\,\alpha\,\beta}, \quad c_2 = \frac{q(1+q)\alpha\rho_0}{\beta}, \tag{3.14}$$

$$c_4 = \frac{-1}{2q^3(1 - \beta q^{-\frac{1}{2}})(1 - \beta q^{\frac{1}{2}})} \sum_{j=0}^{10} q^{\frac{10-j}{2}} \rho_j, \quad c_5 = \frac{-1}{2q^3(1 + \beta q^{-\frac{1}{2}})(1 + \beta q^{\frac{1}{2}})} \sum_{j=0}^{10} (-q)^{\frac{10-j}{2}} \rho_j. \tag{3.15}$$

现在我们已经确定了算子 W_{AW}，计算它对 $(x - y_0)^{-1}$,$(x - y_1)^{-1}$ 的作用很简单。结果可以表示为以下形式：

$$W_{\mathrm{AW}}\left\{\frac{1}{x - y_0}\right\} = \frac{\xi_{-1,+}}{x - x_0} + \frac{\xi_{-1,-1}}{x - y_{-1}} + \frac{\xi_{-1,0}}{x - y_0} + \frac{\xi'_{-1,0}}{(x - y_0)^2} + \frac{\xi_{-1,1}}{x - y_1}, \tag{3.16}$$

$$W_{\mathrm{AW}}\left\{\frac{1}{x - y_1}\right\} = \frac{\xi_{-2,+}}{x - x_0} + \frac{\xi_{-2,0}}{x - y_0} + \frac{\xi'_{-2,0}}{(x - y_0)^2} + \frac{\xi_{-2,1}}{x - y_1} + \frac{\xi_{-2,2}}{x - y_2}. \tag{3.17}$$

4. The Heun operator $W_{\mathrm{AW}}^{(1)}$ associated to one series of poles on the Askey-Wilson grid

现在我们转而确定 Askey-Wilson 网格上的有理 Heun 算子 $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$，该算子由 (2.7) 中给出的升阶性质 (i) 定义。由于相对于 (3.2)–(3.4) 中给出的W_{AW} 作用，此算子会将类型为 $[n/(n+1)]$ 的有理函数变换为类型为 $[(n+1)/(n+2)]$, 的有理函数，因此我们需要确保不会新增位于 y_0 的第二个极点；这等价于施加以下条件

$$\xi_{0,+} = \xi_{1,+} = \xi_{2,+} = 0, \tag{4.1}$$

在给出 W_{AW} 表达式的公式中。这得到

$$c_3 = 0, \quad \beta = q^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_8 = \rho_{10} - \sum_{j=0}^{7}\sum_{\ell=0}^{8-j} q^{\frac{1}{2}j+\ell-4}\rho_j, \quad \rho_9 = -(q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}})\rho_{10} + q^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{7}\sum_{\ell=0}^{7-j} q^{\frac{1}{2}j+\ell-4}\rho_j, \tag{4.2}$$

并允许求出该算子

$$W_{\mathrm{AW}}^{(1)} = A_1^{(1)}(z)\mathcal{T}^+ + A_1^{(1)}(z^{-1})\mathcal{T}^- + A_0^{(1)}(z)\mathcal{I}, \tag{4.3}$$

使其满足 (2.7)。可使用两种参数化（如 [1] 中所示）。在第一种参数化中，有

$$A_1^{(1)}(z) = \frac{(qz-\alpha)Q_8(z)}{z^2(1-\alpha z)(1-z^2)(1-qz^2)}, \tag{4.4}$$

$$A_0^{(1)}(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}\left(z + \frac{1}{z}\right) + c_2^{(1)}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{c_4^{(1)}}{(1-q^{-\frac{1}{2}}z)(1-q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})} + \frac{c_5^{(1)}}{(1+q^{-\frac{1}{2}}z)(1+q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})}, \tag{4.5}$$

and

$$Q_8(z) = \sum_{j=0}^{8}\eta_j z^j \tag{4.6}$$

其中 $\eta_8 = \alpha^2 q^3 \eta_0$ 且

$$c_1^{(1)} = \alpha q\eta_1 + (\alpha q)^{-1}\eta_7, \quad c_2^{(1)} = q\,(1+q)\,\alpha\eta_0, \tag{4.7}$$

$$c_4^{(1)} = \frac{1}{2}q^{\frac{3}{2}}\sum_{j=0}^{8} q^{-\frac{1}{2}j}\eta_j, \quad c_5^{(1)} = \frac{1}{2}q^{\frac{3}{2}}\sum_{j=0}^{8}(-q^{\frac{1}{2}})^{-j}\eta_j. \tag{4.8}$$

现在我们通过以下方式引入另一种参数化 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$

$$\eta_k = (-1)^k q^{k/2}\sigma_k\,\eta_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 8), \tag{4.9}$$

其中 $\sigma_k = \sigma_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8)$ 表示关于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8$ 的第 k 个初等对称多项式，其定义为

$$\sigma_k(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_8) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le 8} \varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_k}.$$

因此我们有

$$\alpha\beta = q\,\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\varepsilon_2^{\frac{1}{2}}\varepsilon_3^{\frac{1}{2}}\varepsilon_4^{\frac{1}{2}}\varepsilon_5^{\frac{1}{2}}\varepsilon_6^{\frac{1}{2}}\varepsilon_7^{\frac{1}{2}}\varepsilon_8^{\frac{1}{2}} \tag{4.10}$$

由条件 $\eta_8 = (q\alpha\beta)^2\eta_0 = q^4\sigma_8\eta_0$ 得出。在此参数化（4.9）中，则有：

$$A_1^{(1)}(z) = \frac{1}{qz^2}\frac{\prod_{j=1}^{8}(\varepsilon_j^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}z)}{(1-q^{\frac{1}{2}}z\prod_{j=1}^{8}\varepsilon_j^{\frac{1}{2}})}\frac{\prod_{j=1}^{8}(1-q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_j z)}{(1-z^2)(1-qz^2)}, \tag{4.11}$$

$$A_0^{(1)}(z) = c_0^{(1)} + c_1^{(1)}\left(z + \frac{1}{z}\right) + c_2^{(1)}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{c_4^{(1)}}{(1-q^{-\frac{1}{2}}z)(1-q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})} + \frac{c_5^{(1)}}{(1+q^{-\frac{1}{2}}z)(1+q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})}, \tag{4.12}$$

$$c_1^{(1)} = q^{\frac{1}{2}}\prod_{\ell=1}^{8}\varepsilon_\ell^{\frac{1}{2}}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(\varepsilon_j + \varepsilon_j^{-1}\right), \quad c_2^{(1)} = -(1+q)\prod_{\ell=1}^{8}\varepsilon_\ell^{\frac{1}{2}}, \tag{4.13}$$

$$c_4^{(1)} = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{8}(1-\varepsilon_j), \quad c_5^{(1)} = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{8}(1+\varepsilon_j), \tag{4.14}$$

带有 $c_0^{(1)}$ 一个任意参数。

5. The Heun operator $W_{\mathrm{AW}}^{(2)}$ associated to two series of poles on the Askey-Wilson grid

5.1. 两个附加条件。 满足 (2.8) 的算子 $W^{(2)}$ AW 由 W_{AW} 通过添加另外两个条件得到，即:

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}\left\{\frac{1}{x-y_0}\right\}=\frac{\xi_{-1,+}}{x-x_0}+\frac{\xi_{-1,0}}{x-y_0}+\frac{\xi_{-1,1}}{x-y_1}, \tag{5.1}$$

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}\left\{\frac{1}{x-y_1}\right\}=\frac{\xi_{-2,+}}{x-x_0}+\frac{\xi_{-2,0}}{x-y_0}+\frac{\xi_{-2,1}}{x-y_1}+\frac{\xi_{-2,2}}{x-y_2}. \tag{5.2}$$

将 W_{AW} 对初等有理函数 $\frac{1}{x-y_0}$ 和 $\frac{1}{x-y_1}$ 的计算作用（见 (3.16) 和 (3.17)）进行比较，可知必须施加

$$\xi_{-1,-1}=\xi'_{-1,0}=\xi'_{-2,0}=0 \tag{5.3}$$

在 (3.16) 和 (3.17) 中，这将得到

$$c_3=0,\qquad \sum_{j=0}^{10}\beta^j\rho_j=0,\qquad \sum_{j=0}^{10}q^{10-j}\beta^j\rho_j=0. \tag{5.4}$$

5.2. 构造 $W^{(2)}$ AW。 将关系式 (5.4) 代入 W_{AW} 的表达式中，得到算子

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}=A_1^{(2)}(z)\mathcal{T}^{+}+A_1^{(2)}(z^{-1})\mathcal{T}^{-}+A_0^{(2)}(z)\mathcal{I}, \tag{5.5}$$

其中

$$A_1^{(2)}(z)=\frac{(qz-\alpha)(qz-\beta)Q_8(z)}{q^2z^2(\alpha z-1)(\beta z-1)(1-z^2)(1-qz^2)\eta_0}, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}A_0^{(2)}(z)=&\,c_0^{(2)}+c_1^{(2)}\left(z+\frac{1}{z}\right)+c_2^{(2)}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\\&+\frac{c_4^{(2)}}{(1-q^{-\frac{1}{2}}z)(1-q^{-\frac{1}{2}}/z)}+\frac{c_5^{(2)}}{(1+q^{-\frac{1}{2}}z)(1+q^{-\frac{1}{2}}/z)},\end{aligned} \tag{5.7}$$

且 $Q_8(z)$ 是关于 z 的八次多项式，定义如下

$$Q_8(z)=\sum_{j=0}^{8}\eta_j z^j \tag{5.8}$$

其中 $\eta_8=q^2\alpha^2\beta^2\eta_0$，且

$$c_1^{(2)}=-\alpha\beta(q\eta_0)^{-1}\eta_1-(\alpha\beta q^2\eta_0)^{-1}\eta_7,\quad c_2^{(2)}=-\alpha\beta\left(1+q^{-1}\right), \tag{5.9}$$

$$c_4^{(2)}=\frac{1}{2\eta_0}\sum_{j=0}^{8}q^{-\frac{j}{2}}\eta_j,\quad c_5^{(2)}=\frac{1}{2\eta_0}\sum_{j=0}^{8}(-q)^{-\frac{j}{2}}\eta_j. \tag{5.10}$$

5.3. 充分性。 算子 $W^{(2)}$ AW 是通过求解由对五个初等有理函数规定的作用所施加的必要条件而得到的

$$\frac{1}{x-x_0},\quad \frac{1}{x-x_1},\quad \frac{1}{x-x_2},\quad \frac{1}{x-y_0},\quad \frac{1}{x-y_1}, \tag{5.11}$$

其极点位于式 (2) 所述的 Askey-Wilson 网格上。这完全确定了进入 $W^{(2)}$ AW 定义形式 (5.5) 的函数 $A_1^{(2)}(z)$ 和 $A_0^{(2)}(z)$。这些条件也具有充分性，随后可由以下事实证明：可以明确计算两个极点序列对一般初等有理函数的作用，并将其读出：

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}\left\{\frac{1}{x-x_n}\right\}=\frac{\hat{\xi}_{n,-1}}{x-y_0}+\frac{\hat{\xi}_{n,0}}{x-x_0}+\frac{\hat{\xi}_{n,1}}{x-x_{n-1}}+\frac{\hat{\xi}_{n,2}}{x-x_n}+\frac{\hat{\xi}_{n,3}}{x-x_{n+1}}, \tag{5.12}$$

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}\left\{\frac{1}{x-y_n}\right\}=\frac{\hat{\xi}'_{n,-1}}{x-x_0}+\frac{\hat{\xi}'_{n,0}}{x-y_0}+\frac{\hat{\xi}'_{n,1}}{x-y_{n-1}}+\frac{\hat{\xi}'_{n,2}}{x-y_n}+\frac{\hat{\xi}'_{n,3}}{x-y_{n+1}}, \tag{5.13}$$

其中

$$\hat{\xi}_{n,-1} = \frac{-(1-\alpha\beta/q)\sum_{j=0}^{8}\eta_j\beta^{4-j}}{(1-q^{n-1}\alpha\beta)(1-q^{-n-1}\beta/\alpha)(1-\alpha/\beta)q^2\eta_0}, \tag{5.14}$$

$$\hat{\xi}_{n,0} = \frac{-(1-\alpha\beta/q)\sum_{j=0}^{8}\eta_j\alpha^{4-j}}{(1-q^{n-1}\alpha^2)(1-q^{-n-1})(1-\beta/\alpha)q^2\eta_0}, \tag{5.15}$$

$$\hat{\xi}_{n,1} = \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-n}\beta/\alpha)\sum_{j=0}^{8}\eta_j q^{(j-4)(n-1)}\alpha^{j-4}}{(1-q^{n-1}\alpha^2)(1-q^{n-1}\alpha\beta)(1-\alpha^{-2}q^{-2n})(1-\alpha^{-2}q^{-2n+1})\,q^2\eta_0}, \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{n,2} = &-\left(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^2q^{2n}+\frac{1}{\alpha^2q^{2n}}\right)\frac{\alpha\beta}{q^{\frac{1}{2}}}-\left(\alpha q^n+\frac{1}{\alpha q^n}\right)\left(\alpha\beta q^{\frac{1}{2}}\eta_1+\frac{\eta_7}{\alpha\beta q^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}\eta_0}\\ &-\frac{\left(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right)\sum_{j=0}^{4}q^{2-j}\eta_{2j}+\left(\alpha q^n+\frac{1}{\alpha q^n}\right)\sum_{j=0}^{3}q^{\frac{3}{2}-j}\eta_{2j+1}}{\alpha^{-2}q^{-2n}(1-\alpha^2q^{2n-1})(1-\alpha^2q^{2n+1})q^{\frac{3}{2}}\eta_0},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\hat{\xi}_{n,3} = \frac{(1-q^n\alpha^2)(1-q^n\alpha\beta)\sum_{j=0}^{8}\eta_j q^{(4-j)(n+1)}\alpha^{4-j}}{(1-q^{-n-1})(1-q^{-n-1}\beta/\alpha)(1-\alpha^2q^{2n})(1-\alpha^2q^{2n+1})\,q^2\eta_0}, \tag{5.18}$$

以及 $\hat{\xi}'_{n,\ell} = \hat{\xi}_{n,\ell}\big|_{\alpha\leftrightarrow\beta}$，其中 $\ell\in\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$。注意，当 $n=0$ 时，$\hat{\xi}_{n,\ 1}$ 和 $\hat{\xi}'_{n,\ 1}$ 都为零 .

至此，便完成了证明：本节构造的算子 $W^{(2)}_{AW}$ 满足 (2.8)。

注 5.1。 将 $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ 的表达式进行比较后，我们注意到， $A^{(1)}_0$ 中四项前面的符号有一个为负，这使它有别于 $A^{(2)}_0$ 。

注 5.2。 这里可以讨论一种情形（先验排除）：两列极点序列特化为一列，即 $\alpha=\beta$。此时可以得到

$$W^{(2)}_{\mathrm{AW}}\left\{\frac{1}{x-x_n}\right\}\Big|_{\beta\to\alpha} = \frac{\xi''_{-1}}{(x-x_0)^2}+\frac{\xi''_0}{x-x_0}+\frac{\xi''_1}{x-x_{n-1}}+\frac{\xi''_2}{x-x_n}+\frac{\xi''_3}{x-x_{n+1}}. \tag{5.19}$$

因此，会出现一个不理想的二阶极点。在这种情况下，需要进一步进行参数特化，使该项消失；这将得到一个特化的 $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ 算子。

6. Identification with the Takemura operator $\mathrm{A}^{(1)}$

现在，我们将把 Heun 算子 $W_{(1)\,\mathrm{AW}}$ 和 $W^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$ 与 Takemura 哈密顿算子联系起来。我们先考虑后者。

6.1. $W^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$ 和 $\mathrm{A}^{(1)}$。

我们引入如下规范变换:

$$\hat{W}^{(2)}_{\mathrm{AW}} = \psi(z)^{-1}W^{(2)}_{\mathrm{AW}}\psi(z) \tag{6.1}$$

其中 $\psi(qz) = q^2z^2\underline{(\alpha z-1)(\beta z-1)}\,(qz-\alpha)(qz-\beta)\psi(z)$ 成立。于是得到

$$\hat{W}^{(2)}_{\mathrm{AW}} = \hat{A}^{(2)}_1(z)\mathcal{T}^+ + \hat{A}^{(2)}_1(z^{-1})\mathcal{T}^- + \hat{A}^{(2)}_0(z)\mathcal{I} \tag{6.2}$$

其中 $\hat{A}^{(2)}_0(z) = A^{(2)}_0(z)$ 且

$$\hat{A}^{(2)}_1(z) = \frac{\psi(qz)}{\psi(z)}A^{(2)}_1(z) = \frac{\sum_{j=0}^{8}\eta_j z^j}{(1-z^2)(1-qz^2)\eta_0}, \tag{6.3}$$

与 $\eta_8 = q^2\alpha^2\beta^2\eta_0$。

在另一种参数化（4.9）中，定义 $\hat{W}^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$ 的函数 $\hat{A}^{(2)}_1(z)$ 和 $\hat{A}^{(2)}_0(z)$ 如下:

$$\hat{A}^{(2)}_1(z) = \frac{\prod_{j=1}^{8}(1-q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_j z)}{(1-z^2)(1-qz^2)}, \tag{6.4}$$

$$\hat{A}_0^{(2)}(z) = c_0^{(2)} + c_1^{(2)}\left(z+\frac{1}{z}\right) + c_2^{(2)}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + \frac{c_4^{(2)}}{(1-q^{-\frac{1}{2}}z)(1-q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})} + \frac{c_5^{(2)}}{(1+q^{-\frac{1}{2}}z)(1+q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})}, \tag{6.5}$$

其中

$$c_1^{(2)} = q^{\frac{1}{2}}\prod_{\ell=1}^{8}\varepsilon_\ell^{\frac{1}{2}}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left(\varepsilon_j+\varepsilon_j^{-1}\right), \quad c_2^{(2)} = -(1+q)\prod_{\ell=1}^{8}\varepsilon_\ell^{\frac{1}{2}}, \tag{6.6}$$

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{8}(1-\varepsilon_j), \quad c_5^{(2)} = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{8}(1+\varepsilon_j), \tag{6.7}$$

and $c_0^{(2)}$ 是一个任意参数。这与我们记号中的 *Takemura* $\mathcal{A}^{(1)}$ 算子相同 n.

6.2. $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ **和** $\mathrm{A}^{(1)}$。通过重新参数化和适当的规范变换，可以将两个算子 $W^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$和 $W_{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$相互转化。例如， $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$与 $W_{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$之间满足以下关系：

$$W_{\mathrm{AW}}^{(2)}\Big|_{\varepsilon_8\to\varepsilon_8^{-1}} = \varepsilon_8^{-1}\widetilde{\psi}(z)W_{\mathrm{AW}}^{(1)}\widetilde{\psi}(z)^{-1}, \tag{6.8}$$

其中函数满足

$$\widetilde{\psi}(qz) = \frac{(1-\alpha q^{-1}z^{-1})(1-\beta q^{-1}z^{-1})(1-\alpha\beta\varepsilon_8^{-1}q^{-\frac{1}{2}}z)(1-\varepsilon_8 q^{\frac{1}{2}}z)}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\alpha\beta\varepsilon_8^{-1}q^{-\frac{3}{2}}z^{-1})(1-\varepsilon_8 q^{-\frac{1}{2}}z^{-1})}\widetilde{\psi}(z). \tag{6.9}$$

由此可知，基于单列极点的 Heun 算子 $W^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ 也会导出 Takemura 哈密顿算子 $\mathrm{A}^{(1)}$

7. Concluding remarks

Ruijsenaars–van Diejen 模型的单粒子哈密顿量源自一个具有 E_8型对称性[18]的参数空间。这种对称性在椭圆差分方程的广阔领域中尤为突出，其中包括椭圆离散 Painlev´e 方程所蕴含的几何对称性。本文关注的是该模型的 q-差分退化。在这一极限下由 Takemura 确定的哈密顿量 $\mathrm{A}^{(1)}$ 是本文的核心研究对象，本文旨在表明，该算子 $\mathrm{A}^{(1)}$ 在某种意义上是一个 q-Heun 算子。

事实上，可以利用这样一个一般思路来证实这一点：Heun 算子可定义为在作用于附属于适当网格的基本函数集合时具有升阶性质的算子。

总之，哈密顿量 $\mathrm{A}^{(1)}$ 的 Heun 特性可概括如下。首先，确定最一般的二阶 q-差分算子 $W_{AW}^{(2)}$，使其作为升算子作用于两组初等有理函数，这两组函数的极点分别位于两个不同的 Askey-Wilson 网格上。随后，对该 q-差分算子进行规范变换和重新参数化，便可得到 $\mathrm{A}^{(1)}$。事实上，规范变换消去了第二组初等有理函数中的一个参数，最终影响了 $\mathrm{A}^{(1)}$ 的“升阶规则”，但并未改变其 Heun 算子的性质。另一种方法是，通过刻画最一般的二阶 q-差分算子 $W_{AW}^{(1)}$ 来求得 $\mathrm{A}^{(1)}$：该算子作为升算子作用于一组极点位于某个 Askey-Wilson 网格上的初等有理函数。进一步证明， $W_{AW}^{(1)}$可由 $W_{(2)\,AW}$经规范变换和重新参数化再次得到。

Takemura 还确定了第二个哈密顿算子 $\mathrm{A}^{(2)}$。由于该算子是由 $\mathrm{A}^{(1)}$ 退化得到的，因此它也将是一个 Heun 算子。这种退化相当于考虑 q-线性网格上的极点，而非 Askey-Wilson 网格上的极点。对定义在该网格上的有理 Heun 算子进行独立刻画十分重要，而且需要采用不同的方法。这项工作将在未来的论文中完成。

本研究显然引出了两个重要问题。第一个问题是，是否存在对有理 Heun 算子的等价定义，使其与代数 Heun 算子的概念相一致；后者适用于与超几何正交多项式相对应的 Heun 算子。近期关于引入 Leonard 三元组及其与有理函数之间联系的进展，为此提供了颇具希望的思路 [17]。第二个同样颇具挑战性的问题是，$N \geq 2$ 的哈密顿量能否通过升阶条件定义为 Heun 算子。我们希望今后继续研究这些问题。

Acknowledgments

本研究获得魁北克政府国际关系与法语事务部提供的魁北克—京都合作资助。ST 的研究由 JSPS KAKENHI（资助编号 24K00528）支持。LV 部分获得加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的探索性资助。AZ 目前获得俄罗斯联邦科学与高等教育部的资助（协议编号 075–15–2025–343）。

Conflict of interest

O我谨代表所有作者声明，不存在利益冲突。

Data availability

本文稿没有相关数据。

Appendix A. Derivation of $\hat{W}^{(2)}_{\mathrm{AW}}$ and $\hat{\mathrm{W}}$ from the Ruijsenaars-van Diejen Operator

Ruijsenaars-van Diejen 算子在 [6] as 中给出

$$\mathcal{R} = A^+(z)\mathcal{T} + A^-(z)\mathcal{T}^{-1} + A^0(z)\mathcal{I}$$

其中

$$\begin{aligned}
A^+(z) &= \frac{\prod_{0\leq s\leq 7}\theta(a_s z;p)}{\theta(z^2;p)\theta(qz^2;p)}, \qquad A^-(z) = A^+(z^{-1}),\\
A^0(z) &= \frac{1}{2}\left(A^0_0(z) + A^0_1(z) + A^0_2(z) + A^0_3(z)\right),\\
A^0_j(z) &= \frac{L_j}{\theta(t;p)\theta(q^{-1}t;p)}\frac{\theta(c_j q^{-\frac{1}{2}}tz;p)\theta(c_j q^{-\frac{1}{2}}tz^{-1};p)}{\theta(c_j q^{-\frac{1}{2}}z;p)\theta(c_j q^{-\frac{1}{2}}z^{-1};p)}\prod_{0\leq s\leq 7}\theta(c_j q^{-\frac{1}{2}}a_s;p),\\
\theta(z;q) &= (q/z;q)_\infty (z;q)_\infty,
\end{aligned}$$

以及 $L_0 = L_1 = 1$，$L_2 = tq^{-2}p^{-1}\prod_{0\leq s\leq 7}a_s$，$L_3 = p^2L_3^{-1}$，$c_0 = 1$，$c_1 = -1$，$c_2 = p^{-\frac{1}{2}}$，$e_3 = -c_2^{-1}$。

算子 $\hat{W}^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$ 是一种 q-类比算子，由两列极点的升阶性质条件得到；如下所示，它可以通过对 Ruijsenaars–van Diejen 算子 R 取 $p \to 0$ 极限推导出来，

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 0} A^+(z) = \hat{A}^{(2)}(z),\\
&\lim_{p\to 0} A^-(z) = \hat{A}^{(2)}(z^{-1}),\\
&\lim_{p\to 0}\left\{A^0(z) - \frac{t\prod_{0\leq s\leq 7}a_s^{\frac{1}{2}}}{(1-t)(1-q^{-1}t)q^2}\frac{1}{p}\right\} = \hat{A}^{(2)}_0(z),
\end{aligned}$$

将参数 $a_j \to q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{j+1}$ 和某个常数 $\hat{c}_0$ 替换后。

如我们在先前的论文 [1], 中所讨论的，经典有理 Heun 算子 $\hat{\mathrm{W}} = \hat{B}(z)(\mathrm{T}_q - \mathrm{I}) + \hat{B}(z^{-1})(\mathrm{T}_q^{-1} - \mathrm{I}) + \hat{\gamma}_{00}\mathrm{I}$ 可由 $\hat{W}^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$ 推导得到。因此，将上述极限过程得到的 $\hat{W}^{(2)}{}_{\mathrm{AW}}$ 应用关系式 (6.8) 转换为 $\hat{W}^{(1)}{}_{\mathrm{AW}}$，我们便可从 Ruijsenaars-van Diejen 算子推导出 $\hat{\mathrm{W}}$。此外，还可以考虑另一种推导

ˆ 过程：通过选择参数，也可以直接从 Ruijsenaars-van Diejen 算子 R 推导出 W，具体如下

$$a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 = qp, \quad a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6^2 = q^{\frac{3}{2}},$$

并取 $p \to 0$ 时的极限：

$$\lim_{p\to 0} q^{-1}p\,A^+(z) = \hat{B}(z),$$
$$\lim_{p\to 0} q^{-1}p\,A^-(z) = \hat{B}(z^{-1}),$$
$$\lim_{p\to 0}\left\{q^{-1}p\,A^0(z) - \frac{ta_0^2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2}{q^4(q-t)(1-t)}\frac{1}{p}\right\} = -\hat{B}(z) - \hat{B}(z^{-1}) + \hat{\gamma},$$

将参数 $a_j \to q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{j+1}$ 替换为某个常数 ˆγ。

References

[1] Satoshi Tsujimoto、Luc Vinet 和 Alexei Zhedanov。《有理 Heun 算子与 Wilson 双正交函数》。*The Ramanujan Journal*，61(1):7–29，2023。[2] Simon N. M. Ruijsenaars。《可积解析差分算子：隐藏的参数对称性与特征函数》。载于 *New Trends in Integrability and Partial Solvability*，第 217–261 页。Springer，2004。[3] Jan Felipe Van Diejen。《差分 Calogero-Moser 系统的可积性》。*Journal of Mathematical Physics*，35 6 2983( ): – 3004，1994。[4] Vladimir I Inozemtsev。《可积粒子系统在环面上的含谱参数 Lax 表示》。*Letters in Mathematical Physics*，17:11–17，1989。[5] Kouichi Takemura。《Ruijsenaars-van Diejen 算子的退化与 q ´ *Journal of* - *Integrable Systems* 2 1 008, 2017 Painleve 方程》。，( ):xyx 。[6] Farrokh Atai 和 Masatoshi Noumi。《由规范变换和积分变换生成的 van Diejen 模型特征函数》。*Advances in Mathematics*，412:108816，2023。[7] Gerhard Kristensson。*Second order differential equations: special functions and their classification*。Springer Science & Business Media，2010。[8] Toshio Oshima 和 Hideko Sekiguchi。《在魏尔群作用下不变的微分算子交换族》。*Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*，2(1):1–75，1995。[9] Kouichi Takemura。《Heun 方程与 Calogero-Moser-Sutherland系统 I：Bethe ansatz 方法》。*Communications in mathematical physics*，235:467–494，2003。[10] Pierre-Antoine Bernard、Nicolas Cramp´e、Dounia Shaaban Kabakibo 和 Luc Vinet。《李型 Heun 算子与修正代数 Bethe ansatz》。*Journal of Mathematical Physics*，62(8)，2021。[11] Sergey Yu. Slavyanov。《反量子化及相应的对称性》。*Theoretical and Mathematical Physics* 185 1522 1526, 2015 ，：– 。[12] Roelof Koekoek 、 Peter A Lesky 和 Ren´e F Swarttouw。*Hypergeometric orthogonal polynomials*。Springer，2010。[13] Pascal Baseilhac、Luc Vinet 和 Alexei Zhedanov。《大 q-Jacobi 型的 q-Heun 算子与 q-Heun 代数》。*The Ramanujan Journal*，52(2):367–380，2020。[14] Wolfgang Hahn。《含附属参数的线性几何差分方程》。*Funkcialaj Ekvacioj*，14 73 78，1971: – 。[15] Satoshi Tsujimoto、Luc Vinet 和 Alexei Zhedanov。《 q-线性网格上的有理 Heun 算子》。准备中。[16] F Alberto Gr¨unbaum、Luc Vinet 和 Alexei Zhedanov。《代数 Heun 算子与频带-时间限制》。*Communications in Mathematical Physics*，364:1041–1068，2018。[17] Nicolas Cramp´e、Wolter Groenevelt、Quentin Labriet、Lucia Morey、Luc Vinet 和 Carel Wagenaar。《双谱有理函数与 Leonard 三元组》。*arXiv preprint arXiv:2601.15052*，2026。[18] Simon N. M. Ruijsenaars。《希尔伯特-施密特算子与椭圆 Calogero-Moser 型可积系统。IV. 相对论 Heun（van Diejen）情形》。*SIGMA. Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications* 11 004, 2015 ，，：。

Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Kyoto, Japan 606-8501

Centre de recherches, mathématiques and IVADO, Université de Montréal, P.O. Box 6128, Centre-ville Station, Montréal (Québec), H3C 3J7

Leonhard Euler International Mathematical Institute, Saint Petersburg, Russian Federation