arXiv:2603.15659v1 [math.CV] 8 Mar 2026

某一类星形函数的对数系数的精确估计

MOLLA BASIR AHAMED 和 SANJU MANDAL

摘要。本文研究与双曲余弦函数相关的星形函数类 $\mathcal{S}^*_{ch}$ 的对数系数的极值性质。我们建立了初始对数系数 γ_n 对于 $n = 1, 2, 3$ 的最佳上界，并确定了该类中二阶汉克尔行列式 $H_{2,1}(F_f/2)$ 的精确界。此外，我们将分析扩展至反函数，推导出反函数的对数系数及相应二阶汉克尔行列式 $|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|$ 的尖锐估计。此外，我们还给出了对数系数和反函数的对数系数的模差的尖锐界。通过构造特定的极值函数，验证了所有所得不等式的尖锐性。

1. 引言

令 $\mathcal{H}$ 表示开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上全纯函数 f 的函数类。于是， $\mathcal{H}$ 是一个局部凸拓扑向量空间，其拓扑由在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致收敛所诱导。令 $\mathcal{A}$ 表示满足 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$ 的函数$f \in \mathcal{H}$的函数类；即，函数 f 具有如下形式

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \text{ for } z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

令 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有单叶函数构成的子类。关于单叶函数理论及其在系数问题中的重要意义的全面介绍，可参阅著作 [13, 16]。

定义 1.1. 设 f 和 g 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的两个解析函数。若存在一个在 $\mathbb{D}$ 上解析的函数 ω，满足 $w(0) = 0$、$|w(z)| < 1$，且对 $z \in \mathbb{D}$ 有 $f(z) = g(w(z))$，则称 f 从属于 g，记作 $f \prec g$ 或 $f(z) \prec g(z)$。此外，若g在 $\mathbb{D}$内单叶，且 $f(0) = g(0)$，则 $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$。

1994年，Ma 和 Minda [30] 通过将从属函数 $(1+z)/(1-z)$ 替换为一个更一般的、具有正实部的解析函数 φ，并满足规范化条件 $\varphi(0) = 1$、$\varphi'(0) > 0$，且 φ 将 $\mathbb{D}$ 单叶映射到一个关于 1 星形且关于实轴对称的区域，从而统一表述了星形函数与凸函数的各种子类。Ma 和 Minda [30] 引入了以下一般类，将若干著名的类作为其特殊情形

$$\mathcal{S}^*[\varphi] = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z) \right\}.$$

文件：Aha-San-GFTP8-07-03-2025.tex，打印时间：2026-3-18,0.012020 数学主题分类。主要分类 30C45；次要分类 30C50 、 30C80。关键词和短语。星形函数；双曲余弦；对数系数；汉克尔行列式；反函数系数；尖锐界。

在文献中，属于类 $\mathcal{S}^*[\varphi]$ 的函数称为 Ma-Minda 星形函数。对于 $-1 \leq B < A \leq 1$，类 $\mathcal{S}^*[(1+Az)/(1+Bz)] := \mathcal{S}^*[A,B]$ 称为 Janowski 星形函数类，由 Janowski [20]引入。阶为 β的星形函数类 $\mathcal{S}^*[\beta]$ （其中 $0 \leq \beta < 0$）通过取 $\varphi(z) = (1+(1-2\beta)z)/(1-z)$来定义。注意， $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*[0]$ 是经典星形函数类。通过取

$$\varphi(z) = 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\left((1+\sqrt{z})/(1-\sqrt{z})\right)\right)^2,$$

我们得到由 Rønning [41]引入的抛物星形函数类 $\mathcal{S}^*[\varphi] = \mathcal{S}_p$。该类$\mathcal{S}^*[\varphi]$中函数的系数问题及许多其他几何性质已在文献中得到广泛研究（参见 [12,17,21,22,24]）。例如，Deniz [12]研究了函数的精确系数问题

$$\varphi(z) = e^{z+\frac{\lambda}{2}z^2} \quad (z \in \mathbb{C}, \lambda \geq 1),$$

它是广义电话数的生成函数。2015 年，Mendiratta 等人[35] 获得了指数函数 $\varphi(z) = e^z$ 的结构公式、包含关系、系数估计、增长与畸变结果、从属定理以及各种半径常数。

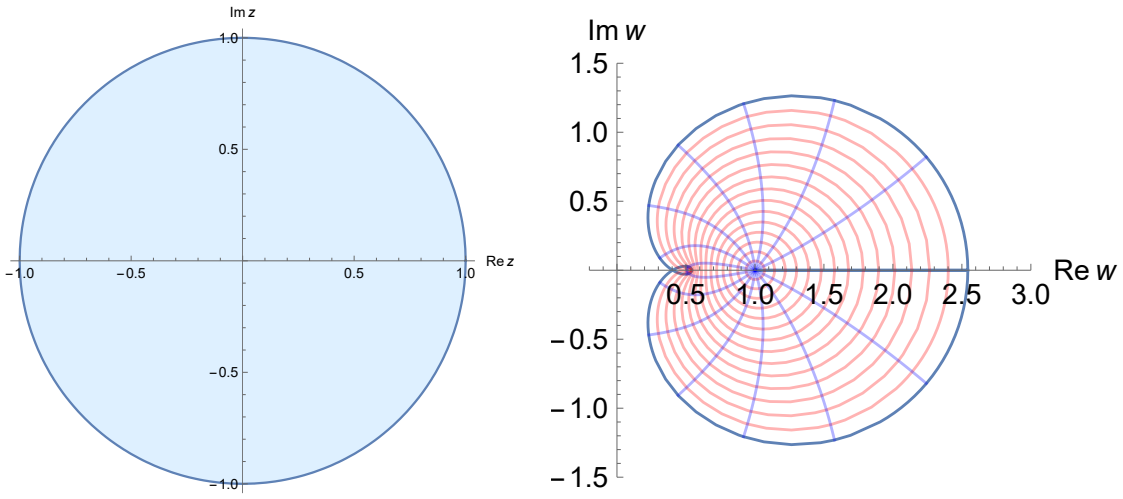
2019 年，Cho 等人 [10] 研究了类 $\mathcal{S}^*_S := \mathcal{S}^*(1+\sin z)$，而类 $\mathcal{S}^*_{\cos} := \mathcal{S}^*(\cos z)$ 则由 [34] 和 [7]研究。近年来，Riaz等人 [40] 讨论了与双曲余弦函数相关的星形函数类，其定义如下:

定义 1.2. 设 $f \in \mathcal{A}$。当且仅当， $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) \quad z \in \mathbb{D},$$

其中

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \varphi_0(z) := z + \cosh(z) = z + \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right).$$



(a) 单位圆盘 z-平面　　(b) w-平面

图1. $z+\cosh(z)$ 的几何表示。

需要注意的是，函数 φ 在 $\mathbb{D}$ 中不一定是单叶的（参见 [40, 注 1.2]）。函数 $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$ 当且仅当存在一个解析函数 $\varphi \in \mathcal{H}$满足 $\varphi \prec \varphi_0$，使得

$$f(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{\varphi(t) - 1}{t} dt \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

1.1. 类 $\mathcal{S}^*_{ch}$ 的新问题表述。 系数上界的确立一直是几何函数论中的核心主题，因为这些估计揭示了解析函数的基本结构性质。这一研究面临的主要挑战，是找出能够体现这些界的尖锐性的合适极值函数。我们注意到，尽管关于类 $\mathcal{S}^*_{ch}$ 的汉克尔行列式的系数问题已得到广泛研究，但由该类函数的对数系数组成的相应行列式尚未受到充分关注。此外，类 $\mathcal{S}^*_{ch}$各个对数系数的尖锐界也基本未得到探讨。文献中的这一空白正是本研究的主要动机。

本研究的主要动机是全面刻画从属于双曲余弦函数的函数的对数泛函。为此，我们提出并解决以下关键问题。

问题 1.1. 设 $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$ 是与双曲余弦函数相关的星形函数。求对数系数γ_n 的模关于 $n \in \mathbb{N}$的最佳上界。

问题 1.2. 对于 $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$，求由对数系数组成的二阶汉克尔行列式$H_{2,\,1}(F_f/2) = \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2$ 的精确界。

问题 1.3. 设 f^{-1} 是函数 f 在 $\mathcal{S}^*_{ch}$中的反函数。求逆对数系数 Γ_n的模的尖锐界。

问题 1.4. 为属于类 $\mathcal{S}^*_{ch}$的反函数建立二阶汉克尔行列式$|H_{2,\,1}(F_{f^{-1}}/2)|$的精确界。

问题 1.5. 分析连续对数系数 $|\gamma_{n+1}| - |\gamma_n|$ 与其逆对应项的模之差。确定对于类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中的函数，这些差是否存在统一的精确界。

本文旨在为问题 1.1 至 1.5 给出肯定的答案。这些问题包括求出对数系数的汉克尔行列式的精确界，以及 γ_1的 γ_2、和 γ_3的尖锐性。在后续各节中，我们将讨论所得结果，并对这些主题进行背景研究。本文的组织结构如下：在第 2 节中，我们为函数 γ_1、γ_2以及 γ_3和$|H_{2,\,1}(F_f/2)|$ $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$建立精确界。在第 3 节中，我们为类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中的函数建立 Γ_1、Γ_2 和$|H_{2,\,1}(F_{f^{-1}}/2)|$的精确界。在第 4 节中，我们为类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中的函数建立对数系数及其逆对应项的模差的精确界结果。各项结果的证明将在相应章节中详细讨论。

2. 函数类 $\mathcal{S}^*_{ch}$ 中函数对数系数的精确界 :

对于 $f \in \mathcal{S}$，我们将对数系数 $\gamma_n(f)$ 定义为

$$F_f(z) := \log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(f) z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \log 1 := 0. \tag{2.1}$$

类 $\mathcal{S}$ 中函数的对数系数 γ_n 在米林猜想中起着至关重要的作用（ [36], 另见 [13, 第 155] 页）。米林猜想指出，对于 $f \in \mathcal{S}$ 和 $n \geq 2$,

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0,$$

当且仅当 f 是科比函数的一个旋转时，等号成立。德布朗热 [8]证明了米林猜想，从而证实了著名的比伯巴赫猜想。另一方面，人们更加关注对数系数的原因之一在于，类 $\mathcal{S}$ 的精确界仅对 γ_1 和 γ_2已知，即

$$|\gamma_1| \leq 1, \ \ |\gamma_2| \leq \frac{1}{2}\left(1 + 2e^{-2}\right) = 0.635\ldots$$

对于类 $\mathcal{S}$中的函数，求 γ_n、 $n \geq 3$的绝对值的最佳上界仍是一个未解决问题。近年来，若干作者研究了函数$f \in \mathcal{S}$ 及其各种子类的对数系数的模估计。有关对数系数的更多信息，参见 [1, 2, 4, 5, 11, 14, 31, 31, 32, 42, 46] 及其中的参考文献。

汉克尔行列式的求值一直是几何函数论中的一个主要关注点，其中这些行列式由单位圆盘 $\mathbb{D}$内可由 (1.1) 表示的解析函数f 的系数构成。汉克尔矩阵（及汉克尔行列式）已成为数学不同领域中的基本要素，并具有广泛的应用（见 [47]）。本研究的主要目标是确定对数系数的精确界，以及涉及对数系数的汉克尔行列式。首先，我们给出在$f \in \mathcal{A}$情形下汉克尔行列式的定义。

由式 (1.1) 表示的函数 $f \in \mathcal{A}$ 的泰勒系数的汉克尔行列式 $H_{q,\ n}(f)$，对 $q,\ \ n \in \mathbb{N}$ 定义如下:

$$H_{q,n}(f) := \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix}.$$

关于星形函数、凸函数及其他函数类的汉克尔行列式精确界的广泛研究已在多项研究中展开（参见 [23,31,39]），并成功确定了其精确界。

对式 (2.1) 求导，然后利用式 (1.1)，经过简单计算可得

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{2}a_2, \\ \gamma_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_3 - \dfrac{1}{2}a_2^2\right), \\ \gamma_3 = \dfrac{1}{2}\left(a_4 - a_2a_3 + \dfrac{1}{3}a_2^3\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

2022 年，Kowalczyk 和 Lecko [23] 提出了一个汉克尔行列式 $H_{q,\ n}(F_f/2)$，其元素为 $f \in \mathcal{S}$的对数系数，体现了这些系数的广泛应用

由此可得

$$H_{2,1}(F_f/2) := \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2 = \frac{1}{48}\left(a_2^4 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right). \tag{2.3}$$

此外，$H_{2,\ 1}(F_f/2)$ 在旋转下保持不变，因为对于 $f_\theta(z) := e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$，$\theta \in \mathbb{R}$ 当 $f \in \mathcal{S}$ 时，我们有

$$H_{2,1}(F_{f_\theta}/2) = \frac{e^{4i\theta}}{48}\left(a_2^4 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right) = e^{4i\theta}H_{2,1}(F_f/2).$$

设 $\mathcal{P}$ 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中满足 $p(0) = 1$ 且 $\mathrm{Re}\ p(z) > 0$ （$z \in \mathbb{D}$）的所有解析函数 p 所组成的类。因此，每个 $p \in \mathcal{P}$ 都可以表示为

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

类 $\mathcal{P}$ 的元素称为 Carathéodory 函数。已知，对于函数 $p \in \mathcal{P}$ （见 [13]），有 $|c_n| \le 2$、$n \ge 1$。Carathéodory 类 $\mathcal{P}$ 及其系数界在建立汉克尔行列式的界方面发挥着重要作用。

现在，我们陈述一些引理，它们将有助于建立我们的主要结果。系数的参数表示通常有助于求得汉克尔行列式的界。在这方面，Libera 和 Zlotkiewicz（见 [27,28]）获得了 c_2 和 c_3 可能取值的参数化表示，其中 c_2 和 c_3 是具有正实部的函数的泰勒系数。

引理 2.1. *[27, 28]* 若 $p \in \mathcal{P}$ 具有(2.4) 的形式，且 $c_1 \ge 0$，则

$$c_1 = 2\tau_1, \tag{2.5}$$

$$c_2 = 2\tau_1^2 + 2(1-\tau_1^2)\tau_2 \tag{2.6}$$

and

$$c_3 = 2\tau_1^3 + 4(1-\tau_1^2)\tau_1\tau_2 - 2(1-\tau_1^2)\tau_1\tau_2^2 + 2(1-\tau_1^2)(1-|\tau_2|^2)\tau_3 \tag{2.7}$$

存在某些 $\tau_1 \in [0,1]$ 和 τ_2，使得 $\tau_3 \in \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$。

对于 $\tau_1 \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$，存在唯一的函数 $p \in \mathcal{P}$，其 c_1 如(2.5)所示，即

$$p(z) = \frac{1+\tau_1 z}{1-\tau_1 z},\ z \in \mathbb{D}.$$

对于 $\tau_1 \in \mathbb{D}$ 和 $\tau_2 \in \mathbb{T}$，存在唯一的函数 $p \in \mathcal{P}$，其 c_1 和 c_2 如(2.5) 和(2.6)所示，即

$$p(z) = \frac{1+(\overline{\tau_1}\tau_2+\tau_1)z+\tau_2 z^2}{1+(\overline{\tau_1}\tau_2-\tau_1)z-\tau_2 z^2},\ z \in \mathbb{D}.$$

对于 τ_1、$\tau_2 \in \mathbb{D}$ 和 $\tau_3 \in \mathbb{T}$，存在唯一的函数 $p \in \mathcal{P}$，其 c_1、c_2 和 c_3 如(2.5)–(2.7)所示，即

$$p(z) = \frac{1+(\overline{\tau_2}\tau_3+\overline{\tau_1}\tau_2+\tau_1)z+(\overline{\tau_1}\tau_3+\tau_1\overline{\tau_2}\tau_3+\tau_2)z^2+\tau_3 z^3}{1+(\overline{\tau_2}\tau_3+\overline{\tau_1}\tau_2-\tau_1)z+(\overline{\tau_1}\tau_3-\tau_1\overline{\tau_2}\tau_3-\tau_2)z^2-\tau_3 z^3},\ z \in \mathbb{D}.$$

引理 2.2. *[9]* 设 A、B、C 为实数，并且

$$Y(A,B,C) := \max\{|A+Bz+Cz^2|+1-|z|^2 : z \in \overline{\mathbb{D}}\}.$$

(i) 若 $AC \geq 0$，则

$$Y(A,B,C) = \begin{cases} |A| + |B| + |C|, & |B| \geq 2(1-|C|), \\ 1 + |A| + \dfrac{B^2}{4(1-|C|)}, & |B| < 2(1-|C|). \end{cases}$$

(ii) 若 $AC < 0$，则

$$Y(A,B,C) = \begin{cases} 1 - |A| + \dfrac{B^2}{4(1-|C|)}, & -4AC(C^{-2}-1) \leq B^2 \wedge |B| < 2(1-|C|), \\ 1 + |A| + \dfrac{B^2}{4(1+|C|)}, & B^2 < \min\{4(1+|C|)^2, -4AC(C^{-2}-1)\}, \\ R(A,B,C), & otherwise, \end{cases}$$

其中

$$R(A,B,C) := \begin{cases} |A| + |B| - |C|, & |C|(|B| + 4|A|) \leq |AB|, \\ -|A| + |B| + |C|, & |AB| \leq |C|(|B| - 4|A|), \\ (|C| + |A|)\sqrt{1 - \dfrac{B^2}{4AC}}, & otherwise. \end{cases}$$

引理 2.3。 *[30]* 设 $p \in \mathcal{P}$ 由 (2.1) 给出，则

$$|c_2 - vc_1^2| \leq \begin{cases} -4v + 2 & v < 0, \\ 2 & 0 \leq v \leq 1, \\ 4v - 2 & v > 1. \end{cases}$$

对于 $v < 0$ 或 $v > 1$，等号成立当且仅当

$$h(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

或其某个旋转。若 $0 < v < 1$，则等号成立当且仅当

$$h(z) = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

或其某个旋转。

引理 2.4. *[3]* 设 $p \in \mathcal{P}$ 由(2.1) 给出，其中 $0 \leq B \leq 1$ 且 $B(2B-1) \leq D \leq B$。则

$$|c_3 - 2Bc_1c_2 + Dc_1^3| \leq 2.$$

对数系数在几何函数论中的重要性，使得人们对求出对数系数及由这些系数组成的汉克尔行列式的精确界日益关注。我们得到函数类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中函数的初始对数系数 γ_1、γ_2、γ_3 和 $H_{2,1}(F_f/2)$ 的以下精确界。

定理 2.1。 设 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \in \mathcal{S}^*_{ch}$，且 γ_1、γ_2、γ_3 由（2.2）给出。则有

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n} \quad for\ n = 1, 2, 3.$$

对于以下函数，该不等式是尖锐的：

$$f_1(z)=z\exp\left(\int_0^z\frac{t+\cosh(t)-1}{t}dt\right)=z+z^2+\frac{3}{4}z^3+\frac{5}{12}z^4+\cdots,\ \ z\in\mathbb{D}. \tag{2.8}$$

$$f_2(z)=z\exp\left(\int_0^z\frac{t^2+\cosh(t^2)-1}{t}dt\right)=z+\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{4}z^5+\cdots,\ \ z\in\mathbb{D}. \tag{2.9}$$

$$f_3(z)=z\exp\left(\int_0^z\frac{t^3+\cosh(t^3)-1}{t}dt\right)=z+\frac{1}{3}z^4+\frac{5}{36}z^7+\cdots,\ \ z\in\mathbb{D}. \tag{2.10}$$

定理 2.1 的证明。设 $f\in\mathcal{S}^*_{ch}$。则存在一个解析函数 $\omega\in\mathcal{H}$，满足$\omega(0)=0$ 且 $|\omega(z)|<1$ 对于 $z\in\mathbb{D}$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\varphi_0(\omega(z))=\omega(z)+\cosh(\omega(z)),\ \ z\in\mathbb{D}. \tag{2.11}$$

设 $p\in\mathcal{P}$。那么，根据从属的定义，我们有

$$p(z)=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}=1+c_1z+c_2z^2+\cdots,\ z\in\mathbb{D}.$$

因此，显然

$$\begin{aligned}\omega(z)&=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}\\&=\frac{c_1}{2}z+\frac{1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)z^2+\frac{1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4}\right)z^3\\&\quad+\frac{1}{2}\left(c_4-c_1c_3+\frac{3c_1^2c_2}{4}-\frac{c_2^2}{2}-\frac{c_1^4}{8}\right)z^4+\cdots\end{aligned} \tag{2.12}$$

在 $\mathbb{D}$ 中。那么， p 在 $\mathbb{D}$ 中解析，满足 $p(0)=1$，且在 $\mathbb{D}$ 中具有正实部。结合 (2.11) 和 $\varphi_0(\omega(z))$，经过繁琐计算可得

$$\begin{aligned}\omega(z)+\cosh(\omega(z))&=1+\frac{1}{2}c_1z+\left(-\frac{1}{8}c_1^2+\frac{1}{2}c_2\right)z^2+\left(-\frac{1}{4}c_1c_2+\frac{1}{2}c_3\right)z^3\\&\quad+\left(-\frac{1}{4}c_1c_3+\frac{13}{384}c_1^4-\frac{1}{8}c_2^2+\frac{1}{2}c_4\right)z^4+\cdots\end{aligned} \tag{2.13}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)}&=1+a_2z+(2a_3-a_2^2)z^2+(3a_4-3a_2a_3+a_2^3)z^3\\&\quad+(4a_5-2a_3^2-4a_2a_4+4a_2^2a_3-a_2^4)z^4+\cdots.\end{aligned} \tag{2.14}$$

因此，利用（2.13）和（2.14），由（2.11）可计算得到

$$\begin{cases}a_2=\dfrac{1}{2}c_1,\\[2mm] a_3=\dfrac{1}{16}c_1^2+\dfrac{1}{4}c_2,\\[2mm] a_4=-\dfrac{1}{96}c_1^3+\dfrac{1}{24}c_1c_2+\dfrac{1}{6}c_3.\end{cases} \tag{2.15}$$

.....的尖锐界 γ_1： 利用（2.2）和（2.15）可容易得到

$$|\gamma_1| = \left|\frac{1}{2}a_2\right| = \frac{1}{4}|c_1| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.16}$$

由此得到所需的不等式。由 (2.8) 定义的函数 f_1 表明不等式 (2.16) 是尖锐的。

关于 γ_2 的精确界： 由 (2.2) 和 (2.15) 可知,

$$\begin{aligned}|\gamma_2| &= \left|\frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{1}{2}a_2^2\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}c_1^2 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right)\right| \\ &= \frac{1}{8}\left|c_2 - \frac{1}{4}c_1^2\right|.\end{aligned}$$

利用引理 2.3，可得所需的不等式

$$|\gamma_2| \leq \frac{1}{4}. \tag{2.17}$$

由 (2.9) 定义的函数 f_2 表明不等式 (2.17) 是尖锐的 .

关于 γ_3 的精确界： 利用 (2.2) 和 (2.15)，可得

$$\begin{aligned}|\gamma_3| &= \left|\frac{1}{2}\left(a_4 - a_2a_3 + \frac{1}{3}a_2^3\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{96}c_1^3 + \frac{1}{24}c_1c_2 + \frac{1}{6}c_3 - \frac{1}{32}c_1^3 - \frac{1}{8}c_1c_2 + \frac{1}{24}c_1^3\right)\right| \\ &= \frac{1}{12}\left|c_3 - 2Bc_1c_2 + Dc_1^3\right|,\end{aligned}$$

其中 $B = \frac{1}{4}$和 $D = 0$。因此，容易看出 $0 \leq B \leq 1$ ，且不等式$B(2B-1) \leq D \leq B$。由引理 2.4，得到不等式

$$|\gamma_3| \leq \frac{1}{6}. \tag{2.18}$$

由式（2.10）定义的函数 f_3证明了不等式（2.18）的尖锐性。证毕。□

接下来，我们得到一个结果，给出了类 $\mathcal{S}_{ch}^*$中函数的对数系数对应的二阶汉克尔行列式 $H_{2,1}(F_f/2)$ 的精确界。

定理 2.2。 设 $f \in \mathcal{S}_{ch}^*$且其级数表示为 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$，并且 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 由 (2.2)给出。那么有

$$|H_{2,1}(F_f/2)| \leq \frac{1}{16}.$$

由(2.9)定义的函数 f_2使该不等式达到尖锐。

定理 2.2 的证明。 令 $f \in \mathcal{S}_{ch}^*$。则存在一个解析函数 $\omega \in \mathcal{H}$ ，满足$\omega(0) = 0$ ，且 $|\omega(z)| < 1$ 对于 $z \in \mathbb{D}$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi_0(\omega(z)) = \omega(z) + \cosh(\omega(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.19}$$

令 $p \in \mathcal{P}$。那么，根据从属的定义，我们有

$$p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \ z \in \mathbb{D}.$$

容易看出

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \\ &= \frac{c_1}{2}z + \frac{1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right)z^2 + \frac{1}{2}\left(c_3 - c_1c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right)z^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(c_4 - c_1c_3 + \frac{3c_1^2c_2}{4} - \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^4}{8}\right)z^4 + \cdots \end{aligned} \tag{2.20}$$

在 $\mathbb{D}$ 中。因此， p 在 $\mathbb{D}$ 中解析，满足 $p(0) = 1$ ，并且在 $\mathbb{D}$ 中具有正实部。结合 (2.19) 以及 $\varphi_0(\omega(z))$，经过繁琐的计算可得

$$\begin{aligned} \omega(z) + \cosh(\omega(z)) &= 1 + \frac{1}{2}c_1 z + \left(-\frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2\right)z^2 + \left(-\frac{1}{4}c_1c_2 + \frac{1}{2}c_3\right)z^3 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{13}{384}c_1^4 - \frac{1}{8}c_2^2 + \frac{1}{2}c_4\right)z^4 + \cdots \end{aligned} \tag{2.21}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{zf'(z)}{f(z)} &= 1 + a_2 z + (2a_3 - a_2^2)z^2 + (3a_4 - 3a_2a_3 + a_2^3)z^3 \\ &\quad + (4a_5 - 2a_3^2 - 4a_2a_4 + 4a_2^2a_3 - a_2^4)z^4 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.22}$$

因此，利用 (2.21) 和 (2.22)，由 (2.19) 可知

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}c_1, \\ a_3 = \dfrac{1}{16}c_1^2 + \dfrac{1}{4}c_2, \\ a_4 = -\dfrac{1}{96}c_1^3 + \dfrac{1}{24}c_1c_2 + \dfrac{1}{6}c_3, \\ a_5 = \dfrac{1}{192}c_1^4 - \dfrac{5}{192}c_2c_1^2 + \dfrac{1}{48}c_1c_3 + \dfrac{1}{8}c_4. \end{cases} \tag{2.23}$$

利用 (2.3) 和 (2.14) 可得，经过简单计算

$$\begin{aligned} H_{2,1}(F_f/2) &= \frac{1}{48}\left(a_2^4 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right) \\ &= \frac{1}{3072}\left(-3c_1^4 - 8c_1^2c_2 - 48c_2^2 + 64c_1c_3\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

由引理 2.1 和 (2.15)，可得

$$\begin{aligned} H_{2,1}(F_f/2) = \frac{1}{192}\Bigg(&-3\tau_1^4 + 4\tau_1^2\tau_2\left(1-\tau_1^2\right) - 4\tau_2^2(3+\tau_1^2)(1-\tau_1^2) \\ &+ 16\tau_1\tau_3\left(1-\tau_1^2\right)\left(1-|\tau_2|^2\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.25}$$

现在我们探讨涉及 τ_1 的三种可能情形。

情形一。 令 $\tau_1 = 1$。由 (2.25) 可知

$$|H_{2,1}(F_f/2)| = \frac{1}{64} \approx 0.015625.$$

情形 II. 设 $\tau_1 = 0$。由 (2.25) 可得

$$|H_{2,1}(F_f/2)| = \left| \frac{1}{192} \left(-12\tau_2^2\right) \right| \leq \frac{1}{16} \approx 0.0625.$$

情形 III. 设 $\tau_1 \in (0,1)$。在 (2.25) 中应用三角不等式，并利用 $|\tau_3| \leq 1$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} |H_{2,1}(F_f/2)| &\leq \frac{1}{192}\Big(\Big| -3\tau_1^4 + 4\tau_1^2\tau_2(1-\tau_1^2) - 4\tau_2^2(1-\tau_1^2)(3+\tau_1^2) \Big| \\ &\quad + 16\tau_1(1-\tau_1^2)(1-|\tau_2|^2) \Big) \\ &= \frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)\left(\left| A + B\tau_2 + C\tau_2^2 \right| + 1 - |\tau_2|^2 \right) \\ &:= \frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)Y(A,B,C), \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中

$$A = \frac{-3\tau_1^3}{16(1-\tau_1^2)}, \ B = \frac{\tau_1}{4}, \ \text{and} \ C = -\frac{(3+\tau_1^2)}{4\tau_1}.$$

注意到 $AC > 0$。因此，我们可以应用引理 2.2 的情形 (i)，并讨论以下情形。

经过简单计算可得

$$|B| - 2(1-|C|) = \frac{\tau_1}{4} - 2\left(1 - \frac{3+\tau_1^2}{4\tau_1}\right) = \frac{6 - 8\tau_1 + 3\tau_1^2}{4\tau_1} > 0$$

对于所有 $\tau_1 \in (0,1)$。即，$|B| > 2(1-|C|)$。因此，由引理 2.2 可知

$$Y(A,B,C) = |A| + |B| + |C| = \frac{12 - 4\tau_1^2 - 5\tau_1^4}{16\tau_1\left(1-\tau_1^2\right)}.$$

根据不等式 (2.26)，可得

$$\begin{aligned} |H_{2,1}(F_f/2)| &= \frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)\left(|A| + |B| + |C|\right) \\ &= \frac{1}{192}\left(12 - 4\tau_1^2 - 5\tau_1^4\right) \\ &= \frac{1}{192}\phi(\tau_1), \end{aligned} \tag{2.27}$$

其中 $\phi(t) = 12 - 4t^2 - 5t^4$ 当 $t \in [0,1]$ 时。简单计算可得，对于所有 $t \in [0,1]$，$\phi'(t) = -8t - 20t^3 < 0$，这表明 ϕ 在 $[0,1]$ 上是递减函数。因此，$\phi(t)$ 在 $t = 0$ 处取得最大值，且最大值为 12。因此，由 (2.27) 可知

$$|H_{2,1}(F_{f/2})| \leq \frac{1}{16}.$$

因此，所需的不等式得以证明。

综合情形 I、II 和 III，可得到该结果所需的不等式。由式 (2.9) 定义的函数 f_2 给出了所需不等式的尖锐性。证明至此完成。□

3. 类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中反函数对数系数的尖锐界

设 F 是 $f \in \mathcal{S}$ 在原点邻域内定义的反函数，其泰勒级数展开为

$$F(w) := f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} A_n w^n, \tag{3.1}$$

由此可取 $|w| < 1/4$。众所周知，著名的科比 $1/4$定理保证：对于每个在 $\mathbb{D}$中定义的单叶函数 f，其反函数 f^{-1} 至少在半径为 $1/4$的圆盘上存在。利用变分法，L¨owner [29]对每个 n都得到了尖锐估计$|A_n| \le K_n$，其中 $K_n = (2n)!/(n!(n+1)!)$，且 $K(w) = w + K_2 w^2 + K_3 w^3 + \cdots$是科比函数的反函数。人们一直对研究式（1.1）中 f 的反函数系数在相应函数f 被限制在 $\mathcal{S}$的某些真几何子类时的性质颇感兴趣。

∞设 $f(z) = z + \sum a_n z^n$是类 $\mathcal{S}$ 中的一个函数。由于 $f(f^{-1}(w)) = w$，并利用 (3.1)$_{n=2}$，我们得到

$$\begin{cases} A_2 = -a_2, \\ A_3 = -a_3 + 2a_2^2, \\ A_4 = -a_4 + 5a_2 a_3 - 5a_2^3, \\ A_5 = -a_5 + 6a_4 a_2 - 21 a_3 a_2^2 + 3a_3^2 + 14 a_2^4. \end{cases} \tag{3.2}$$

关于 f 的反函数的对数系数的记号已由 Ponnusamy等人 [38]研究。与 f类似， F的反函数的对数系数 $\Gamma_n := \Gamma_n(F)$，$n \in \mathbb{N}$ 定义如下

$$F_{f^{-1}}(w) := \log\left(\frac{f^{-1}(w)}{w}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(F) w^n \quad \text{for } |w| < 1/4. \tag{3.3}$$

2018 年，Ponnusamy 等人 [38] 得到了类 $\mathcal{S}$ 中函数的反函数系数的精确界。事实上，Ponnusamy 等人 [38] 证明，对于$f \in \mathcal{S}$

$$|\Gamma_n(F)| \le \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$$

并证明等号仅当函数为科比函数或其旋转时成立。将（3.3）与（3.1）一起求导，使用（3.2），然后比较系数，可得

$$\begin{cases} \Gamma_1 = -\dfrac{1}{2} a_2, \\ \Gamma_2 = -\dfrac{1}{2}\left(a_3 - \dfrac{3}{2} a_2^2\right), \\ \Gamma_3 = -\dfrac{1}{2}\left(a_4 - 4 a_2 a_3 + \dfrac{10}{3} a_2^3\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

在 [23], ，Kowalczyk 和 Lecko 提出了一种其元素为 $f \in \mathcal{S}$的对数系数的汉克尔行列式，充分体现了这些系数的广泛应用。受这些思想启发，Sümmer 等人在 [45] 开始研究汉克尔行列式$H_{q,\ n}（F_{f^{-1}}/2）$，其中汉克尔矩阵的元素是 f^{-1}的对数系数，且 $f \in \mathcal{S}$。由此可得

$$H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) := \Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2 = \frac{1}{48}\left(13a_2^4 - 12a_2^2a_3 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right). \tag{3.5}$$

现在可以指出，$H_{2,\ 1}(F_{f^{-1}}/2)$ 在旋转下保持不变，因为对于$f_\theta(z) := e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$，$\theta \in \mathbb{R}$ 当 $f \in \mathcal{S}$ 时，我们有

$$H_{2,1}(F_{f_\theta^{-1}}/2) = \frac{e^{4i\theta}}{48}\left(13a_2^4 - 12a_2^2a_3 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right) = e^{4i\theta}H_{2,1}(F_{f_\theta^{-1}}/2).$$

我们得到如下结果，其中给出了类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中反函数的对数系数的精确界。

定理 3.1. 设 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \in \mathcal{S}_{ch}^*$和 Γ_1, Γ_2 由 (3.4) 给出。则有

$$|\Gamma_1| \le \frac{1}{2} \quad and \quad |\Gamma_2| \le \frac{3}{8}.$$

对于 (2.8) 中定义的函数 f_1，这些不等式是精确的。

定理 3.1 的证明。 由 (2.23) 和 (3.4)，我们有

$$|\Gamma_1| = \left|-\frac{1}{2}a_2\right| = \left|-\frac{1}{4}c_1\right| \le \frac{1}{2}.$$

利用 (2.23) 和 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}|\Gamma_2| &= \left|-\frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{3}{2}a_2^2\right)\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}c_1^2 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{3}{8}c_1^2\right)\right| \\ &= \frac{1}{8}\left|c_2 - \frac{5}{4}c_1^2\right|.\end{aligned}$$

由引理 2.3，可得

$$|\Gamma_2| \le \frac{3}{8}.$$

由 (2.8) 中定义的函数 f_1，可知不等式对 Γ_1 和 Γ_2是尖锐的。证明完毕。□

接下来，我们将得到一个结果，给出类 $\mathcal{S}_{ch}^*$中反函数的对数系数所对应的二阶汉克尔行列式$H_{2,\ 1}(F_{f^{-1}}/2)$ 的精确界。

定理 3.2. 设 $f \in \mathcal{S}_{ch}^*$具有级数表示 $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$，且 Γ_1、Γ_2、Γ_3 由 (3.4)给出。则有

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \le \frac{3}{44}.$$

该不等式是尖锐的。

定理 3.2 的证明。设 $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$。那么存在一个解析函数 $\omega \in \mathcal{H}$ 满足$\omega(0) = 0$ 且 $|\omega(z)| < 1$ 对 $z \in \mathbb{D}$ 成立，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi_0(\omega(z)) = \omega(z) + \cosh(\omega(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.6}$$

设 $p \in \mathcal{P}$。根据从属的定义，我们有

$$p(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \ z \in \mathbb{D}.$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{p(z)-1}{p(z)+1} \\ &= \frac{c_1}{2}z + \frac{1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right)z^2 + \frac{1}{2}\left(c_3 - c_1c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right)z^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(c_4 - c_1c_3 + \frac{3c_1^2c_2}{4} - \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^4}{8}\right)z^4 + \cdots\end{aligned} \tag{3.7}$$

在 $\mathbb{D}$ 中。于是 p 在 $\mathbb{D}$ 中解析，满足 $p(0) = 1$，且在 $\mathbb{D}$ 中具有正实部。结合 (3.6) 与 $\varphi_0(\omega(z))$，经过繁琐计算可得

$$\begin{aligned}\omega(z) + \cosh(\omega(z)) &= 1 + \frac{1}{2}c_1 z + \left(-\frac{1}{8}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2\right)z^2 + \left(-\frac{1}{4}c_1c_2 + \frac{1}{2}c_3\right)z^3 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}c_1c_3 + \frac{13}{384}c_1^4 - \frac{1}{8}c_2^2 + \frac{1}{2}c_4\right)z^4 + \cdots\end{aligned} \tag{3.8}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)} &= 1 + a_2 z + (2a_3 - a_2^2)z^2 + (3a_4 - 3a_2a_3 + a_2^3)z^3 \\ &\quad + (4a_5 - 2a_3^2 - 4a_2a_4 + 4a_2^2a_3 - a_2^4)z^4 + \cdots.\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，利用 (3.8) 和 (3.9)，由 (3.6) 可得

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}c_1, \\ a_3 = \dfrac{1}{16}c_1^2 + \dfrac{1}{4}c_2, \\ a_4 = -\dfrac{1}{96}c_1^3 + \dfrac{1}{24}c_1c_2 + \dfrac{1}{6}c_3. \end{cases} \tag{3.10}$$

利用 (3.5) 和 (3.10) 简单计算可得

$$\begin{aligned}H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) &= \frac{1}{48}\left(13a_2^4 - 12a_2^2a_3 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right) \\ &= \frac{1}{3072}\left(33c_1^4 - 56c_1^2c_2 - 48c_2^2 + 64c_1c_3\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

由引理 2.1 和 (3.11)，可得

$$\begin{aligned}H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) = \frac{1}{192}\Big(&9\tau_1^4 - 20\tau_1^2\tau_2\left(1-\tau_1^2\right) - 4\tau_2^2(3+\tau_1^2)(1-\tau_1^2) \\ &+ 16\tau_1\tau_3\left(1-\tau_1^2\right)\left(1-|\tau_2|^2\right)\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

现在我们探讨涉及 τ_1 的三种可能情形：

情形 I. 令 $\tau_1 = 1$。那么，由 (3.12) 可知

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = \frac{3}{64} \approx 0.046875.$$

情形 II。 设 $\tau_1 = 0$。那么，由 (3.12) 可得

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = \left| \frac{1}{192}\left(-12\tau_2^2\right) \right| \leq \frac{1}{16} \approx 0.0625.$$

情形 III。 设 $\tau_1 \in (0,1)$。在 (3.12) 中应用三角不等式，并利用 $|\tau_3| \leq 1$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} |H_{2,1}(F_f/2)| &\leq \frac{1}{192}\Bigg(\left|9\tau_1^4 - 20\tau_1^2\tau_2\left(1-\tau_1^2\right) - 4\tau_2^2(3+\tau_1^2)(1-\tau_1^2)\right| \\ &\quad + 16\tau_1(1-\tau_1^2)(1-|\tau_2|^2)\Bigg) \\ &= \frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)\left(\left| A + B\tau_2 + C\tau_2^2 \right| + 1 - |\tau_2|^2\right) \\ &:= \frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)Y(A,B,C), \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$A = \frac{9\tau_1^3}{16(1-\tau_1^2)}, \quad B = -\frac{5\tau_1}{4} \text{ and } C = -\frac{(3+\tau_1^2)}{4\tau_1}.$$

注意到 $AC < 0$。因此，我们可以应用引理 2.2 的情形 (ii)。接下来，我们检查情形 (ii) 的所有条件。

3(a) 我们注意到不等式

$$-4AC\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) - B^2 = \frac{9\tau_1^2(3+\tau_1^2)}{16(1-\tau_1^2)}\left(\frac{16\tau_1^2}{(3+\tau_1^2)^2} - 1\right) - \frac{25\tau_1^2}{16} \leq 0$$

等价于

$$-\frac{(39+4\tau_1^2)\tau_1^2}{4(3+\tau_1^2)} \leq 0$$

这显然在 $\tau_1 \in (0,1)$ 内成立。然而，不等式 $|B| < 2(1-|C|)$ 等价于 $7\tau_1^2 - 8\tau_1 + 6 < 0$，而这在 $\tau_1 \in (0,1)$ 内不成立。

3(b) 由于

$$4(1+|C|)^2 = \frac{(3+4\tau_1+\tau_1^2)^2}{4\tau_1^2} > 0$$

and

$$-4AC\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) = -\frac{9\tau_1^2(9-10\tau_1^2+\tau_1^4)}{16(1-\tau_1^2)(3+\tau_1^2)} < 0,$$

经过简单计算可知，不等式

$$\frac{25\tau_1^2}{16} = B^2 < \min\left\{4(1+|C|)^2, -4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\right\} = -\frac{9\tau_1^2(9-10\tau_1^2+\tau_1^4)}{16(1-\tau_1^2)(3+\tau_1^2)} < 0$$

对于 $\tau_1 \in (0,\ 1)$ 不成立。

3(c) 接下来注意到，不等式

$$|C|(|B|+4|A|)-|AB|=\frac{(3+\tau_1^2)}{4\tau_1}\left(\frac{5\tau_1}{4}+\frac{9\tau_1^3}{4(1-\tau_1^2)}\right)-\frac{45\tau_1^4}{64(1-\tau_1^2)}\leq 0$$

等价于 $60+68\tau_1^2-29\tau_1^4\leq 0$，而这对于 $\tau_1\in(0,\ 1)$ 不成立。

3(d) 注意，不等式

$$|AB|-|C|(|B|-4|A|)=\frac{45\tau_1^4}{64(1-\tau_1^2)}-\frac{(3+\tau_1^2)}{4\tau_1}\left(\frac{5\tau_1}{4}-\frac{9\tau_1^3}{4(1-\tau_1^2)}\right)\leq 0$$

等价于 $101\tau_1^4+148\tau_1^2-60\leq 0$，这对于

$$0<\tau_1\leq\tau_1^{''}=\sqrt{\frac{4\sqrt{721}}{101}-\frac{74}{101}}\approx 0.575109.$$

对 $0<\tau_1\leq\tau_1^{''}$ 应用引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|&\leq\frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)(-|A|+|B|+|C|)\\&=\frac{1}{192}(12+12\tau_1^2-33\tau_1^4)\\&=\frac{1}{192}\Psi(\tau_1),\end{aligned}\tag{3.14}$$

其中

$$\Psi(\tau_1):=12+12\tau_1^2-33\tau_1^4,\quad 0<\tau_1\leq\tau_1^{''}.$$

由于 $\Psi'(\tau_1)=0$仅在 $\tau_1\in(0,\tau_1^{''}]$时成立。经过简单计算可知，函数 $\Psi(\tau_1)$ 在 $0<\tau_1\leq\tau_1^{''}$ 上的最大值出现在点 $t_0=\sqrt{2/11}$。因此，在 $0<\tau_1\leq\tau_1^{''}$中，我们得到

$$\Psi(\tau_1)\leq\Psi(t_0)=\frac{144}{11}.$$

因此，根据 (3.14)，经过简单计算可得

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|\leq\frac{1}{192}\Psi(\tau_1)\leq\frac{1}{192}\Psi(t_0)=\frac{3}{44}\approx 0.068182.$$

3(e) 对 $\tau_1^{''}<\tau_1<1$应用引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|&\leq\frac{1}{12}\tau_1(1-\tau_1^2)(|C|+|A|)\sqrt{1-\frac{B^2}{4AC}}\\&=\frac{(12-8\tau_1^2+5\tau_1^4)}{192}\sqrt{\frac{52-16\tau_1^2}{9(3+\tau_1^2)}}\\&=\frac{1}{192}\Phi(\tau_1),\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中

$$\Phi(t):=(12-8t^2+5t^4)\sqrt{\frac{52-16t^2}{9(3+t^2)}},\quad \tau_1^{''}<t<1.$$

简单计算可得

$$\Phi'(t) = -\frac{2t(924 - 964t^2 + 41t^4 + 80t^6)\sqrt{3+t^2}}{3(3+t^2)^2\sqrt{13-4t^2}} < 0, \quad \tau_1'' < t < 1,$$

因此，函数 Φ 在 $(\tau'', 1)$ 上递减。因此，对于$\tau_1'' < t < 1$，有 $\Phi(t) \leq \Phi(\tau_1'')$。由此，根据（3.8）可得

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{1}{192}\Phi(\tau_1) \leq \frac{1}{192}\Phi(\tau_1'') = \frac{254\sqrt{721} - 5507}{20402} \approx 0.0643695.$$

综合情形 1、2 和 3，所需的不等式得以证明。

通过证明该界是尖锐的，即可完成证明。为了证明当.....时等号成立,

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2}{11}}, \quad \tau_3 = 1$$

and

$$|A + B\tau_2 + C\tau_2^2| + 1 - |\tau_2|^2 = -|A| + |B| + |C|, \tag{3.16}$$

其中

$$A = \tfrac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad B = -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{11}} \quad \text{and} \quad C = -\frac{35}{8}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

事实上，我们可以很容易地验证，（3.16）的一个解是 $\tau_2 = 1$。由此可得

$$c_1 = 2\sqrt{\frac{2}{11}}, \quad c_2 = 2 \quad \text{and} \quad c_3 = 2\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

根据 (3.5) 和 (3.10)，经简单计算可得

$$|\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| = \frac{3}{44}.$$

因此，当满足以下条件时，由 (3.6) 和 (3.7) 可得极值函数 $f \in \mathcal{S}_{ch}^*$

$$p(z) = \frac{1 + 2\sqrt{\frac{2}{11}}z + z^2}{1 - z^2} = 1 + 2\sqrt{\tfrac{2}{11}}z + 2z^2 + 2\sqrt{\tfrac{2}{11}}z^3 + 2z^4 + \cdots.$$

这表明该结果中的界是尖锐的。证明完毕。 □

注 3.1. 我们分别得到了类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中 $H_{2,1}(F_f/2)$ 和 $H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$ 的尖锐界，分别为 $1/16$ 和 $3/44$ 。可以看出，类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中 $H_{2,1}(F_f/2)$ 的尖锐界不同于 $H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$ 的尖锐界。这说明，类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中 f 和 f^{-1} 的对数系数汉克尔行列式不具有相关的不变性性质。

4. 类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中函数的对数系数模差及其逆对应项

1985年，德布朗热 [8]通过证明对于任意具有（1.1）形式的函数 $f \in \mathcal{S}$，不等式 $|a_n| \leq n$ 对所有 $n \geq 2$ 都成立，从而解决了著名的比伯巴赫猜想；当且仅当该函数为科比函数 $k(z) := z/(1-z)^2$ 或其旋转时取等号。这自然引出了这样一个问题：当 $n \geq 2$ 时，不等式 $||a_{n+1}| - |a_n|| \leq 1$ 是否对 $f \in \mathcal{S}$ 成立。Goluzin 最先在 [15] 研究了这一问题，起初是试图解决比伯巴赫猜想。后来，在1963年，Hayman [19] 证明了

对于所有 $f \in \mathcal{S}$，存在一个绝对常数 $A \geq 1$，使得 $||a_{n+1}| - |a_n|| \leq A$。截至目前，Grinspan [18]给出的当前最佳已知估计为 $A = 3.61$。另一方面，对于类 $\mathcal{S}$，精确界仅在 $n = 2$ 的情形下已知（见 [13, 定理3.11]），即

$$-1 \leq |a_3| - |a_2| \leq 1.029...$$

类似地，对于函数 $f \in \mathcal{S}^*$，Pommerenke [37] 猜想 $||a_{n+1}| - |a_n|| \leq 1$，该猜想随后由 Leung [25] 于 1978 年证明。对于凸函数，Li 和 Sugawa [26] 研究了 $n \geq 2$ 时 $|a_{n+1}| - |a_n|$ 的精确界，并建立了 $n = 2$，3 的尖锐界。

多位作者从不同角度研究了反函数（例如，参见 [43, 44]）。最近，Sim 和 Thomas [44] 获得了单叶函数子类的连续逆系数模之差的尖锐上界和下界。受先前研究（包括近期文章 [6], ）的启发，本文旨在确定类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中函数的 $|\gamma_2| - |\gamma_1|$ 和 $|\Gamma_2| - |\Gamma_1|$ 的尖锐下界和上界。我们借助引理 4.1 证明定理 4.1 和定理 4.2，该引理起着至关重要的作用。引理 4.1 陈述如下。

引理 4.1. *[43]* 设 B_1、B_2 和 B_3 为满足 $B_1 > 0$和 $B_2 \in \mathbb{C}$ 以及 $B_3 \in \mathbb{R}$的数。设 $p \in \mathcal{P}$ 具有 (2.4)的形式。定义 $\Psi_+(c_1, c_2)$ 和 $\Psi_-(c_1, c_2)$ 如下：

$$\Psi_+(c_1, c_2) = |B_2 c_1^2 + B_3 c_2| - |B_1 c_1|,$$

and

$$\Psi_-(c_1, c_2) = -\Psi_+(c_1, c_2).$$

Then

$$\Psi_+(c_1, c_2) \leq \begin{cases} |4B_2 + 2B_3| - 2B_1, & \text{if } |2B_2 + B_3| \geq |B_3| + B_1, \\ 2|B_3|, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.1}$$

and

$$\Psi_-(c_1, c_2) \leq \begin{cases} 2B_1 - B_4, & \text{if } B_1 \geq B_4 + 2|B_3|, \\ 2B_1 \sqrt{\dfrac{2|B_3|}{B_4 + 2|B_3|}}, & \text{if } B_1^2 \leq 2|B_3|(B_4 + 2|B_3|), \\ 2|B_3| + \dfrac{B_1^2}{B_4 + 2|B_3|}, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $B_4 = |4B_2 + 2B_3|$。(4.1) 和(4.2) 中的所有不等式都是尖锐的。

我们已经得到了以下关于类 $\mathcal{S}^*_{ch}$中对数系数模差的尖锐不等式的结果。

定理 4.1. 设 $f \in \mathcal{S}^*_{ch}$具有级数表示 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$，且 γ_1、γ_2 由(2.2)给出。则有

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} \leq |\gamma_2| - |\gamma_1| \leq \frac{1}{4}.$$

两个不等式都是最佳的。

定理 4.1 的证明。 由 (2.2) 和 (2.15) 可知

$$\begin{aligned}|\gamma_2|-|\gamma_1| &= \left|\ \frac{1}{2}\left(a_3-\frac{1}{2}a_2^2\right)\right|-\left|\ \frac{1}{2}a_2\right| \\ &= \left|\ -\frac{1}{32}c_1^2+\frac{1}{8}c_2\right|-\left|\ \frac{1}{4}c_1\right| \\ &:= \Psi_+(c_1,c_2), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中

$$B_1=\frac{1}{4},\ \ B_2=-\frac{1}{32}\ \text{ and }\ B_3=\frac{1}{8}.$$

上界的估计： 对于上界，我们看到 $|2B_2+B_3|=\frac{1}{16}$ 和$|B_3|+B_1=\frac{3}{8}$。由此可得 $|2B_2+B_3|\ngeq|B_3|+B_1$。因此，应用引理 4.1，我们得到

$$\Psi_+(c_1,c_2)\le 2|B_3|=\frac{1}{4}.$$

因此，应用 (4.3)，我们得到上界

$$|\gamma_2|-|\gamma_1|\le\frac{1}{4}. \tag{4.4}$$

由 (2.9) 定义的函数 f_2 给出了不等式 (4. 的尖锐性。 4).

下界的估计： 对于下界，我们看到 $B_4=|4B_2+2B_3|=\frac{1}{8}$、$B_4+2|B_3|=\frac{3}{8}$。由此可得 $B_1\ngeq B_4+2|B_3|$。此外，等式 $2|B_3|(B_4+2|B_3|)=\frac{3}{32}$确保条件 $B_1^2\le 2|B_3|(B_4+2|B_3|)$ 成立。因此，根据引理 4.1，我们有

$$\Psi_-(c_1,c_2)\le 2B_1\sqrt{\frac{2|B_3|}{B_4+2|B_3|}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

显然，我们可以观察到

$$\Psi_+(c_1,c_2)=-\Psi_-(c_1,c_2)\ge-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

因此，由 (4.3) 可得

$$|\gamma_2|-|\gamma_1|\ge-\frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{4.5}$$

不等式 (4.5) 对由 (2.11) 给出的函数 $f\in\mathcal{A}$ 是尖锐的，其中

$$p(z)=\frac{1-z^2}{1-2\sqrt{\frac{2}{3}}z+z^2},$$

至此，证明完成。 □

我们得到了以下关于类 $\mathcal{S}_{ch}^*$ 中反函数的对数系数模差尖锐不等式的结果。

定理 4.2。 设 $f\in\mathcal{S}_{ch}^*$ 具有级数表示 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$，且 Γ_1、Γ_2 由 (3.4) 给出。则有

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}\le|\Gamma_2|-|\Gamma_1|\le\frac{1}{4}.$$

两个不等式都是最佳的。

定理 4.2 的证明。 由 (2.15) 和 (3.4) 可知

$$\begin{aligned}|\Gamma_2|-|\Gamma_1| &= \left|-\frac{1}{2}\left(a_3-\frac{3}{2}a_2^2\right)\right|-\left|-\frac{1}{2}a_2\right| \\ &= \left|\frac{5}{32}c_1^2-\frac{1}{8}c_2\right|-\left|\frac{1}{4}c_1\right| \\ &= \Psi_+(c_1,c_2),\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中

$$B_1=\frac{1}{4},\ B_2=\frac{5}{32}\ \text{and}\ B_3=-\frac{1}{8}.$$

上界估计： 对于下界，我们计算得到 $B_4=|4B_1+2B_3|=\frac{3}{8}$ 和 $B_4+2|B_3|=\frac{5}{8}$，由此显然可知条件 $B_1\geq B_4+2|B_3|$ 不成立。此外，关系式 $2|B_3|(B_4+2|B_3|)=\frac{5}{32}$ 证实不等式 $B_1^2\leq 2|B_3|(B_4+2|B_3|)$成立。因此，根据引理 4.1，我们得到

$$\Psi_+(c_1,c_2)\leq 2|B_3|=\frac{1}{4}.$$

因此，由 (4.6) 可得

$$|\Gamma_2|-|\Gamma_1|\leq\frac{1}{4}. \tag{4.7}$$

(2.12) 中定义的函数 f_2给出了不等式 (4.7) 的尖锐性。

下界估计： 对于下界，我们注意到 $B_4=|4B_1+2B_3|=\frac{3}{8}$ 和 $B_4+2|B_3|=\frac{5}{8}$。由此可知，条件 $B_1\geq B_4+2|B_3|$ 不成立。此外，等式 $2|B_3|(B_4+2|B_3|)=\frac{5}{32}$ 确保不等式 $B_1^2\leq 2|B_3|(B_4+2|B_3|)$成立。因此，应用引理 4.1，我们得到

$$\Psi_-(c_1,c_2)\leq 2B_1\sqrt{\frac{2|B_3|}{B_4+2|B_3|}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

经过简单计算可得

$$\Psi_+(c_1,c_2)=-\Psi_-(c_1,c_2)\geq-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

因此，由 (4.6) 可得

$$|\Gamma_2|-|\Gamma_1|\geq-\frac{1}{\sqrt{10}}. \tag{4.8}$$

对于由 (2.11) 给出的函数 $f\in\mathcal{A}$，当满足以下条件时，不等式 (4.8) 是尖锐的

$$p(z)=\frac{1+2\sqrt{\frac{2}{5}}z+z^2}{1-z^2},$$

由此完成证明。 □

5. 总结

本文对类 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$ 的对数系数泛函和逆对数系数泛函进行了全面研究，该类由从属于双曲余弦函数来定义。通过证明定理 2.1、2.2、3.1、3.2 和 4.1，我们成功刻画了该类的极值性质。

我们的研究结果得出了几项重要结论：

1. 尖锐性与极值函数： 我们证明，对数系数 $|\gamma_n|$ ($n = 1$，2、3) 和二阶汉克尔行列式$|H_{2,1}(F_f/2)|$ 的最佳上界恰由函数 $\varphi_0(z) = z + \cosh(z)$ 的旋转达到。这证实了双曲余弦从属关系产生了一种独特的几何结构，与经典星形函数类截然不同。

2. 逆函数类对称性： 关于逆对数系数 Γ_n 的结果揭示了函数及其逆函数之间增长率的一种特定对称性。我们为逆函数类的二阶汉克尔行列式建立的上界$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|$，为这一子类提供了新的基准。

3. 系数差： 第 4 节对模差的分析探讨了系数理论中一个更为微妙的结构性问题。我们的研究结果表明，对于 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$，相邻系数的增长率受到从属因子的严格控制。

虽然第 2–4 节中的结果完整刻画了类 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$的初始对数泛函，但仍有若干高阶问题尚未解决。我们提出以下未解决问题，供未来研究。

在定理 2.1 中，我们证明了对于 $n \in \{1, 2, 3\}$，精确界为 $|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n}$。由此得到以下猜想：

猜想 5.1. 对于任意 $f \in \mathcal{S}_{ch}^{*}$，对数系数 γ_n 满足以下精确不等式

$$|\gamma_n| \leq \frac{1}{2n} \quad for\ all\ n \in \mathbb{N},$$

等号在函数

$$f(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{\cosh(t^n) - 1}{t} dt\right).$$

本文聚焦于二阶汉克尔行列式 $H_{2,1}(F_f/2)$。此类函数的高阶行列式的性质目前尚不清楚。

问题 5.1. 求对数系数的三阶汉克尔行列式的精确上界，其定义如下：

$$H_{3,1}(F_f/2) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{vmatrix}$$

对于属于 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$的函数。

经典的 Zalcman 猜想将单叶函数的系数 a_n 联系起来。该问题的对数版本涉及泛函 $|\gamma_{n+m} - \gamma_n\gamma_m|$。

问题 5.2. 对于类 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$，求广义 *Zalcman* 型泛函 $|\gamma_3 - \mu\gamma_1\gamma_2|$ 或 $|\gamma_4 - \gamma_2^2|$ 在实数或复数 μ下的精确界。

令 $\mathcal{C}_{ch}$ 为满足 $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \cosh(z)$的函数类 $f \in \mathcal{A}$。

问题5.3。 求凸函数对应类 $\mathcal{C}_{ch}$的对数系数和二阶汉克尔行列式的精确界。鉴于星形函数与凸函数之间的关系， $\mathcal{C}_{ch}$ 的界是否显著小于本文为 $\mathcal{S}_{ch}^{*}$所确定的界?

致谢： 作者谨向匿名审稿人提出的富有见地的建议和意见致以谢意，这些建议和意见显著改善了本文的表述。第一作者获得印度政府 SERB 的资助（文件编号：SUR/2022/002244）。第二作者感谢印度政府新德里 CSIR-SRF 的经费支持（文件编号：09/0096(12546)/2021-EMR-I，日期：24/10/2025）。

作者贡献： 所有作者对本文的贡献均等，并且均审阅了最终稿。

遵守伦理标准：

利益冲突。 作者声明，本文的发表不存在利益冲突。

数据可用性声明。 本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] M. B. Ahamed 和 S. Mandal，关于与 S 形函数相关的 Ma-Minda 型类的精确系数界，Filomat（2026）。（即将发表）[2] M. B. Ahamed 和 S. Mandal，关于类 $\mathcal{S}_S^*$ 和 $\mathcal{K}_S$ 的对数系数的尖锐结果，《乌克兰数学杂志》（2026）。（即将发表）[3] R. Ali，强星形函数的反函数系数，《马来西亚数学科学学会通报》26（2003），63–71。[4] M. F. Ali 和 V. Allu，关于某些近凸函数的对数系数，《美国数学会会刊》146（2018），1131–1142。[5] M. F. Ali、V. Allu 和 D. K. Thomas，关于近凸函数的第三对数系数，Curr. Res. Math. Comput. Sci. II，UWM 出版社，奥尔什丁（2018），271–278。[6] V. Allu 和 A. Shaji，单叶函数逆对数系数的模差，J. Math. Anal. Appl.（2025），129217。[7] K. Bano 和 M. Raza，与余弦函数相关的星形函数，《伊朗数学学会通报》47（2021），1513–1532。[8] L. de Branges，比伯巴赫猜想的一个证明，Acta Math. 154（1985），137-152。[9] N. E. Cho、Y. C. Kim 和 T. Sugawa，Fekete-Szegő问题的一种一般方法，J. Math. Soc. Japan. 59（2007），707–727。[10] N. E. Cho、V. Kumar、S. S. Kumar 和 V. Ravichandran，与正弦函数相关的星形函数的半径问题，《伊朗数学学会通报》45（2019），213–232。[11] N. E. Cho、B. Kowalczyk、O. S. Kwon、A. Lecko 和 Y. J. Sim，关于近凸函数某些子类中的第三对数系数，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) 114，文章编号：52，（2020），1–14。[12] E. Deniz，与广义电话数相关的星形函数的精确系数界，《马来西亚数学科学学会通报》44(3)（2021），1525–1542。[13] P. T. Duren，《单叶函数》。Springer-Verlag，纽约公司（1983）。[14] D. Girela，单叶函数的对数系数，Ann. Acad. Sci. Fenn. 25（2000），337–350。[15] G. M. Goluzin，关于单叶函数的畸变定理与系数，Mat. Sb. 19(61)(1946)，183–202（俄文）。[16] A. W. Goodman，《单叶函数》（Mariner，坦帕，佛罗里达州，1983）。

[17] A. W. Goodman，关于一致凸函数，Annales Polonici Mathematici 56(1)（1991），87– 92。[18] A. Z. Grinspan，单叶函数相邻系数之差的改进界（俄文），《函数现代理论问题》（新西伯利亚），Sib. Inst. Mat. 38（1976），41-45。[19] W. K. Hayman，关于单叶函数的连续系数，J. London. Math. Soc. 38（1963），228–243。[20] W. Janowski，关于某些解析函数族的若干极值问题 I，Ann. Polon. Math. 28(3)（1973），297–326。[21] S. Kazımoğlu、E. Deniz 和 H. M. Srivastava，与 Gregory 系数相关的星形函数的精确系数界，Complex Anal. Oper. Theory 18，6（2024）。[22] F. R. Keogh 和 E. P. Merkes，某些解析函数类的一个系数不等式，《美国数学会会刊》20（1969），8–12。[23] B. Kowalczyk 和 A. Lecko，凸函数与星形函数对数系数的二阶汉克尔行列式，《澳大利亚数学会通报》105（2022），458–467。[24] A. Lecko 和 Y. J. Sim，近星形函数子类中的系数问题，Results Math. 74，104（2019）。[25] Y. Leung，星形函数的连续系数，Bull. Lond. Math. Soc. 10（1978），193–196。[26] M. Li 和 T. Sugawa，关于凸函数连续系数的一则注记，Comput. Methods Funct. Theory 17(2)（2017），179–193。[27] R. J. Libera 和 E. J. Zlotkiewicz，正则凸函数反函数的早期系数，《美国数学会会刊》85（1982），225–230。[28] R. J. Libera 和 E. J. Zlotkiewicz，关于导数属于 $\mathcal{P}$ 的函数之反函数的系数界，《美国数学会会刊》87（1983），251–257。[29] K. L¨öwner，关于单位圆的单叶共形映射的研究，I. Math. Ann. 89（1923），103–121。[30] W. C. Ma 和 D. Minda，对若干特殊单叶函数类的统一处理，载于：《复分析会议论文集》，International Press，剑桥（1994），157–169。[31] S. Mandal 和 M. B. Ahamed，某些单叶函数类中反函数对数系数的二阶汉克尔行列式，Lith. Math. J. 64（2024），67–79。[32] S. Mandal、M. B. Ahamed 和 P. Zaprawa，某些单叶函数类中反函数对数系数的尖锐界，Math. Slovaca 75(5)（2025），1119-1134。[33] S. Mandal、P. P. Roy 和 M. B. Ahamed，某些单叶函数类中反函数对数系数的汉克尔行列式与 Toeplitz 行列式，Iran. J. Sci.，49（2025），243-252。[34] K. Marımuthu、J. Uma 和 Teodor Bulboaca，与余弦函数相关的星形函数与凸函数的系数估计，Hacet. J. Math. Stat. 52（2023），596–618。[35] R. Mendiratta、S. Nagpal 和 V. Ravichandran，与指数函数相关的强星形函数子类，Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 38（2015），365–386。[36] I. M. Milin，《单叶函数与正交归一系统》（Nauka，莫斯科，1971）（俄文）；英文译本，数学专著译丛，49（美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977）。[37] Ch. Pommerenke，函数论中的问题，Jber. Deutsch. Math.-Verein. 73（1971），1–5。[38] S. Ponnusamy、N. L. Sharma 和 KJ. Wirths，单叶函数反函数的对数系数，Results Math 73，160（2018）。[39] M. Raza、A. Riaz 和 D. K. Thomas，凸函数反函数系数的第三汉克尔行列式，《澳大利亚数学会通报》（2023），1–7。[40] A. Riaz、A. Lecko 和 M. Raza，与双曲余弦函数相关的星形性，Iran. J. Sci. 47（2023），1723–1738。[41] F. Rønning，一致凸函数及其对应的一类星形函数，《美国数学会会刊》118(1)（1993），189–196。[42] O. Roth，单叶函数对数系数的一个尖锐不等式，《美国数学会会刊》135（2007），2051–2054。[43] Y. J. Sim 和 D. K. Thomas，关于单叶函数反函数系数之差，Symmetry 12(12)（2020）。[44] Y. J. Sim 和 D. K. Thomas，关于螺旋形函数的一则注记，《澳大利亚数学会通报》105（2022），117–123

[45] S. E. Sümer、A. Lecko、B. Çekiç 和 B. Seker，《强奥扎基近凸函数对数系数的二阶汉克尔行列式》，马来西亚数学科学学会通报 **46**(2023), 183.[46] D. K. Thomas，《近凸函数的对数系数》，美国数学会会刊 **144** (2016), 1681–1687. [47] K. Ye 和 L. H. Lim，《每个矩阵都是托普利茨矩阵的乘积》，计算数学基础 **16** (2016), 第 3 期，577–598. Molla Basir Ahamed，印度西孟加拉邦加尔各答 700032，贾达普大学数学系。电子邮箱：mbahamed.math@jadavpuruniversity.in Sanju Mandal，印度西孟加拉邦加尔各答 700032，贾达普大学数学系。电子邮箱：sanjum.math.rs@jadavpuruniversity.in, sanju.math.rs@gmail.com