arXiv:2603.15664v1 [stat.AP] 10 Mar 2026

用于巨灾保险尾部风险定价的量子振幅估计：实证收敛与含噪中等规模量子噪声分析

Alexis Kirke

摘要

用于巨灾保险尾部风险定价的经典蒙特卡洛方法以$O(1/\sqrt{N})$的速度收敛，因此需要大量模拟预算才能确定损失分布的上尾分位数。这种样本稀疏问题可能导致人工智能模型使用贫乏的尾部数据进行训练，从而在偿付能力不足风险最高的区域产生校准不佳的风险估计[3]。遵循 Montanaro 的方法 [9]，，量子振幅估计（QAE）的预言机查询收敛速度可接近 $O(1/N)$，实现二次加速；若能大规模应用，便可在实际可行的预算内进行高分辨率尾部估计。

我们使用 Qiskit Aer 模拟器和真正的 Grover 放大，通过实证验证了这一优势。完整的处理流程通过振幅编码将拟合对数正态巨灾分布编码到量子预言机中，产生较小的读出概率（$P(|1\rangle)$ ∼0.002–0.05），从而能够安全地进行 Grover 放大，最多迭代 $k = 16$ 次。

对合成数据和真实数据（美国国家海洋和大气管理局风暴事件数据，58,028 条记录）开展的七项实验得出三项主要发现。**(i)预言机模型优势**：当量子振幅估计和经典蒙特卡洛在同一离散化分布上运行时——这也是预言机模型下的公平比较——量子振幅估计在合成数据上（实验1和实验3）的均方根误差低 1.5–2.5× ，在真实数据上（实验4和实验7）低 2–2.5×，且收敛情况符合二次查询优势。**(ii)具备解析形式访问时，强大的经典基线表现更优**：条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样，以及使用 Sobol 序列的准蒙特卡罗（利用对数正态分布累积分布函数/逆累积分布函数的闭式表达）都显著优于量子振幅估计（实验 5）；一维情况下，准蒙特卡罗近乎-$O(1/N)$的收敛与量子振幅估计的理论收敛率相符。对于不具备参数形式的经验概率质量函数（实验7），若不进行额外建模，这些方法并无直接优势，因此适用预言机模型比较。**(iii) 当前瓶颈在于离散化，而非估计**：量子比特扫描（$n = 3$– 8，8–256 个分箱）表明，粗略等宽分箱下的尾部截断主导总体误差（实验 6）；NISQ噪声则完全消除了这种优势（实验2）。所有误差分解均以解析值和分箱精确值作为真实值进行报告。

1 引言

巨灾保险——承保飓风、地震和洪水等极端事件——在精算学中占据独特地位。与机动车保险或家庭财产保险等高频低损失险种不同，巨灾风险主要取决于损失分布上尾部的表现。在总损失分布的第95或第97百分位数处签订超额损失再保险合同的再保险人，需要估计起赔点 M处的预期赔付 $E[\max(0, X - M)]$ ，而这一估计中的微小误差可能直接导致风险定价不当，并最终引发破产 [3, 5]。

这一估计问题的行业标准方法是蒙特卡洛（MC）模拟。巨灾模型通常是一个多阶段流程，结合了灾害生成（例如风场模拟）、脆弱性建模（结构损坏作为灾害强度的函数）以及财务损失汇总；该模型会执行数千次，以构建损失的经验分布。随后，通过对

模拟尾部进行样本平均来计算期望超额损失。这种方法的根本局限性众所周知：经典蒙特卡洛以 $O(1/\sqrt{N})$ 的速率收敛，其中 N 表示模拟运行次数。因此，要将精度提高一个额外的小数位，就需要将计算预算增加一百倍——而当每次模拟运行都涉及复杂的物理与金融建模时，这样的成本是难以承受的。

这一收敛瓶颈并非只是计算上的不便；它会直接影响风险估计的质量。在第97百分位数处，只有不到3%的模拟情景会对尾部期望有所贡献。在预算为 $N = 10,000$ 次运行的情况下，只有 $\sim$300 个样本可用于估计，从而产生较高的方差，并影响定价、准备金计提和资本配置决策。若使用这类贫乏的尾部数据训练机器学习模型——这在现代保险科技领域日益常见——就会导致风险预测校准不佳，而偏偏这些正是校准最为重要的部分。

量子计算为克服这一收敛障碍提供了一条有理论依据的路径。其关键算法原语是 量子振幅估计 （QAE），由 Brassard 等人 [1] 提出，并由 Montanaro [9]在蒙特卡洛背景下进行分析。经典蒙特卡洛需要 $O(1/\epsilon^2)$ 个样本才能达到 ϵ 的估计误差，而 QAE 只需 $O(1/\epsilon)$——实现二次加速。实际而言，这意味着一项需要进行一百万次经典模拟运行才能得出的估计，原则上只需一千次量子预言机调用即可获得。

量子金融领域的一系列重要论文探讨了将量子振幅估计应用于金融风险估计，其中最具代表性的包括 Woerner 和 Egger [18] 关于量子风险分析的研究、Rebentrost等人 [11]关于衍生品定价的研究、Stamatopoulos等人 [13] 关于期权定价的研究，以及 Chakrabarti等人 [2] 与高盛和 IBM 合作开展的里程碑式资源估算。然而，这些研究几乎完全聚焦于资本市场的衍生品定价——期权、自动赎回票据，以及风险价值（VaR）和条件风险价值（CVaR）等投资组合风险指标。尽管保险领域具有相同的底层数学结构（在复杂损失分布下估计尾部期望值），但相较之下，该领域受到的关注很少。

本文将量子振幅估计应用于巨灾保险尾部风险定价，以弥补这一研究空白，并针对朴素经典基线和方差缩减经典基线进行了严格的实证评估。本文的贡献主要有三点：

1. 我们构建了一套完整的处理流程，通过振幅编码将拟合的对数正态巨灾分布编码到量子预言机中，使读出概率处于 ($P(|1\rangle) \sim 0.002$–0.05) 范围内，此时格罗弗放大既安全又有效。
2. 我们针对合成巨灾数据和真实巨灾数据（58,028 条 NOAA风暴事件记录）开展了七项实验，给出完整的误差分解，将估计误差与离散化误差区分开来——这一差异在量子金融文献中常被忽略。3. 我们不仅将量子振幅估计与朴素蒙特卡洛进行比较，还将其与条件尾部蒙特卡洛、重要性抽样和基于索博尔序列的准蒙特卡罗进行比较，从而准确确定量子优势适用的情形及其原因：在预言机模型中（即对损失分布进行黑箱访问）适用，但在能够以解析形式访问该分布的闭式累积分布函数时则不适用。我们还给出了拟合的双对数收敛指数及其自助法置信区间，并证明对数间隔分箱可将离散化瓶颈降低 $10\times$。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾经典蒙特卡洛方法与量子蒙特卡洛方法之间的关系，综述量子金融文献，并阐明我们的贡献在灾难建模领域中的定位。第 3 节介绍完整的方法论。第 4 节报告全部七项实验的结果，并进行详细的误差分析。第 5 节讨论其影响并展望未来工作。

2 相关工作

2.1 保险与金融中的经典蒙特卡洛

自 20 世纪中叶正式确立以来，蒙特卡罗模拟一直是定量风险分析的核心工具。在保险领域，该方法对于巨灾风险定价不可或缺，因为损失分布是一个复杂多阶段模拟流程的产物——包括灾害生成、脆弱性建模和财务汇总——无法通过封闭形式求解 [5]。衍生品定价领域亦是如此：对于路径依赖型和多资产合约，蒙特卡罗模拟往往是唯一可行的方法 [4]。

根本限制在于收敛速度。基于 N独立同分布样本对期望$E[f(X)]$ 进行经典蒙特卡洛估计，其均方根误差（RMSE）的收敛速率为 $O(1/\sqrt{N})$。这一速率是中心极限定理的直接结果，对于一般黑箱分布而言无法改进。在尾部风险估计中，问题会更加严重：如果$f(X) = \max(0, X - M)$，且 M位于第97百分位数，那么对97%的样本， $f(X) = 0$，而用于计算尾部期望的有效样本量仅为 $\sim 0.03N$。

经典方差缩减技术——重要性抽样、条件尾部抽样、分层抽样和控制变量——针对特定问题结构可以显著提高收敛速度。具体而言，当损失分布具有已知的参数形式（例如对数正态分布、帕累托分布或广义帕累托分布）时，与朴素蒙特卡洛相比，条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样可将均方根误差降低数个数量级。准蒙特卡洛（QMC）方法以低差异序列（Sobol、Halton）取代伪随机样本，对光滑的 d维被积函数可达到 $O((\log N)^d/N)$的收敛速度——在低维情况下接近$O(1/N)$——因此广泛应用于金融蒙特卡洛 [4]。从理论上说，QMC 的收敛速率与量子振幅估计相当，因此是不可或缺的经典对照方法（见实验 5）。然而，所有这些技术都需要解析形式访问分布的累积分布函数（CDF）、概率密度函数（PDF）或逆累积分布函数；当分布被隐式定义为巨灾模拟流程的输出时，这些信息并不可用。

2.2 从经典蒙特卡洛到量子蒙特卡洛：振幅估计的桥梁

经典蒙特卡洛与量子计算之间的联系建立在精确的数学类比之上。在经典蒙特卡洛中，通过从 X 的概率分布中抽取样本 $X_1, \ldots, X_N$，并计算样本均值 $\hat{\mu} = (1/N) \sum_{i=1}^{N} f(X_i)$，来估计 $E[f(X)]$。$\hat{\mu}$的标准误差为 $\sigma_f/\sqrt{N}$，其中 σ_f 是 $f(X)$ 的标准差。

在量子振幅估计中，将概率分布和收益函数编码到量子电路（即“预言机”）中，使得测量指定的辅助量子比特处于状态 $|1\rangle$ 的概率等于待估计的量（经过适当归一化）。Brassard 等人 [1]，提出的关键见解是，可以将该概率放大，并将 Grover 搜索算法 [6] 作为子程序进行估计。每个经典蒙特卡洛样本都能提供关于均值 $O(1)$ 比特的信息，而每次应用 Grover 算子则能提供关于振幅相位 的 $O(1)$ 比特信息，从而使估计所需的预言机查询次数达到 $O(1/N)$，实现二次加速。

Montanaro [9] 形式化了这一联系，并证明量子振幅估计在估算有界函数的期望值时，相较于经典蒙特卡洛可实现二次加速。该结果适用于任何能够制备为量子态的概率分布，以及任何能够通过对辅助量子比特施加酉旋转来实现的收益函数。关键在于，这种加速比是在预言机模型中成立的：量子算法只能通过预言机电路访问概率分布，正如经典蒙特卡洛只能通过样本访问概率分布一样。当存在额外结构（例如闭式累积分布函数）时，重要性抽样等经典方法可以利用这些结构，而预言机模型无法体现这一点——这是理解我们研究结果时的核心区别，

也是如此。

近期研究进一步拓展了振幅估计框架。Suzuki等人 [15]开发了无需相位估计的振幅估计方法，免去了对量子相位估计电路的需求，并降低了所需的电路深度。这一系列研究使量子振幅估计更适用于近期量子设备，不过其根本性的二次优势仍取决于能够相干执行的Grover迭代次数。

2.3 金融中的量子蒙特卡洛：从理论到资源估算

Reben-trost等人 [11], 率先将量子振幅估计应用于金融问题，展示了如何在量子叠加态中制备概率分布、将收益函数实现为量子电路，并通过量子测量提取衍生品价格。他们确立了基本处理流程——态制备、收益编码、振幅估计——此后量子金融领域的研究均沿用了这一流程。

Woerner和Egger [18]将这一框架应用于风险分析，展示了用于在小规模实例上估计风险价值和条件风险价值的量子电路。Stamatopoulos等人 [13] 将该方法拓展至期权定价，并在IBM量子硬件上实现了欧式期权和亚式期权电路。这些早期实现是在量子比特数量较少（3–5个量子比特）的情况下开展的概念验证演示，与本文实验的规模相符。

一项关键贡献来自 Chakrabarti等人 [2], ——高盛与 IBM 的合作成果，首次为量子优势在衍生品定价中的实现提供了详细的端到端资源估算。他们研究了基准衍生品合约（自动赎回票据和目标累积赎回票据），估计实现量子优势需要约 7,500 个逻辑量子比特和 4,600 万的T深度，且 T门的运行频率需达到 10 MHz 或更高——这些规格远超当前硬件能力，但为量子计算的发展路线图提供了明确目标。他们提出的“重新参数化方法”还可将随机过程加载到量子电路中，解决了态制备的一项关键实际瓶颈。

在此基础上，来自高盛的 Stamatopoulos 和 Zeng [14] 引入量子信号处理（QSP）来编码衍生品收益，与以往方法相比，T门数量减少约 $16\times$ ，逻辑量子比特数减少约 $4\times$ 。这项工作代表了当前资源高效型量子衍生品定价电路的最先进水平。

本文以两种重要方式将这条研究脉络从衍生品拓展至保险。首先，巨灾保险中的损失分布与衍生品定价中的损失分布有本质区别：它们具有厚尾、右偏的特征，且往往源自物理模拟，而非随机过程模型。其次，与量子金融文献中的常见做法相比，我们对经典基线进行了更细致的比较，区分了预言机模型优势（确实存在）与端到端优势（取决于离散化质量和解析结构是否可用）。

2.4 灾难建模与尾部风险估计

灾难建模于20世纪90年代发展成为一门学科。当时，一系列前所未有的保险损失事件（1992年的安德鲁飓风、1994年的北岭地震）暴露出纯粹依靠精算方法为极端事件定价的不足 [5]。现代巨灾模型是复杂的模拟流程，整合了气象或地震灾害模型、基于工程学的脆弱性函数，以及结合保单条款和再保险结构的财务损失汇总。运行这些模型的计算成本——视分辨率而定，每个情景通常需要数分钟至数小时——使抽样方法的收敛速度成为制约风险估计质量的关键因素。

保险业已探索多种改进尾部估计的方法。极值理论（EVT）为尾部提供了参数模型（广义帕累托分布、

表1：实验4和实验7中使用的NOAA风暴事件文件。于2026年2月27日从ncei.noaa.gov获取。

文件名				Year
风暴事件	_详细信息-FTP	_v1.0_d2020	_2026年1月16日CSV压缩文件	2020
风暴事件	_详细信息-FTP	_v1.0_d2021	_c20250520.csv.gz	2021
风暴事件	_详细信息-FTP	_v1.0_2022年数据	_2025年7月21日CSV压缩文件	2022
风暴事件	_详细信息-FTP	_v1.0_2023年数据	_2026年1月16日CSV压缩文件	2023
风暴事件	_详细信息-FTP	_v1.0_d2024	_2026年1月16日CSV压缩文件	2024

超阈值方法），可拟合模拟损失的上尾部 [3]。这些方法提高了估计效率，但也引入了模型风险：拟合得到的参数形式可能无法准确反映真实尾部。

量子计算提供了一种正交方法：与其近似模型或拟合参数化尾部，不如利用量子振幅估计，原则上直接从预言机估计任意尾部泛函，并且能够实现经证明更快的收敛。这一优势的实际实现取决于多个因素，本文对此进行了实证研究：量子离散化的质量（需要多少个分箱/量子比特才能捕捉尾部）、NISQ噪声对放大量子电路的影响，以及与利用分布结构的方差缩减经典方法相比的相对性能。

3 方法

3.1 损失概率分布与数据处理流程

处理流程首先获取经验损失数据，以参数化灾害概率分布。支持两种数据来源。对于实验 1–3，合成数据取自厚尾帕累托分布，其形状参数为 $\alpha = 1.5$，尺度参数为 $50,000；这些数值旨在近似美国飓风财产损失的经验严重程度分布 [5]，共生成 20,000 条记录。对于实验 4，处理流程会发现并下载涵盖 2020–2024 年的 NOAA风暴事件详细文件 [10]，并提取所有财产损失 $\geq$ 达到 $1,000 的记录。下载器会在本地缓存文件，并写入一份固定清单（data/cache/noaa_manifest.json），记录精确的文件名、基础 URL 和获取日期。本文所有结果均基于表 *1* 所列的特定文件版本；如果 *NOAA* 更新这些文件，结果也会随之改变。处理流程的动态发现功能为运行代码的用户提供了便利，但分析仍固定使用缓存快照。这得到了 58,028 条真实损失记录，其概率分布的厚尾程度显著高于合成帕累托分布（$\hat{\sigma} = 2.02$，$\hat{\mu} = 9.04$，中位数 $\approx$ $8,465；合成帕累托分布为 $\hat{\sigma} = 0.67$，$\hat{\mu} = 11.49$，中位数 $\approx$ $97,203）。

每个数据集均采用最大似然估计拟合为对数正态分布（位置参数固定为零）。即使数据由帕累托分布生成，我们也有意将其拟合为对数正态分布，以反映精算学中常见的损失严重度建模实践；量子与经典方法的比较采用相同的拟合模型，因此这一选择不会使估计器比较产生偏差。该对数正态拟合用作连续概率分布，据此构造经典蒙特卡罗采样器和量子预言机。

3.2 量子态制备与预言机构造

拟合对数正态分布被离散化为跨越第0.1至第99.9百分位数的 $2^n = 8$ 个分箱（$n = 3$ 个量子比特）。每个分箱 i 的中点为 x_i，概率质量为 p_i =Pr($X \in$分箱$_i$)，按构造其概率之和为1。对于给定的灾害阈值 M （

再保险起赔点），超额损失赔付为 $f(x_i) = \max(0, x_i - M)$，并归一化为 $f(x_i) = f(x_i) / f_{\max} \in [0, 1]$，其中 $f_{\max} = \max_j f(x_j)$。

量子预言机 A 构建在 $n + 1 = 4$ 个量子比特上（3 个索引量子比特和 1 个辅助量子比特），分两个阶段使用振幅编码：

阶段 1：自定义态制备。概率分布直接加载到量子比特的振幅中：

$$|0 \dots 0\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{p_i}\, |i\rangle\,, \tag{1}$$

通过由受控-R_y 旋转构成的二叉树实现。在顶层，最高有效位量子比特上的单个 R_y 旋转将总概率质量分配到概率分布的前半部分和后半部分。在后续每一层中，受控-R_y 量子门（由已制备的高位量子比特控制）进一步细分每个子空间中的概率质量。对于 n 个量子比特，这需要使用仅由 $\{R_y, CR_y, MCR_y, CX, X\}$ 量子门构成的 $2^n - 1$ 次旋转。关键在于，这避免了使用 Qiskit 的 StatePreparation 指令；该指令会分解为 cu（受控酉）量子门，而这些量子门在与 Grover 算子的逆组合时会导致 Aer 模拟器崩溃。自定义态制备可达到机器精度保真度（$|a_i|^2$ 中的 $< 10^{-15}$ L_∞ 误差，相对于 p_i）。

阶段 2：在辅助量子比特上进行赔付旋转。对于每个基态 $|i\rangle$，都会对辅助量子比特施加角度为 $\theta_i = 2 \arcsin(\sqrt{\tilde{f}(x_i)})$ 的多重受控 R_y旋转，因此

$$|i\rangle\,|0\rangle \longrightarrow |i\rangle \Big(\cos(\theta_i/2)\,|0\rangle + \sin(\theta_i/2)\,|1\rangle \Big), \tag{2}$$

其中 $\sin^2(\theta_i/2) = \tilde{f}(x_i)$。此时测得辅助量子比特处于 $|1\rangle$ 的概率为

$$P(|1\rangle) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i \cdot \tilde{f}(x_i) = \frac{E[\max(0, X - M)]}{f_{\max}}, \tag{3}$$

因此，真实的期望超额损失可通过以下方式恢复：

$$E[\max(0, X - M)] = P(|1\rangle) \times f_{\max}. \tag{4}$$

与均匀叠加方法（使用哈达玛门制备 $(1/\sqrt{N}) \sum |i\rangle$，并将概率和赔付额都编码在旋转角中）相比，振幅编码的主要优势在于，对于尾部事件，大部分概率质量 p_i 集中在低损失分箱中，此时 $f(x_i) = 0$。因此， $P(|1\rangle)$ 确实很小——对于第 90 百分位至第97百分位数的阈值，通常为 0.002–0.02——这恰好处于格罗弗放大安全且有效的工作范围。

3.3 Grover 加速的振幅估计

在初始预言机 A之后，应用 Grover 算子 k 次迭代，其中S_χ 翻转具有辅助量子比特 $= |1\rangle$ 的状态的相位（通过 Z 门实现），而 S_0 翻转全零态的相位（通过 $X^{\otimes n}\, H\, MCX\, H\, X^{\otimes n}$实现）。随后对辅助量子比特进行$S$ 次测量，得到测量概率 $\hat{p}_{\text{meas}}$。

我们始终使用以下符号： $P(|1\rangle)$ 表示测量辅助量子比特处于 $|1\rangle$ 的真实（量子电路层面）概率，而 $\hat{p}_{\text{meas}}$ 表示有限测量次数下测得的（经验）频率。经过 k 次 Grover 迭代后，无噪声测量概率会放大至 $\sin^2((2k+1)\theta)$，其中 $\theta = \arcsin(\sqrt{P(|1\rangle)})$，而测得的频率 $\hat{p}_{\text{meas}}$近似于此值。去放大校正

$$\hat{\theta} = \frac{\arcsin(\sqrt{\hat{p}_{\text{meas}}})}{2k+1}, \quad \hat{P} = \sin^2(\hat{\theta}) \tag{5}$$

可恢复原始 $P(|1\rangle)$ 的估计值。此方法仅在 $(2k+1)\theta < \pi/2$ 时有效；因此，最大安全迭代次数为

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{\pi/(2\theta) - 1}{2} \right\rfloor, \tag{6}$$

并且所有实验均施加 $k \le k_{\max}$ ，以防止角度混叠。

Grover 算子使用 A.to_gate() 和基本门（H、 X、 Z、 MCX）构建；转译后，Aer 模拟器可原生处理这些门。对于在 $k = 6$ 处采用 $n = 3$ 的第 95 百分位阈值，完整量子电路由（$2k + 1$）次 $= 13$ 预言机调用组成；表 8 报告了分解为 $\{CX, R_z, SX, X\}$ 后的单预言机深度和双量子比特门数量。

3.4 噪声模型

在含噪中等规模量子噪声研究中，无噪声 Aer 后端被配置为采用退极化噪声模型的 AerSimulator 所取代。测试了三种严重程度预设：

预设	p_{1q}	p_{2q}	p_{readout}
Low	0.001	0.01	0.005
中	0.005	0.05	0.02
High	0.01	0.10	0.05

所有单量子比特门和双量子比特门均施加退极化错误，并对所有量子比特施加对称读出错误。噪声模型采用独立同分布退极化信道，无法捕捉串扰、 T_1/T_2 弛豫或泄漏等特定于设备的效应。

3.5 实验方案

共开展七项实验，均使用全局随机种子 42，以确保结果可复现。实验1–3将在下文介绍；预算匹配比较所用的经典基线将在 §3.6 中定义；实验4–7的方案则与其结果一并详述。

实验 1：无噪声收敛标度。 通过经典蒙特卡洛和 Grover 放大量子方法，估计第 95 百分位阈值（M = \$362，700）处的期望超额损失 $E[\max(0,\ X - M)]$ 。Grover迭代次数从 $k = 0$ 到 $k = 6$（处于安全范围 $k_{\max} = 9$内）逐步增加，每次量子运行固定进行 1,000 次测量。对于每个 k，预言机查询预算总量为 $S \times (2k+1)$，经典蒙特卡洛则使用相同的总预算作为样本数。每种配置重复 30 次。为避免将离散化偏差与估计误差混为一谈，我们报告相对于两个真实值的均方根误差：解析对数正态超额（\$2,834）和分箱精确值（\$2,330），离散化误差为 \$505。将相同分箱上的量子振幅估计与经典蒙特卡洛同分箱精确真值进行比较（预言机模型比较）；将从连续对数正态分布中抽样的经典蒙特卡洛与解析真值进行比较。

实验2：NISQ 噪声退化。在四种噪声水平下，预言机电路均以 $k = 3$ 次 Grover 迭代（选取适中的放大深度）执行，测量 8,192 次，并重复 20 次。此实验用于检验具有实际意义深度（$\sim$700 个量子门）的电路所受的噪声退化。

实验3：尾部特定超额损失。灾害阈值 M 设为经验损失分布的第 90、第 95 和第 97 百分位数。量子估计器总共使用 8,192 次测量，采用 $k = 0$ （不进行放大）和 $k_{\text{use}} = \min(k_{\max},\ 6)$ 次 Grover 迭代（格罗弗放大运行的测量次数减少至 $S_G = \lfloor 8192/(2k+1) \rfloor$ ）。两个经典基线使用相同的总查询预算：(i) 从连续对数正态分布进行经典蒙特卡洛抽样

（相对于解析真值的均方根误差），以及 (ii) 从与量子电路相同的 8箱离散化中进行经典蒙特卡洛抽样（相对于分箱精确值的均方根误差）。所有估计量均重复运行 30 次。

实验 4–7 将上述方法及其他经典基线（定义见 §3.6）应用于真实 NOAA 数据和经验概率质量函数；相关实验方案与结果一并详细说明。

3.6 预算匹配比较的经典基线

实验 5 和 7 在严格相同的查询/样本预算下，将量子振幅估计与强有力的经典基线进行比较。对于阈值为 M 的 $X \sim$对数正态分布(μ, σ^2)，定义以下估计量：

1. 解析地面真值（非采样基准）： $E[(X-M)^+] = e^{\mu+\sigma^2/2}\Phi(d_1) - M[1-\Phi(d_2)]$，其中 $d_1 = (\mu + \sigma^2 - \log M)/\sigma$， $d_2 = (\log M - \mu)/\sigma$。 2. 朴素蒙特卡洛：从拟合对数正态分布中抽取 B 个样本；计算 $(1/B)\sum \max(0, X_i - M)$。 3. 条件尾部蒙特卡洛：解析计算 $P(X > M)$，通过截断逆累积分布函数从$X \mid X > M$中抽取 B 个样本，再将超额均值乘以 $P(X > M)$。 4. 重要性采样蒙特卡洛：应用指数倾斜 $\delta = \max(0, \log M - \mu - \sigma^2/2)$，使提议分布的均值为 $\approx M$；从倾斜概率分布中抽取 B 个样本并进行重新加权。 5. 箱上经典蒙特卡洛：从与量子电路相同的 2^n 分箱离散化分布中抽样。 6. 准蒙特卡洛：以扰动索博尔低差异序列替代伪随机样本，对索博尔点应用逆累积分布函数变换 $X = F^{-1}(u)$。准蒙特卡洛在一维情况下可实现近似 $O(1/N)$ 收敛，并广泛用于金融蒙特卡洛。

CT、IS 和 QMC 均利用闭式对数正态累积分布函数/概率密度函数（或逆累积分布函数）；若没有额外的密度估计步骤，则无法直接应用于非参数预言机（参见实验 7 的讨论）。均方根误差是以解析地面真值（条目 1）为基准，计算 50 次重复实验的结果；对于基于分箱的方法，该真值包含离散化误差。

4 结果

4.1 实验 1：无噪声收敛标度

表 2 展示了核心收敛结果及完整的误差分解。表中列出了两个真实值：解析对数正态超额（$2,834）和分箱精确值（$2,330），两者之间的离散化误差为 $505。量子振幅估计和使用相同分箱的经典蒙特卡洛均以分箱精确值为基准进行测量；从连续对数正态分布中抽样的经典蒙特卡洛则以解析真值为基准进行测量。

在预言机模型比较中（两种方法估计相同的离散化数量）， $k = 0$ 处的量子振幅估计略逊于基于分箱的经典蒙特卡洛（$930 对 $782，加速比为 $0.8\times$，也就是说量子方法表现更差），这正如预期：两者都受到 $O(1/\sqrt{N})$ 抽样噪声的影响。随着 k 增加，量子均方根误差从 $930 降至 $69，而基于分箱的经典方法仅从 $782 降至 $154，因此在 $k = 6$ 处， $2.2\times$ 对应着诚实的预言机模型加速比。最后一列显示，从连续对数正态分布进行经典蒙特卡洛抽样，在 $N = 13{,}000$ 次查询时，相对于解析真值的均方根误差为 $233——与基于分箱的经典方法相当，证实在此预算下，离散化误差（$505）并非基于分箱的经典方法结果的主要因素。

表 2：实验1：第 95 百分位阈值处的误差分解（$P(|1\rangle) = 0.0066$,$k_{\max} = 9$, $n_{\text{reps}} = 30$，每次运行 1,000 次测量）。解析值超额 $E[$ $2，834；分箱精确值 $=$2，330；离散化误差 $=$505。加速比 $= C_{\text{bins}}/$ Q； >1 表示量子方法更优。

k	查询	Q（相较于分箱）	C_{bins}（相较于分箱）	加速比	C_{cont}（相较于解析值）
0	1,000	930	782	0.8×	948
1	3,000	283	382	1.4×	482
2	5,000	180	303	1.7×	287
3	7,000	124	248	2.0×	352
4	9,000	106	139	1.3×	235
5	11,000	87	177	2.0×	263
6	13,000	69	154	2.2×	233

表 3：实验2：NISQ噪声下的量子振幅估计精度（$k = 3$，8,192 次测量， $n_{\text{reps}} = 20$）。精确值$E[$超额] =$2,330。

噪声级别	p_{1q} / $p_{2\,q}$	均方根误差（$）	估计均值（$）	标准差（$）	偏差（$）
无噪声	0 / 0	32	2,332	32	+2
Low	0.001 / 0.01	2,094	4,423	50	+2,093
中	0.005 / 0.05	2,115	4,444	62	+2,114
High	0.01 / 0.10	2,115	4,444	67	+2,114

收敛指数。为了不再停留于“近二次”收敛的定性说法，我们拟合了双对数斜率（均方根误差与预言机总查询次数的关系），并计算了 95% 自助法置信区间（$n = 2{,}000$ 次重采样）。在使用 $n = 3$ 个量子比特时（7 个数据点， $k = 0 \ldots 6$），量子振幅估计的斜率为 -1.075 （95% 置信区间： $[-1.31, -0.93]$, $R^2 = 0.987$），基于分箱的经典方法的斜率为 -0.539 （95% 置信区间：$[-0.67, -0.44]$， $R^2 = 0.978$）。为扩大查询预算范围，我们还使用 $n = 8$ 个量子比特进行了相同的收敛扫描（256 个分箱；电路指标见实验 6）。合并 $n = 3$ 和 $n = 8$ 的数据（总计 11 个数据点）后，置信区间显著收窄：量子斜率为 -1.074 （95% 置信区间：$[-1.17, -1.01]$， $R^2 = 0.988$），经典斜率为 -0.545（95% 置信区间：$[-0.62, -0.51]$， $R^2 = 0.981$）。合并后的量子置信区间现在完全排除了 经典收敛速率，相较于仅使用单一量子比特数进行分析，这为近-$O(1/N)$ 收敛提供了更有力的证据。

图 1 展示了双对数收敛情况。左图比较了在相同分箱下的量子振幅估计与经典蒙特卡洛（两者均与分箱精确值比较）；右图补充了端到端背景，展示了离散化误差下限。

4.2 实验2：NISQ 噪声退化

表 3 报告了在 $k = 3$ 次 Grover 迭代下（$\sim$700 门电路），含噪情况下的量子振幅估计精度；估计第 95 百分位阈值处的超额损失（精确值为 $2,330）。

无噪声基线表现出色：均方根误差为 $32，平均估计值为 $2,332（与精确值相差 0.1%）。在噪声影响下，出现了显著的系统性偏差。即使在“低”噪声预设下（$p_{1q} = 0.001$， $p_{2q} = 0.01$），平均估计值也几乎翻倍，达到 $4,423，均方根误差为 $2,094——与精确值本身相当。这种显著退化直接源于执行 $k = 3$ 次 Grover 迭代所需的电路深度：转译后的电路包含约 50–100 个双量子比特门（表 8），在最低 p_{2q} 下，预期双量子比特门错误数为 $\sim 50\text{–}100 \times 0.01 \approx 0.5\text{–}1$，此外，在总计 $\sim$700 个量子门中还会出现额外的单量子比特错误。去极化噪声会使辅助量子比特测量概率趋近于 0.5（最大混合态），而去放大步骤（式 5）会放大这一偏差。

n 噪声水平很快趋于饱和：中噪声和高噪声产生的均方根 E

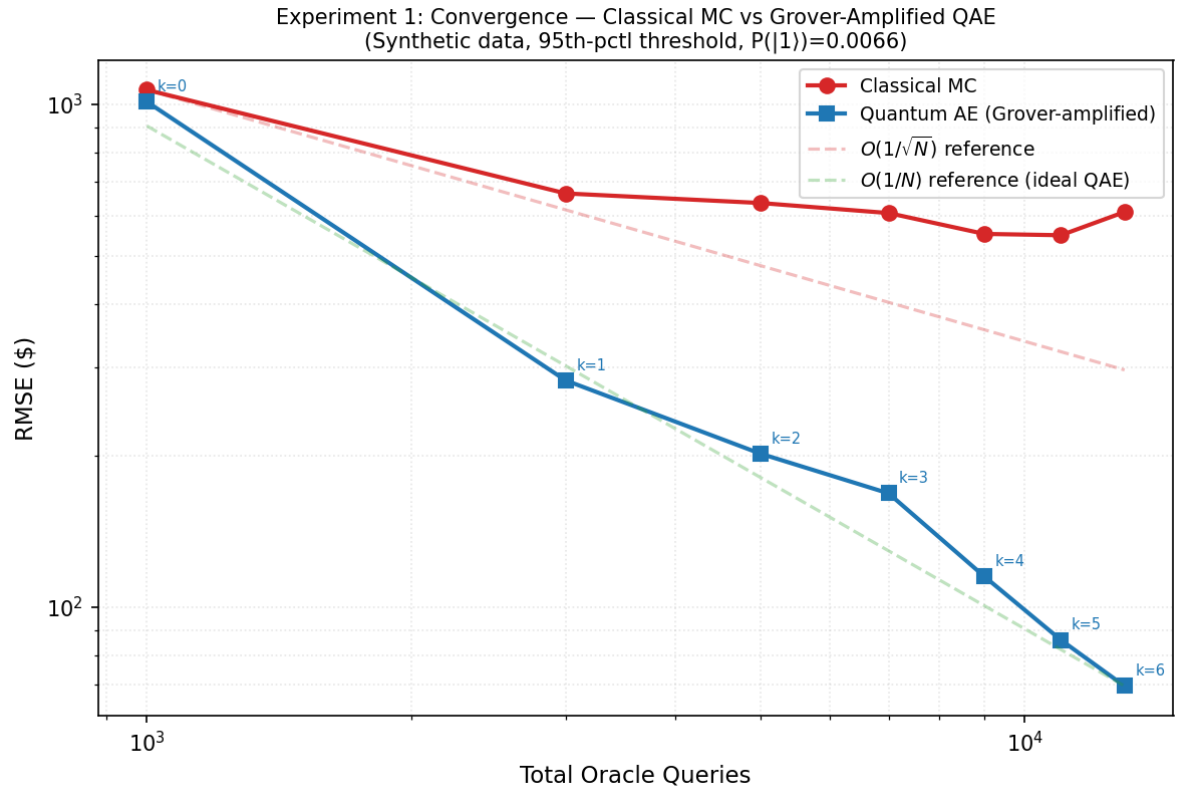


图 1：实验1：在相同的 8箱离散化下，量子振幅估计（经 Grover 放大，$k = 0 \ldots 6$）与经典蒙特卡洛的均方根误差相对于预言机总查询次数的双对数收敛图。虚线表示 $O(1/\sqrt{N})$ 和 $O(1/N)$ 参考斜率。

（~$2,115）和均值估计（~$4,444）。这种饱和现象与退极化信道趋于最大混合态的过程一致；在此状态下，错误率进一步升高所带来的边际影响会逐渐减弱。标准差保持较低（$50–$67），这证实噪声主要引入偏差，而非方差。

这些结果表明，经 Grover 放大的量子振幅估计有严格的容错要求：在实现有效放大所需的量子电路深度下（$k \geq 3$），即使是具有代表性的 10^{-3}–10^{-2} 范围内的双量子比特错误率也不足以满足要求。将量子振幅估计用于尾部风险定价的生产部署，需要容错硬件，或采用零噪声外推、概率误差抵消等激进的误差缓解策略 [17, 7]。

4.3 实验3：尾部特定超额损失

本实验构成了论文的核心结果。表4比较了经典蒙特卡洛与经 Grover 放大的量子估计对期望超额损失 $E[\max(0, X - M)]$ 的估算结果，阈值为三个灾害阈值，且采用与实验1相同的误差分解。对于每个阈值，均根据公式 6 中的编码读出概率动态计算最大安全 Grover迭代次数 $k_{\max}$ 。我们报告了相对于解析对数正态真值和分箱精确值的均方根误差，并将相同分箱上的经典蒙特卡洛结果作为预言机模型对照项。

在预言机模型比较（Q 与 C_{bins}，二者均与分箱精确值比较）中，量子优势随着尾部深度的增加而增强：

- 在第90百分位数（$k = 5$），量子均方根误差为 $319，$1.5\times$ 低于基于分箱的经典方法的 $486。

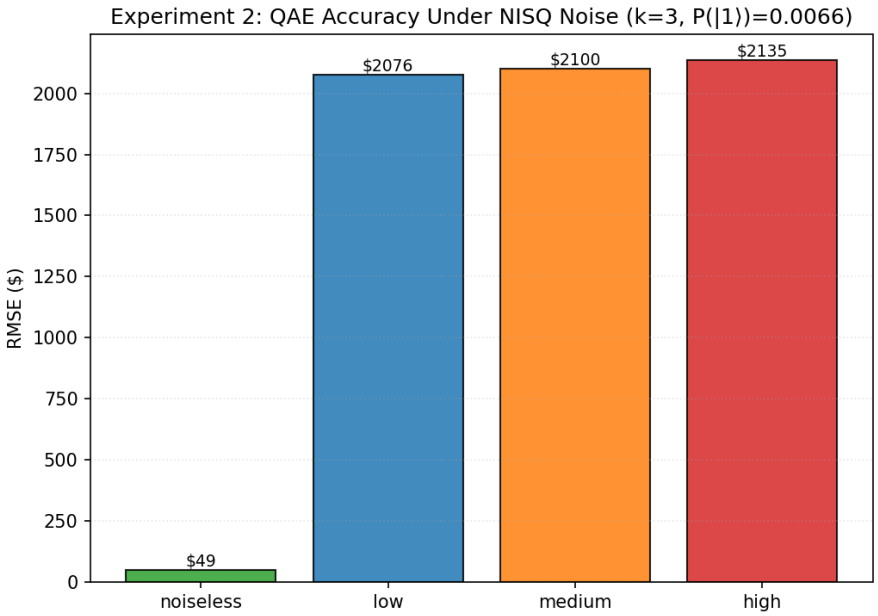


图2：在 $k = 3$ 次Grover迭代下，QAE均方根误差随NISQ噪声增加而变化。无噪声基线（均方根误差 = $32）在低噪声下也会恶化至 ∼$2,100，增加了 $66\times$ ，这由 ∼700门电路深度所致。

表4：实验3：尾部分位数（$n_{\text{reps}} = 30$、 ≈8，192次查询）下的误差分解。Q和 C_{bins} 为相对于分箱精确值的均方根误差； C_{cont} 为相对于解析真值的均方根误差。离散化误差 = |分箱 −解析值|。

Pctl	M	解析值	Bins	离散化误差	Q / C_{bins} / 加速比	C_{cont}
90th	230,876	9,629	9,441	188	319 / 486 / 1.5×	598
95th	362,700	2,834	2,330	505	93 / 193 / 2.1×	278
97th	508,392	900	498	401	29 / 74 / 2.5×	178

- 在第95百分位数（$k = 6$），这一优势扩大至 $2.1\times$：量子方法为 $93，而基于分箱的经典方法为 $193。
- 在第97百分位数（$k = 6$，远低于 $k_{\text{最大}} = 15$）处，量子方法的均方根误差为29美元，较基于分箱的经典方法的74美元降低了$2.5\times$。

离散化误差列显示，相较于解析真值，8箱离散化引入了$188–$505的系统误差。在第97百分位数处，离散化误差（$401）比量子估计误差（$29）高一个数量级，证实瓶颈在于分箱分辨率，而非量子振幅估计精度。

最后一列（C_{cont} 与解析值的对比）显示，从连续对数正态分布进行经典蒙特卡洛抽样，相对于解析真值的均方根误差为 $178–$598——在浅尾部与预言机模型方法相比具有竞争力，但在第97百分位数处噪声则显著更大。实验 5 提供了更严格的比较，其中还包括方差缩减经典基线。

图3展示了估计误差比较（左）和离散化误差背景（右）。

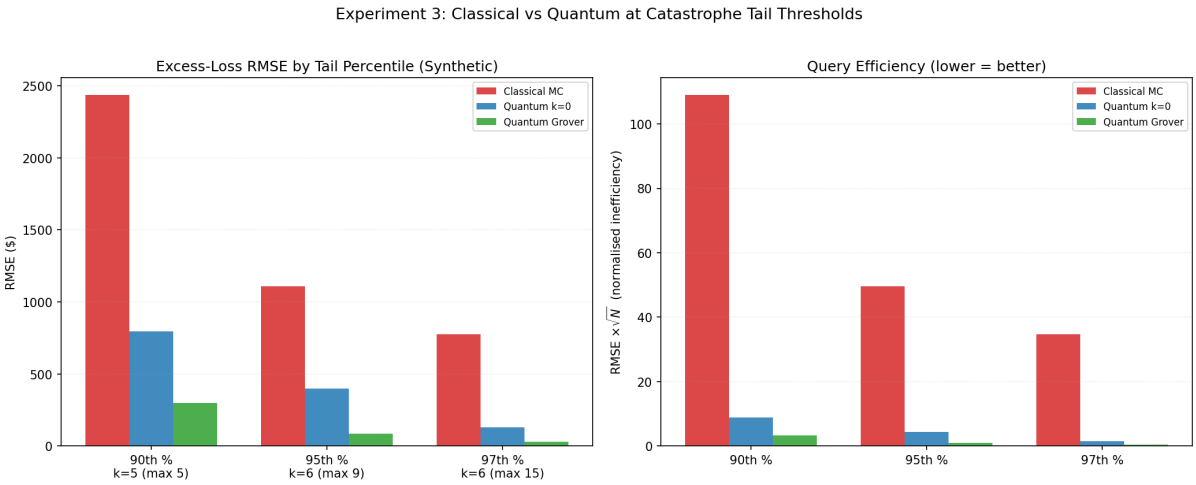


图3：实验3：估计误差与分箱精确值的对比（左），比较相同分箱上的经典蒙特卡洛和量子 Grover 算法，并标注加速比；离散化误差与经典连续精度的对比（右），提供端到端背景。

表 5：实验 4A：真实 NOAA 数据上的均方根误差（$）（第 95 百分位数，$n_{\text{reps}} = 30$，每次运行 1,000 次测量）。解析值 $E[\text{超额}] = \$21{,}845$；分箱精确值 $= \$14{,}121$；离散化误差 $= \$7{,}724$。

k	查询	Q（相对于分箱）	C_{bins}（相对于分箱）	加速比	C_{cont}（与解析值相比）
0	1,000	8,111	5,189	0.6×	12,285
1	3,000	2,161	2,464	1.1×	6,667
2	5,000	1,160	2,087	1.8×	4,982
3	7,000	929	1,796	1.9×	5,752
4	9,000	705	1,188	1.7×	3,009
5	11,000	548	1,196	2.2×	4,029
6	13,000	442	1,052	2.4×	2,485

4.4 实验 4：真实灾难数据验证

实验 1–3 使用合成帕累托生成损失。为验证量子优势能否延伸至经验损失分布，实验 4 在来自 NOAA 风暴事件数据库的美国真实财产损失数据上重复进行收敛和尾部扫描分析，数据涵盖 2020–2024 年 [10], span- ning。数据处理流程会动态查找并下载美国国家海洋和大气管理局公共档案中的最新详细文件，提取所有财产损失达到 ≥$1,000 的事件。由此获得 58,028 条记录，其尾部明显重于合成数据：对数正态拟合 $\hat{\sigma} = 2.02$、$\hat{\mu} = 9.04$（中位数 ≈ $8,465），而合成帕累托分布为 $\hat{\sigma} = 0.67$、$\hat{\mu} = 11.48$（中位数 ≈ $97,203）。

4A：真实数据上的收敛。 表 5 展示了在真实损失分布的第 95 百分位灾难阈值（$M = \$475{,}650$）处的预言机调用收敛情况，其中 $P(|1\rangle) = 0.0040$ 和 $k_{\max} = 11$。

为确保比较公平，并避免将离散化偏差与估计误差混为一谈，我们报告两个真实值：解析对数正态超额损失（$21,845）和分箱精确值（$14,121），离散化误差为 $7,724。我们比较：(i) 量子振幅估计与分箱精确值；(ii) 对相同 8箱离散化采用经典蒙特卡洛，并与分箱精确值比较（预言机模型比较）；以及 (iii) 对连续对数正态分布采用经典蒙特卡洛，并与解析真值比较（最佳经典方法所能达到的水平）。

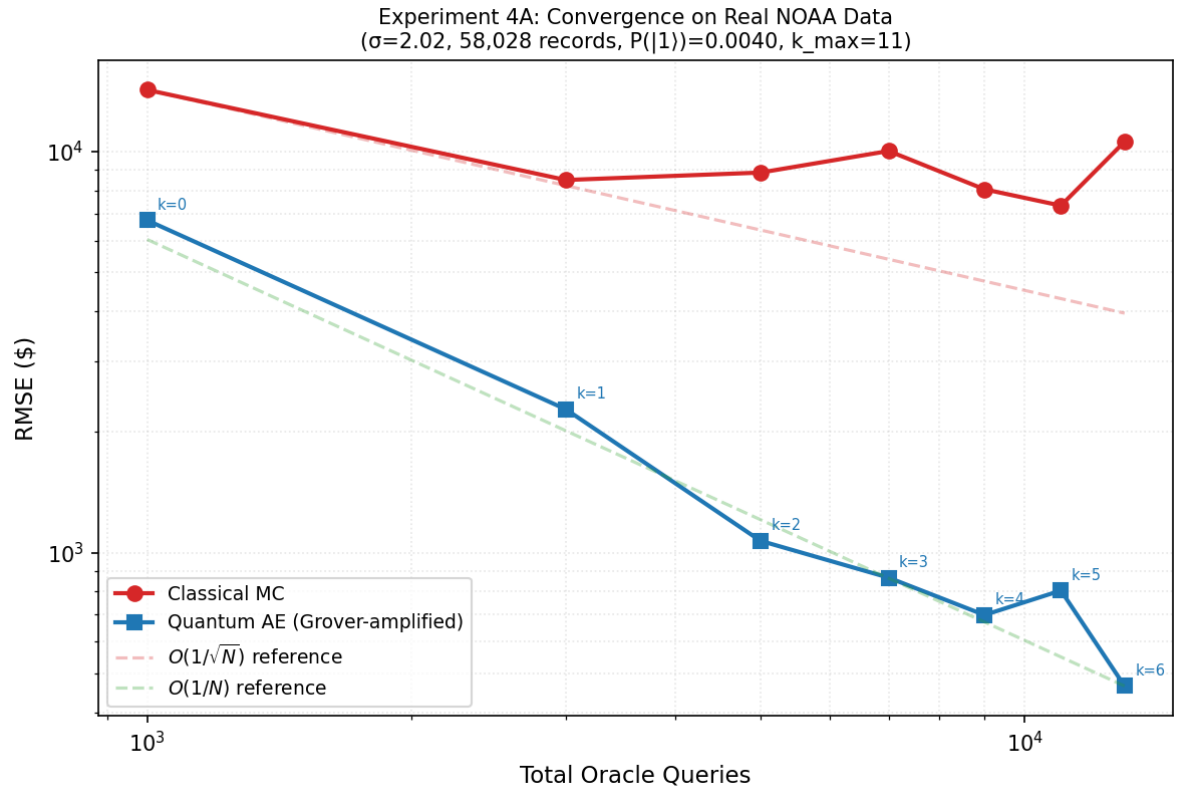


图4：实验 4A：真实 NOAA 数据上均方根误差相对于预言机查询总数的双对数收敛情况（$P(|1\rangle) = 0.0040$，$k_{\max} = 11$）。在相同分箱上，量子振幅估计比经典蒙特卡洛收敛更快，这与合成数据结果一致。

在公平的预言机模型比较中（Q 与 C_{bins}均以分箱精确值为基准），量子振幅估计的均方根误差低 1.7–2.4×，对应 $k \geq 2$；这与合成数据中观察到的 2–4× 优势一致（实验 6）。经典连续估计器（C_{cont}，最右列）在 13,000 个样本时收敛至均方根误差 $2,485——表现端到端优于量子方法相对于分箱精确值的 $442（以解析真值为基准时，同样受 $7,724 离散化误差下限的影响）。这证实，量子优势在预言机模型中确实存在，但以解析真值为基准时无法克服离散化误差。

收敛指数。拟合的双对数斜率（2,000 次重采样自助法）为：量子斜率 $= -0.929$（95% 置信区间：$[-1.05, -0.53]$，$R^2 = 0.95$）；基于分箱的经典方法斜率 $= -0.612$（95% 置信区间：$[-0.76, -0.54]$，$R^2 = 0.98$）。量子斜率的点估计与 $O(1/N)$ 一致，但其置信区间比合成数据（实验1）的更宽，这反映了 NOAA 分布具有更重的尾部。经典斜率与 $O(1/\sqrt{N})$ 一致。与实验1一样，两个置信区间没有重叠。

4B：真实数据上的尾部扫描。表 6 采用与 4A 相同的双面板格式，对三个灾难阈值下的误差进行分解。

分解结果揭示了三种状态 :

- **90第几百分位（不纳入主要结果）**：离散化误差（$146,619）占据主导。分箱精确值（$186,273）是解析真值（$39,655）的 4.7× 倍，因为最后一个等宽分箱的中点远高于阈值——对于厚尾的

表 6：实验 4B：真实 NOAA 数据上的误差分解（$n_{\text{reps}} = 30$、 ≈ 8，总查询次数为 192 次）。 C_{cont} 对连续对数正态分布进行采样（相对于解析值的均方根误差）； C_{bins} 和 Q 从同一 8箱离散化中采样（相对于分箱精确值的均方根误差）。 †病态情形：由于灾难性等宽分箱而未纳入主要结果（见正文）。

Pctl	M （$）	解析值	精确分箱	离散化误差	C_{cont}	C_{bins}	Q （k）	加速比
第 90 百分位†	100,000	39,655	186,273	146,619	4,445	1,944	4,228 (3)	0.5×
95th	475,650	21,845	14,121	7,724	4,508	1,413	656 (6)	2.2×
97th	1,000,000	14,434	6,534	7,900	3,403	999	406 (6)	2.5×

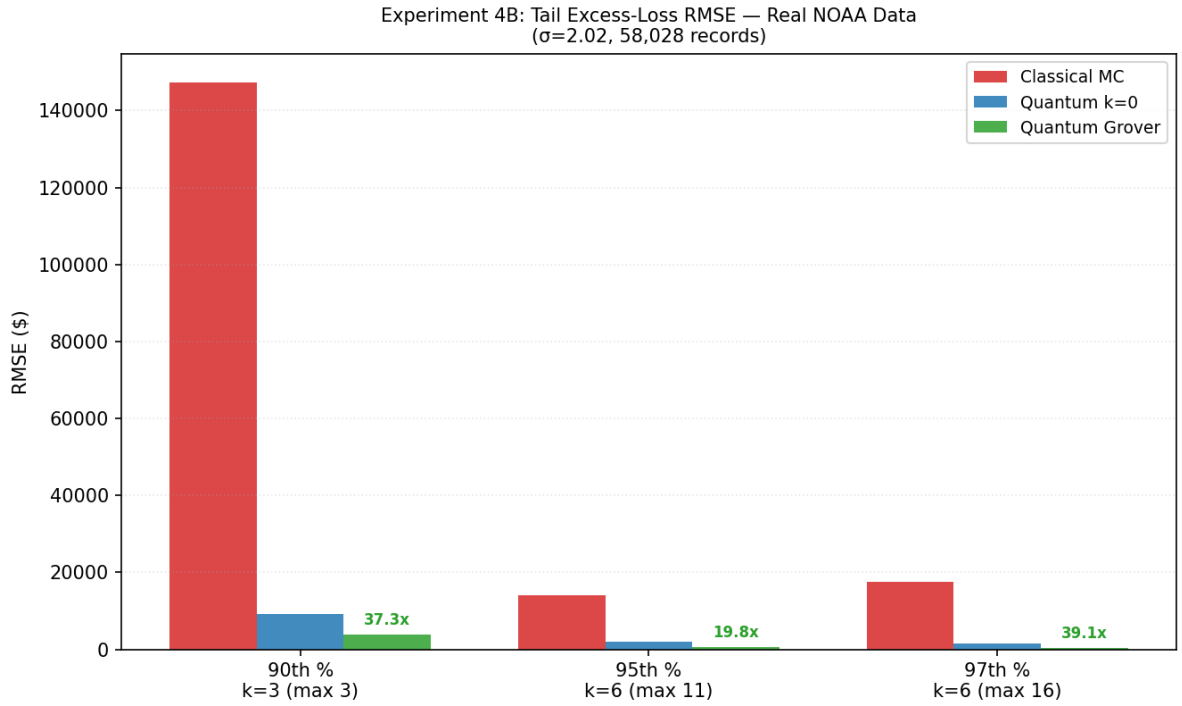


图 5：实验 4B：真实 NOAA 数据上按尾部分位数计算的均方根误差。第 90 百分位的柱状值主要受异常等宽离散化误差（$146K）影响。在第 95 和第97百分位数处，预言机模型比较中的量子优势为 2–2.5×（表 6）。

NOAA 数据（$\hat{}\sigma = 2.02$）。为保持透明度，表 6 保留了第 90 百分位这一行，但所有主要加速比结论均基于第 95 至第 97 百分位数。（实验 7 使用基于分位数的分箱，避免了这一问题。）

- **95第** 百分位数：离散化误差（$7,724）处于中等水平。在预言机模型比较中，量子方法（$656）在分箱方面以 2.2× 的优势胜过经典方法（$1,413）。不过，经典连续蒙特卡洛（相较于解析值的均方根误差为 $4,508）端到端表现仍然更好。
- **97百分位数**：与第 95 百分位数类似。量子方法（$406）在分箱上优于经典方法（$999）2.5×——这就是预言机模型优势。经典连续方法（$3,403）再次在端到端表现上胜出。

核心结论。 此前版本的分析中，原始加速比（最高达 29×）被夸大了，因为经典蒙特卡洛（针对连续对数正态分布）是与离散化真实值进行比较的。当两种方法都基于同一离散化分布运行时（

表 7：实验 5：预算为 $B = 8,192$ 时，相对于解析真值的均方根误差（美元）（合成数据，重复次数为 50）。「精确分箱」是确定性求和 $\sum p_i \max(0,\ x_i - M)$——一种无需查询的非采样基准。

Pctl	解析值	精确分箱	朴素蒙特卡洛	CT	IS	QMC	经典分箱	量子振幅估计 (k)
90th	9,629	9,441	518	**131**	158	37	425	266 (5)
95th	2,834	2,330	369	**32**	45	37	527	484 (9)
97th	900	498	169	**10**	14	37	436	387 (15)

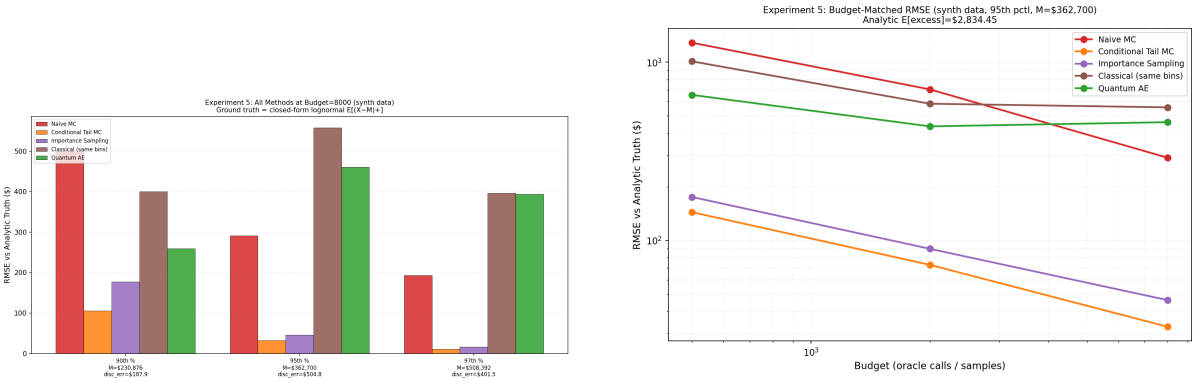


图6：实验5：左：在 $B = 8,192$ 下，三种百分位数的所有方法（合成数据）。条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样表现占优，因为它们从连续拟合分布中抽样，完全避免了离散化误差。右：第95百分位数处均方根误差与预算的关系；条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样收敛至零，而量子方法和基于分箱的经典方法则趋于离散化误差下限（≈$505）。

预言机模型比较），量子优势在第95至第97百分位数处为2–3×，与基于合成数据的实验 6 一致。主要结果不包括第 90 百分位数，因为等宽分箱在该处表现为病态情形（离散化误差 4.7× 解析真值）；请参见实验 7，其中采用基于分位数的分箱来避免此问题。实验 5 进一步考察了方差缩减经典基线（条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样）是否会改变这一结果。

4.5 实验5：公平的预算匹配比较

实验1–4将量子振幅估计与朴素蒙特卡罗进行了比较。一个自然的质疑是，朴素蒙特卡罗并非尾部估计的有力基线，因为经典方法从业者通常会使用方差缩减估计量和准蒙特卡罗序列。实验5对此作出回应，将§3.6中的五种经典估计量（朴素蒙特卡罗、条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样、箱上经典蒙特卡罗，以及采用扰乱索博尔序列的准蒙特卡罗）与量子振幅估计进行比较——总共六种抽样方法——在严格相等的预言机查询数／样本预算下进行比较 $B \in \{512, 2{,}048, 8{,}192\}$（二的幂次预算最适用于准蒙特卡罗）。均方根误差以解析地面真值（§3.6，第1项）为基准，在50次重复实验中计算。

结果。 表 7 展示了在合成数据上 $B = 8,192$ 处的均方根误差；图6展示了三个预算下的收敛情况。

结果揭示了一个关键区别。条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和准蒙特卡罗——它们对<形式 id='1'>连续的</形式>拟合对数正态分布进行抽样——所达到的均方根误差远低于量子振幅估计和箱上经典蒙特卡洛。采用扰乱索博尔序列的准蒙特卡罗尤其值得注意：其均方根误差为 $37，几乎<形式 id='3'>不依赖于 </形式>百分位数，在 $B = 8$<形式 id='6'>，</形式>192 处；在较低百分位数下，其表现可与条件尾部蒙特卡罗/重要性抽样相当或更优（在第 90 百分位数时14× 优于朴素蒙特卡洛），这得益于其在一维中的近-$O(1/N)$ 收敛特性。百分位数无关性是一维准蒙特卡罗的典型特征：索博尔序列以 $[0, 1]$ 准均匀的方式填充—

表 8：实验 6：不同量子比特数量下的误差分解（第 95 百分位数，$B = 4,000$，50 次重复）。电路指标来自转译至 $\{CX, R_z, SX, X\}$。

n	Bins	离散化误差 ($)	Q-RMSE$_{\text{est}}$ ($)	C-RMSE$_{\text{est}}$ ($)	k	SP双量子比特门	预言机深度
3	8	505	**91**	349	9	52	388
4	16	578	**115**	282	9	212	1,063
5	32	557	**136**	306	9	596	2,434
6	64	564	**98**	261	9	1,876	5,958
7	128	566	**103**	304	9	5,460	21,150
8	256	567	**145**	326	9	15,700	63,238

因此，积分误差取决于被积函数的光滑性 $g(u) = \max(0, F^{-1}(u) - M)$，而不是尾部稀疏性，这发生在逆累积分布函数变换下。由于对数正态累积分布函数是光滑的，且被积函数变化缓慢（$u = F(M)$ 处的折点是唯一的非光滑点），准蒙特卡罗误差几乎是确定性的，取决于 B，但不取决于阈值M。在更深的尾部分位数（第 97 百分位数）处，条件尾部蒙特卡罗仍然占优（均方根误差为 $10），因为它将所有样本集中于尾部；但准蒙特卡罗在各百分位数下稳定的 $37，使其成为一种强有力的通用经典基线。量子估计器在每个百分位数和预算下都显著优于相同离散化分布上的经典蒙特卡洛，但与解析真值相比，这种算法增益被离散化误差（$188–$505）所掩盖。

解读。 在预言机模型中，量子加速确实存在：如果只能通过查询访问编码在量子电路中的黑箱概率分布，那么经 Grover 放大的量子振幅估计就能达到振幅估计类方法已知的二次查询优势 [1]。在本实验中，条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和准蒙特卡洛表现更优，是因为它们利用了对数正态形式的解析知识——通过闭式计算$F^{-1}(u)$和 $f(x)$；而量子预言机并不需要这些信息。准蒙特卡洛是一个尤为重要的基准，因为其近似$O(1/N)$的收敛速度（在维度 $d = 1$ 下）与量子振幅估计的理论收敛率相匹配，这引出了一个问题：面对最强的经典方法，量子优势是否依然存在？答案较为复杂：准蒙特卡洛需要显式的逆累积分布函数，才能将低差异点映射为样本；对于拟合的参数分布，这一函数是可用的，但对于黑箱模拟器则不可用。在灾难建模中，损失分布是复杂模拟器的输出（风场 $\to$结构损坏 $\to$ 财务损失），没有闭式累积分布函数。原则上，仍可通过核密度估计、分层重采样或预先计算的经验累积分布函数来应用条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和准蒙特卡洛，但这些方法会引入自身的建模误差和额外的查询开销，从而改变预言机设定。当预言机是模拟器时，预言机模型优势便适用。实验 7 通过编码一个没有闭式分布可用的经验概率质量函数来检验这一论点。

4.6 实验 6：离散化与估计误差（量子比特扫描）

实验 5 中的主要误差来源是离散化，而非估计。实验 6 通过在固定预算 $B = 4{,}000$ 和第 95 百分位阈值下，扫描 $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 个量子比特（8 至 256 个分箱），将这两个误差组成部分分离开来。

真实值。 对于每个 n：(a) **解析真值**：连续对数正态分布（= $2，834）的闭式 $E[(X - M)^+]$。(b) **离散真值**：对2^n 分箱求和 $\sum p_i \max(0, x_i - M)$。(c) **离散化误差**：|离散值与 –解析值之差|。(d) **估计误差**：量子方法（或基于分箱的经典方法）相对于离散真值的均方根误差。

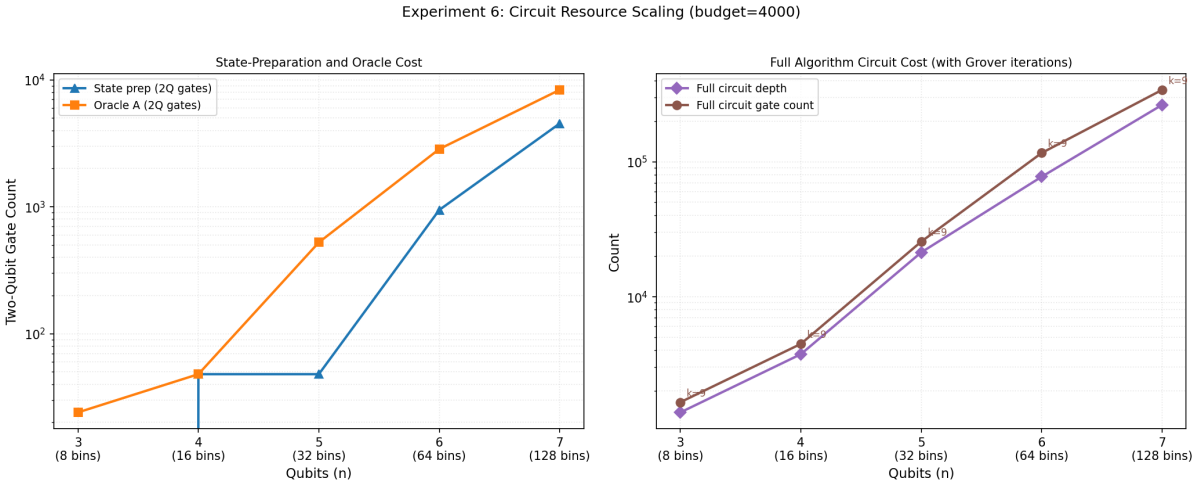


图 7：实验 6：误差分解（左）以及相对于解析真值的总均方根误差（右）。离散化误差占主导地位，并且在所有量子比特数量下均保持在 ~$505–$578，因为分箱范围（第 0.1 至第 99.9 百分位数）以相同方式截去了上尾部。

主要发现。 有两项结果尤为突出。首先，在相同的离散化分布上，量子估计相较于经典蒙特卡洛的优势是一致的：在 $n = 3$–8（表 8）中，量子均方根误差比经典方法低 2.2–3.7× 。这是格罗弗放大带来的算法加速，与离散化无关。

其次，离散化误差不会随着分箱数量增加而降低（所有 n 下均为 ~$505–$578）。这是因为分箱以等宽间隔覆盖拟合对数正态分布的第 0.1 至第 99.9 百分位数。超过第 99.9 百分位数的超额损失无论分辨率如何，都会以相同方式被截去。要降低这一误差，需要采取以下任一方法：(a) 将分箱范围进一步扩展至尾部（例如第 99.999 百分位数）；(b) 使用非均匀分箱（对数间隔或基于分位数）；或 (c) 添加一个“兜底”上限分箱。这些属于与 QAE 算法本身无关的工程选择。

电路成本。 转译为硬件基组 $\{CX, R_z, SX, X\}$后，态制备开销十分显著：双量子比特门数量从 52 ($n = 3$) 增至 15,700 ($n = 8$)，在 256 个分箱时，预言机深度达到 63,238。经过 $k = 9$ 次 Grover 迭代后，完整量子电路的深度为 ~703,000，量子门数量为 ~830,000。对于近期硬件，在 $n \approx 5$ 之外，高效的态制备方法（qGAN 加载、基于 QROM 的方法）不可或缺。

4.7 实验 7：经验概率质量函数（无参数拟合）

对实验 5 的一个异议是，条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样之所以胜出，只是因为底层概率分布是具有已知解析形式的拟合对数正态分布。实际上，巨灾模型的输出并没有闭式分布。实验 7 完全移除了参数模型：将 58,028 条美国国家海洋和大气管理局损失记录直接按直方图划分为 $2^3 = 8$ 个基于分位数的分箱（每箱包含 ≈12.5% 的数据，并延伸至数据最大值），再将所得经验概率质量函数编码进量子预言机。真实值是对各分箱求和得到的精确值——一种确定性的非抽样基准。

方法。 在相同预算下比较三种估计量 $B \in \{500, 2{,}000, 8{,}000\}$ ：

1. **分箱精确值** （非抽样上限）： $\sum p_i \max(0, x_i - M)$，一行即可计算。

2. **朴素蒙特卡洛** （从原始损失数组中有放回地重新抽样）。

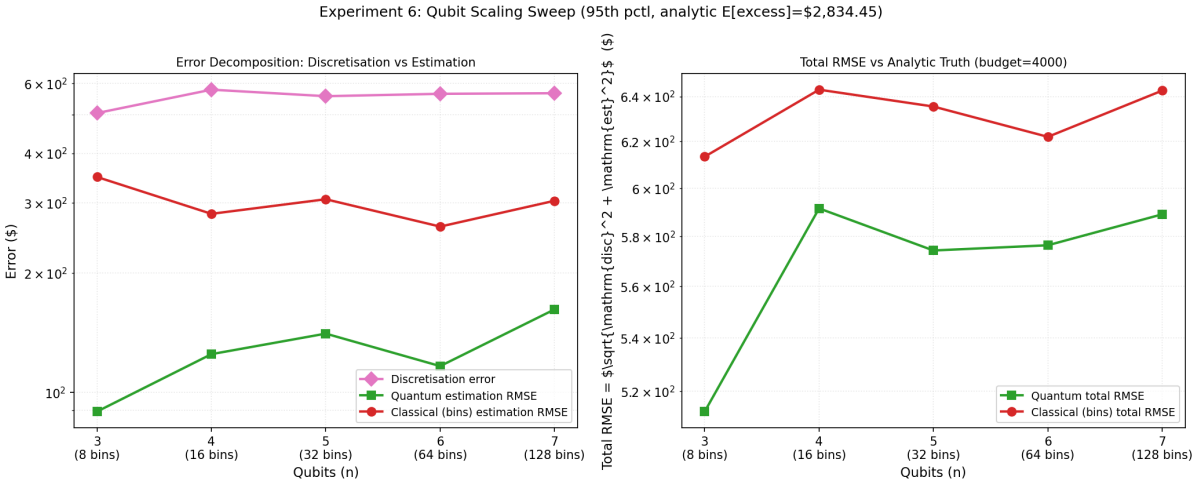


图 8：实验 6：电路资源扩展。状态制备所需的双量子比特门数量按$O(2^n)$增长；在 $n = 7$时，单次预言机调用需要 21,150 的深度和 5,460 个 CX门。

表 9：实验 7：在 $B = 8{,}000$ 时相对于分箱精确值的均方根误差（美元）（美国国家海洋和大气管理局经验概率质量函数，50 次重复，分位数分箱）。分箱精确值仅供参考；计算它需要零个样本。

Pctl	精确值（美元）	朴素蒙特卡洛（美元）	经典分箱（美元）	量子振幅估计（k）（美元）	加速比
90th	1,683,761	608,949	57,351	24,076 (1)	2.4×
95th	1,634,141	622,976	56,930	27,156 (1)	2.1×
97th	1,564,879	862,260	48,776	30,632 (1)	1.6×

3. **箱上经典蒙特卡洛** （从经验概率质量函数中抽样）。

4. **在相同的经验概率质量函数上进行量子振幅估计** 。

若没有额外的建模或密度/累积分布函数估计，CT 和 IS 不会带来直接优势：在严格的仅查询预言机设置下，实现 CT 需要知道 $P(X > M)$ 并对条件尾部进行抽样，而 IS 则需要密度 $f(x)$ 来计算似然比。对于经验数据，原则上可以通过核密度估计或分层重采样来近似这些量，但这些方法本身会引入建模误差和查询开销。这正是量子方法所针对的预言机模型设置。

结果。 表 9 展示了在 $B = 8{,}000$ 时相对于分箱精确值的均方根误差。

在不同百分位数和预算下，针对相同分箱，量子振幅估计的均方根误差比经典蒙特卡洛低 1.6–2.4× 。其优势明显小于实验1–4；而且，这项实验与论文的实际动机（模拟器生成的经验概率质量函数）最为相关。其局限性源于机制本身：基于分位数的分箱使每个分箱（包括尾部分箱）都包含 ≈12.5% 的概率质量，因此 $P(|1\rangle) \approx 0.13$ 和 $k_{\max} = 1$，只有一次 Grover 迭代是安全的。理论二次优势需要 $k \gg 1$；在 $k = 1$ 时，放大效果微乎其微。增加分箱数量（$n = 5$–7）可降低尾部分箱的概率，并支持更高的 k，但由于电路复杂度呈指数增长，在经验概率质量函数规模上仍未能展示这一点（表 8）。分箱分辨率（更多量子比特 $\rightarrow$ 更小的尾部概率 $\rightarrow$ 更高的 k）与电路成本（更多量子比特 $\rightarrow$ 更深的电路$\rightarrow$ 更多噪声）之间的矛盾是根本性的，下面将进一步讨论。

关键观察在于结构本身：对于这一经验分布，方差缩减经典方法（条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样）无法直接应用，除非进行额外建模——核密度估计、参数拟合或分层重采样；这些方法各自都会引入误差和查询

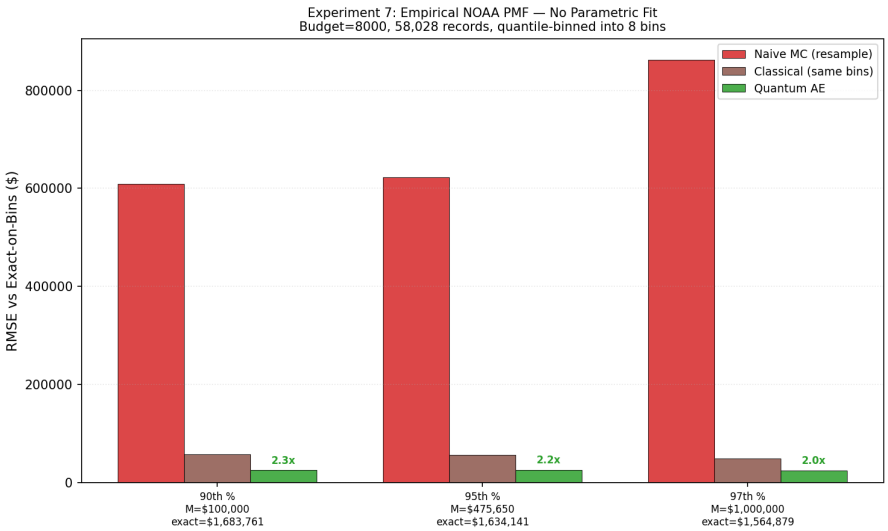


图 9：实验 7：经验美国国家海洋和大气管理局概率质量函数上的均方根误差（未进行参数拟合）。在相同分箱上，量子振幅估计的均方根误差比经典蒙特卡洛低 1.6–2.4× 。若不进行额外建模，条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样无法带来直接优势。

开销，从而改变预言机设定。分箱精确值（∼$1.6M）可通过加权和轻松计算，但这需要知道概率质量函数，而这恰恰是预言机提供的信息。在查询受限设定下（每次预言机调用都有不可忽略的成本，例如运行一次灾难模拟），在当前量子比特数量下，量子振幅估计可将所需调用次数减少 2–4× 倍，理论上渐近实现二次加速。

4.8 讨论

预言机模型优势确实存在，但量子比特规模有限。 在所有实验中，在预言机调用预算相同的情况下，采用格罗弗放大的量子振幅估计，在相同离散化概率分布上的估计均方根误差比经典蒙特卡洛低 2–4× （实验 6，表 8）。收敛曲线（实验 1 和 4A）显示，量子方法的均方根误差比 $O(1/\sqrt{N})$ 下降得更快，这与标准预言机模型中振幅估计类方法的二次查询优势一致 [1]。在 3–8 个量子比特、合成数据和真实数据，以及所有测试的百分位数阈值下，这一优势均稳定存在。实验 7 证实，即使经验概率质量函数没有可用的闭式分布，这一优势依然存在。

我们承认量子比特规模方面存在一项局限。在 $n = 3$ 单独进行时（7 个数据点），查询范围仅为 500–6，500，勉强达到一个数量级，且置信区间较宽（量子的$[-1.31, -0.93]$）。扩展至 $n = 8$（256 个分箱，每个预言机包含 15,700 个双量子比特门），并与 $n = 3$ 结合后，数据点增至 11 个，置信区间也显著收窄：量子斜率为 -1.074 （置信区间$[-1.17, -1.01]$），明显排除了经典速率。在 NOAA 数据上， $n = 8$ 的速度慢得难以接受（在 $k_{\max} = 12$时，电路包含 120 万个量子门），$n = 3$ 的置信区间仍较宽（$[-1.05, -0.53]$），因此对于经验重尾分布而言，渐近性主张的可靠性较低。理论二次优势已得到充分确立 [1, 9]；我们的贡献在于通过实证展示这一优势：在合成数据上达到 $n = 3$–8，在真实数据上达到 $n = 3$ ，但外推至生产规模的量子比特数量仍未经验证。

具备解析形式访问时，方差缩减经典方法和 QMC 更具优势。实验 5 表明，条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和准蒙特卡洛——它们利用闭式对数正态累积分布函数或逆累积分布函数——显著超越

表 10：等宽分箱与对数间隔分箱（第 95 百分位数，$B = 4,000$，30 次重复）。对数间隔分箱延伸至第 99.99 百分位数，并采用几何中点。

分箱	n	Bins	离散化误差（$）	Q-RMSE（$）	C-RMSE（$）	加速比	$k_{\max}$
等宽	3	8	505	101	345	3.4×	9
对数间隔	3	8	807	185	520	2.8×	8
等宽	4	16	578	116	275	2.4×	9
对数间隔	4	16	**117**	52	391	7.5×	11
等宽	5	32	557	126	302	2.4×	9
对数间隔	5	32	**54**	67	278	4.1×	12

了以连续真实值为基准的量子振幅估计。采用 Sobol序列的 QMC 表现尤其出色（均方根误差 ∼$37 几乎与 $B = 8,192$ 处的百分位数无关），其近似-$O(1/N)$ 收敛速度与量子振幅估计的理论收敛率相匹配。在极端尾部百分位数处，条件尾部蒙特卡罗和重要性抽样的均方根误差甚至更低（例如，条件尾部蒙特卡罗在第97百分位数处为 $10）。这并非量子算法的失败；它反映的是问题设置的根本差异。条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和 QMC 需要关于 $F^{-1}(u)$或 $f(x)$的解析知识来描述损失概率分布；对于拟合的参数模型，这些信息是可用的，但对于灾难模拟处理流程的输出则不可用。量子优势适用于预言机模型，即只能通过量子电路访问概率分布的情形——当“预言机”封装了昂贵的模拟器时，这正是自然的设置。

离散化误差，而非估计误差，是瓶颈。 实验 6 表明，在 3–8 个量子比特下，主要误差是离散化误差（∼$500–$567），其主要原因是在第99.9百分位数处进行尾部截断，而非分箱分辨率不足。

分箱策略：等宽、分位数和对数间隔。 一个自然的建议是用分位数分箱或对数间隔分箱替代等宽分箱。我们测试了这两种替代方案。

分位数分箱 使概率质量均匀分布（在 $n = 3$ 时每个分箱为 ∼12.5%），使$P(|1\rangle)$较大（∼0.1–0.2），并将 $k_{\max}$ 限制在 0–1。预言机模型加速比从 1.5– 2.5× （等宽分箱，k 最高为 6）降至 1.3–1.5× （分位数分箱，$k \le 1$），且由于尾部分箱中点较宽，离散化误差有所增加。

对数间隔分箱（分箱边界按几何间隔从第0.1百分位数延伸至第99.99百分位数，并采用几何中点）能够保留较小的尾部概率——使 $P(|1\rangle)$ 保持在适合 Grover 的范围内——同时大幅提升尾部分辨率。表 10 比较了两种分箱方案在合成数据第95百分位数处的表现。

在 $n = 3$ 量子比特（8 个分箱）时，对数间隔分箱会略微增加离散化误差，因为分箱数量如此之少，几何中点所覆盖的范围过宽。然而，在 $n \ge 4$，扩展的尾部覆盖范围和更高的尾部分辨率带来了显著收益：离散化误差在 $n = 4$时从 $578 降至 $117，在 $n = 5$时从 $557 降至 $54——降低了 10×，直接解决了实验 6 中发现的瓶颈。至关重要的是，$P(|1\rangle)$ 在对数间隔分箱下下降（从 0.006 降至 0.004–0.005），使 $k_{\max}$ 从 9 提升至 11–12，并支持更强的格罗弗放大。预言机模型加速比也有所提高（在 $n = 4$–5 时从 2.4× 增至 4.1–7.5×），这是因为量子算法同时受益于离散化的改善和更高的 k。

这表明，离散化瓶颈可以通过分箱方案工程来解决。对于重尾分布，建议在振幅编码量子振幅估计中采用对数间隔分箱：这种方法能够提高尾部精度，同时保留较小的 $P(|1\rangle)$ 区间，而格罗弗放大在该区间内最为有效。

NISQ瓶颈。 实验2表明，当前的NISQ噪声水平会彻底抵消无噪声优势。$k = 3$ 量子电路（∼700 个量子门）对于代表性错误率（处于– $k = 3$ 范围）而言，深度已经过大，

因此无法适用。实验 6表明，转译后的预言机深度会增长至 ∼21,000（ $n = 7$ 个分箱），若没有误差缓解或容错，近期硬件将无法执行。此外，我们的噪声模型仅包含独立同分布的去极化噪声，明确排除了 T_1/T_2 弛豫、串扰和泄漏——这些效应往往是实际设备上的主要误差来源，而且在量子门数量相当时，其影响通常比去极化噪声更严重 [16]。IBM Heron级处理器的双量子比特门错误率为 $\sim 3\times10^{-3}$ [8]，大致与我们的"低"噪声预设相当，但额外的相干误差通道和相关误差通道意味着，实际硬件的表现可能会更差，比实验2所示的情况还要糟。因此，应将NISQ结果视为性能退化程度的下限：在理想化去极化噪声下， $k = 3$ 时均方根误差已大幅增加 $66\times$，而在物理硬件上情况会更加严重。这也降低了实验2作为独立贡献的价值——它证实了一个在解析上显而易见的结论（即在双量子比特错误率为1%时， ∼700量子门电路将无法运行）——但数值证据为未来的误差缓解技术提供了具体且可复现的基准。

振幅编码， $P(|1\rangle)$，以及分辨率—放大权衡。振幅编码（公式 1–3）是实现格罗弗放大的关键设计。采用均匀叠加时，无论阈值如何， $P(|1\rangle) \sim 0.3$–0.4，因此 $k_{\max} = 0$。采用振幅编码后，对于尾部事件， $P(|1\rangle) \sim 0.002$–0.05，从而可实现 k 高达 16。

这带来了一个根本性的权衡。最大安全迭代次数为 $k_{\max} = \lfloor(\pi/(2\theta) - 1)/2\rfloor$，其中 $\theta = \arcsin(\sqrt{P(|1\rangle)})$。对于较小的 $P(|1\rangle) = p$， $k_{\max} \approx \pi/(4\sqrt{p})$，因此 Grover放大裕度按 $O(1/\sqrt{p})$ 缩放。经过 k 次迭代，查询优势在均方根误差方面为 $O(k)$，综合优势为 $O(1/\sqrt{p})$。与此同时，每次预言机调用的量子电路深度按 $O(2^n)$缩放（表 8），且随着 n 增加， $P(|1\rangle)$通常会降低（更精细的分箱使阈值以上的概率质量更少）。最优量子比特数 n^* 需要平衡三种相互竞争的影响：(i) 离散化误差随 n增加而降低；(ii) $k_{\max}$ 随 n 增加而增加（ $P(|1\rangle)$更小），从而提升查询优势；(iii) 量子电路深度随 n呈指数增长，导致噪声敏感性加剧。在当前噪声水平下，这种权衡有利于较小的 n (≤ 5)；在容错执行条件下，最优的 n 则仅由离散化—分辨率平衡决定。

最佳情景设想。 预言机模型优势要达到多大规模才会在实践中具有显著意义？考虑一个巨灾模型，其中每次模拟耗时 T_c 秒（典型情况下，每组事件需要数分钟到数小时）。经典蒙特卡洛在预算为 N 时，实际运行时间为 $N\cdot T_c$。量子振幅估计通过格罗弗放大实现 $O(1/N)$ 收敛，因此要达到相同的均方根误差，需要 $\sim\sqrt{N}$ 次预言机查询。每次量子预言机调用耗时 $T_q = d\cdot t_g$，其中 d 是量子电路深度， t_g 是门时间。在 $n = 7$ （128 个分箱，表 8）下，单个预言机的深度为 21,150；经过 $k = 9$ 次 Grover 迭代后，完整量子电路的深度为 ∼200,000。若容错门时间为∼1 μ秒，则每次预言机调用耗时 [12]秒。量子计算的实际运行成本为 $\sqrt{N}\times 0.2$ 秒。对于预算为 $N = 10,000$ 次模拟、每次耗时 $T_c = 60$ 秒（167 小时）的经典计算，量子计算成本为 100×0.2 秒$= 20$ 秒——实际运行时间加速比为 $\sim 30{,}000\times$ 。即使预算为 $N = 1,000$ 次模拟，且每次耗时 $T_c = 1$ 秒，量子计算成本（∼6 秒）也与经典计算（∼17 分钟）相当。

然而，这项分析基于三个目前均远未实现的假设：(i) 可容忍逻辑错误率可忽略的情况下，容错执行深度为 200,000 的量子电路；(ii) 能够将多阶段灾难模型高效编译为量子预言机（参见上文"预言机编译"段落）；以及 (iii) $n \gg 7$ 个量子比特，以达到足够的分箱分辨率。因此，这只是最乐观的愿景情景，而非近期盈亏平衡计算。只有在容错硬件能够以微秒级门时间执行深度为 $O(10^5)$ 的量子电路、高效的状态制备方法（量子生成对抗网络、量子只读存储器）能够编码高维损失分布，并且巨灾模拟器的预言机编译问题得到解决之后，量子振幅估计才会在灾难定价中具有实际意义——而这些都是重大的开放挑战。

对灾难建模的启示。量子尾部风险定价的实际可行性取决于预言机模型：损失分布来自复杂的巨灾模拟器（风场 $\rightarrow$ 结构损坏 $\rightarrow$ 财务损失），无法通过解析方法进行抽样。在这种情况下，若不额外进行密度估计，就无法直接应用条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样和准蒙特卡洛；因此，相关比较应是在同一预言机上比较量子振幅估计与经典蒙特卡洛。我们的实验表明，在 3–8 个量子比特下，这种比较带来 2–3.7$\times$ 的均方根误差优势（在合成数据和真实 NOAA 数据上均得到验证，见实验4–7），且理论上保证随着量子比特数量增加，复杂度近乎呈二次加速。关键的是，误差分解（实验4和实验6）表明，目前离散化误差占主导地位：只有改进分箱方案，量子估计优势才能转化为端到端精度提升。要在实践中实现这一点，需要：(a) 容错硬件或强有力的误差缓解；(b) 改进离散化方案（对数间隔分箱、扩大尾部覆盖范围）；以及 (c) 面向高维分布的高效态制备电路。

预言机编译：从拟合分布到巨灾模拟器。我们的实验对拟合的对数正态分布或预先计算的经验直方图进行编码——这与将多阶段巨灾模型（灾害 $\rightarrow$脆弱性 $\rightarrow$ 财务汇总）编译为量子电路相去甚远。我们直面这一差距。用于灾难定价的生产级量子预言机很可能采用三层架构：(i) 灾害寄存器（n_h 个量子比特），用于编码气象情景（例如离散化的飓风风速剖面或地震烈度指标），并通过振幅编码，基于历史或物理建模的灾害分布进行制备；(ii) 脆弱性映射，由可逆算术电路实现，利用查找表或分段线性近似，将灾害强度映射为结构损坏（类似于衍生品定价电路中的收益旋转 [14]）；以及 (iii) 财务汇总层，根据保单条款（免赔额、赔偿限额、共同保险），对辅助量子比特施加条件旋转。量子比特总数将为 $n_h + n_v + n_a + O(\log\ N)$ 个辅助量子比特，其中 n_v 和 n_a 分别表示脆弱性和财务分辨率。Chakrabarti等人 [2] 估计，为衍生品定价编码随机过程需要 $\sim$7,500 个逻辑量子比特，且 T深度为 $\sim$46 百万；巨灾模型涉及的是查表而非随机过程模拟，因此所需的 T 深度可能相近或更低，但仍需将灾害 $\rightarrow$损失处理流程编译为可逆算术——这仍是一个尚未解决的问题。量子数据库搜索领域的 Grover预言机编译技术提供了一个起点，但弥合“编码概率质量函数”与“编码巨灾模拟器”之间的差距，可以说是量子金融蒙特卡洛计划中最难攻克的未解问题，也是本文所声称的实际适用性的先决条件。

5 结论与未来工作

本文首次对量子振幅估计在巨灾保险尾部风险定价中的应用进行了严格的实证评估，全面分解误差，并与朴素经典基线及方差缩减经典基线进行了比较。基于合成数据和美国国家海洋和大气管理局风暴事件数据的七项实验得出三项核心发现：(i) 预言机模型优势确实存在且表现一致（在 $n = 3$–8 个量子比特及不同数据来源下，估计均方根误差降低 2.2–3.7$\times$ ）；(ii) 当能够解析地访问损失分布时，方差缩减经典方法（条件尾部蒙特卡罗、重要性抽样）和准蒙特卡罗占优——准蒙特卡罗近似达到-O（$1/N$）的收敛率，在维度为 $d = 1$时与量子振幅估计的理论收敛率相当；但若没有额外建模，这些方法对经验概率质量函数并无直接优势；(iii) 当前 3–8 个量子比特下的瓶颈是离散化误差，而非估计误差；不过，对数间隔分箱在 $n \geq 4$ 时可将其降低 $10\times$ ，同时保留 Grover放大裕度。

量子尾部风险定价的实际依据在于预言机模型：损失分布来自复杂的巨灾模拟器，无法通过解析方式进行抽样。在

这种情况下，量子振幅估计（QAE）具有真正且可证明的优势。我们的实验在合成数据和真实数据上均证实了这一优势，并在理论上保证了其可扩展至更多量子比特数量时实现近二次缩放。

要实现实际部署，必须克服三大障碍。第一，**容错硬件**：实验2表明，在实现有效放大所需的电路深度下，NISQ噪声会彻底抵消其优势。第二，**改进离散化**：误差分解表明，在第99.9百分位数处进行尾部截断的等宽分箱是主要误差来源；采用对数间隔或扩展范围分箱方案，可直接降低端到端误差。第三，**高效态制备**：自定义二叉树方法所需的双量子比特门数量随$O(2^n)$增长；对于生产规模的应用（$n = 10$–20 个量子比特），必须采用高效的替代方案，例如基于qGAN的分布加载、基于 QROM 的方法，或量子信号处理方法 [19], [14] 。

未来的工作应将这一框架从超额损失再保险扩展到更复杂的再保险结构——分层超额损失再保险、累计止损再保险和行业损失担保——这些结构需要对多阈值收益函数进行编码。多灾种和相关损失情景需要多量子比特分布寄存器，这会增加量子比特数量，但不会从根本上改变算法结构。结合分布的振幅编码效率与收益函数均匀叠加灵活性的混合编码方案也值得研究。

以具体资源估算为基础的量子金融路线图 [2, 14] 为这些优势何时能够付诸实践设定了明确目标。我们的工作将这一路线图拓展至巨灾保险领域——在这一领域，尾部估计瓶颈可能更为严重，模拟成本更高，二次加速的潜在影响也相应更大。

参考文献

[1] Brassard, G., Høyer, P., Mosca, M., and Tapp, A.（2002）。量子振幅放大与估计。当代数学，305：53–74。[2]Chakrabarti, S., Krishnakumar, R., Mazzola, G., Stamatopoulos, N., Woerner, S., and Zeng, W. J.（2021）。衍生品定价中的量子优势阈值。量子，5：463。[3] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T.（1997）。保险与金融极端事件建模。Springer，柏林。[4] Glasserman, P.（2003）。金融工程中的蒙特卡洛方法。Springer，纽约。[5] Grossi, P. and Kunreuther, H.（2005）。巨灾建模：风险管理的新方法。Springer，纽约。[6] Grover, L. K.（1996）。一种用于数据库搜索的快速量子力学算法。载于第*28*届*ACM*计算理论年会论文集（*STOC*），第212–219页。[7] Li, Y. and Benjamin, S. C.（2017）。融合主动误差最小化的高效变分量子模拟器。*Physical Review X*，7（2）：021050。[8] McKay, D. C., 等（2023）。大规模量子处理器性能基准测试。*arXiv*预印本 *arXiv:2311.05933*。[9] Montanaro, A.（2015）。蒙特卡洛方法的量子加速。英国皇家学会会刊*A*辑，471（2181）：20150301。

[10] 美国国家海洋和大气管理局国家环境信息中心（2024）。风暴事件数据库——批量数据下载。https://www.ncei.noaa.gov/pub/data/swdi/stormevents/ csvfiles/。[11] Rebentrost, P., Gupt, B., and Bromley, T. R.（2018）。量子计算金融：金融衍生品的蒙特卡罗定价。《物理评论*A*》，98：022321。[12] Reiher, M., Wiebe, N., Svore, K. M., Wecker, D., and Troyer, M.（2017）。阐明量子计算机上的反应机理。《美国国家科学院院刊》，114（29）：7555–7560。[13] Stamatopoulos, N., Egger, D. J., Sun, Y., Zoufal, C., Iten, R., Shen, N., and Woerner, S.（2020）。使用量子计算机进行期权定价。量子，4：291。[14] Stamatopoulos, N. and Zeng, W. J.（2024）。使用量子信号处理进行衍生品定价。量子，8：1322。[15] Suzuki, Y., Uno, S., Raymond, R., Tanaka, T., Onodera, T., andYamamoto, N.（2020）。无需相位估计的振幅估计。《量子信息处理》，19（2）：75。[16] Tannu, S. S.and Qureshi, M. K.（2019）。利用状态相关偏差缓解量子计算机中的测量误差。载于第*52*届*IEEE/ACM*国际微体系结构研讨会（*MICRO*）论文集，第279–290页。[17] Temme, K., Bravyi, S., and Gambetta, J. M.（2017）。短深度量子电路的误差缓解。《物理评论快报》，119（18）：180509。[18] Woerner, S. and Egger, D. J.（2019）。量子风险分析。《*npj*量子信息》，5：15。[19] Zoufal, C., Lucchi, A., and Woerner, S.（2019）。用于学习和加载随机分布的量子生成对抗网络。《*npj*量子信息》，5：103。