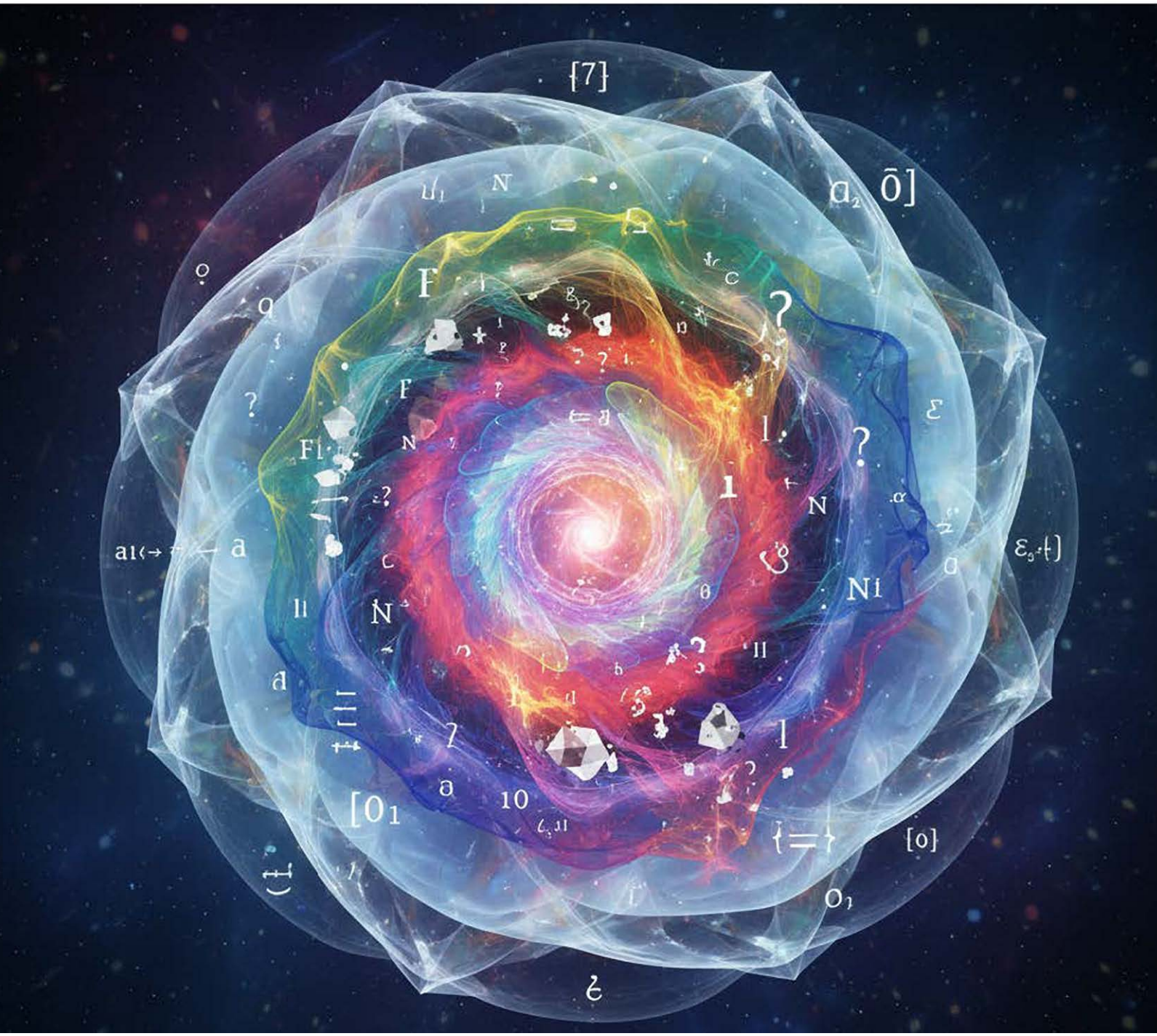
藤田隆明、Florentin Smarandache

模糊集、直觉模糊集、中智集、完备集与外延集的动态综述



NSIA Publishing House

藤田孝明、弗罗仁汀·司马仁达齐

模糊集、直觉模糊集、中智集、普利索金集与外延集动态综述

中智科学国际协会（NSIA）
出版社

Gallup - Guayaquil
United States of America – Ecuador
2025

ISBN 978-1-59973-842-0

作者

高明 藤田
Independent Researcher, Tokyo, Japan.
Email: Takaaki.fujita060@gmail.com

Florentin Smarandache
美国新墨西哥州大学盖洛普校区，邮编 87301。电子邮箱：
fsmarandache@gmail.com

摘要

现实世界中的现象往往涉及模糊性、部分真值和信息不完整。为了以数学上严谨的方式刻画这类不确定性，人们提出了许多广义集合论框架，包括模糊集 [1], 直觉模糊集 [2], 中智集 [3, 4], Vague 集 [5]，犹豫模糊集 [6]，图像模糊集 [7]，四分中智集 [8],五分区中智集 [9], 泛物质集 [10], 超模糊集 [11], 以及超中智集 [12]。

在这些理论框架下，人们提出并研究了大量概念，尤其是在模糊集、直觉模糊集、中智集和等离子集领域。这些丰富的研究成果既凸显了这些理论的重要性，也展现了其应用领域的广泛性。因此，这四类面向不确定性的模型中，许多思想、构造和结构模式反复出现。

本书全面、系统地综述了模糊集、直觉模糊集、中智集和等离子集。我们旨在为读者提供现有研究进展的系统概览，并通过这一统一的阐述，促进新的见解、进一步的概念拓展，以及这些理论在广泛学科领域中的更多应用。

关键词： 模糊集、直觉模糊集、中智集、等离子集。

编辑：



中智科学国际协会（NSIA）出版社
https://fs.unm.edu/NSIA/

新墨西哥大学数学与科学系，美国
新墨西哥州盖洛普校区古利大道
705号，邮编87301

瓜亚基尔大学 肯尼迪大道与德尔塔
大道 “萨尔瓦多·阿连德博士”大学校区
瓜亚基尔 090514，厄瓜多尔

目录

1 引言 **5**

1.1 不确定集.5 1.2 应用领域：模糊、直觉模糊、中智与多属性 6 1.3 我们在本书中的贡献.7

2 预备知识 9

2.1 模糊集.9 2.2 直觉模糊集.10 2.3 中智集.11 2.4 粗糙集.13 2.5 软集.16

3 不确定集的动态综述与结果 21

3.1 不确定值多属性集.21 3.2 m-极多属性集.25 3.3 复多属性集（CPS）.34 3.4 超超多属性集.38 3.5 语言多属性集.41 3.6 q阶正交对多属性集.45 3.7 类型-n 多属性集.47 3.8 迭代多多属性集.51 3.9 区间值多属性集.55 3.10 多属性偏移集.59 3.11 多属性立方集.61 3.12 多属性软集、超软集与超超软集.65 3.13 犹豫多属性集.69 3.14 球形多属性集.76 3.15 T-球形多属性集.83 3.16 多属性粗糙集.85 3.17 多属性软粗糙集.89 3.18 线性丢番图多属性集.95 3.19 树多属性集.98 3.20 森林多属性集.101 3.21 多属性软专家集.104 3.22 动态多属性集.108 3.23 概率多属性集.110

3.24 三角形混杂集.115 3.25 梯形混杂集.119 3.26 非标准混杂集.123 3.27 精化混杂集.126 3.28 子集值混杂集.128 3.29 图像混杂集.130

4 模糊集、直觉模糊集、中智集、肿瘤集及其他集合的统一框架 1

37

4.1 Uncertain Set 137
4.2 Functional Set 138
4.3 Other Uncertain Sets and Future Works 140

附录（表格目录） **145**

第1章

引言

1.1 不确定集

Real-world phenomena often exhibit vagueness, partial truth, and incomplete information. To capture such uncertainty in a mathematically rigorous way, many generalized set-theoretic frameworks have been introduced, including Fuzzy Sets [1], Intuitionistic Fuzzy Sets [2], Neutrosophic Sets [3,4], Vague Sets [5], Hesitant Fuzzy Sets [6], Picture Fuzzy Sets [7], Quadripartitioned Neutrosophic Sets [8], PentaPartitioned Neutrosophic Sets [9], Plithogenic Sets [10], HyperFuzzy Sets [11], and HyperNeutrosophic Sets [12]. Applications of Fuzzy Sets and their extensions—discussed in later sections—have been widely explored in fields such as decision science, chemistry, control systems, and machine learning [13]. Depending on the nature of the application and the number of uncertainty parameters required to characterize the underlying phenomena, an appropriate class of generalized sets is selected to model the problem effectively.

在经典模糊设定中，论域 X 中的每个元素 x 都对应一个隶属度 $\mu(x) \in [0,1]$，用于表示 x 在多大程度上属于所讨论的模糊集 [1]。对于直觉模糊集，每个元素 x 由隶属函数和非隶属函数 μ，ν：$X \to [0,1]$ satisfying 的一对 $(\mu(x)\ \nu(x))$ 描述

$$0 \le \mu(x) + \nu(x) \le 1,$$

[2,14]。

中智集通过为每个元素 x赋予一个三元组，进一步细化了这一描述

$$(T(x), I(x), F(x)),$$

where $T(x)$, $I(x)$, and $F(x)$ denote, respectively, the degrees of truth, indeterminacy, and falsity, typically taking values in $[0,1]$. In contrast to the intuitionistic fuzzy case, these three values are not required to sum to 1, which allows one to encode incomplete, inconsistent, or even redundant information in a flexible way [14, 15]. [1] Neutrosophy highlights the central role of neutrality and indeterminacy, giving rise to neutrosophic set, logic, probability, statistics, measure, integral, and

[1]直觉模糊集忽略了不确定性的作用，而中智模糊算子赋予不确定性与真隶属度和非隶属度同等的重要性 [14, 16]。此外，众所周知，中智集是对直觉模糊集、不一致直觉模糊集（包括图像模糊集和三元模糊集）、毕达哥拉斯模糊集、球形模糊集以及 q 阶正交对模糊集的推广；类似地，中智化也推广了后悔理论、灰色系统理论和三支决策理论 [16]。

related formalisms. These frameworks now find broad practical applications across numerous scientific and applied domains [13, 17].

岩性集通过用属性值及其对应的隶属度表示每个元素，并引入不同属性值之间的矛盾（或差异）函数 [10, 18, 19]，进一步推广了这些概念。这种附加结构支持对异质且可能相互冲突的评价进行情境敏感的聚合，从而改进经典模糊模型、直觉模糊模型和中智模型（例如 [17, 20]）。为方便起见，表 1.1 总结了若干著名集合扩展中与每个元素相关的主要数据（本书统一了相关记号）。

表 1.1：具有代表性的集合扩展及其为每个元素存储的规范信息。

集合类型	与每个元素相关的规范数据
模糊集	隶属度映射 μ： $X \to [0,1]$。
直觉模糊集	隶属度 μ 和非隶属度 ν，以及 $\mu(x) + \nu(x) \leq 1$；间隙 $1 - \mu(x) - \nu(x)$表示犹豫。
中智集	三元组（T, I, F），其中 $T, I, F \in [0,1]$（真、 indeterminate、假） con- 视为相互独立的坐标。
普利真集	元组（$P, v, Pv,$ pdf, pCF），其中 pdf： $P \times Pv \to [0,1]^s$ 编码 s- 维隶属，且 pCF： $Pv \times Pv \to [0,1]^t$ 是一个对称的 $[0,1]^t$中的矛盾映射。

在普利真框架内，通过选择适当的维数 s （用于隶属）和 t （用于矛盾） [21–25]，可以恢复普利真模糊、普利真直觉模糊和普利真中智 模型。特别地，带有 $t = 1$ 的标量矛盾情形给出了经典模糊、直觉模糊和中智范式的自然推广；此外，若将矛盾函数 pCF 恒取为零，则可精确恢复相应的非普利真模型（参见 [17]）。这三种常用的普利真变体汇总于表1.2。

表 1.2：广义矛盾标量的变体（$t = 1$）及其经典极限。

变体	s	t	隶属度向量（语义）	pCF $\equiv 0$时的极限
广义模糊	1	1	$\mu \in [0,1]$ （单一隶属度）	经典模糊集
可立体直觉模糊	2	1	$(\mu,\ \nu) \in [0,1]^2$ 带有 $1 - \mu - \nu \geq 0$	直觉模糊模型
拟中智	3	1	$(T,\ I,\ F) \in [0,1]^3$（真度，不确定度，假度）	中智模型

1.2 应用领域：模糊、直觉模糊、中智与拟合

模糊集、直觉模糊集、中智集和拟合集凭借其深厚的数学内涵、实用性以及有效建模不确定性的能力，在现代科学中发挥着重要作用（参见 [13, 17]）。由于这些特性，它们已在众多领域得到广泛研究和应用，包括代数、图论、超图理论、概率论和决策。表 1.3、1.4 和 1.5 概述了模糊、直觉模糊、中智和拟合框架下经典概念的扩展。

From this perspective, it becomes clear that an exceptionally wide range of fields has explored both the applications and the underlying mathematical structures of Fuzzy, Intuitionistic Fuzzy, Neutrosophic, and Plithogenic Sets. These developments highlight not only the theoretical significance of such models but also their substantial contributions to real-world problem solving and practical decision-making.

表1.3：经典概念在模糊、直觉模糊、中智和多元结构框架中的平行扩展。

经典概念	模糊	直觉模糊	中智	杂合集
集 [26]	模糊集 [1]	直觉模糊集 [2]	中智集 [27]	多元集 [10]
关系	模糊关系 [28]	直觉模糊关系 [29]	中智关系 [30]	幂协调关系（参见 [31]）
函数／映射	模糊函数 [32]	直觉模糊函数 [33]	中智函数 [34,35]	多元发生函数 [36]
图 [37]	模糊图 [38]	直觉模糊图 [39]	中智图 [4,40]	多属性图 [17]
模糊超图 [41,42]	模糊直觉模糊超图 [43,44]	直觉模糊中智超图 [45]	中智超图 [46]	层理性超图 [47]
超超图-图 [48–50]	模糊超超图 [51,52]	直觉模糊超图 [53–55]	中智超图 [56,57]	等离子体超超图 [58–60]
矩阵／线性代数 [61]	模糊矩阵 [62] / 线性代数	直觉模糊矩阵 [63,64] /线性代数	中智矩阵 [63,65] /线性代数	犹豫元矩阵 [66,67] /线性代数
代数（群/环/.....）	模糊代数 [68] （例如，模糊群）	直觉模糊代数 [69,70]	中智代数 [71,72]	多元生成代数 [15,73]
超代数 [74]（超群 [75]/超环 [76]/.....）	模糊超代数 [77] （例如，模糊超群 [75]）	直觉模糊超代数 [78,79]	中智超代数 [80,81]	多元体超代数
拓扑学 [82]	模糊拓扑学 [83,84]	直觉模糊拓扑学 [85]	中智拓扑 [86,87]	多元胚拓扑 [88]
测度 / 概率-性 [89]	模糊概率 [90,91]	直觉模糊概率 [92,93]	中智概率 [94,95]	多元论概率 [96,97]
逻辑 [98]	模糊逻辑 [1]	直觉模糊逻辑 [2]	中智逻辑 [99]	多元生成逻辑 [100]
优化 [101] / 决策 [102]	模糊决策-制定 [103,104]	直觉模糊决策-制定 [105,106]	中智决策-制定 [107,108]	普利索金决策制定 [109]
聚类 / 分类数 [116]	模糊聚类 [110,111] 模糊数 [117]	直觉模糊聚类 [112,113] 直觉模糊数 [118]	中智聚类 [114,115] 中智数 [119]	多体聚类 多属性数 [120]

1.3 本书的贡献

A vast number of concepts have been proposed and studied within the frameworks of Fuzzy, Intuitionistic Fuzzy, Neutrosophic, and Plithogenic Sets, reflecting the importance of these theories and the diversity of their application domains (cf. [273]). Because of this richness, many ideas and structural patterns appear repeatedly across these four families of uncertainty-oriented models.

本书全面且大规模地综述了模糊集、直觉模糊集、中智集和多元生成集。我们旨在为读者提供一份条理清晰的现有进展概述，并通过这项综述激发新的见解、创新的概念拓展，以及这些理论在广泛学科领域中的进一步应用。

表1.4：第2部分——经典、模糊、直觉模糊、中智和胼胝体框架中的其他概念。

经典概念	模糊	直觉模糊	中智	多元性
度量空间 [121]	模糊度量空间 [122]	直觉模糊度量空间 [123]	中智度量空间 [124, 125]	混成度量空间 [126]
测度空间 [127]	模糊测度空间 [128]	直觉模糊测度空间 [129, 130]	中智测度空间 [131, 132]	矛盾测度空间
随机过程 [133, 134]	模糊随机过程 [135]	直觉模糊随机过程 [136]	中智随机过程 [137, 138]	多元生成随机过程 [139]
马尔可夫链 [140]	模糊马尔可夫链 [141]	直觉模糊马尔可夫链 [93]	中智马尔可夫链 [142–144]	多属性马尔可夫链 [145]
动力系统	模糊动力系统 [146, 147]	直觉模糊动力系统	中智动力系统 [148]	多元生成动力系统
微分方程 [149]	模糊微分方程 [150, 151]	直觉模糊微分方程 [152, 153]	中智微分方程 [154, 155]	普利西体微分方程
优化问题 [156]	模糊优化 [157]	直觉模糊优化 [158]	中智优化 [159]	多元论优化
控制系统 [160]	模糊控制系统 [161]	直觉模糊控制系统 [162]	中智控制系统 [163, 164]	多元生成控制系统 [165]
模糊自动机 [166]	模糊直觉模糊自动机 [167]	直觉模糊中智自动机 [168]	中智自动机 [169]	多元生成自动机 [170]
格 / 序 [171]	模糊格 [172]	直觉模糊格 [69]	中智格 [173]	偏智格 [174]
范畴 [175]	模糊范畴 [176]	直觉模糊范畴 [177]	中智范畴 [178]	胚元类别
时间序列 [179]	模糊时间序列 [180, 181]	直觉模糊Time丛书 [182, 183]	中智时间丛书 [184–186]	多元生成时间系列
本体论 [187]	模糊本体 [188]	直觉模糊本体 [189]	中智本体 [190, 191]	多元论本体论

表 1.5：第 3 部分——经典、模糊、直觉模糊、犹疑以及多元论框架中的进一步概念。

经典概念	模糊	直觉模糊	中智	混成
偏好关系 [192]	模糊偏好关系 [193, 194]	直觉模糊偏好关系 [195, 196]	中智偏好关系 [197–199]	多元体偏好关系
聚合算子 [200]	模糊聚合算子 [201]	直觉主义模糊聚合算子 [202, 203]	中智聚合算子 [204, 205]	矛盾学聚合算子 [18, 206]
熵／信息度量 [207]	模糊熵／信息测度 [208]	直觉主义模糊熵 / 信息测度 [209]	中智熵 / 信息测度 [210]	多生成体熵 / 信息度量 [211]
相似度度量 [212]	模糊相似度度量 [213]	直觉模糊相似度测度 [214]	中智相似性测度 [215, 216]	多元质相似性测度 [217]
博弈（博弈论） [218]	模糊博弈 [219]	直觉模糊模糊博弈 [220]	中智博弈 [221]	拟生成博弈
神经网络 [222]	模糊神经网络 [223, 224]	直觉模糊模糊神经网络 [225, 226]	中智神经网络 [227–230]	多元神经网络（参见 [231]）
回归模型 [232]	模糊回归模型 [233, 234]	直觉模糊模糊回归模型 [235, 236]	中智回归模型 [237–239]	多元论回归模型
数据库 [240]/知识库	模糊数据库 [241,242] /知识库 [243, 244]	直觉主义模糊数据库 [245] / 知识库	中智数据库 [246–249] / 知识库	多元逻辑数据库 / 知识库
基于规则的系统	模糊规则库系统 [250]	直觉主义模糊规则库系统 [251]	中智规则库系统 [252, 253]	多重生成基于规则的系统
拟阵 [254]	模糊拟阵 [255, 256]	直觉模糊模糊拟阵 [257]	中智拟阵 [258, 259]	矛盾学矛盾拟阵 [260]
机器学习 [261]	模糊机器学习模型 [262, 263]	直觉主义模糊机器学习模型 [264, 265]	中智机器学习模型 [266, 267]	多属性机器学习模型
超结构 [268, 269]	模糊超结构 [270]	直觉主义模糊超结构 [79]	中智超结构 [271, 272]	多元生成超结构 [174]

第2章

预备知识

本节汇集主要结果所需的背景概念与记号。除非另有明确说明，出现的每个集合均假定为有限集。

2.1 模糊集

模糊集为每个元素赋予 $[0,1]$ [1,38,274]中的单一隶属度。定义与具体例子如下。

定义 2.1.1 (模糊集). [1] 设 X 为非空集合。 X 上的模糊集 A 由其隶属函数刻画

$$\mu_A : X \to [0,1].$$

也就是说，模糊集 A 定义为

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\},$$

其中， $\mu_A(x)$表示元素 $x \in X$ 属于集合 A的程度。

下面给出一个关于这一概念的简要具体示例。

示例 2.1.2 （舒适的室温）。 设论域为以摄氏度表示的实数温度 $X = \mathbb{R}$ ，并通过三角形隶属函数定义模糊集 A =“舒适温度”

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 0, & t \le 16, \\ \dfrac{t-16}{22-16} = \dfrac{t-16}{6}, & 16 < t < 22, \\ \dfrac{28-t}{28-22} = \dfrac{28-t}{6}, & 22 \le t < 28, \\ 0, & t \ge 28. \end{cases}$$

具体取值（数值明确）：

$$\mu_A(18) = \frac{18-16}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.3333, \qquad \mu_A(22) = 1, \qquad \mu_A(27) = \frac{28-27}{6} = \frac{1}{6} \approx 0.1667.$$

Hence $t = 22^\circ$C is fully comfortable, 18°C is moderately comfortable, and 27°C is only slightly comfortable.

Example 2.1.3 (Premium customer by monthly spend)**.** Let $X = \mathbb{R}_{\geq 0}$ denote monthly customer spending (USD). Define the fuzzy set $P =$ "Premium customer" by the trapezoidal membership with breakpoints $a = 200$, $b = 400$, $c = 1200$, $d = 1600$:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} = \dfrac{x-200}{200}, & a < x < b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \dfrac{d-x}{d-c} = \dfrac{1600-x}{400}, & c < x < d, \\ 0, & x \geq d. \end{cases}$$

具体评估（分步进行）：

$$\mu_P(300) = \frac{300-200}{200} = \frac{100}{200} = 0.5,$$

$$\mu_P(900) = 1 \quad \text{(on the plateau)},$$

$$\mu_P(1400) = \frac{1600-1400}{400} = \frac{200}{400} = 0.5.$$

因此，消费 300 美元的客户在 0.5 的程度上属于优质客户，消费 900 美元的客户完全属于优质客户，而当消费额进入上部递减区间时，消费 1400 美元的客户的隶属度下降至 0.5。

2.2 直觉模糊集

直觉 模糊集为每个元素赋予隶属度和非隶属度 [2,275,276]. 定义及具体示例在下文给出。

定义 2.2.1（直觉模糊集）**.** [277] 设 E 为非空集合。 E 上的一个直觉模糊集 （IFS） A 由下式给出

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in E\},$$

其中

$$\mu_A, \nu_A : E \longrightarrow [0,1]$$

a分别为隶属函数与非隶属函数，并且对每个 $x \in E$ 都有 as

$$0 \ \leq \ \mu_A(x) + \nu_A(x) \ \leq \ 1.$$

该量

$$\pi_A(x) := 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

表示 x处的犹豫度。

在特殊情形 $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$对所有 $x \in E$成立时，即当 $\pi_A(x) = 0$ 对每个 x成立时，通常的模糊集概念得以恢复。

例 2.2.2（医学诊断：直觉模糊"高风险"类）。 设 $E = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$为患者集合，并考虑直觉模糊概念

$$A = \text{"patient is at high cardiovascular risk"}.$$

我们通过为每位患者给出隶属度 $\mu_A(p_i)$ 和非隶属度 $\nu_A(p_i)$ 来指定 A p_i，其中 $\mu_A(p_i) + \nu_A(p_i) \leq 1$。

例如，假设心脏科医生评估了 s

x	p_1	p_2	p_3	p_4
$\mu_A(x)$	0.85	0.60	0.30	0.10
$\nu_A(x)$	0.05	0.20	0.40	0.70

于是，对于每个 p_i，我们有

$$\mu_A(p_i) + \nu_A(p_i) \in \{0.90, 0.80, 0.70, 0.80\} \leq 1,$$

因此，这些值定义了一个直觉模糊集。这里， p_1 具有较高的隶属度和极低的非隶属度（显然属于高风险），而 p_4 具有较低的隶属度和较高的非隶属度（显然不属于高风险）。其余患者则代表中间状态、不确定的情况，具有非零的“犹豫裕度” $1 - \mu_A(p_i) - \nu_A(p_i)$。

例 2.2.3（客户满意度：直觉模糊“满意”类）。 设

$$E = \{\text{Service A}, \text{Service B}, \text{Service C}\}$$

表示某公司提供的三种在线服务。考虑直觉模糊概念 n

$$B = \text{“users are satisfied with the service”}.$$

直觉模糊集 B 定义为

$$B = \big\{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle : x \in E\big\},$$

其中， $\mu_B(x)$ 为满意度， $\nu_B(x)$ 为不满意度。

假设一项调查得到了以下汇总评估结果：

x	服务 A	服务 B	服务 C
$\mu_B(x)$	0.70	0.40	0.20
$\nu_B(x)$	0.10	0.30	0.60

Then

$$\mu_B(x) + \nu_B(x) = \begin{cases} 0.80 & \text{for Service A}, \\ 0.70 & \text{for Service B}, \\ 0.80 & \text{for Service C}, \end{cases}$$

它们全都属于 ≤ 1，因此 B 是一个直觉模糊集。服务 A 大多令人满意，服务 C 大多不令人满意，而服务 B 介于两者之间。对于每项服务，剩余部分 $1 - \mu_B(x) - \nu_B(x)$ 衡量了调查回答中的犹豫程度或信息缺失情况。

2.3 中智集

中智集为每个元素赋予三个相互独立的隶属度——真度（T）、不确定度（I）和假度（F）——每个值均取自 $[0, 1]$,，从而能够灵活地刻画不确定性 [4, 14, 15, 278]。中智集被广泛认为是模糊集和直觉模糊集的推广，并通过明确容纳各组成部分 I，提供了高度灵活的框架。下文将给出定义和具体示例。

定义 2.3.1（中智集）。 [27,279] 设 X 为一个非空集合。定义在 X 上的中智集 *(NS)A*由三个隶属函数刻画：

$$T_A : X \to [0, 1], \quad I_A : X \to [0, 1], \quad F_A : X \to [0, 1],$$

where for each $x \in X$, the values $T_A(x)$, $I_A(x)$, and $F_A(x)$ represent the degrees of truth, indeterminacy, and falsity, respectively. These values satisfy the following condition:

$$0 \leq T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \leq 3.$$

A brief 下面给出该概念的一个具体示例
。
示例 2.3.2 （存在相互矛盾证据时的医学诊断：“患者患有流感”）。 医学诊断是临床医生通过患者病史、检查、检测和推理，系统地识别疾病或病症的过程（参见 [280, 281]）。

设论域为 $X = \{\text{患者}\}$。对于 $x \in X$，假设我们观察到：发热 $T_C(x)$，体温为 ℃；抗原检测评分 $a(x) \in [0,1]$；咳嗽严重程度 $c(x) \in [0,1]$。

将集合 $A =$ “患有流感”的中智隶属度定义为

$$T_A(x) = \min\Big\{1,\ 0.5\,a(x)\ +\ 0.3\,\max\Big(0, \frac{T_C(x) - 37}{2}\Big)\ +\ 0.2\,c(x)\Big\},$$

$$F_A(x) = \min\Big\{1,\ 0.6\,(1 - a(x))\ +\ 0.4\,\max\Big(0, \frac{37 - T_C(x)}{2}\Big)\Big\},$$

$$I_A(x) = \Big(1 - |2a(x) - 1|\Big) \cdot \Big(1 - \min\{1,\ |T_C(x) - 37|/1.5\}\Big).$$

数值实例。取 $T_C = 38.2$, $a = 0.7$, $c = 0.6$，对应患者 x^*。则

$$\begin{aligned} T_A(x^*) &= \min\{1,\ 0.5 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot (38.2 - 37)/2 + 0.2 \cdot 0.6\} \\ &= \min\{1,\ 0.35 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.12\} \\ &= \min\{1,\ 0.35 + 0.18 + 0.12\} = \min\{1,\ 0.65\} = 0.65, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_A(x^*) &= \min\{1,\ 0.6 \cdot (1 - 0.7) + 0.4 \cdot \max(0, (37 - 38.2)/2)\} \\ &= \min\{1,\ 0.6 \cdot 0.3 + 0\} = \min\{1,\ 0.18\} = 0.18, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_A(x^*) &= \big(1 - |1.4 - 1|\big) \cdot \Big(1 - \min\{1,\ 1.2/1.5\}\Big) \\ &= (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.8) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12. \end{aligned}$$

因此 $(T_A,\ I_A,\ F_A)(x^*) =$ (0。65，0。12，0。18)，且 $T_A + I_A + F_A = 0.95 \le 3$ 符合要求。

例 2.3.3 （物流预计到达时间评估：“货物准时送达”）。 设有 $X = \{$ 批货物。对于 $x \in X$，令 $r(x) \in [0,1]$ 表示承运商的准时率，$\mu(x) > 0$ 表示预计剩余运输时间（天），$s(x) > 0$ 表示距离承诺日期的剩余宽限时间（天），$u(x) \in [0,1]$ 表示外部不确定性评分（例如天气/海关）。

将“准时送达” $B =$的隶属度定义为

$$\begin{aligned} g(x) &:= \frac{s(x)}{s(x) + \mu(x)} \in (0,1), \\ T_B(x) &= \min\{1,\ 0.6\,r(x) + 0.4\,g(x)\}, \\ F_B(x) &= \min\{1,\ 0.6\,(1 - r(x)) + 0.4\,(1 - g(x))\}, \\ I_B(x) &= u(x). \end{aligned}$$

数值实例。设 $r = 0.85$, $\mu = 1.8$, $s = 2.0$, $u = 0.25$，对应一批货物 $x^\dagger$。则

$$\begin{aligned} g(x^\dagger) &= \frac{2.0}{2.0 + 1.8} = \frac{2.0}{3.8} \approx 0.5263, \\ T_B(x^\dagger) &= \min\{1,\ 0.6 \cdot 0.85 + 0.4 \cdot 0.5263\} = \min\{1,\ 0.51 + 0.2105\} = 0.7205, \\ F_B(x^\dagger) &= \min\{1,\ 0.6 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot (1 - 0.5263)\} = \min\{1,\ 0.09 + 0.1895\} = 0.2795, \\ I_B(x^\dagger) &= 0.25. \end{aligned}$$

Thus $(T_B, I_B, F_B)(x^\dagger) = (0.7205,\ 0.25,\ 0.2795)$ and $T_B + I_B + F_B = 1.2500 \le 3$, satisfying the neutrosophic bounds.

2.4 粗糙集

A Rough Set approximates a subset using lower and upper bounds based on equivalence classes, capturing certainty and uncertainty in membership [282–285]. The definitions and concrete examples are presented below.

定义 2.4.1（粗糙集近似）。 [286] 设 X 是一个非空论域， $R \subseteq X \times X$ 是 X上的一个等价关系（或不可分辨关系）。等价关系 R 将 X 划分为互不相交的等价类，记为 $[x]_R$，其中 $x \in X$：

$$[x]_R = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}.$$

对于任意子集 $U \subseteq X$， U 的下近似 U 和上近似 $\overline{U}$ 定义如下：

1. 下近似 U：
$$\underline{U} = \{x \in X \mid [x]_R \subseteq U\}.$$
下近似 U 包含 X 中等价类完全包含于 U的所有元素。这些元素确定属于 U。

2. 上近似 U：
$$\overline{U} = \{x \in X \mid [x]_R \cap U \neq \emptyset\}.$$
上近似 U 包含 X 中所有与 U 有非空交集的等价类中的元素。这些元素可能属于 U。

有序对 $(\underline{U}, \overline{U})$ 构成 U 的粗糙集表示，满足以下关系：

$$\underline{U} \subseteq U \subseteq \overline{U}.$$

下面给出一个简短而具体的例子来说明这一概念。

例 2.4.2（利用粗糙近似进行电子邮件垃圾邮件过滤）。 电子邮件垃圾邮件过滤会使用规则和机器学习，自动检测、分类并将未经请求或恶意的邮件与合法邮件分开（参见 [287, 288]）。

考虑一个包含十封邮件的邮箱 $X = \{e_1, e_2, \ldots, e_{10}\}$。定义一个不可分辨（等价）关系 R，仅根据两个粗略特征对邮件分组：（发件人域名类别 $\in$ {已知、未知}；主题是否包含关键词“免费” $\in$ {是、否}）。由此得到以下 R-等价类（块）：

$$\begin{aligned}
&B_1 = \{e_1, e_2\} \text{（论域未知，主语中含有“free”）},\\
&B_2 = \{e_3, e_4, e_5\} \text{（论域未知，不含“free”）},\\
&B_3 = \{e_6, e_7\} \text{（论域已知，含有“free”）},\\
&B_4 = \{e_8, e_9, e_{10}\} \text{（论域已知，不含“free”）}.
\end{aligned}$$

Let the target concept be $U = \{\text{emails that are actually spam}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_7\}$. By definition of rough sets (with respect to R):

1) Lower approximation

$$\underline{U} = \{x \in X : [x]_R \subseteq U\} = B_1 \cup B_3 = \{e_1, e_2, e_6, e_7\}.$$

解释： $B_1 \subseteq U$ 和 $B_3 \subseteq U$；因此，这些块中的所有元素都确定是垃圾邮件。

2）上近似

$$\overline{U} = \{x \in X : [x]_R \cap U \neq \varnothing\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}.$$

解释： B_2 与 U 相交（它包含 e_3），因此 B_2 中的所有元素都可能是垃圾邮件。块 B_4 与 U不相交。

3）边界域、正域和负域

$$\mathrm{BND}_R(U) = \overline{U} \setminus \underline{U} = \{e_3, e_4, e_5\}, \qquad \mathrm{POS}_R(U) = \underline{U} = \{e_1, e_2, e_6, e_7\},$$
$$\mathrm{NEG}_R(U) = X \setminus \overline{U} = \{e_8, e_9, e_{10}\}.$$

4）数值指标（含明确数值）

$$|\underline{U}| = 4, \quad |\overline{U}| = 7, \quad |X| = 10.$$

Pawlak 近似精度：

$$\alpha_R(U) = \frac{|\underline{U}|}{|\overline{U}|} = \frac{4}{7} \approx 0.5714.$$

覆盖率（论域中的确定率）：

$$\kappa_R(U) = \frac{|\underline{U}|}{|X|} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

解释。 B_1 和 B_3 中的邮件根据这些粗略特征可确定 为垃圾邮件； B_2 中的邮件存在歧义（边界）； B_4 中的邮件可确定 为非垃圾邮件。

示例 2.4.3 （基于传感器不可分辨性的工厂质量控制）。 工厂质量控制会监测生产过程和产出，检查样品、检测缺陷，并确保产品符合安全和性能标准（参见 [289]）。

某工厂生产十二件产品 $X = \{p_1, \ldots, p_{12}\}$。使用两个粗略传感器：表面划痕标记$\in \{0, 1\}$ 和厚度分档 $\in \{$薄，厚$\}$。如果产品具有相同的有序对（划痕，厚度），则这些产品不可分辨。这会导出 R-等价类

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p_1, p_2, p_3\} \quad (1, \text{thin}),\\
E_2 &= \{p_4, p_5\} \quad (1, \text{thick}),\\
E_3 &= \{p_6, p_7, p_8\} \quad (0, \text{thin}),\\
E_4 &= \{p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\} \quad (0, \text{thick}).
\end{aligned}$$

设真实概念为 $U = \{$有缺陷的物品$\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_9\}$ （经详细的下游检查后得到）。

1) 下近似

$$\underline{U} = \{x \in X : [x]_R \subseteq U\} = E_1 = \{p_1, p_2, p_3\}.$$

说明： E_1 中的所有对象确实都有缺陷；其他块中则混杂着不同对象。

2）上近似

$$\overline{U} = \{x \in X : [x]_R \cap U \neq \varnothing\} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\}.$$

3）边界域、正域和负域

$$\mathrm{BND}_R(U) = \overline{U} \setminus \underline{U} = \{p_4, p_5, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\}, \qquad \mathrm{POS}_R(U) = \underline{U} = \{p_1, p_2, p_3\},$$

$$\mathrm{NEG}_R(U) = X \setminus \overline{U} = \{p_6, p_7, p_8\}.$$

4）数值指标（显式计算）

$$|\underline{U}| = 3, \quad |\overline{U}| = 9, \quad |X| = 12.$$

Pawlak 近似精度:

$$\alpha_R(U) = \frac{|\underline{U}|}{|\overline{U}|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \approx 0.3333.$$

覆盖率（论域中的确定率）：

$$\kappa_R(U) = \frac{|\underline{U}|}{|X|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

解释。 E_1 中的项目在粗略传感器下确定有缺陷； E_2 和 E_4 存在歧义（边界）； E_3 确定无缺陷。粗略近似仅利用粗略传感器信息，将可保证的情况（下近似）、仅有可能的情况（上近似）和不可能的情况（负域）区分开来。

表 2.1 列出了扩展粗糙集族。

表 2.1：扩展粗糙集族简要比较

概念	一句话概述	参考文献
超超粗糙集	粗糙 超关系／超 图上的近似（多路邻域）。	[290, 291]
超超超粗糙集	分层（超／超）幂集粗糙 模型 具有多层近似。	[292–295]
基于优势关系的粗糙集（DRSA）	由优势关系（偏好）诱导的近似 用于多准则决策分析的关系。	[296–298]
决策理论粗糙集（DTRS）	贝叶斯风险阈值产生三支决策（接受/暂缓/拒绝）。 受/暂缓/拒绝）。	[299–301]
粗多重集	扩展至多重集的粗近似，其元素 具有多重性。	[302, 303]
复合粗集	统一 粗糙 结合多个 关系的模型 ／近似算子。	[304–306]

2.5 软集

软集是一种用于处理不确定性的参数化子集族，由 Molodtsov 于 1999 年为决策问题提出 [307,308]。以下将介绍其定义和具体示例。

定义 2.5.1 (软集 [308]**)。** 设 U 为一个论域集， E 为参数集。设 $A \subseteq E$，并用 $\mathcal{P}(U)$ 表示 U的幂集。若一对 (F, A) 满足以下条件，则称其为 U上的一个软集：

$$F : A \to \mathcal{P}(U).$$

对于每个参数 $\epsilon \in A$，集合 $F(\epsilon)$ 称为软集 (F, A) 的 ϵ-近似。换言之， U 上的软集是 U的一个参数化子集族。

下面给出一个关于这一概念的简短具体示例。

例 2.5.2 (公寓选择（东京租房案例）**)。** 公寓选择根据地理位置、租金、面积、配套设施，以及是否适合居民和其生活方式等标准，对多个租房选项进行评估（参见 [309]）。

设论域 $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 表示四套可供选择的公寓。设参数集为

$$E = \{\text{靠近_车站、允许_宠物、低于_¥120，000、两居室_或_更大、建于_之后_2015}\},$$

并取 $A = E$。定义论域 U 上的软集 (F, A)：针对每个参数 $\epsilon \in A$，列出满足条件 ϵ 的公寓子集$F(\epsilon) \subseteq U$：

$$\begin{aligned} F(\text{near_station}) &= \{A_1, A_3, A_4\}, \\ F(\text{pet_friendly}) &= \{A_2, A_3\}, \\ F(\text{under_¥120,000}) &= \{A_1, A_2\}, \\ F(\text{twoLDK_or_more}) &= \{A_1, A_4\}, \\ F(\text{built_after_2015}) &= \{A_3, A_4\}. \end{aligned}$$

解释。该映射针对每项实际需求，编码了符合该需求的公寓。对于要求“靠近_车站”且“允许_宠物”的租客，可行的候选公寓为

$$F(\text{near_station}) \cap F(\text{pet_friendly}) = \{A_3\}.$$

例 2.5.3 （在实际偏好下购买笔记本电脑）。笔记本电脑的选购是在性能、便携性、电池续航、预算、品牌支持、未来需求和升级空间之间进行权衡（参见 [310]）。

设论域 $U = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ 表示正在考虑的四款笔记本电脑型号。设参数集为

$$E = \{\text{轻量（}\leq 1.2\text{ 千克），长_续航（}\geq 10\text{ 小时），预算（}\leq ¥100,000\text{），16GB内存，14英寸屏幕}\},$$

并取 $A = E$。定义 U 上的软集 (F, A)，其中久久热

$$\begin{aligned} F(\text{lightweight}) &= \{L_1, L_3\}, \\ F(\text{long_battery}) &= \{L_1, L_2, L_4\}, \\ F(\text{budget}) &= \{L_2, L_3\}, \\ F(\text{ram16GB}) &= \{L_1, L_4\}, \\ F(\text{screen14in}) &= \{L_1, L_3, L_4\}. \end{aligned}$$

解读。每个参数都反映了用户的一项偏好，而 $F(\epsilon)$ 列出了符合该偏好的笔记本电脑。坚持选择“budget”和“screen14in”的买家会筛选出

$$F(\text{budget}) \cap F(\text{screen14in}) = \{L_3\}.$$

如果买家也偏好“长_续航”，那么

$$F(\text{budget}) \cap F(\text{screen14in}) \cap F(\text{long_battery}) = \varnothing,$$

这表明没有任何单一项目能同时满足全部三项偏好，因此需要做出取舍。

软集的相关概念包括超软集 [311,312], 不确定软集 [313–315], 超超软集 [316,317],树软集 [318–321],森林软集 [322–325],双极软集 [326,327],和双框架软集 [328,329], ，这些概念都从不同方向扩展了经典软集框架。

超软集和超超软集的定义如下。请注意，表 2.2 简明比较了软集、超软集和超超软集。

表 2.2：软集、超软集和超超软集的简明比较。此处 $\mathcal{P}(U)$ 表示 U 的幂集。

	软集	**超软集**	**超超软集**
论域	U	U	U
参数域	$A \subseteq E$ （单一属性）	$\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_m$ （固定 m 属性）	$\mathcal{C} = \mathcal{P}(A_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(A_n)$ （子集值 per at-贡品）
输入（查询键）	$\epsilon \in A$	$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ 与 $\gamma_i \in \mathcal{A}_i$	$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 与 $\alpha_i \subseteq A_i$
映射	$F\colon A \to \mathcal{P}(U)$	$G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(U)$	$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(U)$
粒度	单个参数值	精确的 m 元组值	每个属性的允许值集（“任意一个即可”）
表达能力	低（一次一个属性）	中等（多属性合取）	High （多属性采用集合级选择）
约化	—	m=1 $\Rightarrow$ 软集	所有 α_i 单点集 $\Rightarrow$ 超-软集； n=1 以及单点-集 $\Rightarrow$ 软
典型查询	“红色=汽车”	“配备（CPU = i7，内存 = 16，固态硬盘 = 512）”	“旅行 with 季节∈ {春季，秋季}, 预算∈ {低，中}, 类型∈ {个人，商务}”

定义 2.5.4（超软集）。 [312] 设 U 为一个论域，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ 为属性域。定义 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_m$ 为这些域的笛卡尔积。关于 U 的超软集是一个有序对 $(G, \mathcal{C})$，其中 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}(U)$。超软集表示为：

$$(G, \mathcal{C}) = \{(\gamma, G(\gamma)) \mid \gamma \in \mathcal{C}, G(\gamma) \in \mathcal{P}(U)\}.$$

对于一个 m元组 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \in \mathcal{C}$，其中 $\gamma_i \in \mathcal{A}_i$ 对 $i = 1, 2, \ldots, m$ 成立， $G(\gamma)$表示与属性值组合 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$相对应的 U 子集。

示例 2.5.5（超软集——根据多属性配置选择笔记本电脑）。 设笔记本电脑的论域为

$$U = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\}.$$

为每个项目分配其（CPU、RAM（GB）、SSD（GB）：

$$L_1 : (\text{i5}, 8, 256), \quad L_2 : (\text{i5}, 16, 512), \quad L_3 : (\text{i7}, 8, 512),$$
$$L_4 : (\text{i7}, 16, 256), \quad L_5 : (\text{i7}, 16, 512), \quad L_6 : (\text{i5}, 8, 512).$$

设属性域为

$$\mathcal{A}_1 = \{\text{i5}, \text{i7}\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{8, 16\}, \quad \mathcal{A}_3 = \{256, 512\},$$

并令 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$。定义超软映射 $G : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(U)$ 如下：

$$G(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \{\, L \in U : \ (\mathrm{CPU}(L), \mathrm{RAM}(L), \mathrm{SSD}(L)) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \,\}.$$

那么，具体而言，

$$\begin{aligned} G(\text{i7}, 16, 512) &= \{L_5\}, \\ G(\text{i5}, 8, 512) &= \{L_6\}, \\ G(\text{i5}, 16, 256) &= \varnothing \quad (\text{no laptop matches}). \end{aligned}$$

该超软集刻画了现实中的查询“具有给定 CPU–RAM–SSD 三元组的笔记本电脑”，并准确返回 U 中满足所选属性组合的产品子集。

定义 2.5.6（超超软集）. [330] 设 U 为一个全集，$\mathcal{P}(U)$ 表示 U 的幂集。考虑 n 个互不相同的属性 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，其中 $n \geq 1$。每个属性 a_i 都关联一个属性值集合 A_i，且对所有 $i \neq j$，均满足性质 $A_i \cap A_j = \emptyset$。

对每个 $i = 1$，定义 $\mathcal{P}(A_i)$ 为 A_i 的幂集, 2,..., n。那么，属性值幂集的笛卡尔积为：

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) \times \cdots \times \mathcal{P}(A_n).$$

定义在 U 上的超超软集是一个二元组（$F, \mathcal{C}$），其中：

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(U),$$

并且 F 将每个元素（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$）$\in \mathcal{C}$（其中 $\alpha_i \in \mathcal{P}$（A_i））映射到子集 F（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$）$\subseteq U$。在数学上，超超软集表示为：

$$(F, \mathcal{C}) = \{(\gamma, F(\gamma)) \mid \gamma \in \mathcal{C}, F(\gamma) \in \mathcal{P}(U)\}.$$

这里，$\gamma =$（$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$）$\in \mathcal{C}$，其中对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，$\alpha_i \in \mathcal{P}$（A_i），而 F（γ）对应于由组合属性值 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 定义的 U 子集。

例 2.5.7（超超软集——通过子集值准则筛选旅行套餐）。旅行套餐将交通、住宿、活动和服务整合为一项预先安排的综合产品，以一个统一的、通常经过折扣的总价提供（参见 [331]）。

设旅游套餐的论域为

$$U = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}.$$

属性值集合：

$A_1 = \{$春季, 夏季, 秋季, 冬季$\}$, $A_2 = \{$低, 中,高$\}$, $A_3 = \{$单人, 家庭, 商务$\}$.

每个套餐在每个属性上取一个具体值：

p_1：（夏季, 高, 家庭） p_2：（冬季, 中,家庭）,p_3：（秋季, 中, 单人） p_4：（秋季, 高,商务） p_5：（春季,低,单人）。

构建超图软域

$$\mathcal{C} = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) \times \mathcal{P}(A_3),$$

并定义 F： $\mathcal{C} \to \mathcal{P}(U)$，对于 $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，有：

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{\, p \in U : \ \mathrm{Season}(p) \in \alpha_1,\ \mathrm{Budget}(p) \in \alpha_2,\ \mathrm{Type}(p) \in \alpha_3 \,\}.$$

具有子集值条件的具体查询：

$\alpha_1 = \{$夏季、秋季$\}$，$\alpha_2 = \{$高$\}$，$\alpha_3 = \{$家庭、商务$\}$：$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{p_1, p_4\}$；$\alpha_1 = \{$冬季$\}$，$\alpha_2 = \{$中$\}$，$\alpha_3 = \{$家庭$\}$：$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{p_2\}$；$\alpha_1 = \{$春季、秋季$\}$，$\alpha_2 = \{$低、中$\}$，$\alpha_3 = \{$独自旅行$\}$：$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \{p_3, p_5\}$.

允许查询域中的子集 $\alpha_i \subseteq A_i$，即可实现实用筛选，例如“这些季节中的任意一个”“预算不超过中等”和“独自旅行或商务出行者”，从而筛选出 U 中符合条件的套餐子集。

第 3 章

不确定集的动态综述与研究成果

本章综述了多元集、模糊集、直觉模糊集和中智集之间的关系。多元集通过纳入基于属性的隶属度和矛盾管理，被认为是对模糊集、直觉模糊集和中智集的推广。表 3.1 和 3.2 概述了本章讨论的不确定集类别。

3.1 不确定值的多元集

多元集是一种数学框架，旨在整合多值隶属度和矛盾，因此特别适用于处理复杂的决策场景 [10,18]。许多研究探讨了多元集的性质和应用，相关成果见 [332–335]。

定义 3.1.1（多元集）。[18, 100] 设 S 为一个全集，且 $P \subseteq S$。多元集 PS 定义如下：

$$PS = (P, v, Pv, pdf, pCF)$$

其中：

- v 是一个属性。
- Pv 是属性 v 的可能取值范围。
- pdf： $P \times Pv \to [0,1]^s$ 是 隶属度函数（*DAF*） [1]
- pCF： $Pv \times Pv \to [0,1]^t$ 是矛盾程度函数（*DCF*）。

[1]需要注意的是，不同论文对隶属度函数的定义各不相同。有些研究使用幂集来定义这一概念，而另一些研究则通过避免使用幂集 [336] 来简化定义。作者始终在不使用幂集的情况下定义经典哲学集。

表3.1：本章中不确定集族概览（第一部分）。

不确定集族	简要概述
多源集	基于属性、带有隶属度的框架 以及一种矛盾函数，统一了模糊集、直觉 主义集、 中智集及相关集合。
m极多元集	将每个属性值拆分为 m 个语义极（例如 正极／中性极／负极），并在极层面定义矛 盾关系。
复值矛盾集	使用复数值隶属度； 模 衡量 强度，辐角编码了诸如
超超杂多集	time, 语境 , 或方向。 超结构与超超结构上的 超对象和超超对象， 其超超元素具有嵌套隶属度
普利斯托根语言集	适用于高阶情形。 采用语言标签（“低”、“中”、“高”， 等）作为取值，并结合普利斯托根聚合与标签- 级矛盾。
q阶正交对普利斯托根集	结合真值/假值上的q阶正交对界限 具有本体论属性和矛盾敏感型 算子。
类型-n哲学集	由 n 索引的族，用于组织多个隶属度 分量并汇集多值的哲学集 变体。
迭代多重偏生集	用于分层或分阶段决策与评估过程的 迭代式多层偏生构造。
区间值偏生集	表示隶属度 by 区间以进行刻画 测量不精确性以及不同 来源或专家之间的意见分歧。
多元论偏集	允许过度隶属和不足隶属，以此建模悖 论的 ， 不一致 ， 或以多元逻辑的方式处理极端信息 矛盾学方式。
多元逻辑立方集	将清晰分量与区间值分量结合 ，两者均以多元逻辑方式处理，用于表示双层不确 定性。
多元生成软集／超软集／超级超软集	类软参数、超参数和超级超 参数族，并配备多元生成度 及矛盾度。
犹豫多元生成集	为.....分配一组有限的合理多元生成度 每个元素–属性对，明确地对犹豫进行建模， 犹豫。
球形多属性集	在多属性结构中，对正向、中性 和负向分量采用球形类型的约束， 结构。

对于所有 $a,\ b \in Pv$，这些函数满足以下公理：

1. 矛盾函数的自反性:

$$pCF(a,a) = 0$$

2. 矛盾函数的对称性:

$$pCF(a,b) = pCF(b,a)$$

我们现在给出该概念的具体例子。

例 3.1.2（矛盾标准下的公寓租赁）。 公寓租赁是一种住房安排，租户定期支付租金，以居住为目的使用房东拥有的住宅单元（参见 [337]）。

表3.2：本章中不确定集族概览（第二部分）。

不确定集族	简要概述
T-球形幂智集	采用幂和界的T-球形（或q-层级球形）细化关于真、不定与假。
多属性粗糙集	由多属性隶属-构造的粗糙下/上近似属度与矛盾感知相似度。
树型多属性集	树状结构论域或属性上的多属性集，其中聚-聚合遵循树形层级结构。
森林多元生成集	将树形多元生成集扩展到一个多元生成模型中的多个互不相交的层级（构成一片森）在一个智元模型中。
多元生成软专家集	软专家系统，其中每位专家的意见都构成一个多元生成属性逐项矛盾的软集。
动态多元集	依赖时间或状态的多元度及矛盾，随场景或时间步不断演在不同场景或时间步之间进行关联。
概率多元集	融合概率 带有 肇始度或属性分布，混合概率不确定性与肇始不确定性。
非标准肇始集	使用超实数、 含无穷小量的近-$[0,1]$ 隶属度向量在本体矛盾下的过度/不足隶属度。
线性丢番图本体集	受线性丢番图关系约束的本体隶属度，作用于参数，同时保留基于属性的矛盾性。
子集值本体集	为每个项目—属性对指定一个隶属向量子集，包含于$[0,1]^s$，通过矛盾加权的多属性算子进行聚合。
三角形多属性集	三角形模糊／直觉／中智的多属性扩展具有三角形隶属形状的数。
梯形多属性集	梯形模糊、直觉模糊和中智-的多属性扩展使用梯形轮廓的 trosophic 数。
精细化普利索真集	将各分量（例如真、不确定、假）拆分为若干子分量，并置于同一个普利索真对象之内。
图像普利索真集	具有接受度、中立度的图像模糊集的普利索真对应形式，矛盾情况下的拒绝与否定。

设论域为三个候选公寓 $P = \{A_1, A_2, A_3\}$。考虑一个属性 v =租赁标准，其取值集为_

$$Pv = \{\text{low_rent},\ \text{near_station},\ \text{large_space}\}.$$

我们采用具有 $s = 3$ 个分量（真值 T、不确定性 I、假值 F）以及标量矛盾度函数（DCF） pCF 的本体生成隶属度函数（ DAF ）： $Pv \times Pv \to [0,1]$ $(t = 1)$。矛盾矩阵（对称且对角线元素为零）为

pCF	低租金_	靠近_车站	大_空间
low_rent	0	0.30	0.70
near_车站	0.30	0	0.50
大_空间	0.70	0.50	0

以及 DAF pdf： $P \times Pv \to [0,1]^3$（条目为（T， I， F））由以下内容指定

$$\begin{aligned}
pdf(A_1, \text{low_rent}) &= (0.85, 0.05, 0.10),\\
pdf(A_1, \text{near_station}) &= (0.90, 0.05, 0.10),\\
pdf(A_1, \text{large_space}) &= (0.40, 0.20, 0.60),\\
pdf(A_2, \text{low_rent}) &= (0.60, 0.15, 0.35),\\
pdf(A_2, \text{near_station}) &= (0.50, 0.20, 0.50),\\
pdf(A_2, \text{large_space}) &= (0.75, 0.10, 0.25),\\
pdf(A_3, \text{low_rent}) &= (0.45, 0.25, 0.55),\\
pdf(A_3, \text{near_station}) &= (0.80, 0.10, 0.20),\\
pdf(A_3, \text{large_space}) &= (0.55, 0.15, 0.45).
\end{aligned}$$

解释。决策者可以选择一个主导值（例如，靠近_站）；在多元聚合过程中，矛盾度量了其他值与主导值之间的冲突程度。

例 3.1.3（个性化饮食规划（临床场景））。 个性化饮食规划利用数据驱动的持续调整，根据个人的健康目标、偏好、限制条件和生活方式，为其量身定制营养方案（参见 [338, 339]）。

设论域包含三位患者 $P = \{p_1, p_2, p_3\}$。考虑属性 $v =$ 饮食_风格，其取值集为

$$Pv = \{\text{ketogenic},\ \text{low_fat},\ \text{vegetarian}\}.$$

使用以下矩阵表示的标量 DCF：

pCF	生酮	低_脂肪	素食
生酮	0	0.60	0.90
low_fat	0.60	0	0.20
素食主义者	0.90	0.20	0

并将 DAF（三元组 (T, I, F)）定义为

$$\begin{aligned}
pdf(p_1, \text{ketogenic}) &= (0.70, 0.10, 0.30),\\
pdf(p_1, \text{low_fat}) &= (0.40, 0.20, 0.60),\\
pdf(p_1, \text{vegetarian}) &= (0.30, 0.20, 0.70),\\
pdf(p_2, \text{ketogenic}) &= (0.20, 0.20, 0.80),\\
pdf(p_2, \text{low_fat}) &= (0.65, 0.15, 0.35),\\
pdf(p_2, \text{vegetarian}) &= (0.55, 0.15, 0.45),\\
pdf(p_3, \text{ketogenic}) &= (0.50, 0.25, 0.50),\\
pdf(p_3, \text{low_fat}) &= (0.45, 0.20, 0.55),\\
pdf(p_3, \text{vegetarian}) &= (0.75, 0.10, 0.25).
\end{aligned}$$

解释。强烈的矛盾（例如，生酮饮食与素食主义在 0.90 处的矛盾）反映了很少共存的饮食原则；(T, I, F) 条目编码了每位患者在医疗、生活方式和伦理约束下与每种风格的契合程度。

示例 3.1.4（可持续汽车选择（动力系统权衡））。 可持续的汽车选择优先考虑低排放、高燃油效率、全生命周期影响和伦理因素，同时仍要满足日常出行需求（参见 [340]）。设论域为三辆汽车 $P = \{C_1, C_2, C_3\}$。考虑属性$v =$动力系统，其取值集合为

$$Pv = \{\text{electric},\ \text{hybrid},\ \text{gasoline}\}.$$

取标量 DCF

pCF	电动	混合动力	汽油
电动	0	0.30	1.00
混合动力	0.30	0	0.60
汽油	1.00	0.60	0

以及 DAF（三元组（T, I, F））作为

$$\begin{aligned}
pdf(C_1, \text{electric}) &= (0.90, 0.05, 0.10),\\
pdf(C_1, \text{hybrid}) &= (0.70, 0.10, 0.30),\\
pdf(C_1, \text{gasoline}) &= (0.10, 0.20, 0.90),\\
pdf(C_2, \text{electric}) &= (0.40, 0.20, 0.60),\\
pdf(C_2, \text{hybrid}) &= (0.80, 0.10, 0.20),\\
pdf(C_2, \text{gasoline}) &= (0.35, 0.20, 0.65),\\
pdf(C_3, \text{electric}) &= (0.20, 0.15, 0.80),\\
pdf(C_3, \text{hybrid}) &= (0.50, 0.20, 0.50),\\
pdf(C_3, \text{gasoline}) &= (0.85, 0.05, 0.15).
\end{aligned}$$

解读。矛盾关系 pCF(电动、汽油) $= 1.00$ 代表在环境方面完全对立的价值（兼容性为零），而电动与混合动力之间的矛盾较弱，为 0.30。向量 (T, I, F) 表示在这些价值相互作用下，每辆汽车属于“可持续选择”塑性集合的程度。

表 3.3 和表 3.4 展示了可通过塑性集合框架进行推广的集合示例（参见 [341]）。科学界正在持续定义并研究各种处理不确定性的概念。

表3.3：按分量数量划分的Plithogenic集族一览 s。

s	t	代表性类型
1	0	模糊集 [1,44]；N-集 [342]；阴影集 [343–345]
2	0	直觉模糊集 [2,346]；Vague集 [5,347]；双极模糊集 [348]；Intuitionistic证据集 [349–351]；可变模糊集 [352–354]；弗协调模糊集 [355,356]；双模糊集 [357,358]
3	0	中智集[a] [278,279]；犹豫模糊集 [6,359]；三极模糊集 [360–362]；三支模糊集 [363,364]；图片模糊集 [7,365]；球形模糊集 [366,367]；不一致直觉模糊集 [368,369]；三元模糊集 [334,370]；中智模糊集 [371,372]；（克林三值逻辑 [373,374]；）中智Vague集 [375,376]
4	0	四分区中智集 [8,377]；双值中智集 [378,379]；对偶犹豫模糊集 [380,381]；歧义集[b] [382–384]；局部-中智集 [385]；支撑中智集 [386]；（贝尔纳普四值逻辑 [387,388]；）图里亚姆中智集[c] [389–392]
5	0	五分区中智集 [393–395]；三值中智集 [396–398]
6	0	六分中智集；四值中智集 [397,399]
7	0	七分中智集；五值中智集 [397,400,401]
8	0	八分中智集 [402]
9	0	九分中智集 [402]
n	0	n-精炼模糊集 [403,404]；（n值（卢卡西维茨）逻辑 [405]；）多值（模糊）集 [406]；多模糊集 [407]
$2n$	0	n-精炼直觉模糊集 [404]；多直觉模糊集 [407]
$3n$	0	n-精炼中智集 [404]；多中智集 [407,408]
1	1	多属性模糊集 [23,409,410]
2	1	多属性直觉模糊集 [411]
3	1	多属性中智集 [24,25,412]
4	1	多属性四分区中智集
5	1	多属性五分区中智集
6	1	多属性六分区中智集
7	1	多属性七分区中智集
8	1	多属性八分区中智集
9	1	非分区单值中智集
1	2	双值多元生成模糊集 [413]
2	2	双值多元生成直觉模糊集 [413]
3	2	双值多元生成中智集 [413]

(a) 众所周知，中智集是直觉模糊集、不一致直觉模糊集（包括图像模糊集和三元模糊集）、毕达哥拉斯模糊集、球形模糊集以及q阶正交对模糊集的推广；同样，中智化也是后悔理论、灰色系统理论和三支决策理论的推广 [16]。 (b) 已知歧义集是四分区中智集 [8,377] 和双值中智集 [384]的子类。 (c) 已知图里亚姆中智集是现有四分区中智集 [414]的子类。

3.2 m 极 Plithogenic 集

m-极（多极）结构被用于多种情境（例如 [415]），也可应用于模糊、中智和普利索真框架。m-极普利索真集对具有m个对立极、隶属向量以及由值/极矛盾控制的聚合的元素进行建模，以处理复杂决策情境。 m-极普利索真集推广了多极模糊集[416, 417], 多极直觉模糊集 [418, 419], 以及多极中智集[420–423]。

表3.4：按矛盾维度概述多元集 t 在矛盾度函数 pCF中的情况： $Pv \times Pv \to [0,1]^t$。

t	矛盾度函数空间 $[0,1]^t$	pCF的解释	约简 / 包含-ment	典型用途或示例
0	$[0,1]^0 \equiv \{\mathbf{0}\}$	无矛盾建模——（或恒零 DCF）。聚合仅依赖于程度依附函数（DAF） pdf。	恢复经典的多值族：模糊集（s=1），直觉主义-的/模糊（s=2），中智-学（s=3）等。	当属性值并不存在有意义的冲-突时；例如，对项目进行排序仅使用性能分数而不考虑权衡惩罚。
1	$[0,1]$	单一标量矛盾-每对数值一项；通常用于衰减-相对于某个 pdf 主导值或情境。	The “经典”位形集。Op-运算 权重/惩罚 ize 隶属度 via（$1 - pCF$）或相关方案。	One 主要的 张力轴（例如，笔记本电脑选择：轻量级 vs 性能；采购：价格与质量）。
2	$[0,1]^2$	二维 con-矛盾 向量（例如，结构与情境冲突）。 需要一个向量到标量归约器（加权 sum, or 字典序 范数，规则）在聚合过程中。	双值 plithogenic 变体；表达能力严格更强比 t=1 更强，并通过 t=1投影/忽略一个分量而归约为	建模 双重对抗关系 (例如, 治疗规划：功效 vs 副作用 and 成本；网络：延迟与能耗）。

定义 3.2.1 （m-极普利索真集）。 设 S 为一个论域， $P \subseteq S$ 为感兴趣的域。设 v 为具有值集 P_v的（固定）属性。设 $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ 为 m 个极的集合（例如， $m = 2$ 表示“正/负”， $m = 3$ 表示“正/中/负”）。固定整数 $s \geq 1$ 和 $t \geq 0$。

关于 v 的 P 上的一个 m-极多元生成集（简称 mPPS）是一个元组

$$\mathrm{mPPS} := \big(P,\ v,\ P_v,\ \Pi,\ \mathrm{pdf}^{\Pi},\ \mathrm{pCF}_v,\ \mathrm{pCF}_{\Pi},\ \mathrm{Agg}\big),$$

其中

- 该 m-极多元生成隶属度函数

  $$\mathrm{pdf}^{\Pi}:\ P \times P_v \longrightarrow \big([0,1]^s\big)^m$$

  将一个 s-分量向量的 m 元组赋予每一对 $(x, \alpha) \in P \times P_v$，

  $$\mathrm{pdf}^{\Pi}(x,\alpha) \ = \ \big(\mu_1(x,\alpha), \ldots, \mu_m(x,\alpha)\big), \qquad \mu_r(x,\alpha) \in [0,1]^s \ (r = 1, \ldots, m),$$

  其中每个 $\mu_r(x, \alpha)$ 对值 α 在极点 π_r 处的 s 个多元生成分量进行编码（例如， $s = 1$ 模糊等级、$s = 2$直觉模糊对、 $s = 3$ 中智三元组）；

- pCF_v： $P_v \times P_v \to [0,1]^t$ 是值层面的矛盾度函数（*DCF*），具有对称性和自反性：

  $$\mathrm{pCF}_v(\alpha,\alpha) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{pCF}_v(\alpha,\beta) = \mathrm{pCF}_v(\beta,\alpha) \quad (\forall\, \alpha, \beta \in P_v);$$

- pCF_{Π}： $\Pi \times \Pi \to [0,1]^t$ 是极点层级的 *DCF*，同样具有对称性和自反性：

  $$\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi,\pi) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi,\pi') = \mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi',\pi) \quad (\forall\, \pi, \pi' \in \Pi);$$

- Agg 是一个固定的矛盾感知约简算子，对于任何选定的主导上下文$(d,\ \delta) \in P_v \times \Pi$，都会生成一个由 s 个分量构成的聚合度

$$\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(x,\alpha) \ :=\ \mathrm{Agg}\Big(\mathrm{pdf}^{\Pi}(x,\alpha),\ \mathrm{pCF}_v(\alpha,d),\ \big(\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_r,\delta)\big)_{r=1}^{m}\Big) \in [0,1]^s.$$

一种规范的选择是基于兼容性权重的分量加权平均

$$w_r(\alpha \mid d,\delta) \ :=\ \big(1-\Phi_v(\mathrm{pCF}_v(\alpha,d))\big)\big(1-\Phi_{\Pi}(\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_r,\delta))\big),$$

其中 $\Phi_v, \Phi_{\Pi}:\ [0,1]^t \to [0,1]$ 是对 t 维矛盾向量进行的单调融合。记

$$\mu_r(x,\alpha) = \big(\mu_{r,1}(x,\alpha),\dots,\mu_{r,s}(x,\alpha)\big),$$

则聚合后的隶属度按分量表示为

$$\mathrm{pdf}_j^{(d,\delta)}(x,\alpha) := \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{m} w_r(\alpha \mid d,\delta)\,\mu_{r,j}(x,\alpha)}{\displaystyle\sum_{r=1}^{m} w_r(\alpha \mid d,\delta)}, \qquad j=1,\dots,s, \tag{3.1}$$

通常约定 0/0 := 0。

三元组 $\big(\mathrm{pdf}^{\Pi}, \mathrm{pCF}_v, \mathrm{pCF}_{\Pi}\big)$ 描述了如何在多个极点上评估每个元素，以及矛盾如何同时作用于属性值之间和极点之间。算子 Agg 指定主导情境（d,δ）如何衰减或增强极性分量，以便在需要时得到单个 s 分量的多元生成隶属度。

注 3.2.2. 若 $s=1$，则 $\mathrm{pdf}^{\Pi}(x,\alpha) \in ([0,1]^1)^m \cong [0,1]^m$，且每个极点都携带单一的模糊等级分量。对于 $s=2$ 和 $s=3$，分别可在同一多元生成框架下得到直觉主义型和中智型 m-极结构。

表 3.5 和表 3.6 展示了多极多元生成集框架下可推广的一些概念。

现在我们通过具体示例来介绍这一概念。

例 3.2.3（多极评价下的招聘（$m=3$））。设候选人全集为$P=\{c_1,c_2,c_3\}$。考虑属性 $v=$经验_水平，其取值集合为

$$P_v = \{\text{junior, mid, senior}\}.$$

取极点集

$$\Pi = \{\pi_1,\pi_2,\pi_3\} = \{\text{pro, neutral, contra}\}$$

使得 $m=3$。我们研究特殊情形 $s=1$，因此将 $([0,1]^1)^3 \cong [0,1]^3$ 视为同一对象，并将每个隶属向量表示为 $[0,1]$ 中的一个实数三元组。

值层 DCF pCF_v：$P_v \times P_v \to [0,1]$ 和极点层 DCF pCF_{Π}：$\Pi \times \Pi \to [0,1]$ 可表示为以下矩阵形式：

pCF_v	初级	mid	高级
初级	0	0.30	0.80
mid	0.30	0	0.40
高级	0.80	0.40	0

表 3.5： $m \in \{1,2,3,...\}$（极性层级）、 $t=0$（无 DCF）和 $s \in \{1,2,3,4,5\}$ 的情况。其中 m=1=经典、m=2 =双极、 m=3 =三极。

m	t	s	代表名称	简要说明（极数 / 注释）
1	0	1	模糊集	单极 $\{\pi_+\}$。
1	0	2	直觉模糊集	单极；存储（μ， ν）。
1	0	3	中智集	单极；存储（T， I， F）。
2	0	1	双极模糊集 [348, 424]	极 $\{\pi_+, \pi_-\}$；正度与负度。
2	0	2	双极直觉模糊集 [425–427]（双极模糊集 [428, 429]）	直觉模糊的双极类似形式（包括双极模糊集）。
2	0	3	双极中智集合 [430–432]	中智的双极类比。
2	0	3	双极图像模糊集合 [433, 434]/双极犹豫模糊集合 [435, 436]	图形／犹豫模糊集的二极模拟。
2	0	3	二极球形模糊集集合 [437]	球形模糊集的二极模拟。
2	0	4	二极四分集中智集 [438–440]	四分区中智集的双极对应形式。
2	0	5	双极五分区中智集 [441, 442]	.....的双极对应形式 五分区 中智-逻辑。
3	0	1	三极模糊集 [360–362, 443]	极 $\{\pi_+, \pi_0, \pi_-\}$；正/中性/负。
3	0	2	三极直觉模糊集	三极直觉模糊模型。
3	0	3	三极中智集 [444, 445]	三极中智模型。
m	0	1	m极模糊集合 [417, 446, 447]	泛化 m 极；模糊情形。
m	0	2	m极直觉模糊集合 [418, 419]	泛化 m 极；直觉情形。
m	0	3	m极中智[420, 421, 448]集	通用 m 极；中智情形。
m	0	3	m极图像模糊[449, 450]/m极犹豫模糊[451, 452]集	一般 m 极；图像模糊／犹豫模糊情形。
m	0	3	m极球形模糊集 [453, 454]	一般 m 极；球形模糊情形。
m	0	4	m极四分中智集 [455, 456]	一般 m极；四分中智情形。

pCF_{Π}	pro	中性	反对
pro	0	0.20	1.00
中性	0.20	0	0.20
反对	1.00	0.20	0

它们均为对称矩阵，并满足 $\mathrm{pCF}_v(\alpha,\ \alpha) = 0$、$\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi,\ \pi) = 0$。

定义 m极从属映射

$$\mathrm{pdf}^{\Pi} : P \times P_v \longrightarrow ([0,1]^1)^3 \cong [0,1]^3$$

表 3.6: m（极数）、 $t=1$（单个 DCF）和 $s\in\{1,2,3,4,5\}$ 的情形。其中， m=1 = 表示经典型, m=2 = 表示双极型， m=3 = 表示三极型。

m	t	s	代表性 name	简要说明（极数 / DCF）
1	1	1	可塑性模糊集 Set	单极；一个值级 DCF 调节 μ。
1	1	2	普利索金直觉模糊集	单极；DCF衰减（μ， ν）。
1	1	3	普利索金中智集	单极；DCF 作用于 (T， I， F)。
2	1	1	双极多元生成模糊 Set	双极；一个值级 DCF；可选的极级处理。
2	1	2	双极多元生成直觉模糊集	双极、考虑 DCF 的直觉模糊集。
2	1	3	双极多元生成中智集	双极、考虑 DCF 的中智模糊。
3	1	1	三极可组合模糊 Set	三极；一个值级 DCF；可选的极间交互作用。
3	1	2	三极多元生成直觉模糊集	三极、兼容 DCF 的直觉模糊。
3	1	3	三极多元生成中智集	三极、具备 DCF 感知能力的中智集。

其各项写作 $\mathrm{pdf}^{\Pi}(x,\ \alpha)\ =(\mu_{\mathrm{pro}},\ \mu_{\mathrm{neutral}},\ \mu_{\mathrm{contra}})$。对于这三个候选项，我们设定

$$
\begin{aligned}
c_1:\quad & \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_1,\mathrm{junior})=(0.60,0.30,0.10),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_1,\mathrm{mid})=(0.70,0.20,0.10),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_1,\mathrm{senior})=(0.40,0.20,0.40);\\
c_2:\quad & \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_2,\mathrm{junior})=(0.30,0.20,0.50),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_2,\mathrm{mid})=(0.50,0.30,0.20),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_2,\mathrm{senior})=(0.80,0.10,0.10);\\
c_3:\quad & \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_3,\mathrm{junior})=(0.20,0.30,0.50),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_3,\mathrm{mid})=(0.40,0.30,0.30),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(c_3,\mathrm{senior})=(0.60,0.20,0.20).
\end{aligned}
$$

固定主导语境

$$(d,\delta)=(\mathrm{senior},\mathrm{pro}),$$

意　　思是，决策者主要关注值 senior 和极 pro。对于每个　　h $(\alpha,\ \pi_r)\in P_v\times\Pi$ 我们采用兼容性权重

$$w_r(\alpha\mid d,\delta):=\big(1-\mathrm{pCF}_v(\alpha,d)\big)\,\big(1-\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_r,\delta)\big),\quad r=1,2,3,$$

并按归一化加权平均值进行汇总

$$\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(x,\alpha):=\frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{3}w_r(\alpha\mid d,\delta)\,\mu_r(x,\alpha)}{\displaystyle\sum_{r=1}^{3}w_r(\alpha\mid d,\delta)}\in[0,1],$$

约定 0/0：$=0$。

我们说明候选者 c_1的计算过程。

(1) 情形 α =mid。我们有

$$1-\mathrm{pCF}_v(\mathrm{mid},\mathrm{senior})=1-0.40=0.60,$$

并且，相对于 δ =pro,

$$1-\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_1,\delta)=1-0=1,\quad 1-\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_2,\delta)=1-0.20=0.8,\quad 1-\mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_3,\delta)=1-1.00=0.$$

因此权重向量为

$$w(\mathrm{mid}\mid d,\delta)=\big(0.60,\,0.60\times 0.8,\,0.60\times 0\big)=(0.60,\,0.48,\,0),$$

and

$$\sum_{r=1}^{3} w_r(\mathrm{mid}\mid d,\delta)=0.60+0.48+0=1.08.$$

利用pdf$^{\Pi}$(c_1,mid) = (0.70,0.20,0.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(c_1,\mathrm{mid})&=\frac{0.60\cdot 0.70+0.48\cdot 0.20+0\cdot 0.10}{1.08}\\&=\frac{0.42+0.096}{1.08}=\frac{0.516}{1.08}\approx 0.478.\end{aligned}$$

(2) 情况 α =senior。现在

$$1-\mathrm{pCF}_v(\mathrm{senior},\mathrm{senior})=1-0=1,$$

因此，权重完全由各极点决定：

$$w(\mathrm{senior}\mid d,\delta)=\big(1,\,0.8,\,0\big),\quad \sum_{r=1}^{3} w_r(\mathrm{senior}\mid d,\delta)=1+0.8+0=1.8.$$

使用 pdf$^{\Pi}$(c_1，senior) =(0.40，0.20，0.40),

$$\begin{aligned}\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(c_1,\mathrm{senior})&=\frac{1\cdot 0.40+0.8\cdot 0.20+0\cdot 0.40}{1.8}\\&=\frac{0.40+0.16}{1.8}=\frac{0.56}{1.8}\approx 0.311.\end{aligned}$$

这些计算明确展示了值层面的矛盾（pCF$_v$）和极点层面的矛盾（pCF$_{\Pi}$）如何共同削弱或强化 pdf$^{\Pi}$的各个分量，从而为每一候选项—属性值对生成单一的多元生成评分 pdf$^{(d,\delta)}$(x，α)。

例 3.2.4 （四极点下的供应商选择（$m=4$））。 供应商选择是一个关键流程，组织在此过程中评估供应商，并选择满足成本、质量、可靠性和合规要求的供应商（参见 [457]）。

设供应商的论域为 $P=\{v_1,v_2\}$。考虑属性 $v=$ 物流_目标及其取值集合

$$P_v=\{\mathrm{low_cost},\,\mathrm{fast_delivery},\,\mathrm{high_reliability}\}.$$

我们使用四个极点

$$\Pi = \{\text{benefit}, \text{neutral}, \text{risk}, \text{compliance}\},$$

因此 $m = 4$。再次取 $s = 1$，于是 pdf^{Π}：$P \times P_v \to [0,1]^4$。

值层 DCF pCF_v 和极层 DCF pCF_Π 为

pCF_v	低成本_	快速_交付	高_可靠性
low_cost	0	0.50	0.60
快速_交付	0.50	0	0.20
高_可靠性	0.60	0.20	0

pCF_Π	效益	中性	risk	合规性
效益	0	0.20	0.90	0.10
中性	0.20	0	0.20	0.20
risk	0.90	0.20	0	0.80
合规性	0.10	0.20	0.80	0

两个矩阵都是对称矩阵，且对角线元素为零，因此它们是有效的 DCF。

对于供应商 v_1，4 极附属向量 $\text{pdf}^{\Pi}(v_1,\ \alpha) = (\mu_{\text{benefit}},\ \mu_{\text{neutral}},\ \mu_{\text{risk}},\ \mu_{\text{compliance}})$ 选取为

$$\begin{aligned}
\text{pdf}^{\Pi}(v_1, \text{low_cost}) &= (0.65, 0.15, 0.30, 0.40),\\
\text{pdf}^{\Pi}(v_1, \text{fast_delivery}) &= (0.70, 0.10, 0.20, 0.50),\\
\text{pdf}^{\Pi}(v_1, \text{high_reliability}) &= (0.60, 0.20, 0.10, 0.90).
\end{aligned}$$

固定主导上下文

$$(d, \delta) = (\text{high_reliability}, \text{benefit}).$$

对于每个 $(\alpha,\ \pi_r) \in P_v \times \Pi$，权重再次为

$$w_r(\alpha \mid d, \delta) := \big(1 - \text{pCF}_v(\alpha, d)\big)\,\big(1 - \text{pCF}_\Pi(\pi_r, \delta)\big), \quad r = 1, \ldots, 4,$$

并且标量化隶属度由下式给出

$$\text{pdf}^{(d,\delta)}(x, \alpha) := \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{4} w_r(\alpha \mid d, \delta)\, \mu_r(x, \alpha)}{\displaystyle\sum_{r=1}^{4} w_r(\alpha \mid d, \delta)} \in [0, 1].$$

首先注意，对于固定极点 δ =收益,

$$1 - \text{pCF}_\Pi(\cdot, \delta) = \big(1,\ 0.8,\ 0.1,\ 0.9\big)$$

对应于 {收益, 中性,风险, 合规}。

(1) 情形 α =快速_交付。这里

$$1 - \text{pCF}_v(\text{fast_delivery}, \text{high_reliability}) = 1 - 0.20 = 0.80.$$

Thus

$$w(\text{fast_delivery} \mid d, \delta) = 0.80 \cdot (1,\ 0.8,\ 0.1,\ 0.9) = (0.80,\ 0.64,\ 0.08,\ 0.72),$$

and

$$\sum_{r=1}^{4} w_r(\text{fast_delivery} \mid d, \delta) = 0.80 + 0.64 + 0.08 + 0.72 = 2.24.$$

根据概率密度函数 $\text{pdf}^{\Pi}(v_1, \text{快速_交付}) = (0.70,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.50)$，分子为

$$\begin{aligned}\text{num} &= 0.80 \cdot 0.70 + 0.64 \cdot 0.10 + 0.08 \cdot 0.20 + 0.72 \cdot 0.50 \\ &= 0.56 + 0.064 + 0.016 + 0.36 = 1.000,\end{aligned}$$

so

$$\text{pdf}^{(d,\delta)}(v_1, \text{fast_delivery}) = \frac{1.000}{2.24} \approx 0.4464.$$

（2） $\alpha =$高_可靠性情形。现在

$$1 - \text{pCF}_v(\text{high_reliability}, \text{high_reliability}) = 1 - 0 = 1,$$

因此，权重与极点兼容性向量一致：

$$w(\text{high_reliability} \mid d, \delta) = (1,\ 0.8,\ 0.1,\ 0.9), \quad \sum_{r=1}^{4} w_r(\text{high_reliability} \mid d, \delta) = 2.8.$$

给定 $\text{pdf}^{\Pi}(v_1, \text{高_可靠性}) = (0.60,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.90)$，

$$\begin{aligned}\text{num} &= 1 \cdot 0.60 + 0.8 \cdot 0.20 + 0.1 \cdot 0.10 + 0.9 \cdot 0.90 \\ &= 0.60 + 0.16 + 0.01 + 0.81 = 1.58,\end{aligned}$$

因此

$$\text{pdf}^{(d,\delta)}(v_1, \text{high_reliability}) = \frac{1.58}{2.8} \approx 0.5643.$$

这些数值表明，四极结构与矛盾度 pCF_v 和 pCF_Π如何使决策者能够在以高_可靠性为导向的情境中强调“效益”，同时通过权重 $w_r(\alpha \mid d,\ \delta)$兼顾中立性、风险与合规性。

示例 3.2.5 （智慧城市交叉口设计（$m = 3$））**.** 智慧城市交叉口整合传感器、自适应信号灯和网联车辆，以在全市范围内优化交通流、安全性、排放和行人体验（参见 [458]）。

设 $P = \{\text{A},\ \text{B}\}$ 为城市交叉口的两个竞争性设计方案。考虑属性$v =$目标及其取值集合

$$P_v = \{\text{safety},\ \text{throughput},\ \text{cost}\}.$$

我们取三个极

$$\Pi = \{\text{pro}, \text{neutral}, \text{contra}\},$$

从而 $m = 3$，并再次使用 $s = 1$，使得 $\text{pdf}^{\Pi}(x,\ \alpha) \in [0, 1]^3$。

值层面的矛盾度 pCF_v 和极点层面的矛盾度 pCF_Π 定义如下：

pCF_v	安全性	通行能力	cost
安全性	0	0.50	0.30
吞吐量	0.50	0	0.40
cost	0.30	0.40	0

pCF_{Π}	pro	中立	反对
pro	0	0.20	1.00
中立	0.20	0	0.20
反对	1.00	0.20	0

它们均为对称矩阵，且对角线元素为零，因此是有效的 DCF。

对于每个设计方案 $X \in \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ 以及每个 $\alpha \in P_v$，三元组

$$\mathrm{pdf}^{\Pi}(X,\alpha) = (\mu_{\mathrm{pro}}(X,\alpha), \mu_{\mathrm{neutral}}(X,\alpha), \mu_{\mathrm{contra}}(X,\alpha))$$

编码了 X 关于目标 α的 3 极评价。我们选择

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}: \quad & \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{A},\mathrm{safety}) = (0.85, 0.10, 0.05),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{A},\mathrm{throughput}) = (0.60, 0.20, 0.20),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{A},\mathrm{cost}) = (0.55, 0.25, 0.20);\\
\mathrm{B}: \quad & \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{B},\mathrm{safety}) = (0.70, 0.20, 0.10),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{B},\mathrm{throughput}) = (0.80, 0.10, 0.10),\\
& \mathrm{pdf}^{\Pi}(\mathrm{B},\mathrm{cost}) = (0.40, 0.30, 0.30).
\end{aligned}$$

我们再次采用加权平均归约

$$\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(x,\alpha) := \frac{\sum_{r=1}^{3} w_r(\alpha \mid d,\delta)\, \mu_r(x,\alpha)}{\sum_{r=1}^{3} w_r(\alpha \mid d,\delta)},$$

其中

$$w_r(\alpha \mid d,\delta) := \big(1 - \mathrm{pCF}_v(\alpha,d)\big)\,\big(1 - \mathrm{pCF}_{\Pi}(\pi_r,\delta)\big).$$

我们固定主导语境

$$(d,\delta) = (\mathrm{safety},\mathrm{pro}),$$

代表“安全优先、支持”观点。于是

$$1 - \mathrm{pCF}_{\Pi}(\cdot,\delta) = \big(1,\ 0.8,\ 0\big)$$

对于极点 {支持,中立,反对}。

(1) 设计 B， α =吞吐量。我们有

$$1 - \mathrm{pCF}_v(\mathrm{throughput},\mathrm{safety}) = 1 - 0.50 = 0.50,$$

so

$$w(\mathrm{throughput} \mid d,\delta) = 0.50 \cdot (1,\ 0.8,\ 0) = (0.50,\ 0.40,\ 0),$$

with

$$\sum_{r=1}^{3} w_r(\mathrm{throughput} \mid d,\delta) = 0.50 + 0.40 + 0 = 0.90.$$

使用 pdf^{Π}(B，吞吐量) =(0.80，0.10，0.10),

$$\begin{aligned}
\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(\mathrm{B},\mathrm{throughput}) &= \frac{0.50 \cdot 0.80 + 0.40 \cdot 0.10 + 0 \cdot 0.10}{0.90}\\
&= \frac{0.40 + 0.04}{0.90} = \frac{0.44}{0.90} \approx 0.489.
\end{aligned}$$

(2) 设计 A， α =安全性。此处

$$1-\mathrm{pCF}_v(\text{safety},\text{safety})=1-0=1,$$

因此，权重为

$$w(\text{safety}\mid d,\delta)=(1,\,0.8,\,0),\quad \sum_{r=1}^{3} w_r(\text{safety}\mid d,\delta)=1.8.$$

使用 pdf^{Π}(A，safety) = (0.85，0.10，0.05)，

$$\begin{aligned}\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}(\mathrm{A},\text{safety}) &= \frac{1\cdot 0.85+0.8\cdot 0.10+0\cdot 0.05}{1.8}\\ &= \frac{0.85+0.08}{1.8}=\frac{0.93}{1.8}\approx 0.517.\end{aligned}$$

这些标量化得分 $\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}$(B，throughput) 和 $\mathrm{pdf}^{(d,\delta)}$(A， safety) 清晰地表明，在“安全优先、专业导向”的语境下，如何降低矛盾极性和目标的权重，同时保留 pdf^{Π} 中编码的完整多极信息。因此，m 极犁体学框架能够以数学上精确且考虑矛盾的方式，从安全性、吞吐量和成本等方面比较交叉口设计。

3.3 复数犁体集（CPS）

复数犁体集利用复数值隶属度和矛盾函数，在情境敏感的多维不确定性及考虑冲突的推理下聚合属性 [459]。

定义 3.3.1 （复普利托根集（CPS））. [459]设 P 为一个非空集合（所研究的论域）， v 为一个属性，其取值构成非空有限集 P_v，并设 $s\in\mathbb{N}$ 与 $t\in\mathbb{N}_0$分别表示隶属分量的个数以及矛盾通道的个数。

（i）复隶属度。设 $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le 1\}$。一个 复隶属度函数（*CDAF*）为

$$\mathrm{cpdf}:\ P\times P_v\ \longrightarrow\ \mathbb{D}^{\,s},\qquad \mathrm{cpdf}(x,\alpha)=\big(\gamma_1(x,\alpha),\dots,\gamma_s(x,\alpha)\big),$$

每个分量均以幅值–相位形式表示 $\gamma_i(x,\alpha)=p_i(x,\alpha)\,e^{\mathrm{i}\varphi_i(x,\alpha)}$ 其中 $p_i(x,\alpha)\in[0,1]$ 且 $\varphi_i(x,\alpha)\in[0,2\pi)$。

（ii）矛盾度（DCF）。 对每个 $j=1,\dots,t$ 设

$$\mathrm{pCF}_j:\ P_v\times P_v\ \longrightarrow\ [0,1]$$

be 对称 且 自反，即 $\mathrm{pCF}_j(a,a)=0$ 且 $\mathrm{pCF}_j(a,b)=\mathrm{pCF}_j(b,a)$ 对所有 $a,b\in P_v$.

(iii) 矛盾融合与相容性权重。固定一个矛盾融合 $\Phi:[0,1]^t\to[0,1]$，使其具有对称性、单调性（逐分量），并满足 $\Phi(0,\dots,0)=0$。（若 $t=0$，则令 $\Phi(\cdot)\equiv 0$。）给定一个主导值 $\delta\in P_v$，定义相容性权重

$$w(a\mid\delta)\ :=\ 1-\Phi\big(\mathrm{pCF}_1(a,\delta),\dots,\mathrm{pCF}_t(a,\delta)\big)\ \in[0,1]\quad (a\in P_v).$$

(iv) 复数位析聚合（相对于 δ）。对每个 $x \in P$，按分量定义相对于 的复数位析度 $\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^s$，其定义为加权复数均值

$$\Gamma_i^{(\delta)}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{a \in P_v} w(a \mid \delta)\, \gamma_i(x,a)}{\sum\limits_{a \in P_v} w(a \mid \delta)}, & \text{if } \sum_{a \in P_v} w(a \mid \delta) > 0, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, s.$$

*Co*杂 *Plithogenic* 集（*CPS*）与 (P, v, P_v)、 s、 t、cpdf、 $\{\mathrm{pCF}_j\}$ 和 Φ 相关，是该元组 le

$$\mathrm{CPS} := \big(P,\ v,\ P_v,\ s,\ t,\ \mathrm{cpdf},\ \{\mathrm{pCF}_j\}_{j=1}^{t},\ \Phi,\ \Gamma^{(\delta)}\big),$$

其中， $\Gamma^{(\delta)}$ 提供相对于主导值 $\delta \in P_v$ 的具备矛盾感知能力的复数隶属度（作为一个 s–向量）。

表 3.7 总结了复 Plithogenic 集（CPS）。

表 3.7： $t \in \{0,1\}$ 和 $s \in \{1,2,3\}$ 的复 Plithogenic 集（CPS）情形汇总。这里，$\Gamma^{(\delta)}$ 表示具备矛盾感知能力的复数隶属度（定义 3.3.1）， $\gamma_i \in \mathbb{D}$ 为 CDAF 分量， $w(a \mid \delta) = 1 - \Phi(\mathrm{pCF}_1(a,\delta) \dots, \mathrm{pCF}_t(a,\delta))$。对于 $t = 1$，取 $\Phi(z) = z$；对于 $t = 0$，令 $\Phi \equiv 0$。

s	t	规范（权重与聚合）/解释
无矛盾通道 ($t = 0$)： $\Phi \equiv 0$ 因此 $w(a \mid \delta) = 1$ 对所有 $a \in P_v$ 均成立（与 δ无关）。		
1	0	$\Gamma_1^{(\delta)}(x) = \dfrac{1}{\lvert P_v \rvert} \sum\limits_{a \in P_v} \gamma_1(x,\ a)$（均匀复数均值）。单分量 CPS（复数模糊集 [460–462]–型）。
2	0	$\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^2$，其中每个分量都是 P_v上的均匀复数均值。双分量 CPS（类似于复直觉模糊集 [463–465] 和复模糊集 [466, 467]）。
3	0	$\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^3$ 具有分量一致的复数均值。三分量 CPS（复中智集 [468–470],复图像模糊集 [471,472], 复 Hesitant 模糊集 [473–475], 以及复球形模糊集 [476, 477]）
4	0	$\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^4$ 具有分量一致的复数均值。四分量 CPS（complex 复数四分区中智集 [478, 479]-类）。
5	0	$\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^5$ 采用分量统一复数均值。五分量 CPS（复数 复数五分区中智集 [480, 481]-类）。
单一矛盾通道 ($t = 1$)： $\Phi(z) = z$，因此 $w(a \mid \delta) = 1 - \mathrm{pCF}(a,\delta)$。		
1	1	$\Gamma_1^{(\delta)}(x) = \dfrac{\sum\limits_{a \in P_v} \big(1 - \mathrm{pCF}(a,\delta)\big)\, \gamma_1(x,a)}{\sum\limits_{a \in P_v} \big(1 - \mathrm{pCF}(a,\delta)\big)}$。基于 DCF 的单分量 CPS$^{a \in P_v}$ 重加权（类复数多元模糊集）。2 1 相同的权重； $\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^2$ 由上述加权复数均值逐分量计算得出。3 1 相同的权重； $\Gamma^{(\delta)}(x) \in \mathbb{D}^3$ 由上述加权复数均值逐分量计算得出。

注。 (i) 若所有相位均消失（$\varphi_i \equiv 0$），该表即退化为实值多属性对应物。(ii) 对于 $t = 0$， $\Gamma^{(\delta)}$ 不依赖于 δ；对于 $t = 1$， 较大的 $\mathrm{pCF}(a,\ \delta)$ 会降低值 a 的贡献权重。

下面我们给出该概念的具体示例。

示例 3.3.2（智能电网电动汽车充电中的 CPS（考虑电价的调度））。 智能电网电动汽车充电会根据电网信号协调电动汽车充电，优化能源使用、降低成本、平衡需求并整合可再生能源（参见 [482]）。

考虑一辆汽车 $x = \mathrm{EV}_1$ 的电动汽车充电决策。全集 $P = \{\mathrm{EV}_1\}$；属性 $v =$ 电价时段，取值为 $P_v = \{$非高峰，平段，高峰$\}$。设有 $s = 2$ 个复数成分（电网效益、稳定性）和 $t = 2$ 个矛盾通道（电价、变压器负载）。令主导值为 $\delta =$ 高峰。对于 DCF（对称、自反），我们只需要这些配对（$a,\ \delta$）：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pCF}_1(\mathrm{offpeak},\mathrm{peak}) = 0.8, \quad \mathrm{pCF}_1(\mathrm{shoulder},\mathrm{peak}) = 0.4, \quad \mathrm{pCF}_1(\mathrm{peak},\mathrm{peak}) = 0,\\
&\mathrm{pCF}_2(\mathrm{offpeak},\mathrm{peak}) = 0.5, \quad \mathrm{pCF}_2(\mathrm{shoulder},\mathrm{peak}) = 0.2, \quad \mathrm{pCF}_2(\mathrm{peak},\mathrm{peak}) = 0.
\end{aligned}$$

通过均值 $\Phi(c_1, c_2) = {}^{c_1+c_2}_{2}$ 融合矛盾，由此得到兼容性权重

$$w(a \mid \delta) = 1 - \Phi\big(\mathrm{pCF}_1(a,\delta), \mathrm{pCF}_2(a,\delta)\big) \Rightarrow \begin{cases} w(\mathrm{offpeak} \mid \mathrm{peak}) = 1 - \frac{0.8+0.5}{2} = 0.35, \\ w(\mathrm{shoulder} \mid \mathrm{peak}) = 1 - \frac{0.4+0.2}{2} = 0.70, \\ w(\mathrm{peak} \mid \mathrm{peak}) = 1. \end{cases}$$

复数程度（振幅–相位）：对于分量 1（电网效益）和分量 2（稳定性），

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(1)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{offpeak}) = 0.60\, e^{\mathrm{i}\,0^\circ} = (0.600 + 0.000\,\mathrm{i}),\\
&\gamma^{(1)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{shoulder}) = 0.80\, e^{\mathrm{i}\,30^\circ} = (0.800\cos 30^\circ + 0.800 \sin 30^\circ\,\mathrm{i}) = (0.693 + 0.400\,\mathrm{i}),\\
&\gamma^{(1)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{peak}) = 0.40\, e^{\mathrm{i}\,60^\circ} = (0.200 + 0.346\,\mathrm{i});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma^{(2)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{offpeak}) = 0.50\, e^{\mathrm{i}\,90^\circ} = (0.000 + 0.500\,\mathrm{i}),\\
&\gamma^{(2)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{shoulder}) = 0.70\, e^{\mathrm{i}\,60^\circ} = (0.350 + 0.606\,\mathrm{i}),\\
&\gamma^{(2)}(\mathrm{EV}_1, \mathrm{peak}) = 0.30\, e^{\mathrm{i}\,90^\circ} = (0.000 + 0.300\,\mathrm{i}).
\end{aligned}$$

加权复数均值（分母 $D = 0.35 + 0.70 + 1 = 2.05$）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Num}^{(1)} &= 0.35(0.600 + 0.000\mathrm{i}) + 0.70(0.693 + 0.400\mathrm{i}) + 1(0.200 + 0.346\mathrm{i})\\
&= (0.8950 + 0.6264\,\mathrm{i}),\\
\Gamma_1^{(\mathrm{peak})}(\mathrm{EV}_1) &= \frac{\mathrm{Num}^{(1)}}{D} = (0.2373 + 0.4778\,\mathrm{i}) = 0.5329\, e^{\mathrm{i}\,34.99^\circ};\\
\mathrm{Num}^{(2)} &= 0.35(0.000 + 0.500\mathrm{i}) + 0.70(0.350 + 0.606\mathrm{i}) + 1(0.000 + 0.300\mathrm{i})\\
&= (0.2450 + 0.8994\,\mathrm{i}),\\
\Gamma_2^{(\mathrm{peak})}(\mathrm{EV}_1) &= \frac{\mathrm{Num}^{(2)}}{D} = (0.1195 + 0.4384\,\mathrm{i}) = 0.4547\, e^{\mathrm{i}\,74.83^\circ}.
\end{aligned}$$

因此，CPS 得出一个能够感知矛盾的复数隶属向量

$$\Gamma^{(\mathrm{peak})}(\mathrm{EV}_1) = (0.5329 e^{\mathrm{i}35.0^\circ},\, 0.4547 e^{\mathrm{i}74.8^\circ})$$

.

示例 3.3.3（CPS 在医学影像分诊中的应用（CT/MRI/超声融合））。 医学影像分诊会对放射影像或诊断影像进行优先级排序，以供审核，并通过自动化或 AI 辅助分析向临床医生标记紧急异常 [483]。

患者 $x =$A，属性 $v =$影像模态包括 $P_v = \{$CT、US、MRI$\}$。取一个复数分量（$s = 1$），表示诊断置信度，并设 $t = 2$ 个 DCF 通道：辐射风险与诊断收益。主导值为 $\delta =$MRI。设

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pCF}_1(\mathrm{CT},\mathrm{MRI}) = 0.9, \quad \mathrm{pCF}_1(\mathrm{US},\mathrm{MRI}) = 0.0,\\
&\mathrm{pCF}_2(\mathrm{CT},\mathrm{MRI}) = 0.2, \quad \mathrm{pCF}_2(\mathrm{US},\mathrm{MRI}) = 0.6,
\end{aligned} \qquad \Phi(c_1, c_2) = \tfrac{c_1+c_2}{2}.$$

权重:

$$\begin{aligned}
&w(\mathrm{CT} \mid \mathrm{MRI}) = 1 - \tfrac{0.9+0.2}{2} = 0.45, \quad w(\mathrm{US} \mid \mathrm{MRI}) = 1 - \tfrac{0.0+0.6}{2} = 0.70,\\
&w(\mathrm{MRI} \mid \mathrm{MRI}) = 1, \qquad D = 0.45 + 0.70 + 1 = 2.15.
\end{aligned}$$

CDAF（振幅–相位，单位为度）：

$$\gamma(\mathrm{A},\mathrm{CT}) = 0.65\,e^{\mathrm{i}\,10^\circ} = (0.640 + 0.113\,\mathrm{i}), \quad \gamma(\mathrm{A},\mathrm{US}) = 0.50\,e^{\mathrm{i}\,70^\circ} = (0.171 + 0.470\,\mathrm{i}),$$

$$\gamma(\mathrm{A},\mathrm{MRI}) = 0.85\,e^{\mathrm{i}\,20^\circ} = (0.798 + 0.291\,\mathrm{i}).$$

加权求和与聚合：

$$\begin{aligned}\mathrm{Num} &= 0.45(0.640 + 0.113\mathrm{i}) + 0.70(0.171 + 0.470\mathrm{i}) + 1(0.798 + 0.291\mathrm{i}) \\ &= (1.2066 + 0.6700\,\mathrm{i}), \\ \Gamma^{(\mathrm{MRI})}(\mathrm{A}) &= \frac{\mathrm{Num}}{D} = (0.5612 + 0.3118\,\mathrm{i}) = 0.6420\,e^{\mathrm{i}\,29.06^\circ}.\end{aligned}$$

因此，以 MRI 为主导的融合产生了较高的复置信度，相位为 $\approx 29^\circ$（不确定性适中且偏斜）。

示例 3.3.4（电子商务多层级产品定位中的 CPS）。产品 $x =$ LaptopA，属性 $v =$层级包括 $P_v =$ {经济型、 均衡型、高端型}。使用 $s = 2$ 复数分量：(1) 用户情绪，(2) 配送满意度。令 $t = 2$ DCF 通道（价格差距、功能差距），主导层级为$\delta =$均衡型。矛盾（仅列出与 δ 的配对）：

$$\begin{aligned}&\mathrm{pCF}_1(\mathrm{budget},\mathrm{balanced}) = 0.4, \quad \mathrm{pCF}_1(\mathrm{premium},\mathrm{balanced}) = 0.5, \\ &\mathrm{pCF}_2(\mathrm{budget},\mathrm{balanced}) = 0.6, \quad \mathrm{pCF}_2(\mathrm{premium},\mathrm{balanced}) = 0.2,\end{aligned} \qquad \Phi(c_1,c_2) = \tfrac{c_1+c_2}{2}.$$

权重：

$$w(\mathrm{budget} \mid \mathrm{balanced}) = 1 - \tfrac{0.4+0.6}{2} = 0.50,$$

$$w(\mathrm{premium} \mid \mathrm{balanced}) = 1 - \tfrac{0.5+0.2}{2} = 0.65,$$

$$w(\mathrm{balanced} \mid \mathrm{balanced}) = 1,\ D = 2.15.$$

CDAF（振幅–相位；矩形表示保留三位小数）：

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{budget}) &= 0.55\,e^{\mathrm{i}15^\circ} = (0.532 + 0.142\,\mathrm{i}), \\ \gamma^{(1)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{balanced}) &= 0.75\,e^{\mathrm{i}25^\circ} = (0.680 + 0.317\,\mathrm{i}), \\ \gamma^{(1)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{premium}) &= 0.70\,e^{\mathrm{i}35^\circ} = (0.574 + 0.402\,\mathrm{i});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{budget}) &= 0.60\,e^{\mathrm{i}80^\circ} = (0.104 + 0.591\,\mathrm{i}), \\ \gamma^{(2)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{balanced}) &= 0.65\,e^{\mathrm{i}50^\circ} = (0.418 + 0.498\,\mathrm{i}), \\ \gamma^{(2)}(\mathrm{LaptopA},\mathrm{premium}) &= 0.55\,e^{\mathrm{i}40^\circ} = (0.421 + 0.354\,\mathrm{i}).\end{aligned}$$

加权复数均值（显示分段分子；然后除以 $D = 2.15$）：

$$\begin{aligned}\mathrm{Num}^{(1)} &= 0.50(0.532 + 0.142\mathrm{i}) + 1(0.680 + 0.317\mathrm{i}) + 0.65(0.574 + 0.402\mathrm{i}) \\ &= (1.3181 + 0.6491\,\mathrm{i}), \\ \Gamma_1^{(\mathrm{balanced})}(\mathrm{LaptopA}) &= (1.3181 + 0.6491\,\mathrm{i})/2.15 = (0.6131 + 0.3019\,\mathrm{i}) \\ &= 0.6834\,e^{\mathrm{i}\,26.22^\circ}; \\ \mathrm{Num}^{(2)} &= 0.50(0.104 + 0.591\mathrm{i}) + 1(0.418 + 0.498\mathrm{i}) + 0.65(0.421 + 0.354\mathrm{i}) \\ &= (0.7438 + 1.0232\,\mathrm{i}), \\ \Gamma_2^{(\mathrm{balanced})}(\mathrm{LaptopA}) &= (0.7438 + 1.0232\,\mathrm{i})/2.15 = (0.3459 + 0.4759\,\mathrm{i}) \\ &= 0.5883\,e^{\mathrm{i}\,53.99^\circ}.\end{aligned}$$

因此，CPS 给出了一个均衡层级、感知矛盾的复合评估向量 $\Gamma^{(\mathrm{balanced})}(\mathrm{LaptopA}) = (0.6834e^{\mathrm{i}26.22^\circ}, 0.5883e^{\mathrm{i}53.99^\circ})$。

3.4 超超矛盾集

（m,n）-超超立体多元集将 m 级参数子集及其属性值赋予 n 级模糊矛盾度集，以刻画多维隶属关系、属性间冲突以及不确定性模式 [484–486]。以下给出（m,n）-超超立体多元集的定义。

定义 3.4.1 ((m,n)-超超矛盾集)。 [485] 设 X 为非空集合，$V=\{v_1,\dots,v_k\}$ 为有限属性集。对于每个 $v\in V$，设 P_v 为其可能取值的集合。固定正整数 m,n 和正维数 s,t。定义 X 的第 m 层嵌套幂集 [81, 487] 如下

$$\mathcal{P}^0(X)=X,\quad \mathcal{P}^r(X)=\mathcal{P}\big(\mathcal{P}^{r-1}(X)\big)\quad (r\ge 1),$$

类似地，$\mathcal{P}^n\big([0,1]^s\big)$ 表示 s 维单位立方体。定义在X 上的 (m,n)-超超矛盾集 为五元组

$$SHP^{(m,n)}=\Big(\mathcal{P}^m(X),\ V,\ \{P_v\}_{v\in V},\ \{\tilde{pdf}_v^{(m,n)}\}_{v\in V},\ pCF^{(m,n)}\Big),$$

其中

(i) $\mathcal{P}^m(X)$ 是第 m 层“超元素”的定义域。

(ii) 对于每个 $v\in V$, P_v，它的值构成有限集。

(iii) 超隶属度函数

$$\tilde{pdf}_v^{(m,n)}:\mathcal{P}^m(X)\times P_v\longrightarrow \mathcal{P}^n\big([0,1]^s\big)$$

将每个 (A,a)（其中 $A\in\mathcal{P}^m(X)$ 且 $a\in P_v$）映射为一个非空子集 $\tilde{pdf}_v^{(m,n)}(A,a)\subseteq[0,1]^s$，表示维度为 s 的所有可能隶属度向量。

(iv) 矛盾度函数

$$pCF^{(m,n)}:\Big(\bigcup_{v\in V}P_v\Big)\times\Big(\bigcup_{v\in V}P_v\Big)\longrightarrow[0,1]^t$$

对所有 a,b，均满足：

(a) $pCF^{(m,n)}(a,a)=0$（自反性），(b) $pCF^{(m,n)}(a,b)=pCF^{(m,n)}(b,a)$（对称性）。

Tabl第 3.8 节和第 3.9 节介绍了与（m，n）-超超Plithogenic集合相关的概念 .

现在我们给出该概念的具体示例。

示例 3.4.2 ((m,n)=(2,1)：具有超–中智成员关系的医院“团队之团队”分诊)。 设 $X=$ {ER、ICU、OR、RAD} 为医院科室。在超水平 $\mathcal{P}^2(X)$ 上开展工作；考虑超–元素

$$A=\big\{\{\mathrm{ER},\mathrm{ICU}\},\ \{\mathrm{OR},\mathrm{RAD}\}\big\}\in\mathcal{P}^2(X).$$

使用单一属性 $v=$“临床风险等级”，其取值为 $P_v=$ {低,中等,高}。选择$s=3$ (中智集值 (T,I,F))，$n=1$ (每个隶属度均为 $[0,1]^3$ 的有限子集)，以及 $t=1$。

表 3.8：$(m,\ n)$-超超Plithogenic集的特化

参数选择	域层级	隶属／反矛盾结构	所得模型
$(0,\ 0)$-超超多值生成 Set	$\mathcal{P}^0(X) = X$ （无超-层）	单一矛盾生成 DAF $pdf:\ X \times Pv \to [0,1]^s$ 和 DCF $pCF:\ Pv \times Pv \to [0,1]^t$	矛盾生成集
$(0, n)$-超超矛盾生成 Set	$\mathcal{P}^0(X) = X$ (无超-级)	DAF 取值 $\mathcal{P}^n([0,1]^s)$: 值 in plithogenic 隶属度 are hy-每个/嵌套	超超矛盾生成集（参见 [488–490]）
$(m,\ 0)$ - 超超矛盾生成 Set	$\mathcal{P}^m(X)$（超／超-论域层级）	通常的多元 DAF/DCF on 超-元素（无超隶属关系嵌套）	超犁晶集合（参见 [491]）

表 3.9：按 DAF 分量数量划分的超犁晶集合特化形式

模型	DAF dim. s	隶属度／矛盾度描述 tion	由此产生的结 ture
Hy-每个–Plithogenic 模糊集	$s = 1$	每个超／超图元素都有一个单一的经 $[0,1]$, 调制的多源生成隶属度由属性值上的值级 DCF 调制。	超模糊（多源生成）集 [492–495]
Hy-按多源生成直觉模糊集	$s = 2$	每个超元素/超集合元素都携带一对（隶属度、非隶属度），位于 $[0,1]^2$, 中通过多元发生学矛盾函数进行聚合。	超直觉模糊集
Hy-元立体中智集	$s = 3$	每个超/超几何元素存储（$T,\ I,\ F$）$\in [0,1]^3$; 立体 DCF 对它们进行加权——根据取值–矛盾。	超–中智集 [291, 496–499]

A的超隶属度（HDAF）：

$$\tilde{pdf}^{(2,1)}(A,\text{low}) = \{(0.30,0.50,0.40),\ (0.40,0.40,0.50)\},$$
$$\tilde{pdf}^{(2,1)}(A,\text{moderate}) = \{(0.50,0.30,0.40),\ (0.60,0.30,0.30)\},$$
$$\tilde{pdf}^{(2,1)}(A,\text{high}) = \{(0.80,0.10,0.10),\ (0.70,0.20,0.20)\}.$$

各取值的质心（按分量均值）：

$$\bar{u}(\text{low}) = (0.35,0.45,0.45),\quad \bar{u}(\text{moderate}) = (0.55,0.30,0.35),\quad \bar{u}(\text{high}) = (0.75,0.15,0.15).$$

矛盾（对称、自反，仅显示非对角线）：

$pCF_{(2,1)}$(低, 高) $= 0.7$, $pCF_{(2,1)}$(中, 高) $= 0.3$, $pCF^{(2,1)}$(低, 中) $= 0.4$.对于“主导”取值 $\delta =$高，设置相容性权重 $w(a \mid \delta) = 1 - pCF^{(2,1)}(a,\delta)$:

w（低 | 高）$= 0.3$, w（中等 | 高）$= 0.7$, w（高 | 高）$= 1$, $D = 0.3 + 0.7 + 1 = 2$.多属性归约（质心的加权平均）得到

$$\mu^{(\text{high})}(A) = \frac{0.3\,\bar{u}(\text{low}) + 0.7\,\bar{u}(\text{moderate}) + 1\,\bar{u}(\text{high})}{2}.$$

逐坐标计算:

$$T:\ \frac{0.3\cdot 0.35 + 0.7\cdot 0.55 + 1\cdot 0.75}{2} = \frac{0.105 + 0.385 + 0.75}{2} = \frac{1.240}{2} = 0.620,$$
$$I:\ \frac{0.3\cdot 0.45 + 0.7\cdot 0.30 + 1\cdot 0.15}{2} = \frac{0.135 + 0.210 + 0.150}{2} = \frac{0.495}{2} = 0.2475,$$
$$F:\ \frac{0.3\cdot 0.45 + 0.7\cdot 0.35 + 1\cdot 0.15}{2} = \frac{0.135 + 0.245 + 0.150}{2} = \frac{0.530}{2} = 0.265.$$

因此，在“高风险”占优的情况下，超团队 A 的超中性思维度降低为$\mu^{(\mathrm{high})}(A) = (0.620, 0.2475, 0.265)$。

示例 3.4.3 ((m,n)=(1,2)：具有嵌套（按场景聚类）可行性的城市多模式出行组合。 多模式出行将多种交通方式（如步行、公交、火车和自行车）整合在一次完整的旅程中，供出行者使用 [500]。

设 X 为出行路段（公交连接、铁路区段、步行连接线）。在 $\mathcal{P}^1(X) = \mathcal{P}(X)$ 上选择超元素

$$A = \{\mathrm{BusSeg}_1,\ \mathrm{RailSeg}_3\}.$$

使用属性 v =“拥堵程度”，取值为 P_v = {畅通、中等、严重}。取 $s = 1$ （ $[0,1]$中的标量可行性）、$n = 2$ （可行性集合 的集合）以及 $t = 1$。

将 HDAF 作为场景聚类（每个内层集合代表一个场景；各值是路段级可行性，聚合为 A）：

$$\tilde{pdf}^{(1,2)}(A, \text{free}) = \big\{\{0.90, 0.80\},\ \{0.85, 0.75\}\big\},$$
$$\tilde{pdf}^{(1,2)}(A, \text{moderate}) = \big\{\{0.70, 0.60\},\ \{0.75, 0.55\}\big\},$$
$$\tilde{pdf}^{(1,2)}(A, \text{heavy}) = \big\{\{0.50, 0.30\},\ \{0.45, 0.35\}\big\}.$$

先计算内层均值（每个场景），再计算外层均值（每个值）：

$$\bar{u}(\text{free}) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{0.90+0.80}{2} + \tfrac{0.85+0.75}{2}\big) = \tfrac{1}{2}(0.85 + 0.80) = 0.825,$$
$$\bar{u}(\text{moderate}) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{0.70+0.60}{2} + \tfrac{0.75+0.55}{2}\big) = \tfrac{1}{2}(0.65 + 0.65) = 0.65,$$
$$\bar{u}(\text{heavy}) = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{0.50+0.30}{2} + \tfrac{0.45+0.35}{2}\big) = \tfrac{1}{2}(0.40 + 0.40) = 0.40.$$

矛盾（对称、反身）：

$$pCF^{(1,2)}(\text{free}, \text{heavy}) = 0.8, \quad pCF^{(1,2)}(\text{moderate}, \text{heavy}) = 0.5, \quad pCF^{(1,2)}(\text{free}, \text{moderate}) = 0.4.$$

以 $\delta =$重为主，权重为 $w(a \mid \delta) = 1 - pCF^{(1,2)}(a,\ \delta)$:

w(无 $\mid$重) $= 0.2$, w(中等 $\mid$重) $= 0.5$, w(重 $\mid$重) $= 1$, $D = 0.2+0.5+1 = 1.7$.

可行性降低:

$$\mu^{(\text{heavy})}(A) = \frac{0.2 \cdot 0.825 + 0.5 \cdot 0.65 + 1 \cdot 0.40}{1.7} = \frac{0.165 + 0.325 + 0.400}{1.7} = \frac{0.890}{1.7} \approx 0.5235.$$

因此，对于高峰时段的主导情形，经过考虑矛盾的嵌套后，超级行程 A在 ≈ 0.524 仍然可行。

例 3.4.4 ((m,n)=(2,2)：基于聚类中智评价的多层级供应商组合)。多层级供应商组合将供应商组织为一级、二级和三级，以分散风险、确保韧性并优化成本（参见 [501]）。

令 X 为基础级供应商。在域 $\mathcal{P}^2(X)$ 上，考虑

$$A = \big\{\{\mathrm{Tier1A}, \mathrm{Tier1B}\},\ \{\mathrm{Tier2C}\}\big\}.$$

为属性 v =“采购策略”赋予 P_v = {单一、双重、多重}。选择 $s = 3$（中智（T、I、F））、$n = 2$（聚类情景集）、$t = 1$。

A的聚类 HDAF（每个内层大括号代表一个场景簇；向量为（T, I, F）：

$$\tilde{pdf}^{(2,2)}(A, \text{single}) = \big\{\{(0.70, 0.20, 0.30), (0.60, 0.30, 0.30)\},\ \{(0.75, 0.20, 0.25)\}\big\},$$
$$\tilde{pdf}^{(2,2)}(A, \text{dual}) = \big\{\{(0.80, 0.15, 0.15), (0.78, 0.15, 0.12)\},\ \{(0.75, 0.18, 0.18)\}\big\},$$
$$\tilde{pdf}^{(2,2)}(A, \text{multi}) = \big\{\{(0.72, 0.20, 0.18), (0.70, 0.22, 0.18)\},\ \{(0.68, 0.25, 0.20)\}\big\}.$$

先列出内层（场景）质心，再列出外层（值）质心：

单一：
$$c_1 = \tfrac{1}{2}\big((0.70,0.20,0.30)+(0.60,0.30,0.30)\big) = (0.65,0.25,0.30),$$
$$c_2 = (0.75,0.20,0.25), \quad \bar{u}(\text{single}) = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2) = (0.70,0.225,0.275).$$

双重：
$$c_1 = \tfrac{1}{2}\big((0.80,0.15,0.15)+(0.78,0.15,0.12)\big) = (0.79,0.15,0.135),$$
$$c_2 = (0.75,0.18,0.18), \quad \bar{u}(\text{dual}) = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2) = (0.77,0.165,0.1575).$$

多重：
$$c_1 = \tfrac{1}{2}\big((0.72,0.20,0.18)+(0.70,0.22,0.18)\big) = (0.71,0.21,0.18),$$
$$c_2 = (0.68,0.25,0.20), \quad \bar{u}(\text{multi}) = \tfrac{1}{2}(c_1+c_2) = (0.695,0.23,0.19).$$

矛盾（对称、反身）：

$$pCF^{(2,2)}(\text{single},\text{dual}) = 0.4, \quad pCF^{(2,2)}(\text{multi},\text{dual}) = 0.3, \quad pCF^{(2,2)}(\text{single},\text{multi}) = 0.7.$$

主导 $\delta =$ 双重，权重为 $w(a \mid \delta) = 1 - pCF^{(2,2)}(a,\ \delta)$：

$$w(\text{single} \mid \text{dual}) = 0.6, \quad w(\text{dual} \mid \text{dual}) = 1, \quad w(\text{multi} \mid \text{dual}) = 0.7, \quad D = 0.6+1+0.7 = 2.3.$$

约简中性度（分量 se）：

$$\mu^{(\text{dual})}(A) = \frac{0.6\,\bar{u}(\text{single}) + 1\,\bar{u}(\text{dual}) + 0.7\,\bar{u}(\text{multi})}{2.3}.$$

计算：
$$T: \frac{0.6\cdot 0.70 + 1\cdot 0.77 + 0.7\cdot 0.695}{2.3} = \frac{0.420+0.770+0.4865}{2.3} = \frac{1.6765}{2.3} \approx 0.7298,$$
$$I: \frac{0.6\cdot 0.225 + 1\cdot 0.165 + 0.7\cdot 0.230}{2.3} = \frac{0.135+0.165+0.161}{2.3} = \frac{0.461}{2.3} \approx 0.2004,$$
$$F: \frac{0.6\cdot 0.275 + 1\cdot 0.1575 + 0.7\cdot 0.190}{2.3} = \frac{0.165+0.1575+0.133}{2.3} = \frac{0.4555}{2.3} \approx 0.1980.$$

因此，在“双重采购”占优的情况下，超组合 A达到

$$\mu^{(\text{dual})}(A) \approx (0.7298,\ 0.2004,\ 0.1980)$$

.

3.5 多属性语言集

多属性语言集为对象赋予语言术语隶属度和考虑矛盾的权重，并在主导语境下汇总犹豫或单一术语评价。多属性语言集与犹豫模糊语言集 [502–504] 以及语言中智集 [505–509]密切相关。

定义 3.5.1（并态语言集（单项与犹豫变体））。设 P为非空有限对象全集，$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$为有限的语言术语集，并赋予其自然全序 $s_0 \prec s_1 \prec \cdots \prec s_g$。记 $\iota\colon S \to \{0,1,\ldots,g\}$为（保序）指标映射 $\iota(s_i) = i$，并定义归一化语言距离

$$d_S(s_i,s_j) \;:=\; \frac{|\iota(s_i) - \iota(s_j)|}{g} \;\in [0,1].$$

（A）语言矛盾（术语之间及犹豫集之间）。

（A1）（术语级 *DCF*）语言矛盾度是满足对称性和自反性的任意映射 $pCF\colon S\times S\to[0,1]$：$pCF(a,a)=0$ 且 $pCF(a,b)=pCF(b,a)$。一种规范选择为 $pCF(a,b):=d_S(a,b)$。

(A2) (提升到犹豫集) 对于非空的 $H,K\subseteq S$，定义提升的矛盾

$$\widehat{pCF}(H,K)\;:=\;\max\Big\{\;\max_{a\in H}\min_{b\in K}pCF(a,b),\;\max_{b\in K}\min_{a\in H}pCF(a,b)\;\Big\}\in[0,1],$$

and set $\widehat{pCF}(\varnothing,\varnothing):=0$ and $\widehat{pCF}(H,\varnothing)=\widehat{pCF}(\varnothing,K):=1$ otherwise.

(B) 值域与语言隶属度。固定 $s\in\mathbb{N}$（隶属度分量的数量）。我们考虑两个可接受的值域:

$$P_v\in\big\{\,S\;\;(\textit{single-term}\text{ variant}),\quad \mathcal{P}^\star(S):=\mathcal{P}(S)\setminus\{\varnothing\}\;\;(\textit{hesitant}\text{ variant})\,\big\}.$$

一种语言隶属度函数（*LDAF*）为

$$pdf:\;P\times P_v\;\longrightarrow\;[0,1]^s,\qquad pdf(x,\alpha)=\big(\mu_1(x,\alpha),\dots,\mu_s(x,\alpha)\big),$$

其中每个分量 μ_i 均为非负数，且不超过 1。

(C) 矛盾通道的融合（可选）。对于 $t\in\mathbb{N}_0$，令 $\{pCF_j\}_{j=1}^{t}$ 为如 **(A1)** 所述的 t（术语级）矛盾映射，并令 $\Phi:\;[0,1]^t\to[0,1]$ 为一种对称且逐坐标单调的融合运算，满足 $\Phi(0,\dots,0)=0$。（若 $t=0$，则设 $\Phi(\cdot)\equiv0$。）

（D）相容性权重与立体生成聚合。固定一个主导语言值 $\delta\in P_v$。定义相容性权重 $w(\cdot\mid\delta)\in[0,1]$ 如下:

$$\text{single-term:}\quad w(a\mid\delta)\;:=\;1-\Phi\big(pCF_1(a,\delta),\dots,pCF_t(a,\delta)\big)\qquad(a\in S),$$

$$\text{hesitant:}\quad w(H\mid\delta)\;:=\;1-\Phi\big(\widehat{pCF}_1(H,\delta),\dots,\widehat{pCF}_t(H,\delta)\big)\qquad(H\in\mathcal{P}^\star(S)).$$

对于 $x\in P$，δ–相对立体生成语言程度 $\Gamma^{(\delta)}(x)\in[0,1]^s$ 按分量定义为加权平均值

$$\Gamma_i^{(\delta)}(x)\;:=\;\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{\alpha\in P_v}w(\alpha\mid\delta)\,\mu_i(x,\alpha)}{\sum\limits_{\alpha\in P_v}w(\alpha\mid\delta)}, & \text{if }\sum_{\alpha\in P_v}w(\alpha\mid\delta)>0,\\[2mm] 0, & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad i=1,\dots,s.$$

立体生成语言集（*PLS*）与 $(P,\;S,\;P_v)$, $s, t, pdf, \{pCF_j\}$ 和 Φ 相关，是一个元组 le

$$\mathrm{PLS}\;:=\;\big(P,\;v,\;S,\;P_v,\;s,\;t,\;pdf,\;\{pCF_j\}_{j=1}^{t},\;\Phi,\;\Gamma^{(\delta)}\big),$$

其中，v 表示（语言）属性，$\Gamma^{(\delta)}$ 给出相对于主导值 δ、考虑矛盾因素的聚合语言隶属度。

表 3.10 总结了立体生成语言集的化简结果。

下面给出该概念的具体示例。

表 3.10：拟语言集的约简

参数设置	约简／含义
$t = 0$ （无矛盾通道）	$w(\alpha \mid \delta) \equiv 1$； $\Gamma^{(\delta)}$ 变为简单的无权平均值（与 δ无关），取自 P_v 。
$P_v = S$、 $s = 1$、 $t = 1$, $\Phi(z) = z$	标准矛盾学语言加权： $\Gamma^{(\delta)}(x)$是相对于支配关系的基于矛盾的加权平均值——犹豫项 δ。
$P_v = \mathcal{P}^\star(S)$, $t = 0$	犹豫模糊语言情形 [436, 510]：非空 S 的子集充当犹豫术语集，并通过未加权平均进行聚合。

例 3.5.2 （采购：在“非常好”政策下的供应商质量（单项术语 PLS））。设语言术语集为

$$S = \{s_0 = \text{Very Poor},\ s_1 = \text{Poor},\ s_2 = \text{Fair},\ s_3 = \text{Good},\ s_4 = \text{Very Good},\ s_5 = \text{Excellent}\},$$

具有索引映射 $\iota(s_i) = i$ 和 $g = 5$。定义语言距离 $d_S(s_i,\ s_j) = {}^{|\iota}{}_{(s_i)} - \iota\ s_j\ |\ (\ )$。取$t = 1$并设 $pCF(a,\ b) = d_S(a,\ b)$。占主导地位的语言值为 $\delta = s_4$ （“非常好”），因此兼容性权重为 $w(s_i \mid \delta) = 1 - d_S(s_i,\ s_4)$：

$$\big(w(s_0), w(s_1), w(s_2), w(s_3), w(s_4), w(s_5)\big) = (0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 0.8),$$

以及 $\sum_i w(s_i \mid \delta) = 3.8$。

对于供应商 A （论域 $P = \{A\}$，单项术语值域 $P_v = S$），假设语言隶属度（对于 $s = 1$）为

$$\big(\mu(A, s_0), \mu(A, s_1), \mu(A, s_2), \mu(A, s_3), \mu(A, s_4), \mu(A, s_5)\big) = (0.02,\ 0.08,\ 0.20,\ 0.40,\ 0.22,\ 0.08).$$

δ相对的粗糙语言度为

$$\Gamma^{(\delta)}(A) = \frac{\sum_{i=0}^{5} w(s_i \mid \delta)\, \mu(A, s_i)}{\sum_{i=0}^{5} w(s_i \mid \delta)}.$$

显式计算分子：

$$\begin{aligned} &0.2 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.08 + 0.6 \cdot 0.20 + 0.8 \cdot 0.40 + 1.0 \cdot 0.22 + 0.8 \cdot 0.08 \\ &= 0.004 + 0.032 + 0.120 + 0.320 + 0.220 + 0.064 \\ &= 0.760. \end{aligned}$$

因此

$$\Gamma^{(\delta)}(A) = \frac{0.760}{3.8} = 0.2000.$$

Thu在“非常好”策略下，供应商 A 考虑矛盾因素的聚合质量为 0.20。

例 3.5.3 （餐厅服务：以“非常好”为目标的犹豫评价（犹豫型 PLS））. 沿用上文的 S, ι, $g = 5$, d_S 和 $pCF = d_S$ 。采用犹豫变体，其取值域为非空项集的有限子族

$$P_v = \{H_1, H_2, H_3\}, \quad H_1 = \{s_3, s_4\},\ H_2 = \{s_2, s_3\},\ H_3 = \{s_4, s_5\}.$$

设主导值为 $\delta = \{s_4\}$。根据定义（A2），提升后的矛盾为

$$\widehat{pCF}(H, \delta) = \max_{a \in H} d_S(a, s_4).$$

因此，兼容性权重为

$$w(H_1 \mid \delta) = 1 - \max\{d_S(s_3, s_4), d_S(s_4, s_4)\} = 1 - \max\{0.2, 0\} = 0.8,$$

$$w(H_2 \mid \delta) = 1 - \max\{d_S(s_2, s_4), d_S(s_3, s_4)\} = 1 - \max\{0.4, 0.2\} = 0.6,$$

$$w(H_3 \mid \delta) = 1 - \max\{d_S(s_4, s_4), d_S(s_5, s_4)\} = 1 - \max\{0, 0.2\} = 0.8,$$

所以 $\sum w = 0.8 + 0.6 + 0.8 = 2.2$。

对于属性“服务速度”上的餐厅 R（论域 $P = \{R\}$），取（其中 $s = 1$）

$$\mu(R, H_1) = 0.60, \qquad \mu(R, H_2) = 0.25, \qquad \mu(R, H_3) = 0.35.$$

Then

$$\Gamma^{(\delta)}(R) = \frac{0.8 \cdot 0.60 + 0.6 \cdot 0.25 + 0.8 \cdot 0.35}{0.8 + 0.6 + 0.8} = \frac{0.480 + 0.150 + 0.280}{2.2} = \frac{0.910}{2.2} \approx 0.4136.$$

因此，针对“非常好”这一目标，犹豫型多元聚合得出的总体服务速度评分为 ≈ 0.414。

例 3.5.4（IT 服务台：考虑矛盾的（T, I, F）聚合（多分量 PLS））。IT 服务台为用户提供技术支持、故障排除、系统指导和问题解决服务，以确保日常计算机与网络运行顺畅（参见 [511]）。

沿用相同的 S, ι, $g = 5$, d_S, $pCF = d_S$，并取主导值 $\delta = s_4$。令 $s = 3$ 编码（T, I, F） =（真、非确定、假）满意度分量。对于属性“用户满意度”上的已解决工单 X，为每个 $s_i \in S$指定单项术语隶属度：

术语 s_i	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
$T = \mu_1(X,\ s_i)$	0.05	0.10	0.30	0.55	0.70	0.60
$I = \mu_2(X, s_i)$	0.10	0.15	0.20	0.20	0.15	0.15
$F = \mu_3(X,\ s_i)$	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.25

给定 $\delta = s_4$，权重为

$$\big(w(s_0), w(s_1), w(s_2), w(s_3), w(s_4), w(s_5)\big) = (0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 0.8), \quad \sum w = 3.8.$$

逐分量聚合：

$$\Gamma_T^{(\delta)}(X) = \frac{0.2 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.10 + 0.6 \cdot 0.30 + 0.8 \cdot 0.55 + 1.0 \cdot 0.70 + 0.8 \cdot 0.60}{3.8}$$

$$= \frac{0.01 + 0.04 + 0.18 + 0.44 + 0.70 + 0.48}{3.8} = \frac{1.85}{3.8} \approx 0.4868,$$

$$\Gamma_I^{(\delta)}(X) = \frac{0.2 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.15 + 0.6 \cdot 0.20 + 0.8 \cdot 0.20 + 1.0 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.15}{3.8}$$

$$= \frac{0.02 + 0.06 + 0.12 + 0.16 + 0.15 + 0.12}{3.8} = \frac{0.63}{3.8} \approx 0.1658,$$

$$\Gamma_F^{(\delta)}(X) = \frac{0.2 \cdot 0.80 + 0.4 \cdot 0.70 + 0.6 \cdot 0.50 + 0.8 \cdot 0.30 + 1.0 \cdot 0.20 + 0.8 \cdot 0.25}{3.8}$$

$$= \frac{0.16 + 0.28 + 0.30 + 0.24 + 0.20 + 0.20}{3.8} = \frac{1.38}{3.8} \approx 0.3632.$$

因此，在“非常好”的主导语境下，考虑矛盾因素的聚合三元组为

$$\Gamma^{(\delta)}(X) \approx (T, I, F) = (0.4868,\ 0.1658,\ 0.3632).$$

3.6 q阶正交对普利索根集

一个 q 级 n 元组多属性本体集合，用于对具有多属性隶属度和矛盾的元素进行建模，是 q 级正交对模糊集 [512, 513] 的推广。

记号 3.6.1. 固定整数 $n \geq 2$ 与 $q \in \mathbb{N}$，且满足 $q \geq 1$。将$[0,1]^n$ 中的 q-卦限约束集定义为

$$\mathbb{O}_{q,n} := \Big\{ (m_1, \ldots, m_n) \in [0,1]^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} m_i^q \ \leq \ n-1 \Big\}.$$

定义 3.6.2（q阶 n元组普利索根集（一般形式））。设 S 为一个论域，且 $P \subseteq S$ 非空。固定一个属性 v，其值集 Pv 非空。一个 q阶 n元组普利索根集 是一个五元组

$$\mathrm{PS}_{q,n} \ = \ (P,\, v,\, Pv,\, \mathrm{pdf}_{q,n},\, \mathrm{pCF}),$$

其中

- $\mathrm{pdf}_{q,\ n}$： $P \times Pv \to [0,1]^n$ 是返回一个 n元组的从属度函数

  $$\mathrm{pdf}_{q,n}(x,a) \ = \ \big(m_{a,1}(x), \ldots, m_{a,n}(x)\big),$$

  并满足 q-阶约束

  $$\sum_{i=1}^{n} \big(m_{a,i}(x)\big)^q \ \leq \ n-1 \qquad \text{for all } (x,a) \in P \times Pv;$$

  等价地，对所有（x, a），$\mathrm{pdf}_{q,n}(x,a) \in \mathbb{O}_{q,n}$；

- pCF： $Pv \times Pv \to [0,1]$ 是一个矛盾度，满足：对所有 $a, b \in Pv$，$\mathrm{pCF}(a,a) = 0$ 且 $\mathrm{pCF}(a,b) = \mathrm{pCF}(b,a)$。

当 $n = 2$ 时，我们得到正交对情形；对于一般的 n，我们得到一个正交向量，其隶属度受 q-和上界 $n-1$约束。

表 3.11 概述了 q-阶 n-元位势集 $\mathrm{PS}_{q,n}$的命名映射。

现在我们给出这一概念的具体示例。

例 3.6.3（医疗分诊（费马特正交对，$q = 3, n = 2$；属性 =症状严重程度））。设值集为 $Pv = \{s_0 =$ 无 $s_1 =$ 轻度 $s_2 =$ 中度 $s_3 =$ 重度$\}$，索引为 $\iota(s_i) = i$。通过归一化距离定义多元矛盾度

$$\mathrm{pCF}(s_i, s_j) = \frac{|\iota(s_i) - \iota(s_j)|}{3} \in [0,1],$$

并固定主导值 $\delta = s_3$（重度）。则兼容性权重为

$$w(s_i \mid \delta) = 1 - \mathrm{pCF}(s_i, \delta) = \Big(1 - \tfrac{3}{3},\, 1 - \tfrac{2}{3},\, 1 - \tfrac{1}{3},\, 1 - 0\Big) = (0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1),$$

其中 $\sum_i w(s_i \mid \delta) = 2$。

对于一位患者 x，假设“患有该疾病”与“未患该疾病”的费马型（正交对）度数分别为

a	s_0	s_1	s_2	s_3
$m_a(x) = \mu(x,a)$	0.05	0.35	0.70	0.88
$n_a(x) = \nu(x,a)$	0.98	0.90	0.80	0.38

表3.11： q阶 n元组plithogenic集$\mathrm{PS}_{q,n}$的命名映射

n （元组大小）	$q=2$	$q=3$
$n=2$ q阶直觉模糊集 [520, 521]在 PS 中$_{q,\ 2}$	毕达哥拉斯模糊集 [514–516] 嵌入于PS $_{2,2}$	费马模糊集 [517–519] em- 嵌入 PS 中 $_{3,2}$
$n=3$ q阶正交对中智集 集 [536, 537]、 q阶正交对 图像 模糊 集 [538–540], 以及 q阶正交对犹豫 PS 中嵌入的模糊集 [541, 542] 中 $_{q,3}$	毕达哥拉斯 中智 集 [334, 522, 523], 勾股 犹豫 模糊 set [524, 525], and 勾股 图像 模糊 嵌入 $\mathrm{PS}_{2,3}$ 中的集合 [526–528]	费马中智集 [529– 531], 费马图像模糊集 [532, 533], 和费马犹豫 嵌入于 $\mathrm{PS}_{3,3}$

注释。 (1)“毕达哥拉斯型” $\Leftrightarrow q=2$；“费马型” $\Leftrightarrow q=3$。(2) $n=2$ 对应正交对模糊情形； $n=3$ 对应正交对中智情形。

且每一对都满足 q 阶约束 $\mu^3+\nu^3\le 1$ （例如，对于 s_3： $0.88^3+0.38^3=0.681472+0.054872=0.736344\le 1$）。

Plithogenic 聚合（按 w 加权）得到

$$\mu^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.05+\frac{1}{3}\cdot 0.35+\frac{2}{3}\cdot 0.70+1\cdot 0.88}{2}=\frac{0+0.116666\ldots+0.466666\ldots+0.88}{2}=0.731666\ldots,$$

$$\nu^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.98+\frac{1}{3}\cdot 0.90+\frac{2}{3}\cdot 0.80+1\cdot 0.38}{2}=\frac{0+0.30+0.533333\ldots+0.38}{2}=0.606666\ldots.$$

聚合后的约束检验：

$$(\mu^{(\delta)})^3+(\nu^{(\delta)})^3\approx 0.731666^3+0.606667^3\approx 0.392+0.223=0.615<1.$$

因此，在“严重”情境下用于分诊的、考虑矛盾的 Fermatean 正交对为 $\left(\mu^{(\delta)},\ \nu^{(\delta)}\right)\approx(0.732,\ 0.607)$。

例 3.6.4 （信用风险（毕达哥拉斯中智正交向量， $q=2,\ n=3$；属性 =收入稳定性））。 设 $Pv=\{a_0=$ 低 $a_1=$ 中 $a_2=$ 高$\}$，其中 $\iota(a_i)=i$。令

$$\mathrm{pCF}(a_i,a_j)=\frac{|\iota(a_i)-\iota(a_j)|}{2},\qquad w(a\mid\delta)=1-\mathrm{pCF}(a,\delta),\quad \delta=a_2.$$

因此， $w(a_0\mid\delta)=0,\ w(a_1\mid\delta)=\frac{1}{2},\ w(a_2\mid\delta)=1$ 且 $\sum w=1.5$。

对于申请人 x，令毕达哥拉斯中智三元组（T,I,F）（有信用、未定、无信用）为

a	a_0	a_1	a_2
$T=\mu_1(x,a)$	0.20	0.55	0.85
$I=\mu_2(x,a)$	0.20	0.25	0.10
$F=\mu_3(x,a)$	0.90	0.55	0.35

每个值都满足 q-层约束 $\sum_{i=1}^{3}\mu_i^2\le n-1=2$ （例如，对于 a_2： $0.85^2+0.10^2+0.35^2=0.7225+0.01+0.1225=0.855\le 2$）。

按分量聚合：

$$T^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.20+\frac{1}{2}\cdot 0.55+1\cdot 0.85}{1.5}=\frac{0.275+0.85}{1.5}=\frac{1.125}{1.5}=0.75,$$

$$I^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.20+\frac{1}{2}\cdot 0.25+1\cdot 0.10}{1.5}=\frac{0.125+0.10}{1.5}=\frac{0.225}{1.5}=0.15,$$

$$F^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.90+\frac{1}{2}\cdot 0.55+1\cdot 0.35}{1.5}=\frac{0.275+0.35}{1.5}=\frac{0.625}{1.5}=0.416666\ldots.$$

聚合后的约束检查：

$$(0.75)^2+(0.15)^2+(0.416666\ldots)^2=0.5625+0.0225+0.1736\ldots\approx 0.7586<2.$$

因此，在“高收入稳定性”情境下，具有矛盾感知的毕达哥拉斯中智评估为

$$\big(T^{(\delta)},I^{(\delta)},F^{(\delta)}\big)=(0.75,\,0.15,\,0.4167).$$

例 3.6.5（消费电子产品可靠性（正交对，$q=4$、$n=2$；属性 = 保修期限））. 消费电子产品是个人为自用而购买的日常电子设备，包括手机、笔记本电脑、电视机、音频设备和可穿戴设备（参见 [543]）。

设 $Pv=\{b_0=1\text{ 年},\ b_1=2\text{ 年},\ b_2=3\text{ 年}\}$，其中 $\iota(b_i)=i$ 且

$$\mathrm{pCF}(b_i,b_j)=\frac{|\iota(b_i)-\iota(b_j)|}{2},\qquad \delta=b_2.$$

则 $w(b_0\mid\delta)=0$，$w(b_1\mid\delta)=\frac{1}{2}$，$w(b_2\mid\delta)=1$ 且 $\sum w=1.5$。

对于笔记本电脑型号 x，考虑“可靠”与“不可靠”的 q 阶（$q=4$）正交对：

b	b_0	b_1	b_2
$\mu(x,b)$	0.20	0.65	0.90
$\nu(x,b)$	0.98	0.60	0.30

每一对都满足 $\mu^4+\nu^4\le 1$（例如，对于 b_2：$0.90^4+0.30^4=0.6561+0.0081=0.6642\le 1$）.

聚合：

$$\mu^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.20+\frac{1}{2}\cdot 0.65+1\cdot 0.90}{1.5}=\frac{0.325+0.90}{1.5}=\frac{1.225}{1.5}=0.816666\ldots,$$

$$\nu^{(\delta)}(x)=\frac{0\cdot 0.98+\frac{1}{2}\cdot 0.60+1\cdot 0.30}{1.5}=\frac{0.30+0.30}{1.5}=\frac{0.60}{1.5}=0.4.$$

聚合后的约束检查：

$$(\mu^{(\delta)})^4+(\nu^{(\delta)})^4\approx 0.816666^4+0.4^4\approx 0.4449+0.0256=0.4705<1.$$

因此，在“3年保修”这一主导语境下，考虑矛盾的 q 阶（$q=4$）正交对为 $\big(\mu^{(\delta)},\ \nu^{(\delta)}\big)\approx(0.8167,\,0.4000)$。

3.7 类型-n 殆生成集

类型-n 殆生成集通过递归嵌套跨越 n 个层级的殆生成隶属度与矛盾，来建模层次化的不确定属性和关系 [544]。

定义 3.7.1（类型-n 犁晶集合）。 [544] 设 S 为一个全集，且 $P\subseteq S$。设 v 为一个属性，其取值属于集合 Pv。设 $s\ge 1$ 和 $t\ge 1$ 分别为隶属度函数和矛盾度函数的维数，是固定整数。维数为 $(s,\ t)$ 的类型-n犁晶集合，记作

$$PS^{(n,s,t)}\ =\ \big(P,\,v,\,Pv,\,pdf,\,pCF\big),$$

递归定义如下：

表 3.12：当 $t=0$ 时 Type-n 质性集的命名（无显式矛盾维度）

隶属维度 s	t	$PS^{(n,s,t)}$ 的标准名称
1	0	Type-n 模糊集 [545–547]
2	0	Type-n直觉模糊集
3	0	类型-n 中智集 [496, 544]
4	0	类型-n 四分体中智集
5	0	Type-n 五分区中智集

注：此处的 $t=0$ 表示顶层未附带矛盾度函数。这是定义 3.7.1 的一个退化（$t=0$）变体，解释为“没有显式的矛盾通道”。

1. B基本情况（$n=1$）：一个*Type-1 Plithogenic Set*就是一个*classical Plithogenic Set*（参见 [10]），即: e.

$$pdf : P \times Pv \;\to\; [0,1]^s, \quad pCF : Pv \times Pv \;\to\; [0,1]^t,$$

满足以下公理:

(a) 矛盾的自反性:

$$pCF(a,a) \;=\; 0, \quad \forall\, a \in Pv,$$

(b) 矛盾的对称性:

$$pCF(a,b) \;=\; pCF(b,a), \quad \forall\, a,b \in Pv.$$

(c) 因此，Type-1 杂合集为

$$PS^{(1,s,t)} \;=\; \big(P,\, v,\, Pv,\, pdf,\, pCF\big),$$

其中， pdf和 pCF分别映射到 $[0,1]^s$和 $[0,1]^t$。

2. 递归情形（$n>1$）：一个*Type-n* 杂合集定义为

$$pdf : P \times Pv \;\longrightarrow\; \mathcal{M}_{n-1}^{(s,t)}([0,1]), \quad pCF : Pv \times Pv \;\longrightarrow\; \mathcal{M}_{n-1}^{(s,t)}([0,1]),$$

其中，每个 $\mathcal{M}_k^{(s,t)}([0,1])$ 表示单位区间 $[0,1]$ 上所有$Type\text{-}k$ 杂合集（维数为（s, t））的集合，其对应的是隶属度和矛盾度值。[2]
具体而言，若（$n-1$） $=1$，则递归以经典的多源集告终；若（$n-1$） >1，则递归继续。因此，Type-n 多源集是一种（n层级）结构，其中每个隶属度项本身都是一个 Type-($n-1$) 多源对象。

表 3.12 和表 3.13 展示了 Type-n 多源集的相关概念。

现在我们给出该概念的具体示例。

示例 3.7.2（医疗保健治疗规划——Type-2 多源集（$n=2$，直觉模糊$s=3$，一个矛盾通道 $t=1$））。医疗保健治疗规划通过整合诊断、风险、目标和资源，设计针对患者个体的干预方案，以优化临床治疗效果并尽量减少并发症（参见 [569]）。

设论域 P 包含一名患者 x。顶层属性为治疗强度，取值为$Pv=\{L=$低 $M=$中 $H=$高$\}$，索引为 $\iota(L)=0$, $\iota(M)=1$, $\iota(H)=2$。以归一化距离定义顶层矛盾

$$\mathrm{pCF}(a,b)=\frac{|\iota(a)-\iota(b)|}{2}\in[0,1], \qquad w(a\mid\delta)=1-\mathrm{pCF}(a,\delta),\quad \delta=H.$$

[2]更准确地说，在每个递归层级，DAF 的取值范围 $[0,1]^s$ 会被一组维度为 s 的多源 隶属对象所取代，其中每个对象本身都是一个 Type-($n-1$) 多源集。同样，DCF 的取值范围 $[0,1]^t$ 会被 Type-($n-1$) 多源矛盾对象所取代。

表 3.13: $n=2$、$n=3$ 与 $t=0$的具体实例

n	s	t	标准名称
2	1	0	二型模糊集 [548–550]
2	1	0	二型影子集 [551, 552]
2	2	0	二型直觉模糊集 [553, 554]
2	2	0	二型模糊集 [555, 556]
2	3	0	二型中智集 [191, 557]
2	3	0	二型图像模糊集 [558, 559]
2	3	0	二型犹豫模糊集 [560, 561]
2	3	0	二型球形模糊集 [562]
2	4	0	二型四分中智集
2	5	0	二型五分中智集
3	1	0	三型模糊集 [161, 262, 563, 564]
3	2	0	三型直觉模糊集 [565–567]
3	3	0	三型中智集 [568]
3	4	0	三型四分中智集
3	5	0	三型五分中智集

解读。增大 n 会提高类型层级（普利索真值隶属度的迭代深度）。选择 $s\in\{1,2,3,4,5\}$ 可确定隶属度元组的形式：模糊（$s=1$）、直觉模糊（$s=2$）、中智（$s=3$）.....；设置 $t=0$ 会在顶层抑制矛盾维度。

Hence $w(L\,|\,H)=0,\ w(M\,|\,H)=\frac{1}{2},\ w(H\,|\,H)=1$ and $\sum w=1.5$.

对于每个顶层值 $a\in\{L,M,H\}$，隶属对象是一个 *Type-1* 交错生成（中智）三元组 $(T,I,F)\in[0,1]^3$ 聚合自微属性的隶属度，其取值为 $Q=\{q_0=$较差 $q_1=$一般 $q_2=$良好$\}$，$\jmath(q_i)=i$、微观 DCF $\mathrm{pCF}(q_i,q_j)=|i-j|/2$，以及微观权重 $w(q\mid q_2)=1-\mathrm{pCF}(q,q_2)$，即 $(0,1\,2,1)$，总和为 1.5。

x 的微观层级数据（中智 (T,I,F)）：

强度 a	q_0（较差）	q_1（一般）	q_2（良好）
L	(0.35, 0.25, 0.60)	(0.55, 0.20, 0.45)	(0.70, 0.15, 0.35)
M	(0.45, 0.25, 0.55)	(0。65，0。18，0。40)	(0.82, 0.12, 0.28)
H	(0.52, 0.20, 0.48)	(0.78, 0.14, 0.26)	(0.90, 0.10, 0.18)

Micro-聚合以获得每个 a 处的 *Type-1* 中智三元组（权重为 $0,1\,2,1$；总和为 1.5）：

$$
\begin{aligned}
(T,I,F)_L &= \Big(\tfrac{0\cdot0.35+\frac{1}{2}\cdot0.55+1\cdot0.70}{1.5},\ \tfrac{0\cdot0.25+\frac{1}{2}\cdot0.20+1\cdot0.15}{1.5},\ \tfrac{0\cdot0.60+\frac{1}{2}\cdot0.45+1\cdot0.35}{1.5}\Big)\\
&= (0.6500,\ 0.1667,\ 0.3833),\\
(T,I,F)_M &= (0.7633,\ 0.1400,\ 0.3200), \qquad (T,I,F)_H = (0.8600,\ 0.1133,\ 0.2067).
\end{aligned}
$$

相对于 $\delta=H$ 的顶层二型聚合（权重 $0,1\text{-}2,1$；总和为 1.5）：

$$
\begin{aligned}
T^{(\delta)}(x) &= \frac{0\cdot0.6500+\frac{1}{2}\cdot0.7633+1\cdot0.8600}{1.5}=0.8278,\\
I^{(\delta)}(x) &= \frac{0\cdot0.1667+\frac{1}{2}\cdot0.1400+1\cdot0.1133}{1.5}=0.1222,\\
F^{(\delta)}(x) &= \frac{0\cdot0.3833+\frac{1}{2}\cdot0.3200+1\cdot0.2067}{1.5}=0.2444.
\end{aligned}
$$

因此，在主导情境“高强度”下，二型 中智评价为 (T, I, F) ≈(0.828, 0.122,0.244)。

例3.7.3 （全球物流可靠性——3型普利托根集（$n = 3$，模糊 $s = 1$， $t = 1$））。全球物流可靠性衡量国际供应链在全球市场中按合同准时、完好地交付货物的一致性（参见 [570]）。

我们沿三个嵌套层级评估供应商 x 。

第3层（顶层）：属性供应商范围 $V = \{v_0 =$ 本地 $v_1 =$ 区域 $v_2 =$ 全球$\}$，指标 $\iota(v_i) = i$，DCF pCF$(v_i,\ v_j) = |i - j|/2$，主导 $\delta_V = v_2$，权重 $w_V =$ （0，$1\bar{2}$，1），总和1。5。

第2层（中层）：属性交付方式 $D = \{d_0 =$公路 $d_1 =$航空 $d_2 =$海运$\}$，指标0，1，2，DCF $|i - j|/2$，主导 $\delta_D = d_1$，权重 $w_D =$（12，1,¯ 0），总和1。5。

第 1 层（底层）：属性 天气 $W = \{w_0 =$晴朗 $w_1 =$下雨 $w_2 =$暴风雨$\}$，指标 0、1、2，DCF $|i - j|/2$，主导项 $\delta_W = w_0$，权重 $w_W =$(1、12¯、0)，总和为 1。5。

底层模糊可靠性评分 $\mu \in [0, 1]$ （按配送方式和天气划分）：

d	μ（晴朗）	μ（下雨）	μ（暴风雨）
road	0.80	0.60	0.25
air	0.90	0.75	0.30
sea	0.85	0.55	0.20

第 1 层聚合（权重 1、12、0；总和为 1。5）：

$$\mu_{\text{road}} = \frac{1\cdot 0.80 + \frac{1}{2}\cdot 0.60 + 0\cdot 0.25}{1.5} = 0.7333,$$

$$\mu_{\text{air}} = \frac{1\cdot 0.90 + \frac{1}{2}\cdot 0.75 + 0\cdot 0.30}{1.5} = 0.8500,$$

$$\mu_{\text{sea}} = \frac{1\cdot 0.85 + \frac{1}{2}\cdot 0.55 + 0\cdot 0.20}{1.5} = 0.7500.$$

按供应商范围进行第 2 级聚合（主导项为 d_1；权重为 12，1，0；总和为 1。5）。举例来说，假设本地／区域／全球范围的第 1 级结果略有不同:

scope	μ_{road}	μ_{air}	μ_{sea}
local (v_0)	0.7333	0.8500	0.7500
regional (v_1)	0.7000	0.8800	0.7200
global (v_2)	0.7600	0.9200	0.7800

Then

$$\mu_{v_0} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.7333 + 1\cdot 0.8500 + 0\cdot 0.7500}{1.5} = 0.8111,$$

$$\mu_{v_1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.7000 + 1\cdot 0.8800}{1.5} = 0.8200,$$

$$\mu_{v_2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.7600 + 1\cdot 0.9200}{1.5} = 0.8667.$$

第 3 级聚合（主导项为 v_2；权重为 0，12，1；总和为 1。5）：

$$\mu^{(\delta_V)}(x) = \frac{0\cdot 0.8111 + \frac{1}{2}\cdot 0.8200 + 1\cdot 0.8667}{1.5} = \frac{0.4100 + 0.8667}{1.5} = 0.8511.$$

因此，在“全局范围”语境下，*Type-3* 模糊多元型可靠性为 $\mu \approx 0.8$

例 3.7.4（大学录取适配性——Type-2 多元型集合（$n=2$，直觉模糊 $s=2,t=1$））。大学录取适配性用于评估申请人的学业记录、能力和背景与大学的入学要求及期望的匹配程度（参见 [571]）。

主要属性 项目强度 $Pv=\{L=$轻度 $B=$适中 $I=$高强度$\}$，指标为 0、1、2，DCF pCF$(a,\ b)$ $=|i-j|/2$，主导项 $\delta=I$，权重 $w(L\,|\,I)=0,\quad w(B\,|\,I)=\frac{1}{2},\quad w(I\,|\,I)=1$，总和为 1。5。

对于每个 $a\in Pv$，隶属对象为 第一型直觉模糊 $(\mu,\ \nu)$，由微观属性 学习习惯 $Q=\{q_0=$较差 $q_1=$一般 $q_2=$良好$\}$聚合而成，微观 DCF 为 $|i-j|/2$，主导项为 q_2，微观权重为 (0、1 2、1)，总和为 1。5。所有配对均满足 $\mu+\nu\le 1$。

微观层级数据与聚合：

a	q_0	q_1	q_2
L	(0.30, 0.60)	(0。55，0。35)	(0.70, 0.20)
B	(0.40, 0.55)	(0.65, 0.30)	(0.80, 0.15)
I	(0.45, 0.50)	(0。72，0。22)	(0.90, 0.08)

第一级聚合（权重为 0, 1 2, 1；总和为 1.5）：

$$(\mu,\nu)_L=\Big(\tfrac{0\cdot0.30+\frac{1}{2}\cdot0.55+1\cdot0.70}{1.5},\ \tfrac{0\cdot0.60+\frac{1}{2}\cdot0.35+1\cdot0.20}{1.5}\Big)=(0.6500,\ 0.2500),$$
$$(\mu,\nu)_B=(0.7500,\ 0.2000),\qquad (\mu,\nu)_I=(0.8400,\ 0.1267).$$

(检验：$0.65+0.25=0.90\le 1$, $0.75+0.20=0.95\le 1$, $0.84+0.1267\approx 0.9667\le 1$。)

顶层 Type-2 聚合（权重为 0, 1 2, 1；总和为 1.5）：

$$\mu^{(\delta)}=\frac{0\cdot0.65+\frac{1}{2}\cdot0.75+1\cdot0.84}{1.5}=\frac{0.375+0.84}{1.5}=0.8100,$$
$$\nu^{(\delta)}=\frac{0\cdot0.25+\frac{1}{2}\cdot0.20+1\cdot0.1267}{1.5}=\frac{0.10+0.1267}{1.5}=0.1511.$$

因此，在“强化课程”情境下，*Type-2* 直觉模糊评价为 $(\mu,\nu)\approx(0.810, 0.151)$，其中 $\mu+\nu\approx 0.961\le 1$。

3.8 迭代多重斥多元集

多重斥多元集通过对元素赋予多分量隶属度，并表示属性值之间的矛盾关系，从而在应用中实现丰富而灵活的不确定性表示。迭代多重斥多元集递归地分配斥多元值隶属度，逐层刻画隶属关系与矛盾关系，以实现分层、多属性且稳健的不确定性建模 [407]。

记号 3.8.1。固定一个非空论域 P（待评估对象的集合）、一个属性 v 及其有限值集 P_v，以及两个有限指标集：

$$\mathcal{I}=\{1,\dots,k\}\quad \textit{for DAF components},\qquad \mathcal{J}=\{1,\dots,\ell\}\quad \textit{for DCF components}.$$

设 $\{L_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 和 $\{L'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ 为完备格（通常为 $L_i=L'_j=[0,1]$）。

定义 3.8.2（迭代多元矛盾本体陪域）。 [407] 将 0 级矛盾本体纤维定义为

$$\mathfrak{L}^{(0)} := \prod_{i\in\mathcal{I}} L_i.$$

递归地，对于 $n \geq 1$ 集

$$\mathfrak{L}^{(n)}(P, P_v) := \Big\{ \Phi : P \times P_v \longrightarrow \mathfrak{L}^{(n-1)}(P, P_v) \Big\}.$$

（因此， $\mathfrak{L}^{(n)}$ 中的一个元素是定义在 $P \times P_v$ 上的多元值映射，其取值为层级为（$n-1$）的对象。）

定义 3.8.3（迭代多元集（阶数 n））。 [407] 设 $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$。定义在 P 上的阶数为 n 的迭代多元集是一个元组

$$\mathrm{IMPS}^{(n)} := \Big(P,\ v,\ P_v,\ \{\,\mathrm{PDF}_i^{(n)}\,\}_{i\in\mathcal{I}},\ \{\,\mathrm{pCF}_j\,\}_{j\in\mathcal{J}}\Big),$$

其中

- 对于每个 $i \in \mathcal{I}$， i阶迭代隶属度函数（DAF）为

$$\mathrm{PDF}_i^{(n)} :\ P \times P_v \ \longrightarrow\ \mathfrak{L}^{(n-1)}(P, P_v);$$

- 对于每个 $j \in \mathcal{J}$，矛盾度函数 (DCF)

$$\mathrm{pCF}_j :\ P_v \times P_v \ \longrightarrow\ L'_j$$

  具有对称性和自反性：$\mathrm{pCF}_j(\alpha, \alpha) = 0$， $\mathrm{pCF}_j(\alpha, \beta) = \mathrm{pCF}_j(\beta, \alpha)$，对所有 $\alpha, \beta \in P_v$均成立。

当 $n = 1$ 时，我们得到经典（非迭代）情形 $\mathrm{PDF}_i^{(1)}$： $P \times P_v \to \mathfrak{L}^{(0)} = \prod_{i\in\mathcal{I}} L_i$，即普通的 MultiPlithogenic DAF。

表 3.14 按阶数和实例展示了迭代 MultiPlithogenic 集的分类。

现在，我们给出所提概念的具体示例。

示例 3.8.4（智能家居 HVAC 模式选择——含两个模糊分量的二阶 IMPS）。我们评估一处住宅 $x \in P$ 在属性 *HVAC* 模式 下的情况，其取值为 $P_v = \{E = 节能\ \ N = 普通\ \ T = 强力\}$。定义 $\iota(E) = 0,\ \iota(N) = 1,\ \iota(T) = 2$ 以及项级矛盾

$$\mathrm{pCF}(a, b) = \frac{|\iota(a) - \iota(b)|}{2} \in [0, 1].$$

固定主导上下文 $\delta = T$，使兼容性权重为

$$w(E\,|\,T) = 0, \qquad w(N\,|\,T) = \tfrac{1}{2}, \qquad w(T\,|\,T) = 1, \qquad \sum w = 1.5.$$

这是一个二阶迭代多重融合集，包含两个 DAF 分量：（i）节省成本 $c \in [0, 1]$（数值越高，成本越低）；（ii）舒适度 $u \in [0, 1]$（数值越高，舒适度越高）。在第 1 级（内部融合集对象）中，每种模式 $a \in P_v$ 都根据微属性室外温度$Q = \{$Mild,Warm,Hot$\}$进行聚合，其索引为 0,1, 2，微型 DCF 为 $|i - j|$/2，主导微情境为“Hot”，微权重为 $w_Q(\mathrm{Mild}) = 0,\ w_Q(\mathrm{Warm}) = \frac{1}{2},\ w_Q(\mathrm{Hot}) = 1$（总和为 1.5）。

表3.14：按阶数和实例划分的迭代多重可塑集分类

阶数	一般族	模糊实例	直觉模糊实例	中智 in-立场
1	多普利西集合	多重模糊集合 [407, 572, 573]	多重直觉主义模糊 Set [574–576] (cf. 多重模糊集 [577, 578])	多重中智 Set [408, 579–581]（参见多犹豫模糊 Set [582–584] and 多图像模糊集 [585]）
$n \geq 2$	迭代多重等离子集（阶数 n）	迭代多重模糊集（阶数 n） [407]	迭代多直觉-主义的模糊 Set（n阶） [407]	迭代多中智-智识集合（阶 n） [407]

DAF 的陪域及典型分量形状。在阶数 1时：$\mathrm{PDF}_i^{(1)}:\ P \times P_v \to \mathfrak{L}^{(0)} = \prod_{i\in\mathcal{I}} L_i$。典型取值：

$$\begin{aligned}
&\text{MultiFuzzy:} && L_i = [0,1] \ \Rightarrow\ (\mu_i)_{i\in\mathcal{I}} \in [0,1]^k,\\
&\text{MultiIntuitionistic Fuzzy:} && L_i = [0,1]^2 \ \Rightarrow\ (\mu_i,\nu_i) \text{ with } \mu_i+\nu_i \le 1,\\
&\text{MultiNeutrosophic:} && L_i = [0,1]^3 \ \Rightarrow\ (T_i,I_i,F_i) \in [0,1]^3.
\end{aligned}$$

在阶 $n \geq 2$：$\mathrm{PDF}_i^{(n)}:\ P \times P_v \to \mathfrak{L}^{(n-1)}\ (P,\ P_v)$。

关于 x的一级数据：

模式 a	Mild	Warm	Hot
$E:\ (c,\ u)$	(0.85, 0.60)	(0.75, 0.55)	(0.65, 0.50)
$N:(c,\ u)$	(0.70, 0.75)	(0.60, 0.80)	(0.50, 0.85)
$T:\ (c,u)$	(0.55, 0.88)	(0.45, 0.92)	(0.35, 0.95)

一级聚合（权重 $0, 1\,2, 1$；分母 1.5）：

$$\begin{aligned}
(c,u)_E &= \Big(\tfrac{0\cdot 0.85+\frac{1}{2}\cdot 0.75+1\cdot 0.65}{1.5},\ \tfrac{0\cdot 0.60+\frac{1}{2}\cdot 0.55+1\cdot 0.50}{1.5}\Big) = (0.6833,\ 0.5167),\\
(c,u)_N &= (0.5333,\ 0.8333), \qquad (c,u)_T = (0.3833,\ 0.9400).
\end{aligned}$$

相对于 $\delta = T$ 的顶层（二阶）聚合（权重 $0, 1\,2, 1$；分母 1.5）：

$$\begin{aligned}
c^{(\delta)}(x) &= \tfrac{0\cdot 0.6833+\frac{1}{2}\cdot 0.5333+1\cdot 0.3833}{1.5} = \tfrac{0.2667+0.3833}{1.5} = 0.4333,\\
u^{(\delta)}(x) &= \tfrac{0\cdot 0.5167+\frac{1}{2}\cdot 0.8333+1\cdot 0.9400}{1.5} = \tfrac{0.4167+0.9400}{1.5} = 0.9044.
\end{aligned}$$

因此，在占主导地位的“Turbo”情境下，二阶多模糊评估结果为 $(c,u) \approx (0.4333, 0.9044)$。

示例 3.8.5（欺诈警报分流——含两个模糊分量的二阶 IMPS）。设 $P_v = \{I = \text{忽略},\ M = \text{监控},\ B = \text{拦截}\}$，其中 $\iota(I) = 0, \iota(M) = 1, \iota(B) = 2$，$\mathrm{pCF}(a,b) = |\iota(a) - \iota(b)|/2$，占主导地位的 $\delta = B$给出 $w(I\,|\,B) = 0,\ w(M\,|\,B) = \frac{1}{2},\ w(B\,|\,B) = 1$（总和为 1.5）。

在内层记录两个分量：精确率 $p \in [0,1]$ 和召回率 $r \in [0,1]$。每个操作a 都基于微观属性 证据严重程度 $Q = \{\ell = \text{低},\ m = \text{中},\ h = \text{高}\}$ 进行聚合，索引为 $0, 1, 2$，微观 DCF $|i-j|/2$，占主导地位的 h，微观权重为 $(0, 1\,2, 1)$（总和为 1.5）。

一级数据：

a	$(p,r)_\ell$	$(p,r)_m$	$(p,r)_h$
I	$(0.95, 0.20)$	$(0.85, 0.35)$	$(0.70, 0.50)$
M	$(0.90, 0.50)$	$(0.82, 0.70)$	$(0.75, 0.85)$
B	$(0.80, 0.60)$	$(0.72, 0.80)$	$(0.65, 0.95)$

一级聚合（权重 0，1 2，1；分母 1。5）：

$$(p,r)_I = \Big(\tfrac{0\cdot 0.95+\frac{1}{2}\cdot 0.85+1\cdot 0.70}{1.5},\ \tfrac{0\cdot 0.20+\frac{1}{2}\cdot 0.35+1\cdot 0.50}{1.5}\Big) = (0.7500,\ 0.4500),$$
$$(p,r)_M = (0.7733,\ 0.8000), \qquad (p,r)_B = (0.6733,\ 0.9000).$$

相对于 $\delta = B$ 的顶层（二阶）聚合（权重 0、1 2、1；分母 1。5）：

$$p^{(\delta)}(x) = \frac{0\cdot 0.7500+\frac{1}{2}\cdot 0.7733+1\cdot 0.6733}{1.5} = \frac{0.3867+0.6733}{1.5} = 0.7066,$$
$$r^{(\delta)}(x) = \frac{0\cdot 0.4500+\frac{1}{2}\cdot 0.8000+1\cdot 0.9000}{1.5} = \frac{0.4000+0.9000}{1.5} = 0.8667.$$

因此，在主导的“区块”语境中，二阶多模糊评估为（p、r）$\approx$(0。7066、0。8667).

示例 3.8.6（公共交通规划——包含两个中智分量的二阶 IMPS）。公共交通规划旨在设计、安排并优化公交车、火车及路线，以便在全市范围内高效、经济、安全且可持续地运送乘客（参见 [586, 587]）。

我们选择服务频率 $P_v = \{L = \text{低},\ M = \text{中},\ H = \text{高}\}$，$\iota(L) = 0$，$\iota(M) = 1$，$\iota(H) = 2$，pCF($a$，$b$) $= |\iota(a) - \iota(b)|/2$，主导项为 $\delta = H$，因此 $w(L \mid H) = 0$，$w(M \mid H) = \frac{1}{2}$，$w(H \mid H) = 1$（总和为 1。5）。

这个二阶多重中智实例包含两个分量，每个分量都是一个中智三元组（T，I，F）：分量 1 = 可靠性，分量 2 = 低拥挤度（舒适度）。在第 1 层，每个频率 a按一天中的时段微属性 $Q = \{$OP = 非高峰，PK = 高峰，LN = 深夜$\}$聚合，索引为 0，1，2，微观 DCF 为 $|i - j|/2$，主导微观情境为 PK，微观权重为 w_Q(OP) $=1\ 2$，w_Q(PK) $= 1$，w_Q(LN) $= \frac{1}{2}$ (总和 2.0)。

x的第 1 层数据：

可靠性（T，I，F）

a	OP	PK	LN
L	(0.70, 0.20,0.30)	(0.55,0.25, 0.45)	(0.65, 0.22, 0.35)
M	(0.78, 0.18,0.25)	(0.68,0.20, 0.35)	(0.72, 0.18, 0.28)
H	(0.82, 0.15,0.22)	(0.80,0.14, 0.20)	(0.78, 0.16, 0.22)

低拥挤度（T，I，F）

a	OP	PK	LN
L	(0.80, 0.15,0.20)	(0。40，0。30，0。60)	(0.75, 0.18, 0.25)
M	(0.75, 0.18,0.25)	(0.55,0.25, 0.45)	(0.70, 0.20, 0.30)
H	(0.70, 0.22,0.30)	(0.50,0.28, 0.50)	(0.65, 0.24, 0.35)

第一级聚合（权重 1 2，1，1 2；分母 2.0）：

可靠性

$$(T,I,F)_L = \Big(\tfrac{0.5\cdot 0.70+1\cdot 0.55+0.5\cdot 0.65}{2},\ \tfrac{0.5\cdot 0.20+1\cdot 0.25+0.5\cdot 0.22}{2},\ \tfrac{0.5\cdot 0.30+1\cdot 0.45+0.5\cdot 0.35}{2}\Big)$$
$$= (0.6125,\ 0.2300,\ 0.3875),$$
$$(T,I,F)_M = (0.7150,\ 0.1900,\ 0.3075), \qquad (T,I,F)_H = (0.8000,\ 0.1475,\ 0.2100).$$

低拥挤度

$$\begin{aligned}(T,I,F)_L &= \Big(\tfrac{0.5\cdot0.80+1\cdot0.40+0.5\cdot0.75}{2},\ \tfrac{0.5\cdot0.15+1\cdot0.30+0.5\cdot0.18}{2},\ \tfrac{0.5\cdot0.20+1\cdot0.60+0.5\cdot0.25}{2}\Big)\\ &= (0.5875,\ 0.2325,\ 0.4125),\\ (T,I,F)_M &= (0.6375,\ 0.2200,\ 0.3625), \qquad (T,I,F)_H = (0.5875,\ 0.2550,\ 0.3958).\end{aligned}$$

相对于 $\delta = H$ 的顶层（2阶）聚合（权重$0,_{1\,2},1$；分母1.5）：–

可靠性

$$\begin{aligned}T^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.6125+\frac{1}{2}\cdot0.7150+1\cdot0.8000}{1.5} = \frac{0.3575+0.8000}{1.5} = 0.7717,\\ I^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.2300+\frac{1}{2}\cdot0.1900+1\cdot0.1475}{1.5} = \frac{0.0950+0.1475}{1.5} = 0.1617,\\ F^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.3875+\frac{1}{2}\cdot0.3075+1\cdot0.2100}{1.5} = \frac{0.1538+0.2100}{1.5} = 0.2425.\end{aligned}$$

低拥挤

$$\begin{aligned}T^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.5875+\frac{1}{2}\cdot0.6375+1\cdot0.5875}{1.5} = \frac{0.3188+0.5875}{1.5} = 0.6042,\\ I^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.2325+\frac{1}{2}\cdot0.2200+1\cdot0.2550}{1.5} = \frac{0.1100+0.2550}{1.5} = 0.2433,\\ F^{(\delta)} &= \frac{0\cdot0.4125+\frac{1}{2}\cdot0.3625+1\cdot0.3958}{1.5} = \frac{0.1813+0.3958}{1.5} = 0.3958.\end{aligned}$$

因此，在占主导地位的“高频”语境下，2阶多重中智输出为：可靠性（T,I,F） $\approx$(0.7717, 0.1617, 0.2425)以及低拥挤（T,I,F） $\approx$(0.6042, 0.2433, 0.3958)。

3.9 区间值普利斯托杰尼克集

区间值矛盾学集为每个对象赋予区间值隶属度和矛盾度，用有界范围而非单个数值来处理不确定性 [588]。

定义 3.9.1（区间值矛盾学集）。[588] 设 S 为一个全集， $P \subseteq S$为其非空子集。设 v 为一个属性，其可能取值集合为 Pv。取两个正整数 $s \geq 1$ 和 $t \geq 1$。记

$$\mathcal{I}([0,1]) \ := \ \{\, [\ell, u] \subseteq [0,1] \mid 0 \leq \ell \leq u \leq 1 \,\}$$

为 $[0,1]$的所有闭子区间组成的族。

维数为（$s,\ t$）的区间值矛盾学集（IVPS）是一个元组

$$PS_{\mathrm{IV}}^{(s,t)} \ = \ \big(P,\, v,\, Pv,\, pdf_{\mathrm{IV}},\, pCF_{\mathrm{IV}}\big),$$

其中

1. 隶属度区间值函数（区间值 DAF）

$$pdf_{\mathrm{IV}} : P \times Pv \longrightarrow \big(\mathcal{I}([0,1])\big)^{s}$$

为每一对 $(x,a) \in P \times Pv$ 指定一个隶属区间的 s–元组

$$pdf_{\mathrm{IV}}(x,a) \ = \ \big([\alpha_1^L(x,a), \alpha_1^U(x,a)], \ldots, [\alpha_s^L(x,a), \alpha_s^U(x,a)]\big),$$

其中，对所有 $i = 1,\ldots,s$， $0 \leq \alpha_i^L(x,a) \leq \alpha_i^U(x,a) \leq 1$；

2. 该区间值矛盾度函数 （区间值 DCF）

$$pCF_{\mathrm{IV}} : Pv \times Pv \longrightarrow \big(\mathcal{I}([0,1])\big)^t$$

为每一对 $(a,b) \in Pv \times Pv$ 指定一个由矛盾区间组成的 t 元组

$$pCF_{\mathrm{IV}}(a,b) \;=\; \big([\beta_1^L(a,b),\beta_1^U(a,b)],\ldots,[\beta_t^L(a,b),\beta_t^U(a,b)]\big),$$

其中对所有 $j=1,\ldots,t$，有 $0 \le \beta_j^L(a,b) \le \beta_j^U(a,b) \le 1$，并且满足通常的多值公理:

- （自反性）对所有 $a \in Pv$,

$$pCF_{\mathrm{IV}}(a,a) \;=\; \big([0,0],\ldots,[0,0]\big);$$

- （对称性）对所有 $a,b \in Pv$,

$$pCF_{\mathrm{IV}}(a,b) \;=\; pCF_{\mathrm{IV}}(b,a).$$

如果对每一个 (x,a) 和每一个 (a,b)，区间都是退化的，即

$$[\alpha_i^L(x,a),\alpha_i^U(x,a)] = [\alpha_i(x,a),\alpha_i(x,a)], \qquad [\beta_j^L(a,b),\beta_j^U(a,b)] = [\beta_j(a,b),\beta_j(a,b)],$$

那么 $PS^{(s,t)}{}_{\mathrm{IV}}$ 就退化为维度为（s,t）的经典（精确值）多元混杂集。

表 3.15 的内容描述了典型的区间值模糊集和中智集如何作为区间值多元混杂集（IVPS）的特例出现。

表 3.15：将 s 设为区间分量的数量，并取 $t=0$ （无 DCF）或 $t \ge 1$ （考虑 DCF），即可将典型的区间值模糊／中智族视为区间值多元集（IVPS）的特例。

区间值集	s	t	**通过 IVPS 推广**
区间值模糊集 [589–591]	1	0/1	单区间隶属度为 $pdf_{\mathrm{IV}}(\cdot,\ \cdot) \in \mathcal{I}([0,1])$；反驳可选。
区间值直觉主义模糊集 [592–595]	2	0/1	两个区间分量（隶属度、非隶属度）成为 s=2 多属性区间。
区间值模糊 [596,597]）	2	0/1	（区间-sets
区间值毕达哥拉斯模糊集 [598,599]	2	0/1	两个区间分量变为 s=2 plithogenic 区间。
区间值中智集 [600–603]	3	0/1	三个区间分量（真、犹豫、假）变为 s=3 普拉斯托基区间。
区间值图片模糊集 [604–606]	3	0/1	三个区间分量变成 s=3 多属性区间。
区间值犹豫的模糊集 [607,608]	3	0/1	三个区间分量变为 s=3 犁状区间。
区间值球形模糊集 [609,610]	3	0/1	三个区间分量变为 s=3 犁状区间值。
区间值四分割中智集 [611,612]	4	0/1	嵌入 IVPS 的四个区间分量。
区间值五划分中智集 [9,613,614]	5	0/1	IVPS 中嵌入的五个区间分量，如 s=5 所示。

现在，我们给出所提概念的具体示例。

例 3.9.2（电子商务配送选项——区间值模糊多元型（s=1, t=1））。电子商务配送选项的选择，是指在速度、成本、可靠性、追踪、环境影响、客户便利性以及总体价格之间权衡，以选定配送方案（参见 [615]）。

考虑根据属性 $v =$ “配送选项”推荐产品 $x \in P$，其选项包括$Pv = \{E =$ 经济 $S =$ 标准 $X =$ 特快 $\}$。设 x 的区间值 DAF（适合度）为

$$pdf_{\mathrm{IV}}(x, E) = [0.50, 0.70], \quad pdf_{\mathrm{IV}}(x, S) = [0.60, 0.85], \quad pdf_{\mathrm{IV}}(x, X) = [0.40, 0.65].$$

假设给定一个区间值 DCF（数值越大表示矛盾越强）：

$$pCF_{\mathrm{IV}}(E, S) = [0.20, 0.30], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(X, S) = [0.30, 0.50],$$

$$pCF_{\mathrm{IV}}(E, X) = [0.60, 0.80], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(a, a) = [0, 0].$$

固定主导值 $\delta = S$。定义兼容性区间 $w(a \mid \delta) := 1 - pCF_{\mathrm{IV}}(a, \delta)$：

$$w(E \mid S) = [0.70, 0.80], \quad w(S \mid S) = [1, 1], \quad w(X \mid S) = [0.50, 0.70],$$

因此，总权重区间为

$$W := \sum w = [0.70 + 1 + 0.50,\ 0.80 + 1 + 0.70] = [2.20,\ 2.50].$$

使用具有非负界限的区间算术：$[\alpha, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [\alpha\gamma, \beta\delta]$ 和 $[A, B] + [C, D] = [A + C, B + D]$，分子区间为

$$\begin{aligned} N &= w(E \mid S)\, pdf_{\mathrm{IV}}(x, E) + w(S \mid S)\, pdf_{\mathrm{IV}}(x, S) + w(X \mid S)\, pdf_{\mathrm{IV}}(x, X) \\ &= [0.70, 0.80] \cdot [0.50, 0.70] + [1, 1] \cdot [0.60, 0.85] + [0.50, 0.70] \cdot [0.40, 0.65] \\ &= [0.35, 0.56] + [0.60, 0.85] + [0.20, 0.455] = [1.15, 1.865]. \end{aligned}$$

对于除法以正区间 $[c, d]$ 除法时，我们使用 $[A, B]/[c, d] = [A/d,\ B/c]$。因此，聚合 ed rd（标准对）适宜区间是

$$\Gamma^{(S)}(x) = \frac{N}{W} = \left[\frac{1.15}{2.50}, \frac{1.865}{2.20}\right] = [0.4600,\ 0.8477].$$

解读：在占主导地位的“标准”背景下，x 在 $[0.4600, 0.8477$ 中具有总体区间值模糊适宜性].

示例 3.9.3（招聘决策（候选人 y）——区间值直觉模糊多元集（s=2, t=1））。招聘决策根据技能、经验、文化契合度和组织需求筛选候选人，并谨慎权衡公平性、成本和长期潜力（参见 [616]）。

设 $v =$ “合同类型”为 $Pv = \{I =$ 实习生 $F =$ 固定期限 $P =$ 长期$\}$。对于候选人y，取区间值直觉模糊隶属度（μ，ν）：

$$\begin{aligned} pdf_{\mathrm{IV}}(y, I) &= (\,[0.55, 0.75],\ [0.10, 0.25]\,), \\ pdf_{\mathrm{IV}}(y, F) &= (\,[0.65, 0.80],\ [0.10, 0.20]\,), \\ pdf_{\mathrm{IV}}(y, P) &= (\,[0.50, 0.65],\ [0.20, 0.35]\,), \end{aligned}$$

（每对数值的选取均满足 $\max \mu + \max \nu \le 1$）。设 DCF 区间为

$$pCF_{\mathrm{IV}}(I, P) = [0.50, 0.70], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(F, P) = [0.20, 0.30], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(a, a) = [0, 0],$$

并设主导值为 $\delta = P$。兼容性区间：

$$w(I \mid P) = [0.30, 0.50], \quad w(F \mid P) = [0.70, 0.80], \quad w(P \mid P) = [1, 1], \quad W = [2.00, 2.30].$$

通过区间算术聚合 μ（隶属度）：

$$\begin{aligned} N_\mu &= [0.30, 0.50] \cdot [0.55, 0.75] + [0.70, 0.80] \cdot [0.65, 0.80] + [1, 1] \cdot [0.50, 0.65] \\ &= [0.165, 0.375] + [0.455, 0.640] + [0.50, 0.65] \\ &= [1.120, 1.665], \end{aligned}$$

$$\mu^{(P)}(y) = \frac{N_\mu}{W} = \Big[\frac{1.120}{2.30}, \frac{1.665}{2.00}\Big] = [0.4870,\ 0.8325].$$

聚合 ν （非隶属度）：

$$\begin{aligned} N_\nu &= [0.30,0.50]\cdot[0.10,0.25] + [0.70,0.80]\cdot[0.10,0.20] + [1,1]\cdot[0.20,0.35] \\ &= [0.030,0.125] + [0.070,0.160] + [0.20,0.35] = [0.300,0.635], \end{aligned}$$

$$\nu^{(P)}(y) = \frac{N_\nu}{W} = \Big[\frac{0.300}{2.30}, \frac{0.635}{2.00}\Big] = [0.1304,\ 0.3175].$$

Thus, 相对于占主导地位的“永久”语境 , 候选人的直觉区间值评估为

$$(\mu,\nu)^{(P)}(y) \in [0.4870,0.8325] \times [0.1304,0.3175].$$

例3.9.4 （精准农业灌溉——区间值中智毕达哥拉斯集（s=3, t=1））。 农业灌溉通过渠道、喷灌器或滴灌系统向作物提供受控水量，从而提高产量，降低干旱风险和水土流失（参见 [617]）。

设 v = “灌溉策略”具有 $Pv = \{C = $ 保守型 $\ B = $ 均衡型 $\ A = $ 激进型$\}$。对于地块 z，取区间值中智三元组（T、 I、 F）：

$$\begin{aligned} pdf_{\mathrm{IV}}(z,C) &= (\,[0.60,0.80],\ [0.10,0.25],\ [0.10,0.20]\,), \\ pdf_{\mathrm{IV}}(z,B) &= (\,[0.70,0.90],\ [0.05,0.15],\ [0.05,0.10]\,), \\ pdf_{\mathrm{IV}}(z,A) &= (\,[0.40,0.60],\ [0.20,0.30],\ [0.25,0.40]\,). \end{aligned}$$

假设相对于目标（均衡型）策略的DCF区间为:

$$pCF_{\mathrm{IV}}(C,B) = [0.10,0.20], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(A,B) = [0.30,0.50], \quad pCF_{\mathrm{IV}}(B,B) = [0,0].$$

主导值 $\delta = B$。兼容性区间和总权重:

$$w(C\,|\,B) = [0.80,0.90], \quad w(B\,|\,B) = [1,1], \quad w(A\,|\,B) = [0.50,0.70], \quad W = [2.30,2.60].$$

真值分量:

$$\begin{aligned} N_T &= [0.80,0.90]\cdot[0.60,0.80] \ + \ [1,1]\cdot[0.70,0.90] \ + \ [0.50,0.70]\cdot[0.40,0.60] \\ &= [0.48,0.72] + [0.70,0.90] + [0.20,0.42] = [1.38,2.04], \\ T^{(B)}(z) &= \frac{N_T}{W} = \Big[\frac{1.38}{2.60}, \frac{2.04}{2.30}\Big] = [0.5308,\ 0.8869]. \end{aligned}$$

不确定性 分量:

$$\begin{aligned} N_I &= [0.80,0.90]\cdot[0.10,0.25] + [1,1]\cdot[0.05,0.15] + [0.50,0.70]\cdot[0.20,0.30] \\ &= [0.08,0.225] + [0.05,0.15] + [0.10,0.21] = [0.23,0.585], \\ I^{(B)}(z) &= \frac{N_I}{W} = \Big[\frac{0.23}{2.60}, \frac{0.585}{2.30}\Big] = [0.0885,\ 0.2543]. \end{aligned}$$

假值分量:

$$\begin{aligned} N_F &= [0.80,0.90]\cdot[0.10,0.20] + [1,1]\cdot[0.05,0.10] + [0.50,0.70]\cdot[0.25,0.40] \\ &= [0.08,0.18] + [0.05,0.10] + [0.125,0.28] = [0.255,0.56], \\ F^{(B)}(z) &= \frac{N_F}{W} = \Big[\frac{0.255}{2.60}, \frac{0.56}{2.30}\Big] = [0.0981,\ 0.2435]. \end{aligned}$$

因此，相较于占主导地位的“平衡”策略，该地块的 IV–中智灌溉评估为

$$(T,I,F)^{(B)}(z) \in [0.5308,0.8869] \times [0.0885,0.2543] \times [0.0981,0.2435].$$

3.10 多属性偏移集

胚层偏移允许隶属度和矛盾度超出 $[0,1]$, 在复杂系统中对属性型矛盾下负隶属和过度隶属的建模 [618–621]。

定义 3.10.1（多属性偏移集）。 [260,622] 设 S 为一个全集，且 $P \subseteq S$。多属性偏移集 PS_{offset} 定义如下:

$$PS_{\text{offset}} = (P, v, Pv, pdf, pCF),$$

其中:

- v 是一个属性。
- Pv 是属性 v的可能取值集合。
- pdf: $P \times Pv \to [\Psi_v, \Omega_v]^s$ 是 隶属度函数（*DAF*），其中 $\Psi_v < 0$ 和$\Omega_v > 1$。
- pCF: $Pv \times Pv \to [\Psi_v, \Omega_v]^t$ 是 矛盾度函数（*DCF*）。

在多值偏移中，隶属度 $pdf(x, a)$的取值范围从低于0（负隶属）到高于1（超隶属），从而能够灵活地刻画多样的隶属状态。

表 3.16 根据隶属度函数的取值范围，对多元集合、超集、子集和偏移集进行了比较。

概念	DAF 的隶属度范围 pdf	简要说明
多元生成集	pdf: $P \times Pv \to [0,1]^s$	标准 多元生成模型: 真值 / 不确定性 / 虚假性分量 $[0,1]$, with a 矛盾 函数 pCF: $Pv \times Pv \to [0,1]^t$ 控制属性的聚合。
多元上集	pdf: $P \times Pv \to (1, \Omega_v]^s$ 其中 $\Omega_v > 1$	仅限超隶属：每个组成部分严格大于 1，最高可达上限 Ω_v。 用于建模冗余、过度满足或“超级归属”在多元矛盾之下。
多元下集	pdf: $P \times Pv \to [\Psi_v, 0)^s$ 含 $\Psi_v < 0$	仅负隶属度：每个分-量均严格小于 0，直到下界界限 Ψ_v。表示主动对立，反证，或在一方面的反隶属度多元异质的方式。
Plithogenic 偏移量	pdf: $P \times Pv \to [\Psi_v, \Omega_v]^s$ 与 $\Psi_v < 0 < 1 < \Omega_v$	完整偏移尺度: 一种单一的多性体结构，可同时容纳欠隶属度（< 0）、经典隶属度（$[0,1]$）和过隶属度（> 1），以及一个（可能扩展的）矛盾函数 pCF: $Pv \times Pv \to [\Psi_v, \Omega_v]^t$。

表3.16：通过从属度函数的取值范围对多真集、超集、欠集和偏移集进行比较。

表3.17： $t=1$的钜性偏移 $PS_{\text{off}}(s,\ t)$的特殊情况。

s	t	**偏移类型**
1	1	钜性模糊偏移（参见 [623, 624]）(/ 钜性灰集（参见 [625–627]）)
2	1	钜性直觉模糊偏移（参见 [623, 624]）
3	1	钜性中智偏移（参见 [623, 628, 629]）
4	1	可塑性四分区中智偏移
5	1	可塑性五分区中智偏移
6	1	可塑性六分区中智偏移
7	1	可塑性七分区中智偏移
8	1	可塑性八分区中智偏移
9	1	可塑性九分区中智偏移

下表3.17总结了当$t=1$时多值偏移 $PS_{\text{off}}(s,t)$的若干重要特例。（对于 $t=0$，每种情形都退化为相应的经典偏移。）

现在我们给出所提概念的具体示例。

示例 3.10.2 （运用并合模糊偏移提升银行信用额度（模糊情形， s=1, t=1））。银行信用额度是客户可在授信额度内借入的最高金额，由风险评估政策设定（参见 [630]）。

设 $P=\{\text{cust}\}$ 为一位正在接受审查的客户。属性为 $v=$ “建议的信用额度档位”，取值为 $Pv=\{$低、中、高$\}$。由于允许偏移，DAF 的取值可以低于 0 或高于 1：

$$pdf(\text{cust},\text{Low})=-0.10,\quad pdf(\text{cust},\text{Medium})=0.80,\quad pdf(\text{cust},\text{High})=1.40.$$

使用矛盾映射 pCF： $Pv\times Pv\to[0,1]$ （为简洁起见，我们保留 $[0,1]$）：

pCF（低, 高） $=0.85,\quad pCF$（中、高） $=0.30,\quad pCF$（低、中） $=0.50,\quad pCF$（a, a） $=0.$

固定主导语境 $\delta=$高，并设置权重 $w(a\mid\delta)=1-pCF(a,\ \delta)$。然后

$$w(\text{Low}\mid\text{High})=0.15,\quad w(\text{Medium}\mid\text{High})=0.70,\quad w(\text{High}\mid\text{High})=1.$$

相对于 δ 的释义聚合为加权平均值

$$\Gamma^{(\text{High})}(\text{cust})=\frac{0.15\cdot(-0.10)+0.70\cdot0.80+1\cdot1.40}{0.15+0.70+1}=\frac{-0.015+0.56+1.40}{1.85}=\frac{1.945}{1.85}\approx1.0514.$$

解释。尽管对于“低”存在微弱的负面 证据，但对“高”的强过隶属度和对“中”的中等支持，产生了略高于 1 的过隶属度 聚合结果，支持超出标准“高”阈值的升级。

例 3.10.3 （采用直觉模糊偏移量的多元生成体医院分诊（IF-偏移量， s=2、 t=1））。设 $P=\{\text{pt}\}$ 为一名患者， $v=$“分诊类别”取值为 $Pv=\{$立即、紧急、常规$\}$。使用一个双分量 DAF $pdf(\cdot,\ \cdot)=(\mu$、$\nu)$，允许偏移量：

$$\begin{aligned}pdf(\text{pt},\text{Immediate})&=(-0.10,\ 1.05),\\ pdf(\text{pt},\text{Urgent})&=(1.10,\ 0.00),\\ pdf(\text{pt},\text{Routine})&=(0.20,\ 0.95).\end{aligned}$$

这里 μ是隶属度，而 ν 是不隶属度；二者都可以是 <0 或 >1。设矛盾

$$pCF(\text{Immediate},\text{Urgent})=0.20,\quad pCF(\text{Routine},\text{Urgent})=0.60,\quad pCF(a,a)=0,$$

并选择 $\delta=$紧急。权重 $w=1-pCF$给出

$$w(\text{Immediate}\mid\text{Urgent})=0.80,$$

$$w(\text{Urgent} \mid \text{Urgent}) = 1,$$
$$w(\text{Routine} \mid \text{Urgent}) = 0.40,$$
$$W = 0.80 + 1 + 0.40 = 2.20.$$

分别汇总隶属度和非隶属度：

$$\Gamma_{\mu}^{(\delta)}(\text{pt}) = \frac{0.80(-0.10) + 1(1.10) + 0.40(0.20)}{2.20} = \frac{-0.08 + 1.10 + 0.08}{2.20} = \frac{1.10}{2.20} = 0.50,$$

$$\Gamma_{\nu}^{(\delta)}(\text{pt}) = \frac{0.80(1.05) + 1(0.00) + 0.40(0.95)}{2.20} = \frac{0.84 + 0 + 0.38}{2.20} = \frac{1.22}{2.20} \approx 0.5545.$$

解释。原始偏移包含“紧急”的超隶属度1.10，以及“立即”的负隶属度。在面向 δ =紧急的矛盾感知聚合之后，最终的直觉主义对为$(\mu,\ \nu) \approx (0.50,\ 0.5545)$，反映出较为均衡的支持，同时针对紧迫性的聚合犹豫/矛盾略高。

示例 3.10.4 （采用多值中智偏移的电网调度（NS-offset，s=3，t=1））。电网调度实时协调各发电单元，以便在遵守网络约束与可靠性要求的同时平衡供需（参见 [631]）。

考虑 $P = \{\text{小时}_{\star}\}$（某一特定运行小时）以及 $v =$ “一次能源”，取值为 Pv =｛煤，天然气，太阳能｝。使用允许偏移的中智三元组 pdf =$(T,\ I,\ F)$：

$$pdf(\text{hour}_{\star}, \text{Coal}) = (-0.20,\ 0.10,\ 1.15),$$
$$pdf(\text{hour}_{\star}, \text{Gas}) = (0.80,\ 0.20,\ 0.20),$$
$$pdf(\text{hour}_{\star}, \text{Solar}) = (1.30,\ -0.05,\ 0.00).$$

Cont在太阳能占主导的语境下的矛盾 δ =太阳能　能是

$$pCF(\text{Coal}, \text{Solar}) = 0.85, \qquad pCF(\text{Gas}, \text{Solar}) = 0.40, \qquad pCF(a, a) = 0.$$

权重 $w = 1 - pCF$产出

$$w(\text{Coal} \mid \text{Solar}) = 0.15, \quad w(\text{Gas} \mid \text{Solar}) = 0.60, \quad w(\text{Solar} \mid \text{Solar}) = 1, \quad W = 1.75.$$

汇总每个中智组件：

$$\Gamma_{T}^{(\delta)} = \frac{0.15(-0.20) + 0.60(0.80) + 1(1.30)}{1.75} = \frac{-0.03 + 0.48 + 1.30}{1.75} = \frac{1.75}{1.75} = 1.00,$$

$$\Gamma_{I}^{(\delta)} = \frac{0.15(0.10) + 0.60(0.20) + 1(-0.05)}{1.75} = \frac{0.015 + 0.12 - 0.05}{1.75} = \frac{0.085}{1.75} \approx 0.0486,$$

$$\Gamma_{F}^{(\delta)} = \frac{0.15(1.15) + 0.60(0.20) + 1(0.00)}{1.75} = \frac{0.1725 + 0.12 + 0}{1.75} = \frac{0.2925}{1.75} \approx 0.1671.$$

解释。偏移量体现了对太阳能的强烈政策/补贴偏好（T=1.30），以及对煤炭的反向证据（T= − 0.20、 F=1.15）。在太阳能占主导的语境下，考虑矛盾的中智汇总结果为（$T,\ I,\ F$） ≈（1。00，0。0486，0。1671），即明确支持太阳能，不确定性极低，虚假性适中。

3.11 柏拉图立方集

广义立体集为每个元素赋予区间隶属度数据和精确隶属度数据，并根据属性间的矛盾程度进行加权，从而统一模糊、直觉模糊和中智立体模型 [217,484, 632–636]。

定义 3.11.1（广义立体集）。[217, 632, 633] 设 A 为非空论域。设一个属性 v 取值于集合 R（“属性值集”），并配备一个矛盾度函数 $C\colon R\times R\to[0,1]$，满足 (i) $C(r,r)=0$ 和 (ii) $C(r_1,r_2)=C(r_2,r_1)$。记 $\mathcal{I}([0,1])=\{\,[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]\mid 0\le\alpha\le\beta\le 1\,\}$。

定义在 A 上的 多元生成立方集（*PCS*）是由三元组构成的集合

$$\mathcal{P}\;=\;\Big\{\;\langle a,\;I(a),\;c(a)\rangle\;\Big|\;a\in A\;\Big\},$$

其中，$I(\cdot)$ 是区间值多元生成隶属对象，而 $c(\cdot)$ 是同类型的点值对应对象，二者均从以下规范实例之一中选取。

（1）多元生成模糊立方集（PFCS）。

$$\Gamma=\langle X,\mu\rangle,\qquad X:A\to\mathcal{I}([0,1]),\;X(a)=[X^-(a),X^+(a)],\qquad \mu:A\to[0,1],$$

其中，对于所有 $a\in A$，$0\le X^-(a)\le X^+(a)\le 1$。这里，$X$ 是区间值多元生成模糊集（其区间端点由 C 驱动的多元生成隶属聚合产生，并可选择由 R 中的主导值参与），而 μ 是普通模糊隶属度。

（2）多元生成直觉模糊立方集（PIFCS）。

$$\Psi=\langle Y,\delta\rangle,\qquad Y:A\to\mathcal{I}([0,1])\times\mathcal{I}([0,1]),$$

$$Y(a)=\big([\mu^-(a),\mu^+(a)],\,[\nu^-(a),\nu^+(a)]\big),\qquad \delta(a)=(\mu(a),\nu(a))\in[0,1]^2,$$

满足 $0\le\mu^-\le\mu^+\le 1$, $0\le\nu^-\le\nu^+\le 1$，以及直觉主义约束 $\mu^+(a)+\nu^+(a)\le 1$对所有 $a\in A$均成立。这里，Y是一个区间值多元直觉模糊集，δ 是一个直觉模糊隶属度对。

(3) 多元中智立方集（PNCS）。

$$\Omega=\langle Z,\lambda\rangle,\qquad Z:A\to\mathcal{I}([0,1])^3,\quad Z(a)=\big([T^-(a),T^+(a)],\,[I^-(a),I^+(a)],\,[F^-(a),F^+(a)]\big),$$

$$\lambda(a)=(T(a),I(a),F(a))\in[0,1]^3,$$

其中 $0\le T^-\le T^+\le 1$, $0\le I^-\le I^+\le 1$, $0\le F^-\le F^+\le 1$对所有 $a\in A$均成立。这里，Z是一个区间值多元中智集，λ 是一个（单值）中智三元组。

现在，我们给出所提出概念的具体示例。

示例 3.11.2（（基于多元模糊立方集（PFCS）的电子商务定向营销））. 设 $A=\{\text{item}_\star\}$ 是某一特定产品。属性为 $v=$ “客户细分”，其取值集为 $R=\{\text{Budget},\text{Standard},\text{Premium}\}$。设矛盾关系 $C\colon R\times R\to[0,1]$ 为对称关系，且

$$C(\text{Budget},\text{Premium})=0.80,\quad C(\text{Standard},\text{Premium})=0.30,$$

$$C(\text{Budget},\text{Standard})=0.40,\quad C(r,r)=0.$$

确定主导片段 $r^*=\text{Premium}$ 并设置兼容性权重 $w(r\mid r^*)=1-C(r,r^*)$，因此

$$w(\text{Budget}\mid r^*)=0.20,\quad w(\text{Standard}\mid r^*)=0.70,$$

$$w(\text{Premium}\mid r^*)=1.00,\quad W=0.20+0.70+1.00=1.90.$$

表3.18：作为肇基立方集特殊情形的经典立方集族

经典立方集	区间（集合值）分量	点（精确）分量-nent	推广内部多属性立方
模糊立方集	$X(a) = [X^{-}(a)\ X^{+}(a)] \subseteq [0,1]$	$\mu(a) \in [0,1]$	得到 PFCS，通过令区间端点产生 from 多属性聚合-tion于属性值之上 and 矛盾 $C(\cdot,\cdot)$; 模糊立方集是的情形，其 没有（或只有平凡的）矛盾且只有一个属性值。
直觉模糊立方集	$Y(a) = ([\mu^{-}(a)\ \mu^{+}(a)], [\nu^{-}(a)\ \nu^{+}(a)])$ with $\mu^{+}(a)+\nu^{+}(a) \le 1$	$(\mu(a)\ \nu(a))$ with $\mu(a)+\nu(a) \le 1$	获得 通过生成 PIFCS-生成 两个区间 对通过一个多元性 DAF 由属性 v 驱动和一个 DCF C；当经典直觉模糊立方集在.....时得以恢复 $C \equiv 0$ 且只有一个属性值。
中智立方集 [637–642]	$Z(a) = ([T^{-},T^{+}], [I^{-},I^{+}], [F^{-},F^{+}]) \subseteq [0,1]^3$	$(T(a)\ I(a)\ F(a)) \in [0,1]^3$	通过 令.....得到 PNCS 每个中智区间源自本体论融合，且该融合具有一个主导值与矛盾 C; 普通中智立方集是特化-情形，具有 $C \equiv 0$（或单一 v 的值）。

专家为项目$\star$提供分段模糊区间与精确隶属度：

r	$[X^{-}(r)\ X^{+}(r)]$	$\mu(r)$
预算型	$[0.30, 0.55]$	0.50
标准型	$[0.60, 0.80]$	0.70
高级会员	$[0.85, 0.95]$	0.90

通过加权平均汇总区间端点和精确隶属度：

$$X^{-}(\text{item}_\star) = \frac{0.20\cdot 0.30 + 0.70\cdot 0.60 + 1.00\cdot 0.85}{1.90} = \frac{0.06 + 0.42 + 0.85}{1.90} = \frac{1.33}{1.90} = 0.7000,$$

$$X^{+}(\text{item}_\star) = \frac{0.20\cdot 0.55 + 0.70\cdot 0.80 + 1.00\cdot 0.95}{1.90} = \frac{0.11 + 0.56 + 0.95}{1.90} = \frac{1.62}{1.90} \approx 0.8526,$$

$$\mu(\text{item}_\star) = \frac{0.20\cdot 0.50 + 0.70\cdot 0.70 + 1.00\cdot 0.90}{1.90} = \frac{0.10 + 0.49 + 0.90}{1.90} = \frac{1.49}{1.90} \approx 0.7842.$$

因此，PFCS 三元组为

$$\langle \text{item}_\star,\ [0.7000,\ 0.8526],\ 0.7842 \rangle.$$

解读：考虑矛盾因素后，向占主导地位的“高端型”细分群体倾斜的权重使区间收窄至高亲和度附近，并提高了精确隶属度。

例 3.11.3 （基于多元直觉模糊立方集（PIFCS）的奖学金遴选）。奖学金遴选会评估申请者的学业表现、研究潜力、经济需求和社区影响，以公平分配有限的教育经费（参见 [643]）。

设 $A=\{\text{申请人}_\star\}$ 和 $v=$“证据来源”为 $R=\{\text{等级、研究、社区}\}$。选择$r^*=$研究。设对称矛盾为

$$C(\text{Grades},\text{Research})=0.25,\quad C(\text{Community},\text{Research})=0.40,\quad C(r,r)=0,$$

使得 w（等级 $\mid r^*$）$=0.75$、 w（社区 $\mid r^*$）$=0.60$、 w（研究 $\mid r^*$）$=1.00$以及 $W=2.35$。每个来源提供一个直觉区间对和一个清晰对（μ、 ν）：

r	$[\mu^-(r)\ \mu^+(r)]$	$[\nu^-(r)\ \nu^+(r)]$	$(\mu(r)\ \nu(r))$
成绩	$[0.65,0.80]$	$[0.10,0.20]$	$(0.72,0.18)$
研究	$[0.75,0.92]$	$[0.03,0.10]$	$(0.85,0.08)$
社区	$[0.50,0.70]$	$[0.10,0.20]$	$(0.60,0.18)$

矛盾加权聚合（按分量计算）得到

$$\mu^-(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.65+1.00\cdot0.75+0.60\cdot0.50}{2.35}=\frac{0.4875+0.75+0.30}{2.35}=\frac{1.5375}{2.35}\approx0.6543,$$

$$\mu^+(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.80+1.00\cdot0.92+0.60\cdot0.70}{2.35}=\frac{0.60+0.92+0.42}{2.35}=\frac{1.94}{2.35}\approx0.8255,$$

$$\nu^-(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.10+1.00\cdot0.03+0.60\cdot0.10}{2.35}=\frac{0.075+0.03+0.06}{2.35}=\frac{0.165}{2.35}\approx0.0702,$$

$$\nu^+(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.20+1.00\cdot0.10+0.60\cdot0.20}{2.35}=\frac{0.15+0.10+0.12}{2.35}=\frac{0.37}{2.35}\approx0.1574,$$

这符合直觉主义界限 $\mu^++\nu^+\le1$。对于清晰数对，

$$\mu(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.72+1.00\cdot0.85+0.60\cdot0.60}{2.35}=\frac{0.54+0.85+0.36}{2.35}=\frac{1.75}{2.35}\approx0.7447,$$

$$\nu(\text{app}_\star)=\frac{0.75\cdot0.18+1.00\cdot0.08+0.60\cdot0.18}{2.35}=\frac{0.135+0.08+0.108}{2.35}=\frac{0.323}{2.35}\approx0.1372.$$

因此，PIFCS 三元组为

$$\Big\langle\text{applicant}_\star,\ ([\mu^-,\mu^+],[\nu^-,\nu^+])=([0.6543,0.8255],[0.0702,0.1574]),\ (\mu,\nu)=(0.7447,0.1372)\Big\rangle.$$

解释：提高研究的权重可以减少分歧，并使区间向符合资格的方向集中，同时保持较低的非隶属度。

例 3.11.4 （基于 Plithogenic Neutrosophic Cubic Set (PNCS) 的城市自行车站选址）。 设$A=\{$站点$_\star\}$ 和 $v=$“规划准则”，其中 $R=\{$需求，安全，成本$\}$。选择 $r^*=$ 需求。定义一个对称矛盾

$$C(\text{Safety},\text{Demand})=0.30,\quad C(\text{Cost},\text{Demand})=0.60,\quad C(r,r)=0,$$

使得 w(安全 $\mid r^*$) $=0.70$, w(成本 $\mid r^*$) $=0.40$, w(需求 $\mid r^*$) $=1.00$, 其中 $W=2.10$。各准则的中智区间和清晰三元组（T， I， F）如下：

r	$[T^-(r)\ T^+(r)]$	$[I^-(r)\ I^+(r)]$	$[F^-(r)\ F^+(r)]$
需求	$[0.80,0.95]$	$[0.03,0.10]$	$[0.02,0.07]$
安全	$[0.70,0.88]$	$[0.05,0.12]$	$[0.07,0.15]$
Cost	$[0.40,0.60]$	$[0.10,0.20]$	$[0.30,0.45]$

r	$(T(r)\ I(r)\ F(r))$
需求	$(0.90,0.06,0.04)$
安全性	$(0.80,0.09,0.11)$
Cost	$(0.50,0.15,0.35)$

使用以下权重进行聚合（按分量）：

$$T^-(\text{site}_\star)=\frac{1\cdot0.80+0.70\cdot0.70+0.40\cdot0.40}{2.10}=\frac{0.80+0.49+0.16}{2.10}=\frac{1.45}{2.10}\approx0.6905,$$

$$T^{+}(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.95+0.70\cdot 0.88+0.40\cdot 0.60}{2.10}=\frac{0.95+0.616+0.24}{2.10}=\frac{1.806}{2.10}=0.8600,$$
$$I^{-}(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.03+0.70\cdot 0.05+0.40\cdot 0.10}{2.10}=\frac{0.03+0.035+0.04}{2.10}=\frac{0.105}{2.10}=0.0500,$$
$$I^{+}(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.10+0.70\cdot 0.12+0.40\cdot 0.20}{2.10}=\frac{0.10+0.084+0.08}{2.10}=\frac{0.264}{2.10}\approx 0.1257,$$
$$F^{-}(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.02+0.70\cdot 0.07+0.40\cdot 0.30}{2.10}=\frac{0.02+0.049+0.12}{2.10}=\frac{0.189}{2.10}=0.0900,$$
$$F^{+}(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.07+0.70\cdot 0.15+0.40\cdot 0.45}{2.10}=\frac{0.07+0.105+0.18}{2.10}=\frac{0.355}{2.10}\approx 0.1690.$$

对于清晰中智三元组：

$$T(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.90+0.70\cdot 0.80+0.40\cdot 0.50}{2.10}=\frac{0.90+0.56+0.20}{2.10}=\frac{1.66}{2.10}\approx 0.7905,$$
$$I(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.06+0.70\cdot 0.09+0.40\cdot 0.15}{2.10}=\frac{0.06+0.063+0.06}{2.10}=\frac{0.183}{2.10}\approx 0.0871,$$
$$F(\mathrm{site}_\star)=\frac{1\cdot 0.04+0.70\cdot 0.11+0.40\cdot 0.35}{2.10}=\frac{0.04+0.077+0.14}{2.10}=\frac{0.257}{2.10}\approx 0.1224.$$

因此，PNCS 三元组为

$$\big\langle \mathrm{site}_\star,\ ([0.6905,0.8600],[0.0500,0.1257],[0.0900,0.1690]),\ (0.7905,0.0871,0.1224)\big\rangle.$$

解释：优先考虑需求可提高对适用性的真度并降低不确定度；由于成本与安全方面的权衡，仍存在适度的假度。

3.12 PlithogenicSoft、HyperSoft 与 SuperHyperSoft 集

回顾一下，软集通过参数化的近似子集表示对象，从而能够在信息模糊的决策情境下灵活、简便地对不确定性进行建模 [307,644]。超软集将软集扩展至多属性、多值参数配置，可借助结构化聚合规则，捕捉数据集中的高阶、依赖上下文的不确定性 [311,312,645,646]。SuperHyperSoft 集反复迭代基于幂集的软集构造，将不同层级的超参数关联起来，以编码复杂对象族中的分层、多层、相互作用的不确定性 [330,647,648]。Plithogenic SuperHyperSoft 集在 SuperHyperSoft 结构中加入考虑矛盾的隶属函数，用于对现实系统中跨层级参数的冲突多属性信息进行建模 [649]。

定义 3.12.1（本体性超超软集）。设 U为一个论域，且设 $a_1,\dots,a_n$为$n\ge 1$ 个互不相同的属性。对每个 i，令 A_i 为有限的两两不相交值集（ $i\neq j$的 $A_i\cap A_j=\emptyset$），并记

$$\mathcal{C}\ =\ \mathcal{P}(A_1)\times\cdots\times\mathcal{P}(A_n).$$

固定一个非空的 $Y\subseteq U$。定义在 U 上的本体性超超软集（PSHSS）为以下数据

$$\mathrm{PSHSS}\ =\ \big(U,\ Y,\ \{a_i\}_{i=1}^{n},\ \{A_i\}_{i=1}^{n},\ \mathcal{C},\ d,\ c\big),$$

以及映射 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{P}(U)$，其中：

- $d\colon Y\times\mathcal{C}\to\mathcal{P}\big([0,1]^j\big)$ 是（可能为多值的）隶属函数，其中 $j\in\{1,2,3\}$表示模糊（j=1）、直觉模糊（j=2）或中智（j=3）隶属度的值域；
- 对于每个属性 a_i, $c\colon\ \mathcal{P}(A_i)\times\mathcal{P}(A_i)\to\mathcal{P}\big([0,1]^j\big)$ 是一个（可能为多值的）矛盾函数，满足自反性和对称性：

$$c(\alpha,\alpha)=\{0\},\qquad c(\alpha,\beta)=c(\beta,\alpha)\quad(\alpha,\beta\subseteq A_i);$$

- 对于 $\gamma=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$，图像 $F(\gamma)\subseteq U$ 由 $\{d_y(\gamma)\}_{y\in Y}$ 以及矛盾 $\{c(\alpha_i,\alpha_i)\ c(\alpha_i,\alpha_{i'})\}$ 通过所选的多元生成聚合/复合规则共同确定。

表 3.20 展示了从 PSHSS 到 Plithogenic HyperSoft 集和 Plithogenic Soft 集的约化。此外，表 3.19 概述了 PSHSS 与模糊 SuperHyperSoft 集、直觉模糊 SuperHyperSoft 集以及中智 SuperHyperSoft 集之间的关系。

表 3.19：Plithogenic SuperHyperSoft 集（PSHSS）是模糊、直觉模糊、中智以及分区中智 SuperHyperSoft 集的共同泛化。

模型	d 的陪域	c	PSHSS 的特例
多源矛盾超超软集（PSHSS）	$\mathcal{P}([0,1]^j),\quad j\in\{1,\ldots,5\}$	自反、对称 c	基础模型
模糊超超软集 [650]	$\mathcal{P}([0,1])$	$c(\alpha,\ \beta)\equiv\{0\}$	$j=1,\ c\equiv\{0\}$
直觉模糊超-超软集	$\mathcal{P}\ ([0,1]^2)$	$c(\alpha,\beta)\equiv\{0\}$	$j=2,\quad c\equiv\{0\}$
中智超超软集 [651–654]	$\mathcal{P}\ ([0,1]^3)$	$c(\alpha,\ \beta)\equiv\{0\}$	$j=3,\ c\equiv\{0\}$
四分区中性-智超超软集	$\mathcal{P}([0,1]^4)$	$c(\alpha,\beta)\equiv\{0\}$	$j=4,\ c\equiv\{0\}$
五分划分的中智超超软集	$\mathcal{P}([0,1]^5)$	$c(\alpha,\ \beta)\equiv\{0\}$	$j=5,\ c\equiv\{0\}$

下面给出这一概念的具体示例。

示例 3.12.2 （医院床位分配（中智 PSHSS，$j=3$））。医院床位分配是医院将有限床位分配给患者的过程，用以优化护理、减少延误、管理容量，并确保治疗流程高效（参见 [691]）。

论域 $U=\{\mathrm{p}_A,\ \mathrm{p}_B,\ \mathrm{p}_C\}$（患者）；关注子集 $Y=\{\mathrm{p}_A,\ \mathrm{p}_B\}$。属性与值集（两两不交）：

$$a_1=\text{Severity},\ A_1=\{\text{Mild},\text{Moderate},\text{Severe}\};$$
$$a_2=\text{Resources},\ A_2=\{\text{Low},\text{High}\};$$
$$a_3=\text{InfectionRisk},\ A_3=\{\text{Low},\text{High}\}.$$

超超参数域 $\mathcal{C}=\mathcal{P}(A_1)\times\mathcal{P}(A_2)\times\mathcal{P}(A_3)$。选择配置

$$\gamma=(\{\text{Moderate},\text{Severe}\},\ \{\text{High}\},\ \{\text{High}\})$$

以及主导配置

$$\gamma^*=(\{\text{Severe}\},\ \{\text{High}\},\ \{\text{High}\}).$$

元素级（对称、反身）矛盾 $c_1,\ c_2,\ c_3$：$A_i\times A_i\to[0,1]$：

$$c_1(\text{Mild},\text{Severe})=0.90,\quad c_1(\text{Moderate},\text{Severe})=0.30,\quad c_1(x,x)=0;$$
$$c_2(\text{Low},\text{High})=0.80,\quad c_2(x,x)=0;$$
$$c_3(\text{Low},\text{High})=0.90,\quad c_3(x,x)=0.$$

通过最大–最小 Hausdorff 型规则提升至子集层级

$$\widehat{c}_i(H,K):=\max\Big\{\max_{h\in H}\min_{k\in K}c_i(h,k),\ \max_{k\in K}\min_{h\in H}c_i(h,k)\Big\}.$$

Then

$$\widehat{c}_1(\{\text{Mod},\text{Sev}\},\{\text{Sev}\})=\max\{\,c_1(\text{Mod},\text{Sev}),\ c_1(\text{Sev},\text{Sev})\,\}=\max\{0.30,0\}=0.30,$$

表 3.20：PSHSS 向 Plithogenic HyperSoft 集／Plithogenic Soft 集及其模糊、直觉模糊和中智特化形式的约化。

目标结构	定义域限制	函数限制	结果
多元集超软集 Set（PHS [655–659]	将幂集域替换为单元素集：$\mathcal{C}' = A_1 \times \cdots \times A_n$（识别 $\{\omega_i\}$ 与 $\omega_i \in A_i$）	将 d 限制为 $d\|_{Y\times\mathcal{C}'} : Y \times \mathcal{C}' \to \mathcal{P}([0,1]^j)$；将 c 限制为来自 $\mathcal{P}(A_i)\times\mathcal{P}(A_i)$ 通过 $c'(\omega,\omega')$ 将 $A_i \times A_i$ 设为：$= c(\{\omega\},\{\omega'\})$	得到标准的 PHS 于 $A_1 \times \cdots \times A_n$
位势软集 (PSS) [206, 660, 661]	取一个属性（$n = 1$）和单元素集：$\mathcal{C}'' = A_1$	$d\|_{Y\times A_1}: Y \times A_1 \to \mathcal{P}([0,1]^j)$；$c\|_{A_1\times A_1}$ via $c'(\omega,\omega') := c(\{\omega\},\{\omega'\})$	降低 to a 多元生成 soft 参数上的集合集合 A_1
（来自 PSS）模糊 / IF / 中智 soft	同上，单一属性、单元素集合	选择 $j = 1$ (模糊 [662,663] 和阴影 [664, 665]), $j = 2$ (直觉 [604,666] 和含糊 [667, 668]), $j = 3$（中智 [669, 670]，犹豫 模糊 [671, 672], 图像模糊 [673, 674], 球形模糊 [675, 676]), $j = 4$（四分区中智 [377, 677, 678] 和双值 中智学 [679, 680]), $j = 5$ (五分区中智学) [9, 681] 和 set $pCF \equiv 0$	恢复 模糊软集、IF 软集、中中智软集
（来自 PHS）模糊 / IF / 中智 超软集	同上，$\mathcal{C}' = A_1 \times \cdots \times A_n$	选择 $j =$ 1,2,3分别地，并将矛盾设为零或常数	恢复 模糊 [682, 683]/直觉模糊 [684, 685]/中立逻辑 [422, 686]/犹豫的 模糊 [687]/picture 模糊 [688, 689]/spherical 模糊 [690]) 超软集

$$\widehat{c}_2(\{\text{High}\},\{\text{High}\}) = 0, \qquad \widehat{c}_3(\{\text{High}\},\{\text{High}\}) = 0.$$

各属性的兼容性权重 $w_i := 1 - \widehat{c}_i(\alpha_i, \alpha_i^*)$ 及全局权重

$$w := \prod_{i=1}^{3} w_i = (1-0.30)(1-0)(1-0) = 0.70.$$

在 p_A at γ 中，d 的中智隶属度（单元素像）：

$$d_{\mathrm{p}_A}(\gamma) = \{(T, I, F)\} = \{(0.85,\ 0.10,\ 0.08)\}.$$

一种可接受的偏理选择评分为

$$\text{score}(\mathrm{p}_A, \gamma, \gamma^*) := w\,(T - F) - I = 0.70\,(0.85 - 0.08) - 0.10 = 0.70 \cdot 0.77 - 0.10 = 0.439 - 0.10 = 0.33$$

阈值为 $\tau = 0$ 时，评分 > 0 so $\mathrm{p}_A \in F(\gamma)$（分配床位）。同一流程也适用于 p_B；如果评分低于 τ，则可能被排除，这是由于矛盾程度较高或真实性较低。

例 3.12.3（零售商品组合规划（模糊 PSHSS，$j = 1$））. 零售商品组合规划是零售商确定最佳产品组合的过程，旨在满足客户需求、最大化销售额、减少缺货并提高盈利能力（参见 [692]）。

全集 U 是 SKU 目录；关注商品 $s_\star \in Y \subseteq U$。属性和值：

$$a_1 = \text{Season},\ A_1 = \{\text{Spring}, \text{Summer}, \text{Autumn}, \text{Winter}\};$$

$$a_2 = \text{PriceBand},\ A_2 = \{\text{Low}, \text{Mid}, \text{High}\};$$

$$a_3 = \text{BrandStyle},\ A_3 = \{\text{Classic}, \text{Sport}, \text{Tech}\}.$$

选择

$$\gamma = (\{\text{Summer}, \text{Autumn}\},\ \{\text{Mid}, \text{High}\},\ \{\text{Sport}, \text{Tech}\}),$$

$$\gamma^* = (\{\text{Autumn}\},\ \{\text{High}\},\ \{\text{Sport}\}).$$

单元素矛盾（对称、自反），非零项：

$$c_1(\text{Summer}, \text{Autumn}) = 0.20, \quad c_2(\text{Mid}, \text{High}) = 0.30, \quad c_3(\text{Tech}, \text{Sport}) = 0.40.$$

考虑 γ 内的四个单元素三元组：

$$\theta_1 = (\text{Autumn}, \text{High}, \text{Sport}),$$
$$\theta_2 = (\text{Summer}, \text{High}, \text{Sport}),$$
$$\theta_3 = (\text{Autumn}, \text{Mid}, \text{Sport}),$$
$$\theta_4 = (\text{Autumn}, \text{High}, \text{Tech}).$$

逐三元组相容性 $w(\theta) = \prod_{i=1}^{3}\big(1 - c_i(\theta_i, \theta_i^*)\big)$ 与 $\theta^* =$(秋季, 高, 运动)给出

$$w(\theta_1) = 1, \quad w(\theta_2) = (1 - 0.20) \cdot 1 \cdot 1 = 0.80,$$

$$w(\theta_3) = 1 \cdot (1 - 0.30) \cdot 1 = 0.70, \quad w(\theta_4) = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0.40) = 0.60.$$

设模糊隶属度（来自 $d_{s_\star}$）为

$$\mu(\theta_1) = 0.86,\ \mu(\theta_2) = 0.70,\ \mu(\theta_3) = 0.75,\ \mu(\theta_4) = 0.68.$$

归一化并汇总：

$$W = \sum_{k=1}^{4} w(\theta_k) = 1.00 + 0.80 + 0.70 + 0.60 = 3.10,$$

$$\mu_{\text{agg}}(s_\star \mid \gamma, \gamma^*) = \frac{\sum_{k=1}^{4} w(\theta_k)\,\mu(\theta_k)}{W}$$
$$= \frac{1 \cdot 0.86 + 0.8 \cdot 0.70 + 0.7 \cdot 0.75 + 0.6 \cdot 0.68}{3.10} = \frac{2.353}{3.10} \approx 0.7584.$$

决策：如果 $\mu_{\text{agg}} \geq 0.75$，则将 $s_\star$ 纳入秋季–高端–运动胶囊系列（该值处于临界范围，但在上限为 0.75 且允许管理层酌情处理的情况下可以接受）。

例 3.12.4（大学课程表编排（直觉式 PSHSS，$j = 2$））。大学课程表编排是指各院校安排课程、教室、教师和时间，以避免冲突、优化资源并支持学生学习的过程（参见 [693]）。

论域 U 是候选时间–教室时段的集合；焦点 $y_\star \in Y \subseteq U$。属性与取值：

$$a_1 = \text{Period},\ A_1 = \{\text{Morning}, \text{Afternoon}\};$$

$$a_2 = \text{RoomType},\ A_2 = \{\text{Lecture}, \text{Lab}\};$$

$$a_3 = \text{Day},\ A_3 = \{\text{Mon}, \text{Tue}\}.$$

Take

$$\gamma = (\{\text{Morning}, \text{Afternoon}\},$$
$$\{\text{Lecture}, \text{Lab}\},\ \{\text{Mon}, \text{Tue}\}),$$
$$\gamma^* = (\{\text{Morning}\},\ \{\text{Lecture}\},\ \{\text{Tue}\}).$$

单元素矛盾（对称、自反 ve):

$$c_1(\text{Afternoon}, \text{Morning}) = 0.40,$$

$$c_2(\text{Lab}, \text{Lecture}) = 0.50, \quad c_3(\text{Mon}, \text{Tue}) = 0.30.$$

在 γ中选取四个具有代表性的三元组:

$$\theta_1 = (\text{Morning}, \text{Lecture}, \text{Tue}),\ \theta_2 = (\text{Afternoon}, \text{Lecture}, \text{Tue}),$$

$$\theta_3 = (\text{Morning}, \text{Lecture}, \text{Mon}),\ \theta_4 = (\text{Morning}, \text{Lab}, \text{Tue}).$$

权重:

$$w(\theta_1) = 1, \quad w(\theta_2) = (1 - 0.40) = 0.60,$$

$$w(\theta_3) = (1 - 0.30) = 0.70, \quad w(\theta_4) = (1 - 0.50) = 0.50; \quad W = 2.80.$$

由 $d_{y_\star}$ 得到直觉模糊数对（μ, ν）：

$$(\mu,\nu)(\theta_1) = (0.85, 0.10),\ (\mu,\nu)(\theta_2) = (0.62, 0.25),\ (\mu,\nu)(\theta_3) = (0.70, 0.20),\ (\mu,\nu)(\theta_4) = (0.60, 0.22).$$

加权聚合:

$$\mu_{\text{agg}} = \frac{1 \cdot 0.85 + 0.6 \cdot 0.62 + 0.7 \cdot 0.70 + 0.5 \cdot 0.60}{2.80} = \frac{0.85 + 0.372 + 0.49 + 0.30}{2.80} = \frac{2.012}{2.80} \approx 0.7186,$$

$$\nu_{\text{agg}} = \frac{1 \cdot 0.10 + 0.6 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.20 + 0.5 \cdot 0.22}{2.80} = \frac{0.10 + 0.15 + 0.14 + 0.11}{2.80} = \frac{0.50}{2.80} \approx 0.1786,$$

其满足 $\mu_{\text{agg}} + \nu_{\text{agg}} \le 1$。决策规则（示例）：若 $\mu_{\text{agg}} - \nu_{\text{agg}} \ge 0.50$，则安排 $y_\star$；此处 $0.7186 - 0.1786 = 0.5400 \ge 0.50$，因此 $y_\star \in F$（γ）（时段已接受）。

3.13 犹豫多属性集

犹豫多属性集为每个对象和属性值指定一个有限非空集 [588]，即 $[0,1]^s$中的多属性隶属向量，并附带属性值集上的一个矛盾函数。它将犹豫模糊 [6] 与犹豫中智集统一为特例，具体做法是分别选取 $s = 1$ 和 $s = 3$，并将矛盾度设为零。

记号 3.13.1（有限犹豫族）。设 X 为非空集。记

$$\mathcal{H}(X) := \{\, H \subseteq X \mid H \neq \emptyset,\ H \textit{ is finite} \,\}$$

所有 X的有限非空子集所成的族。$\mathcal{H}$（X）中的元素称为X上的犹豫集。

定义 3.13.2（犹豫多属性集）。设 S 为全集，设 $P \subseteq S$ 为非空子集。设 v 为取值集为 Pv的属性。固定整数 $s \ge 1$ 与 $t \ge 1$。

一个维度为（s， t）的犹豫多元集（HPS）是一个元组

$$PS_{\text{H}}^{(s,t)} = \big(P,\ v,\ Pv,\ hpdf,\ pCF\big),$$

其中

1. 犹豫多元隶属度函数（犹豫 DAF）

$$hpdf : P \times Pv \longrightarrow \mathcal{H}\big([0,1]^s\big)$$

为每一对（x， a）$\in P \times Pv$指定一个有限非空集合

$$hpdf(x,a) = \big\{\alpha^{(1)}(x,a), \ldots, \alpha^{(m_{x,a})}(x,a)\big\} \subseteq [0,1]^s,$$

此处 $m_{x,a} \in \mathbb{N}$ 且每个向量 $\alpha^{(r)}(x,a) = (\alpha_1^{(r)}(x,a). . . , \alpha_s^{(r)}(x,a))$ 的分量都属于 $[0,1]$;

2. the矛盾度函数 (DCF)

$$pCF : Pv \times Pv \longrightarrow [0,1]^t$$

满足通常的多元生成公理:

- （自反性）对所有 $a \in Pv$,

$$pCF(a,a) = (0,\ldots,0) \in [0,1]^t;$$

- （对称性）对所有 $a,\ b \in Pv$,

$$pCF(a,b) = pCF(b,a).$$

当每个犹豫集 $hpdf(x,\ a)$ 都是单元素集时， $PS^{(s,t)}{}_{\mathrm{H}}$ 便退化为维数为 $(s,\ t)$ 的经典（非犹豫）多元生成集。

表 3.21 总结了参数 s 和 t 在犹豫型多元生成隶属度中的作用。

表 3.21：参数 s 和 t 在犹豫型杂合成员度中的作用

参数	解释
$s=1$	编码犹豫模糊 $[6,359]$ 型成员度（每个犹豫元素都是一个标量成员度组成的列表）。ment is a list of scalar membership degrees).
$s=2$	编码犹豫直觉模糊 $[694,695]$ 型数对（每个犹豫元素是隶属度/非隶属度对的列表）。
$s=3$	对犹豫中智三元组（$T,\ I,\ F$）进行编码 $[696,697]$（每个犹豫元素是真度、不确定度和假度三元组的列表）。
$s=3$	对犹豫图片模糊三元组 $[698,699]$ 进行编码。
$s=3$	对球形犹豫模糊三元组 $[700,701]$ 进行编码。
$s=4$	对犹豫四分区中智四元组进行编码。
$s=5$	对犹豫五分割中智五元组进行编码。
t	统计 $pCF(a、\ b) \in [0,1]^t$ 中矛盾成分的数量。 特殊情形 $pCF(a、\ b) \equiv (0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，对于所有属性值 $a、\ b$，可恢复不考虑矛盾意识的通常犹豫结构。

下面给出这一概念的一个具体示例。

示例 3.13.3 （医疗诊断分诊中的犹豫可生成集合）。 考虑一个急诊科，该科室必须根据患者疑似病情的严重程度对接诊患者进行分诊。

设论域为患者集合

$$P = \{x_1, x_2\},$$

其中， x_1 是一名年轻成年患者， x_2 是一名患有多种合并症的老年患者。

设 v 为属性“临床严重程度”，其取值集合为

$$Pv = \{\text{mild},\ \text{moderate},\ \text{severe}\}.$$

我们采用维度（$s,\ t$）=（3，1），因此每个隶属向量都具有中智形式（$T,\ I,\ F$）$\in [0,1]^3$，并且只有一个矛盾分量。

矛盾度函数 pCF： $Pv \times Pv \to [0,1]$ 定义为

$$pCF(a,b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ 0.4, & \{a,b\} = \{\text{mild}, \text{moderate}\}, \\ 0.6, & \{a,b\} = \{\text{moderate}, \text{severe}\}, \\ 0.9, & \{a,b\} = \{\text{mild}, \text{severe}\}, \end{cases}$$

并进行对称扩展，使数值反映严重程度标签之间的“距离”。

对于每位患者 $x \in P$ 和每个属性值 $a \in Pv$，犹豫型多元集隶属度

$$hpdf(x,a) \in \mathcal{H}\big([0,1]^3\big)$$

汇集来自不同医生或诊断工具的若干候选中智评估（T, I, F）。

对于这位年轻成年患者 x_1，假设我们有：

$$hpdf(x_1, \text{mild}) = \big\{(0.75,\ 0.15,\ 0.10),\ (0.68,\ 0.22,\ 0.10)\big\},$$

$$hpdf(x_1, \text{moderate}) = \big\{(0.40,\ 0.30,\ 0.30)\big\}, \qquad hpdf(x_1, \text{severe}) = \big\{(0.10,\ 0.20,\ 0.70)\big\}.$$

例如，这里 $(0.75, 0.15, 0.10)$ 表示一位专家认为患者病情为“轻度”的真度为 0.75、假度为 0.10（不确定度为 0.15）；另一位专家给出了略有不同的评估 $(0.68, 0.22, 0.10)$。这类向量构成了犹豫集。

对于老年患者 x_2，假设：

$$hpdf(x_2, \text{mild}) = \big\{(0.20,\ 0.25,\ 0.55)\big\},$$

$$hpdf(x_2, \text{moderate}) = \big\{(0.55,\ 0.20,\ 0.25),\ (0.48,\ 0.32,\ 0.20)\big\},$$

$$hpdf(x_2, \text{severe}) = \big\{(0.35,\ 0.25,\ 0.40)\big\}.$$

该元组

$$PS_{\mathrm{H}}^{(3,1)} = \big(P,\ v,\ Pv,\ hpdf,\ pCF\big)$$

因此是一个具体的犹豫幂集，同时包含：

- 针对每个（患者，严重程度标签）对的多个相互竞争的中智意见；以及
- 不同标签（轻度、中度、重度）之间的矛盾程度，可用于幂聚合规则（例如，对与选定主导标签矛盾较小的标签赋予更高权重）。

随后，分诊策略可以汇总每个犹豫集（例如，通过加权平均或有序选择），同时明确考虑矛盾值 pCF，以便确定治疗优先级或分配有限资源。

例 3.13.4（供应商风险评估中的犹豫 Plithogenic 集）。 设有一家制造公司，根据供应商按时交付关键部件的可靠性对其进行评估。

设论域为候选供应商集合

$$P = \{s_1, s_2, s_3\}.$$

设 v 为属性“可靠性等级”，其属性值集合为

$$Pv = \{\text{high},\ \text{medium},\ \text{low}\}.$$

这里采用维度 $(s,\ t) = (1,\ 1)$，因此每个隶属向量都是单个模糊型等级$\alpha \in [0,1]$，且只有一个矛盾分量。

矛盾函数 $pCF\colon Pv \times Pv \to [0,1]$ 定义如下

$$pCF(a,b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ 0.6, & \{a,b\} = \{\text{high}, \text{medium}\}, \\ 0.7, & \{a,b\} = \{\text{medium}, \text{low}\}, \\ 0.95, & \{a,b\} = \{\text{high}, \text{low}\}, \end{cases}$$

并以对称方式扩展。因此，“高”和“低”可靠性等级几乎处于最大矛盾状态。

犹豫型多属性集的隶属度

$$hpdf : P \times Pv \longrightarrow \mathcal{H}([0,1])$$

汇集来自不同部门（如物流、财务和质量控制）的多个模糊隶属度评分。

对于供应商 s_1（长期合作伙伴，交货基本准时），我们可能得到：

$$hpdf(s_1, \text{high}) = \{0.82,\ 0.88,\ 0.91\}, \qquad hpdf(s_1, \text{medium}) = \{0.10,\ 0.15\}, \qquad hpdf(s_1, \text{low}) = \{0.02\}.$$

例如，0.82 和 0.88 可能来自两位不同分析师根据历史准时交货率所作的评估，而 0.91 则来自近期的预测模型。

对于供应商 s_2（新供应商，历史记录有限），假设：

$$hpdf(s_2, \text{high}) = \{0.40,\ 0.55\}, \qquad hpdf(s_2, \text{medium}) = \{0.45,\ 0.50,\ 0.60\}, \qquad hpdf(s_2, \text{low}) = \{0.15,\ 0.25\}.$$

这些犹豫集反映了不同利益相关方对s_2可靠性的看法存在一定分歧。

对于供应商 s_3（经常延迟交货的供应商），假设：

$$hpdf(s_3, \text{high}) = \{0.05\}, \qquad hpdf(s_3, \text{medium}) = \{0.25,\ 0.30\}, \qquad hpdf(s_3, \text{low}) = \{0.70,\ 0.80\}.$$

因此，该元组

$$PS_{\text{H}}^{(1,1)} = \big(P,\ v,\ Pv,\ hpdf,\ pCF\big)$$

是一个用于对供应商可靠性进行评估的犹豫多元生成集。

决策者可以选择一个占主导地位的属性值（例如，“高”可靠性），并通过以下方式对每个犹豫集 $hpdf(s_i, a)$ 进行禀性聚合：

- 首先组合每个 $hpdf(s_i,\ a)$ 内部的犹豫模糊隶属度（例如，采用平均值、中位数，或乐观/悲观选择）；然后
- 然后，使用 $pCF(\text{high}\ a)$ 对聚合后的分数进行矛盾加权，使得来自与“high”（例如“low”）矛盾程度更高的取值的隶属度受到更大惩罚。

这提供了一种灵活且能感知矛盾的机制，可在异质且犹豫不决的专家意见下对供应商进行排序或筛选。

为完整起见，我们以与定义 3.13.2 兼容的形式回顾标准的犹豫模糊集和犹豫中智集。

定义 3.13.5（犹豫模糊集）。[359] 设 P 为非空论域。定义在 P 上的犹豫模糊集（HFS）是一个有序对

$$H_{\mathrm{F}} = (P,\ h_{\mathrm{F}}),$$

其中

$$h_{\mathrm{F}} : P \longrightarrow \mathcal{H}([0,1])$$

为每个 $x \in P$ 指定一个有限非空集合 $h_{\mathrm{F}}(x) \subseteq [0,1]$，其中包含 x 属于该集合的可能隶属度。

定义 3.13.6（犹豫中智集）。[697] 设 P 是一个非空论域。定义其上的一个犹豫中智集（HNS）为一对

$$H_{\mathrm{N}} = (P,\ h_{\mathrm{N}}),$$

其中

$$h_{\mathrm{N}} : P \longrightarrow \mathcal{H}\big([0,1]^3\big)$$

为每个 $x \in P$ 指定一个有限非空集合 $h_{\mathrm{N}}(x) \subseteq [0,1]^3$，其中包含中智三元组

$$(T, I, F) \in [0,1]^3,$$

将其解释为 x 的犹豫真度、不确定度和假度。

现在我们将正式证明，通过对 s、t 以及属性值集作适当选择，犹豫多元集可以同时推广犹豫模糊集和犹豫中智集。

定理 3.13.7（犹豫 Plithogenic 集推广了犹豫模糊集）。 固定一个非空论域P。考虑 P 上所有犹豫模糊集构成的类，

$$\mathsf{HFS}(P) \ :=\ \big\{\, H_{\mathrm{F}} = (P, h_{\mathrm{F}}) \ \big|\ h_{\mathrm{F}} : P \to \mathcal{H}([0,1]) \,\big\},$$

以及犹豫 *Plithogenic* 集构成的子类

$$\mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P) \ :=\ \Big\{\, PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)} = (P, v, Pv, hpdf, pCF) \ \Big|\ Pv = \{a_0\},\ pCF(a,b) \equiv 0 \,\Big\}.$$

那么存在一个双射

$$\Phi_{\mathrm{F}} : \mathsf{HFS}(P) \longrightarrow \mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P),$$

因此，每个犹豫模糊集都可以与一个唯一的犹豫多元生成集相对应，该集合具有 $s = 1$、$t = 1$、一个属性值以及零矛盾。

证明：步骤 1。映射 Φ_{F} 的构造：$\mathsf{HFS}(P) \to \mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P)$。

令 $H_{\mathrm{F}} = (P, h_{\mathrm{F}}) \in \mathsf{HFS}(P)$ 为任意集合。固定一个属性名称 v 和一个单元素值集 $Pv = \{a_0\}$。定义

$$pCF(a,b) := 0 \in [0,1] \qquad \text{for all } a, b \in Pv.$$

显然，pCF 是自反且对称的。

定义 $hpdf$：$P \times Pv \to \mathcal{H}([0,1]^1)$ 如下：

$$hpdf(x, a_0) \;:=\; \big\{\, (\alpha) \in [0,1]^1 \;\big|\; \alpha \in h_{\mathrm{F}}(x) \,\big\}, \qquad x \in P. \tag{3.2}$$

由于 $h_{\mathrm{F}}(x)$ 是有限且非空的，右侧的集合也有限且非空，因此 $hpdf(x, a_0) \in \mathcal{H}([0,1]^1)$。于是

$$PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)}(H_{\mathrm{F}}) \;:=\; \big(P,\; v,\; Pv,\; hpdf,\; pCF\big)$$

这是一个定义良好的、维数为 $(s,t) = (1,1)$ 的犹豫式多元生成集，其中 $Pv = \{a_0\}$ 和 $pCF \equiv 0$。记

$$\Phi_{\mathrm{F}}(H_{\mathrm{F}}) \;:=\; PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)}(H_{\mathrm{F}}).$$

步骤 2. 构造逆映射 Ψ_{F}：$\mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P) \to \mathsf{HFS}(P)$。

Let

$$PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)} = (P, v, \{a_0\}, hpdf, pCF) \in \mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P)$$

任意。定义 h_{F}：$P \to \mathcal{H}([0,1])$ 为

$$h_{\mathrm{F}}(x) \;:=\; \big\{\, \alpha \in [0,1] \;\big|\; (\alpha) \in hpdf(x, a_0) \,\big\}, \qquad x \in P. \tag{3.3}$$

由于每个 $hpdf(x,\ a_0)$ 都是有限且非空的，因此其第一坐标集合 $h_{\mathrm{F}}(x)$ 也是有限且非空的，所以 $h_{\mathrm{F}}(x) \in \mathcal{H}([0,1])$。因此，$H_{\mathrm{F}} := (P,\ h_{\mathrm{F}})$ 是 P 上的犹豫模糊集。定义

$$\Psi_{\mathrm{F}}(PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)}) \;:=\; H_{\mathrm{F}}.$$

步骤 3. 验证 Ψ_{F} 和 Φ_{F} 互为逆映射。

(i) 对于 $H_{\mathrm{F}} = (P,\ h_{\mathrm{F}}) \in \mathsf{HFS}(P)$ 和 $x \in P$，结合（3.2）和（3.3）可计算得

$$\big(\Psi_{\mathrm{F}} \circ \Phi_{\mathrm{F}}\big)(H_{\mathrm{F}})(x) \;=\; \Psi_{\mathrm{F}}\big(PS_{\mathrm{H}}^{(1,1)}(H_{\mathrm{F}})\big)(x) \;=\; \big\{\alpha \in [0,1] \;\big|\; (\alpha) \in hpdf(x, a_0)\big\}.$$

根据（3.2），

$$hpdf(x, a_0) \;=\; \big\{\, (\beta) \in [0,1]^1 \;\big|\; \beta \in h_{\mathrm{F}}(x) \,\big\}.$$

因此

$$\big(\Psi_{\mathrm{F}} \circ \Phi_{\mathrm{F}}\big)(H_{\mathrm{F}})(x) \;=\; \Big\{\alpha \in [0,1] \;\Big|\; (\alpha) \in \big\{(\beta) \mid \beta \in h_{\mathrm{F}}(x)\big\}\Big\}.$$

条件 $(\alpha) \in \{(\beta) \mid \beta \in h_{\mathrm{F}}(x)\}$ 等价于 $\exists \beta \in h_{\mathrm{F}}(x)$，其中 $(\alpha) = (\beta)$。一维向量 $(\alpha) = (\beta)$ 相等意味着 $\alpha = \beta$。因此

$$\big(\Psi_{\mathrm{F}} \circ \Phi_{\mathrm{F}}\big)(H_{\mathrm{F}})(x) \;=\; \big\{\alpha \in [0,1] \;\big|\; \alpha \in h_{\mathrm{F}}(x)\big\} \;=\; h_{\mathrm{F}}(x).$$

由于这对所有 $x \in P$ 都成立，我们得到

$$\Psi_{\mathrm{F}} \circ \Phi_{\mathrm{F}} = \mathrm{id}_{\mathsf{HFS}(P)}.$$

(ii) 反过来，设 $PS^{(1,1)}{}_{\mathrm{H}}=(P,v,\{a_0\},hpdf,pCF)\in\mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P)$ 且 $x\in P$。那么 $\Psi_{\mathrm{F}}(PS^{(1,1)}{}_{\mathrm{H}})=(P,h_{\mathrm{F}})$，其中 h_{F} 由 (3.3) 给出。应用 Φ_{F}，我们得到一个新的犹豫式位势 DAF

$$hpdf'(x,a_0) := \{\,(\alpha)\in[0,1]^1 \mid \alpha\in h_{\mathrm{F}}(x)\,\}.$$

利用（3.3），可得

$$hpdf'(x,a_0) = \Big\{(\alpha)\in[0,1]^1 \;\Big|\; \alpha\in\big\{\beta\in[0,1] \mid (\beta)\in hpdf(x,a_0)\big\}\Big\}.$$

Thus

$$hpdf'(x,a_0) = \Big\{(\alpha)\in[0,1]^1 \;\Big|\; \exists\beta\in[0,1] \text{ with } (\beta)\in hpdf(x,a_0) \text{ and } \alpha=\beta\Big\}.$$

但条件“存在 β，使得 $(\beta)\in hpdf(x,a_0)$ 且 $\alpha=\beta$”等价于“$(\alpha)\in hpdf(x,a_0)$”。因此

$$hpdf'(x,a_0) = \{\,(\alpha)\in[0,1]^1 \mid (\alpha)\in hpdf(x,a_0)\,\} = hpdf(x,a_0).$$

因此，$PS^{(1,1)}{}_{\mathrm{H}}$ 和 $\Phi_{\mathrm{F}}\big(\Psi_{\mathrm{F}}(PS^{(1,1)}{}_{\mathrm{H}})\big)$ 的 DAF 相同，而其他分量（P,v,Pv,pCF）按构造保持不变。于是

$$\Phi_{\mathrm{F}}\circ\Psi_{\mathrm{F}} = \mathrm{id}_{\mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P)}.$$

步骤 4. 由于 $\Psi_{\mathrm{F}}\circ\Phi_{\mathrm{F}}=\mathrm{id}_{\mathsf{HFS}(P)}$ 且 $\Phi_{\mathrm{F}}\circ\Psi_{\mathrm{F}}=\mathrm{id}_{\mathsf{HPS}_{\mathrm{F}}(P)}$，，映射 Φ_{F} 和 Ψ_{F} 互为逆映射，因此 Φ_{F} 是双射。这证明每个犹豫模糊集都可规范地实现为一个犹豫多元集，其中 $(s,t)=(1,1)$，具有单一属性值，且矛盾度为零。□

定理 3.13.8（犹豫型多元集推广了犹豫型中智集）。取一个非空论域 P。考虑 P 上所有犹豫型中智集构成的类，

$$\mathsf{HNS}(P) := \{\,H_{\mathrm{N}}=(P,h_{\mathrm{N}}) \mid h_{\mathrm{N}}:P\to\mathcal{H}([0,1]^3)\,\},$$

以及犹豫型多元集构成的子类

$$\mathsf{HPS}_{\mathrm{N}}(P) := \Big\{PS^{(3,1)}_{\mathrm{H}}=(P,v,Pv,hpdf,pCF) \;\Big|\; Pv=\{a_0\},\ pCF(a,b)\equiv 0\Big\}.$$

则存在一个双射

$$\Phi_{\mathrm{N}}:\mathsf{HNS}(P)\longrightarrow\mathsf{HPS}_{\mathrm{N}}(P),$$

因此，每个犹豫型中智集都可以与一个唯一的犹豫型多元集对应，其中 $s=3$、$t=1$，属性值只有一个，且矛盾度为零。

证明。证明与定理 3.13.7 类似，但此处 $s=3$，且不需要改变维度 d.

步骤 1. 对于 $H_{\mathrm{N}}=(P,h_{\mathrm{N}})\in\mathsf{HNS}(P)$，固定一个属性 v，设定 $Pv=\{a_0\}$，并定义 $pCF(a,b):=0$对所有 $a,b\in Pv$。定义

$$hpdf(x,a_0) := h_{\mathrm{N}}(x)\subseteq[0,1]^3, \qquad x\in P.$$

由于 $h_{\mathrm{N}}(x)$ 是有限且非空的，因此可得 $hpdf(x,a_0)\in\mathcal{H}([0,1]^3)$，所以

$$PS^{(3,1)}_{\mathrm{H}}(H_{\mathrm{N}}) := \big(P,\ v,\ \{a_0\},\ hpdf,\ pCF\big)\in\mathsf{HPS}_{\mathrm{N}}(P).$$

集合 $\Phi_{\mathrm{N}}(H_{\mathrm{N}}):=PS^{(3,1)}{}_{\mathrm{H}}(H_{\mathrm{N}})$.

步骤2. 对于 $PS^{(3,1)}{}_{\mathrm{H}}=(P,v,\{a_0\},hpdf,pCF)\in\mathsf{HPS}_{\mathrm{N}}(P)$，定义 $h_{\mathrm{N}}:\ P\to\mathcal{H}([0,1]^3)$，只需通过

$$h_{\mathrm{N}}(x):=hpdf(x,a_0), \qquad x\in P,$$

并令 $\Psi_{\mathrm{N}}(PS^{(3,1)}{}_{\mathrm{H}}) := (P, h_{\mathrm{N}}) \in \mathrm{HNS}(P)$.

步骤3. 对任意 $H_{\mathrm{N}} = (P,\ h_{\mathrm{N}})$ 和 $x \in P$，有

$$\big(\Psi_{\mathrm{N}} \circ \Phi_{\mathrm{N}}\big)(H_{\mathrm{N}})(x) = \Psi_{\mathrm{N}}\big(PS_{\mathrm{H}}^{(3,1)}(H_{\mathrm{N}})\big)(x) = hpdf(x, a_0) = h_{\mathrm{N}}(x),$$

因此 $\Psi_{\mathrm{N}} \circ \Phi_{\mathrm{N}} = \mathrm{id}^{\mathsf{HNS}(P)}\cdot$。反之，对任意 $PS^{(3,1)}{}_{\mathrm{H}}$ 和 $x \in P$，有

$$\big(\Phi_{\mathrm{N}} \circ \Psi_{\mathrm{N}}\big)(PS_{\mathrm{H}}^{(3,1)})(x, a_0) = h_{\mathrm{N}}(x) = hpdf(x, a_0),$$

因此，DAF 得以保留，其余分量 $(P,\ v,\ Pv,\ pCF)$ 保持不变。因此 $\Phi_{\mathrm{N}} \circ \Psi_{\mathrm{N}} = \mathrm{id}^{\mathsf{HPS}_{\mathrm{N}}(P)}\cdot$

步骤4. 因此，Φ_{N} 是 $\mathrm{HNS}(P)$ 与 $\mathrm{HPS}_{\mathrm{N}}(P)$ 之间的双射。这表明，每个犹豫中智集都可表示为一个特定的犹豫立体集，其中 $(s,\ t) = (3,\ 1)$ 具有单一属性值，且矛盾度为平凡值。

□

3.14 球形立体集

球形矛盾学集通过受球面约束的中智三元组对属性值元素建模，并纳入矛盾度以处理复杂的不确定性交互。本节回顾球形模糊集和球形中智集的标准概念，随后引入球形矛盾学集的概念，最后证明它是前两种概念的推广。

定义 3.14.1（球形模糊集）。 [366,367,702] 设 U 为非空论域。 A上的球形模糊集 由三个隶属函数确定:

$$T_A,\ I_A,\ F_A : U \longrightarrow [0,1]$$

使得对每个 $x \in U$,

$$0 \ \le\ T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \ \le\ 1. \tag{3.4}$$

通常记作

$$A \ =\ \big\{\, \big(x,\ T_A(x),\ I_A(x),\ F_A(x)\big) \ :\ x \in U \,\big\}.$$

定义 3.14.2（球形中智集）。[703–705] 设 U 为非空论域。 U 上的球形中智集 A 由三个函数描述:

$$T_A,\ I_A,\ F_A : U \longrightarrow [0,3]$$

使得对每个 $x \in U$,

$$0 \ \le\ T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \ \le\ 3. \tag{3.5}$$

与前面一样，我们可以写为

$$A \ =\ \big\{\, \big(x,\ T_A(x),\ I_A(x),\ F_A(x)\big) \ :\ x \in U \,\big\}.$$

例 3.14.3（球形中智集）。 设 $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ 为一个论域，其中 x_1 =“正常”、 x_2 = “警告”和 x_3 = “严重”分别表示机器的状态。在 U 上定义球形中智集 A如下:

$$\begin{aligned} T_A(x_1) &= 0.9,\ I_A(x_1) = 0.2,\ F_A(x_1) = 0.1,\\ T_A(x_2) &= 0.6,\ I_A(x_2) = 0.6,\ F_A(x_2) = 0.4,\\ T_A(x_3) &= 0.3,\ I_A(x_3) = 0.8,\ F_A(x_3) = 0.9. \end{aligned}$$

那么，对于每个 $x \in U$，我们有

$$\begin{aligned} T_A(x_1)^2 + I_A(x_1)^2 + F_A(x_1)^2 &= 0.9^2 + 0.2^2 + 0.1^2 = 0.81 + 0.04 + 0.01 = 0.86 \le 3,\\ T_A(x_2)^2 + I_A(x_2)^2 + F_A(x_2)^2 &= 0.6^2 + 0.6^2 + 0.4^2 = 0.36 + 0.36 + 0.16 = 0.88 \le 3,\\ T_A(x_3)^2 + I_A(x_3)^2 + F_A(x_3)^2 &= 0.3^2 + 0.8^2 + 0.9^2 = 0.09 + 0.64 + 0.81 = 1.54 \le 3, \end{aligned}$$

so t约束（3.5）对所有 $x \in U$ 均成立，因此 A 是 U 上的一个球形中智集 .

我们现在对 d 的三个分量施加球形约束，从而得到球形多属性集的概念。

定义 3.14.4（球形多属性集）。设 U 为非空论域，a 为固定属性，V 为非空属性值集。取定半径 $\lambda > 0$ 和矛盾度函数 $c\colon V \times V \to [0,1]$，使得

$$c(v,v) = 0, \qquad c(v_1,v_2) = c(v_2,v_1) \quad \text{for all } v, v_1, v_2 \in V.$$

一个半径为 λ 的球形多属性集定义在(U, a, V) 是一个多属性集

$$A^{\mathrm{sph}} \;=\; (U, a, V, d_A, c)$$

使得

- 隶属度函数

  $$d_A : U \times V \longrightarrow [0,\lambda]^3$$

  定义为

  $$d_A(x,v) \;=\; \big(T_A(x,v),\, I_A(x,v),\, F_A(x,v)\big),$$

- 对于每个 $(x,v) \in U \times V$，我们都有球面约束

  $$0 \;\le\; T_A(x,v)^2 + I_A(x,v)^2 + F_A(x,v)^2 \;\le\; \lambda^2. \tag{3.6}$$

我们称 $\big(T_A(x,v)\ I_A(x,v)\ F_A(x,v)\big)$ 为 x 关于属性值 v的球面多属性中智三元组。

注 3.14.5。请注意，若 $|V| = 1$ 且 $c \equiv 0$，球面多属性集将退化为分配给每个元素 $x \in U$的单个球面三元组；只要适当选择 λ，这正是球面模糊集和球面中智集的情形。

球面多属性集与以往球面模型之间的特化关系总结于表 3.22。

表 3.22：球形 Plithogenic 集（单属性a^*, $pCF \equiv 0$）的特殊情形：球形模糊型模型。

模型	$pdf(x,\ a^*)$	球面约束
球面模糊集 [367, 702]	$(\mu(x)\ \eta(x)\ \nu(x))$	$\mu(x)^2 + \eta(x)^2 + \nu(x)^2 \le 1$
球面中智集合 [703–705]	$(T(x)\ I(x)\ F(x))$	$T(x)^2 + I(x)^2 + F(x)^2 \le 1$
球形图像模糊集合 [706, 707]	$(\xi(x)\ \psi(x)\ \rho(x)\ \gamma(x))$	$\xi(x)^2 + \psi(x)^2 + \rho(x)^2 + \gamma(x)^2 \le 1$
球形犹豫模糊集 [701]	$\big(H_\mu(x)\ H_\eta(x)\ H_\nu(x)\big)$	对所有 $(\mu,\eta,\nu) \in H_\mu(x) \times H_\eta(x) \times H_\nu(x)$：$\mu^2 + \eta^2 + \nu^2 \le 1$

下面给出了这一概念的一个具体例子。

例 3.14.6（球形 Plithogenic 空气质量风险评估）。设 U 为城市行政区集合，a 为“空气质量健康风险”属性。取值集

$$V = \{\text{low, medium, high}\}.$$

考虑半径为 $\lambda = 1$ 的球形多属性集，

$$A^{\text{sph}} = (U, a, V, d_A, c),$$

其矛盾度为

$$c(\text{low}, \text{low}) = c(\text{medium}, \text{medium}) = c(\text{high}, \text{high}) = 0,$$

$$c(\text{low}, \text{medium}) = c(\text{medium}, \text{low}) = 0.5,$$

$$c(\text{medium}, \text{high}) = c(\text{high}, \text{medium}) = 0.6,$$

$$c(\text{low}, \text{high}) = c(\text{high}, \text{low}) = 1.$$

对于特定区域 $x_0 \in U$，假设环境主管部门给出了以下球形多属性中智三元组：

$$d_A(x_0, \text{low}) = \big(T_A, I_A, F_A\big)(x_0, \text{low}) = (0.10,\ 0.20,\ 0.95),$$

$$d_A(x_0, \text{medium}) = \big(T_A, I_A, F_A\big)(x_0, \text{medium}) = (0.50,\ 0.30,\ 0.40),$$

$$d_A(x_0, \text{high}) = \big(T_A, I_A, F_A\big)(x_0, \text{high}) = (0.75,\ 0.40,\ 0.10).$$

每个三元组均满足球形约束 $T^2 + I^2 + F^2 \le 1$：

$$0.10^2 + 0.20^2 + 0.95^2 = 0.01 + 0.04 + 0.9025 = 0.9525 \le 1,$$

$$0.50^2 + 0.30^2 + 0.40^2 = 0.25 + 0.09 + 0.16 = 0.50 \le 1,$$

$$0.75^2 + 0.40^2 + 0.10^2 = 0.5625 + 0.16 + 0.01 = 0.7325 \le 1.$$

这里，$T_A(x_0,\ v)$ 表示 x_0 确实具有风险等级 v 的程度；$I_A(x_0,\ v)$ 表示不确定程度（由传感器噪声、季节变化或数据不完整所致）；$F_A(x_0,\ v)$ 表示 x_0 不具有风险等级 v 的程度。矛盾函数 c 表示“低”风险与“高”风险之间存在最大程度的矛盾，而“中”风险则与两者都部分相容。

在汇总专家意见或监测数据时，幂学机制使用 c 对三元组进行加权，因此，当支持“高”的证据与支持“低”的证据合并时，前者会被削弱，反之亦然。因此，A^{sph} 为所有地区 $x \in U$ 的不确定空气质量风险提供了一种球形且能反映矛盾的表示。

例 3.14.7（糖尿病严重程度的球形幂学评估）。糖尿病严重程度衡量疾病的进展程度，综合考虑血糖控制、并发症、合并症、治疗强度以及长期预后风险（参见 [708]）。

设 U 为某诊所的患者集合，a 为属性“糖尿病严重程度”。考虑集合

$$V = \{\text{mild, moderate, severe}\},$$

以及半径为 $\lambda = 1$ 的球形多元生成集合，

$$B^{\text{sph}} = (U, a, V, d_B, c),$$

其矛盾程度为

$$c(\text{mild},\text{mild}) = c(\text{moderate},\text{moderate}) = c(\text{severe},\text{severe}) = 0,$$

$$c(\text{mild},\text{moderate}) = c(\text{moderate},\text{mild}) = 0.3,$$

$$c(\text{moderate},\text{severe}) = c(\text{severe},\text{moderate}) = 0.4,$$

$$c(\text{mild},\text{severe}) = c(\text{severe},\text{mild}) = 1.$$

对于某位患者 $y \in U$，假设实验室检查和医生评估得出：

$$d_B(y,\text{mild}) = \big(T_B, I_B, F_B\big)(y,\text{mild}) = (0.25,\ 0.40,\ 0.80),$$

$$d_B(y,\text{moderate}) = \big(T_B, I_B, F_B\big)(y,\text{moderate}) = (0.60,\ 0.35,\ 0.30),$$

$$d_B(y,\text{severe}) = \big(T_B, I_B, F_B\big)(y,\text{severe}) = (0.75,\ 0.30,\ 0.15).$$

同样，每个三元组都位于单位球面上：

$$0.25^2 + 0.40^2 + 0.80^2 = 0.0625 + 0.16 + 0.64 = 0.8625 \le 1,$$

$$0.60^2 + 0.35^2 + 0.30^2 = 0.36 + 0.1225 + 0.09 = 0.5725 \le 1,$$

$$0.75^2 + 0.30^2 + 0.15^2 = 0.5625 + 0.09 + 0.0225 = 0.675 \le 1.$$

这里，$T_B(y,v)$ 表示当前医学证据支持患者 y 的严重程度等级 v 的程度，$I_B(y,v)$ 表示不确定性（例如检查缺失、指标相互矛盾），而 $F_B(y,v)$ 表示对严重程度等级 v 的反对程度。矛盾函数 c 表示“轻度”和“重度”高度不相容，而“中度”与二者都较为接近。

在多专家决策支持中，球形多元聚合使用 c 来协调相互冲突的评估（例如，一位专家支持“轻度”，另一位专家支持“重度”），同时保持每个 $(y,v) \in U \times V$ 的球形中智约束。由此可为每位患者提供一种具有医学可解释性且考虑矛盾因素的糖尿病严重程度评估。

现在我们将形式化并证明这一推广性质。

定理 3.14.8. 设 U 为一个非空全集。

(i) (球形模糊情形) 考虑 U上所有球形模糊集组成的类 $\mathcal{SFS}(U)$。那么，$\mathcal{SFS}(U)$与半径为 $\lambda = 1$的球形多元集子类 $\mathcal{SPS}_1(U)$之间存在双射，使得

$$V = \{v_0\} \ \textit{ is a singleton and } \ c(v_0, v_0) = 0.$$

(ii) (球形中智情形) 考虑U上所有球形中智集组成的类 $\mathcal{SNS}(U)$。那么， $\mathcal{SNS}(U)$与满足以下条件、半径为 $\lambda = \underline{\vee}3$ 的球形多元集子类 $\mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U)$之间存在双射：

$$V = \{v_0\} \ \textit{ and } \ c(v_0, v_0) = 0.$$

因此，球形多属性集合的概念严格推广了球形模糊集和球形中智集。

证明。 我们分别证明 (i) 和 (ii)。

（i）的证明。 固定 $\lambda = 1$、单元素值集 $V = \{v_0\}$，并令 $c(v_0, v_0) = 0$。

步骤 *1*：从球形模糊集到球形多元集。 设 $A \in \mathcal{SFS}(U)$ 为一个球形模糊集。根据定义，我们有三个映射

$$T_A,\ I_A,\ F_A : U \to [0,1]$$

使得对每个 $x \in U$,

$$0 \ \le\ T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \ \le\ 1.$$

定义一个隶属度函数

$$d_A : U \times V \to [0,1]^3$$

by

$$d_A(x, v_0) \ :=\ \big(T_A(x),\, I_A(x),\, F_A(x)\big). \tag{3.7}$$

由于对所有 x， $T_A(x)$ $I_A(x)$ $F_A(x)$ $\in [0,1]$，因此满足值域条件 $d_A(x, v_0) \in [0,1]^3$。此外，球形不等式

$$T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \le 1$$

恰为 (3.6)，其中 $\lambda = 1$ 和 $v = v_0$。因此,

$$A^{\mathrm{sph}} := (U, a, V, d_A, c)$$

是一个半径为 1、值集为单元素集且矛盾函数平凡的球形多属性集。这定义了一个映射

$$\Phi : \mathcal{SFS}(U) \longrightarrow \mathcal{SPS}_1(U), \quad A \longmapsto A^{\mathrm{sph}}.$$

步骤 *2*：从球形多属性集（半径为 *1*，单元素集 V）到球形模糊集。反过来, let

$$B^{\mathrm{sph}} = (U, a, V, d_B, c) \in \mathcal{SPS}_1(U)$$

其中 $V = \{v_0\}$ 和 $c(v_0,\ v_0) = 0$。根据定义 3.14.4，对于每个 $x \in U$，都存在实数

$$T_B(x, v_0),\ I_B(x, v_0),\ F_B(x, v_0) \in [0,1]$$

使得

$$d_B(x, v_0) \ =\ \big(T_B(x, v_0),\, I_B(x, v_0),\, F_B(x, v_0)\big)$$

and

$$0 \ \le\ T_B(x, v_0)^2 + I_B(x, v_0)^2 + F_B(x, v_0)^2 \ \le\ 1$$

对于每个 $x \in U$。定义

$$T_B^*(x) := T_B(x, v_0), \quad I_B^*(x) := I_B(x, v_0), \quad F_B^*(x) := F_B(x, v_0).$$

则 T_B^*， I_B^*， F_B^*： $U \to [0,1]$ 且对于每个 $x \in U$,

$$0 \ \le\ T_B^*(x)^2 + I_B^*(x)^2 + F_B^*(x)^2 \ =\ T_B(x, v_0)^2 + I_B(x, v_0)^2 + F_B(x, v_0)^2 \ \le\ 1.$$

因此

$$B := \big\{(x, T_B^*(x), I_B^*(x), F_B^*(x)) : x \in U\big\}$$

是一个球形模糊集，即 $B \in \mathcal{SFS}(U)$。这定义了一个映射

$$\Psi : \mathcal{SPS}_1(U) \longrightarrow \mathcal{SFS}(U), \quad B^{\mathrm{sph}} \longmapsto B.$$

步骤 *3*： Φ 和 Ψ 互为逆映射。取 $A \in \mathcal{SFS}(U)$ 并计算 $\Psi(\Phi(A))$。根据构造，$\Phi(A)$ 是具有以下性质的球形多重原集 A^{sph}

$$d_A(x, v_0) = \big(T_A(x), I_A(x), F_A(x)\big).$$

应用 Ψ可得到球形模糊三元组

$$T_A^*(x) = T_A(x), \quad I_A^*(x) = I_A(x), \quad F_A^*(x) = F_A(x)$$

对所有 $x \in U$均成立。因此 $\Psi(\Phi(A)) = A$。

反过来，取 $B^{\mathrm{sph}} \in \mathcal{SPS}_1(U)$，并计算 $\Phi(\Psi(B^{\mathrm{sph}}))$。球形模糊集 $\Psi(B^{\mathrm{sph}})$的分量为

$$T_B^*(x) = T_B(x, v_0), \quad I_B^*(x) = I_B(x, v_0), \quad F_B^*(x) = F_B(x, v_0).$$

于是， $\Phi(\Psi(B^{\mathrm{sph}}))$是球形多元集 $\widetilde{B}^{\mathrm{sph}}$ ，其度函数为

$$\tilde{d}_B(x, v_0) = \big(T_B^*(x), I_B^*(x), F_B^*(x)\big) = \big(T_B(x, v_0), I_B(x, v_0), F_B(x, v_0)\big) = d_B(x, v_0).$$

Thus

$$\tilde{d}_B = d_B \quad \text{and hence} \quad \Phi(\Psi(B^{\mathrm{sph}})) = B^{\mathrm{sph}}.$$

因此， Φ和 Ψ是 $\mathcal{SFS}(U)$与 $\mathcal{SPS}_1(U)$之间互为逆映射的双射，从而证明了 (i)。

Proof of (ii). Now fix $\lambda = \sqrt{3}$, $V = \{v_0\}$, and $c(v_0, v_0) = 0$.

步骤 *1*：从球形中智集到球形多元集。设 $A \in \mathcal{SNS}(U)$ 是一个球形中智集。那么

$$T_A,\ I_A,\ F_A : U \to [0, 3]$$

且对每个 $x \in U$,

$$0 \ \le\ T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \ \le\ 3. \tag{3.8}$$

定义

$$d_A : U \times V \to [0, \sqrt{3}]^3$$

by

$$d_A(x, v_0) \ :=\ \big(T_A(x),\, I_A(x),\, F_A(x)\big). \tag{3.9}$$

首先检验陪域条件。固定 $x \in U$。由 (3.8) 可得

$$T_A(x)^2 \le T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \le 3,$$

因此 $T_A(x)^2 \le 3$ ，进而

$$0 \le T_A(x) \le \sqrt{3}.$$

对 $I_A(x)$ 和 $F_A(x)$ 同样可以作出论证，因此

$$0 \le T_A(x), I_A(x), F_A(x) \le \sqrt{3}$$

对每个 $x \in U$ 均成立。因此 $d_A(x, v_0) \in [0, \sqrt{3}]^3$。

接下来，当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时，球面约束 (3.6) 变为 $^-$

$$0 \le T_A(x)^2 + I_A(x)^2 + F_A(x)^2 \le (\sqrt{3})^2 = 3,$$

由式 (3.8) 可知成立。因此

$$A^{\mathrm{sph}} := (U, a, V, d_A, c)$$

是一个半径为 $\sqrt{3}$ 的球形复合学集合，其单元素值集和矛盾函数均为平凡的。这定义了一个映射

$$\Phi' : \mathcal{SNS}(U) \longrightarrow \mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U), \quad A \longmapsto A^{\mathrm{sph}}.$$

步骤 *2*：从球形多元学集（半径 $\sqrt{3}$，单元素集 V）到球形中智集。反过来，设

$$B^{\mathrm{sph}} = (U, a, V, d_B, c) \in \mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U)$$

其中 $V = \{v_0\}$ 和 $c(v_0, v_0) = 0$。同样，根据定义 3.14.4，对于每个 $x \in U$，我们有

$$d_B(x, v_0) \;=\; \big(T_B(x, v_0),\, I_B(x, v_0),\, F_B(x, v_0)\big) \in [0, \sqrt{3}]^3$$

and

$$0 \;\le\; T_B(x, v_0)^2 + I_B(x, v_0)^2 + F_B(x, v_0)^2 \;\le\; (\sqrt{3})^2 = 3.$$

定义

$$T_B^{\dagger}(x) := T_B(x, v_0), \quad I_B^{\dagger}(x) := I_B(x, v_0), \quad F_B^{\dagger}(x) := F_B(x, v_0).$$

Then

$$T_B^{\dagger}, I_B^{\dagger}, F_B^{\dagger} : U \to [0, \sqrt{3}] \subseteq [0, 3],$$

并且对于每个 $x \in U$,

$$0 \;\le\; T_B^{\dagger}(x)^2 + I_B^{\dagger}(x)^2 + F_B^{\dagger}(x)^2 \;\le\; 3.$$

Thus

$$B := \big\{(x, T_B^{\dagger}(x), I_B^{\dagger}(x), F_B^{\dagger}(x)) : x \in U\big\}$$

是一个球形中智集，即 $B \in \mathcal{SNS}(U)$。这给出了一个映射

$$\Psi' : \mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U) \longrightarrow \mathcal{SNS}(U), \quad B^{\mathrm{sph}} \longmapsto B.$$

步骤 *3*：Φ' 和 Ψ' 互为逆映射。验证在结构上与球糊情形完全相同。对于任意 $A \in \mathcal{SNS}(U)$，复合映射 $\Psi'(\Phi'(A))$ 对每个 $x \in U$ 都恢复原三元组（$T_A(x)$ $I_A x$(F_A)x），因此 $\Psi'(\Phi'(A)) = A$。反之，对于任意 $B^{\mathrm{sph}} \in \mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U)$，复合映射 $\Phi'(\Psi'(B^{\mathrm{sph}}))$ 逐点保持 d_B 不变（通过与 (i) 的证明中相同的坐标等式），因此 $\Phi'(\Psi'(B^{\mathrm{sph}})) = B^{\mathrm{sph}}$。

因此 Φ'和 Ψ'是 $\mathcal{SNS}(U)$ 与 $\mathcal{SPS}_{\sqrt{3}}(U)$ 之间的互逆双射，从而证明了 (ii)。

结合 (i) 和 (ii)，我们得出：

- 每一个球面模糊集都可以实现为半径为1、具有单一属性值且矛盾为零的球面普利托根集；
- 每一个球面中智集都可以实现为半径为 $\sqrt{3}$ 、具有单一属性值且矛盾为零的球面普利托根集；
- 球形普利托根集合一般允许多个属性值以及非平凡的矛盾度 c，因而严格扩展了这两种框架。

至此，证明完毕。 □

3.15 T-球形多元成分集

T-球形普利托根集合通过赋予受 t-球形半径约束的三元组来刻画不确定性，并纳入基于属性的矛盾，从而捕捉更丰富的多值信息。

定义 3.15.1（T-球形多元成分集）。设 U 为非空论域， a 为固定属性， V 为非空属性值集。固定半径 $\lambda > 0$、实参数 $t \geq 1$ 和矛盾度函数 $c\colon V \times V \to [0,1]$，满足

$$c(v,v) = 0, \qquad c(v_1,v_2) = c(v_2,v_1) \quad \text{for all } v, v_1, v_2 \in V.$$

一个 阶数为 t、半径为 λ 的 *T*-球形多元成分集定义在 (U, a, V) 是一个多元成分集

$$A^{\mathrm{TSph}} \;=\; (U, a, V, d_A, c)$$

使得

- 隶属度函数

  $$d_A : U \times V \longrightarrow [0,\lambda]^3$$

  由下式给出

  $$d_A(x,v) \;=\; \big(T_A(x,v),\, I_A(x,v),\, F_A(x,v)\big),$$

- 且对于每个（x, v） $\in U \times V$，都有 t–球面约束

  $$0 \;\leq\; T_A(x,v)^t + I_A(x,v)^t + F_A(x,v)^t \;\leq\; \lambda^t. \tag{3.10}$$

三元组 $\big(T_A$（x, v） I_A（x, v） F_A（x, v）$\big)$ 称为 x关于属性值 v的 t–球面多元体中智三元组。

表 3.23 简要概述了各种 T-球形模糊类型模型如何作为 T-球形多元生成集的特例出现。每个模型均通过固定单个属性值、将矛盾函数设为零，并对相应的隶属结构应用 t-球形约束而得到。

表 3.23：作为 T-球面多元体集合特例的 T-球面模糊型模型（单属性 a^*, $pCF \equiv 0$，阶数 $t \geq 1$，半径 **1**）。

模型	pdf（x, a^*）	t-球约束
T-球模糊 Set [709, 710]	$(\mu(x)\ \eta(x)\ \nu(x))$	$\mu(x)^t + \eta(x)^t + \nu(x)^t \leq 1^t$
T-球中智-性集 [711, 712]	$(T(x)\ I(x)\ F(x))$	$T(x)^t + I(x)^t + F(x)^t \leq 1^t$
T-球面图模糊集	$(\xi(x)\ \psi(x)\ \rho(x)\ \gamma(x))$	$\xi(x)^t + \psi(x)^t + \rho(x)^t + \gamma(x)^t \leq 1^t$
T-球形犹豫模糊集 [701, 713]	$\big(H_\mu(x)\ H_\eta(x)\ H_\nu(x)\big)$	对于所有 $(\mu,\ \eta,\ \nu) \in H_\mu(x) \times H_\eta(x) \times H_\nu(x)$: $\mu^t + \eta^t + \nu^t \leq 1^t$

下面给出这一概念的一个具体示例。

例 3.15.2 （一个简单的 T-球形多元生成集）。 设 $U=\{x_1,x_2\}$ 是一个包含两个备选项（例如两家候选供应商）的集合，并设

$$V=\{v_1,v_2\}$$

为一个集合 的两个属性值（例如 $v_1=$“成本效益高”、 $v_2=$“质量上乘”）。固定 $\lambda=1$ 和 $t=$ 3.

定义矛盾函数 c： $V\times V\to[0,1]$ 如下:

$$c(v_1,v_1)=c(v_2,v_2)=0,\qquad c(v_1,v_2)=c(v_2,v_1)=0.4.$$

定义 d_A： $U\times V\to[0,1]^3$ 如下:

$$d_A(x_1,v_1)=(0.8,0.3,0.2),\qquad d_A(x_1,v_2)=(0.5,0.5,0.2),$$

$$d_A(x_2,v_1)=(0.4,0.7,0.2),\qquad d_A(x_2,v_2)=(0.6,0.2,0.6).$$

我们检验 $t=3$ 是否满足约束条件 (3.10)。

对于（x_1， v_1）：

$$0.8^3+0.3^3+0.2^3\ =\ 0.512+0.027+0.008\ =\ 0.547\ \le\ 1^3.$$

对于（x_1， v_2）：

$$0.5^3+0.5^3+0.2^3\ =\ 0.125+0.125+0.008\ =\ 0.258\ \le\ 1^3.$$

对于（x_2， v_1）：

$$0.4^3+0.7^3+0.2^3\ =\ 0.064+0.343+0.008\ =\ 0.415\ \le\ 1^3.$$

对于（x_2， v_2）：

$$0.6^3+0.2^3+0.6^3\ =\ 0.216+0.008+0.216\ =\ 0.440\ \le\ 1^3.$$

因此，所有三元组均满足 $T_A(x,\ v)^3+I_A(x,\ v)^3+F_A(x,\ v)^3\le 1^3$，所以 $A^{\mathrm{TSph}}=(U,\ a,\ V,\ d_A,$ $c)$ 是一个阶为 $t=3$ 且半径为 $\lambda=1$ 的 T-球形可塑性集合。

在此框架下，以下定理成立。

定理 3.15.3 （T-球形多元质性集推广了球形多元质性集）。 定义 3.14.4 中的每个球形多元质性集，都是定义 3.15.1意义下阶数为 $t=2$ 的 *T*-球形多元质性集。因此，*T*-球形多元质性集类严格推广了球形多元质性集类。

证明。设

$$A^{\mathrm{sph}} = (U, a, V, d_A, c)$$

是一个半径为 λ 的球形多元生成集，如定义 3.14.4 所述。根据定义，我们有

$$d_A(x,v) = \big(T_A(x,v), I_A(x,v), F_A(x,v)\big) \in [0,\lambda]^3$$

并且，对所有 $(x,\ v) \in U \times V$，

$$0 \ \le\ T_A(x,v)^2 + I_A(x,v)^2 + F_A(x,v)^2 \ \le\ \lambda^2. \tag{3.11}$$

现在固定 $t = 2$。将 (3.11) 与定义 3.15.1 中的 t 球形约束 (3.10) 进行比较：

$$0 \ \le\ T_A(x,v)^t + I_A(x,v)^t + F_A(x,v)^t \ \le\ \lambda^t.$$

对于 $t = 2$，这两个不等式完全一致，其余数据 $(U,\ a,\ V,\ d_A,\ c)$ 保持不变。因此，A^{sph} 满足阶数为 $t = 2$、半径为 λ 的 T-球形多元生成集的所有要求。

因此，映射

$$\Phi\colon\ \{\text{球形析取集}\} \longrightarrow \{\text{T-球形析取集}\},\qquad \Phi(A^{\mathrm{sph}}) = A^{\mathrm{sph}} \text{ 其中 } t = 2$$

将球形析取集的类嵌入到 T-球形析取集的类中。由于对于 $t > 2$，存在不满足定义 3.14.4 二次约束的 T-球形析取集，因此这种包含是严格的，所以 T-球形析取集是球形析取集的严格推广。

□

3.16 析取粗糙集

一个析取粗糙集利用结合隶属关系与 d
反 化，推广了模糊粗糙模型和中智粗糙模型 [714]。

定义 3.16.1（多元粗糙近似空间）。 [714] 设 $U \neq \varnothing$ 为一个论域，R 为 U上的一个多元关系。多元关系由以下内容指定：

$$pdf_R : U \times U \longrightarrow [0,1]^s,\qquad pCF_R : U \times U \longrightarrow [0,1]^t,$$

其中，$pdf_R(x,y)$ 是 y 属于 x的（向量）多元隶属度，而 $pCF_R(x,y)$ 是 x 与 y的属性值之间的（向量）矛盾度。假设存在一个固定的聚合

$$\Phi : [0,1]^s \times [0,1]^t \longrightarrow [0,1]$$

函数，该函数对每个自变量均单调递增，并满足 $\Phi(\mathrm{a},0) = \Phi(0,\mathrm{b}) = 0$。为方便起见，记作

$$\tilde{R}(x,y) \ :=\ \Phi\big(pdf_R(x,y),\, pCF_R(x,y)\big) \in [0,1].$$

于是，(U,R) 称为一个多元粗糙近似空间。

定义 3.16.2（多元粗糙下近似）。 [714] 设 $A \subseteq U$，并设 (U,R) 如上所述。 A关于 R 的多元粗糙下近似是模糊集

$$\underline{PL}_R(A) : U \to [0,1],\qquad \underline{PL}_R(A)(x) \ :=\ \inf_{y\in A} \max\big(1 - \tilde{R}(x,y),\, 1 - \tilde{R}(y,x)\big),\quad x \in U.$$

在标量情形下，$s = t = 1$ 和 $\Phi(a,b) = \max\{a,b\}$，这变为

$$\underline{PL}_R(A)(x) \ =\ \inf_{y\in A} \max\big(1 - pdf_R(x,y),\, 1 - pCF_R(x,y)\big),\quad x \in U.$$

定义 3.16.3（Plithogenic 上近似）。[714] 在相同假设下，关于 R 的 A 的 Plithogenic 上近似是模糊集

$$\overline{PL}_R(A) : U \to [0,1], \qquad \overline{PL}_R(A)(x) \;:=\; \sup_{y\in U} \min\big(\tilde{R}(x,y),\, 1-\tilde{R}(y,x)\big), \quad x \in U.$$

在标量情形下，$s = t = 1$ 和 $\Phi(a,b) = \max\{a,b\}$，这可化简为

$$\overline{PL}_R(A)(x) \;=\; \sup_{y\in U} \min\big(pdf_R(x,y),\, 1-pCF_R(x,y)\big), \quad x \in U.$$

定义 3.16.4（本体粗糙集）。设 $A \subseteq U$。A 的本体粗糙集（关于 R）是有序对

$$PL_R(A) \;:=\; \big(\underline{PL}_R(A),\, \overline{PL}_R(A)\big).$$

Table 3.24 展示了本体粗糙集与相关概念之间的关系。

表 3.24：粗糙类型模型的示例，这些模型是本体粗糙集$PL_R(A) = (\underline{PL}_R(A)\ \overline{PL}_R(A))$ 的特殊情形，可通过选择 ~~DAF~~ 维度 s 以及（可选的）DCF 维度 t得到。

目标粗糙模型	隶属度 type	s	t	通过岩石学粗糙集进行推广
模糊粗糙集 [715–717]	单一模糊 degree $\mu(x) \in [0,1]$	1	0	通过取 $pdf(x,\ a) \in [0,1]$ 得到以及 $pCF \equiv 0$；下近似/上近似是模糊的分级近似
直觉模糊粗糙集 [718–720]	直觉主义对 (μ,ν)	2	0	通过令 $pdf(x,a) \in [0,1]^2$ 恢复以及 $pCF \equiv 0$；下近似/上近似同时使用隶属度与非隶属度
模糊粗糙集 [721–723]	模糊对 $(\mu,\ \nu)$	2	0	通过令 $pdf(x,\ a) \in [0,1]^2$ 恢复且 $pCF \equiv 0$；
中智粗糙集 [724–727]	中智三元组 (T,I,F)	3	0	通过令 $pdf(x,a) \in [0,1]^3$ 得到以及 $pCF \equiv 0$；下近似/上近似定义在 (T,I,F) 上逐分量进行
图像模糊粗糙集合 [728–730]	图像模糊三元组	3	0	通过令 $pdf(x,\ a) \in [0,1]^3$ 恢复以及 $pCF \equiv 0$；
犹豫模糊粗糙集 [731–733]	犹豫模糊三元	3	0	通过令 $pdf(x,\ a) \in [0,1]^3$ 得到恢复以及 $pCF \equiv 0$；
球形模糊粗糙集 [734–736]	球形模糊三元	3	0	通过令 $pdf(x,a) \in [0,1]^3$ 即可恢复与 $pCF \equiv 0$；
四分区中智粗糙集（参见 [737]）	四分中智-sophic/粗糙分量	4	0	得到 by $pdf(x,\ a) \in [0,1]^4$；普利索金框架存储四个未-每个元素的确定性通道
五分划分中智粗糙 Set	五部分中智-学/粗糙组件	5	0	得到 by $pdf(x,\ a) \in [0,1]^5$；多元粗糙集直接支持更高阶的划分粗糙信息

下面给出这一概念的一个具体示例。

示例 3.16.5（医院分诊：在多元生成临床相似性／矛盾关系下判定“需要入住 ICU”）。设论域为患者 $U = \{p_1, p_2, p_3\}$。目标概念 $A = \{p_2\}$（经临床判断“需要入住 ICU”）。对于多元生成关系 R，取标量隶属度 $s = t = 1$，并采用如下聚合方式

$$\tilde{R}(x,y) \;:=\; \Phi\big(pdf_R(x,y),\, pCF_R(x,y)\big) \;=\; pdf_R(x,y)\cdot\big(1-pCF_R(x,y)\big),$$

˜从而使较高的临床相似性和较低的矛盾度提高 $R \in [0,1]$。

假设（省略对角线值）：

$pdf_R(x,y)$	$y = p_1$	p_2	p_3
$x = p_1$	–	0.80	0.30
p_2	0.70	–	0.40
p_3	0.50	0.60	–

$pCF_R(x,\ y)$	$y=p_1$	p_2	p_3
$x=p_1$	–	0.20	0.60
p_2	0.30	–	0.40
p_3	0.50	0.40	–

则（再次显示非对角线元素）

$$\tilde{R}(x,y)=pdf_R(x,y)\big(1-pCF_R(x,y)\big):$$

$\tilde{R}(x,\ y)$	$y=p_1$	p_2	p_3
$x=p_1$	–	$0.80\times0.80=0.64$	$0.30\times0.40=0.12$
p_2	$0.70\times0.70=0.49$	–	$0.40\times0.60=0.24$
p_3	$0.50\times0.50=0.25$	$0.60\times0.60=0.36$	–

Plithogenic下/上近似（有限的 $U\Rightarrow$ inf =min，sup =max）：

$$\underline{PL}_R(A)(x)=\min_{y\in A}\max\big(1-\tilde{R}(x,y),\ 1-\tilde{R}(y,x)\big),$$

$$\overline{PL}_R(A)(x)=\max_{y\in U}\min\big(\tilde{R}(x,y),\ 1-\tilde{R}(y,x)\big).$$

对于 $x=p_1$ （未标记）：

$$\underline{PL}_R(A)(p_1)=\max\big(1-\tilde{R}(p_1,p_2),\ 1-\tilde{R}(p_2,p_1)\big)=\max(1-0.64,\ 1-0.49)=\max(0.36,0.51)=0.51.$$

$$\overline{PL}_R(A)(p_1)=\max\big\{\min(\tilde{R}(p_1,p_1),1-\tilde{R}(p_1,p_1)),$$
$$\min(\tilde{R}(p_1,p_2),1-\tilde{R}(p_2,p_1)),\ \min(\tilde{R}(p_1,p_3),1-\tilde{R}(p_3,p_1))\big\}.$$

˜取 $R(p_1,\ p_1)=1$ （自洽性），三个最小值为

min(1、0) $=0$、min(0。64，$1-0.49$) =min(0。64，0。51) $=0.51$、min(0。12，$1-0.25$) =min(0。12，0。75) $=0.12$，因此 $PL_R(A)(p_1)$ =max(0、0。51、0。12) $=0.51$。因此，p_1位于边界上：$PL=\underline{0.51}$，$PL=0.51$。

对于 $x=p_3$ （未标记）：

$$\underline{PL}_R(A)(p_3)=\max(1-\tilde{R}(p_3,p_2),\ 1-\tilde{R}(p_2,p_3))$$
$$=\max(1-0.36,\ 1-0.24)=\max(0.64,0.76)=0.76,$$
$$\overline{PL}_R(A)(p_3)=\max\big\{\min(1,0),$$
$$\min(0.36,1-0.49)=\min(0.36,0.51)=0.36,\ \min(0.25,1-0.25)=0.25\big\}=0.36.$$

因此，p_3 在上部区域（0.36）中被弱覆盖，同时具有相对较大的下部惩罚（0.76），这反映出其与 ICU 病例具有中等相似性，但存在显著矛盾。

示例 3.16.6 （信用风险筛查：“高风险借款人”）。论域 $U=\{a,b,c\}$（贷款申请人）；目标 $A=\{b\}$（根据历史标签确定的“高风险”档案）。使用相同的标量模型，其中 $\tilde{R}(x、\ y)=pdf_R(x、\ y)\big(1-pCF_R(x、\ y)\big)$。假设

pdf_R	$y=a$	b	c
$x=a$	–	0.65	0.30
b	0.55	–	0.35
c	0.25	0.50	–

pCF_R	$y=a$	b	c
$x=a$	–	0.25	0.50
b	0.40	–	0.35
c	0.30	0.45	–

因此

$$\tilde{R}(a,b)=0.65(1-0.25)=0.4875,\quad \tilde{R}(b,a)=0.55(1-0.40)=0.33,$$
$$\tilde{R}(c,b)=0.50(1-0.45)=0.275,\quad \tilde{R}(b,c)=0.35(1-0.35)=0.2275,$$

and $\tilde{R}(a,c) = 0.30(1-0.50) = 0.15,\ \tilde{R}(c,a) = 0.25(1-0.30) = 0.175.$

$x = a$ 的小写/大写：

$$\underline{PL}_R(A)(a) = \max(1 - \tilde{R}(a,b),$$
$$1 - \tilde{R}(b,a)) = \max(1-0.4875,\ 1-0.33) = \max(0.5125, 0.67) = 0.67,$$
$$\overline{PL}_R(A)(a) = \max\big\{\min(1,0),$$
$$\min(0.4875, 1-0.33) = \min(0.4875, 0.67) = 0.4875, \min(0.15, 1-0.175) = 0.15\big\} = 0.4875.$$

申请人 a 紧邻边界（上界 ≈ 0.49），但下界惩罚值较大（0.67），即与高风险模式存在一定相似性，同时也存在明显矛盾。

对于 $x = c$：

$$\underline{PL}_R(A)(c) = \text{最大值}(1-R(c,b),\ 1-R(b,c)) = \text{最大值}(1-0.275,\ 1-0.2275) = \text{最大值}(0.725, 0.7725) = 0.772$$

$$\overline{PL}_R(A)(c) = \max\big\{\min(1,0),\ \min(0.275, 1-0.33) =$$
$$\min(0.275, 0.67) = 0.275,\ \min(0.175, 1-0.15) = 0.175\big\} = 0.275.$$

因此，c 被上区域（0.275）较宽松地覆盖，且远离下区域，这表明其行为主要不属于高风险，与 b 略有相似之处。

例 3.16.7（制造业质量控制："缺陷批次"）. 制造业质量控制通过监控生产流程、检查产品并纠正缺陷，确保标准一致、安全合规并提高客户满意度（参见 [738]）。

论域 $U = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$（批次）。目标 $A = \{B_3, B_4\}$（已确认有缺陷）。令 $R = pdf \cdot (1 - pCF)$，与前文相同，其中 $s = t = 1$。假设，总结故障特征相似性（PDF）以及因工艺设置不同而产生的矛盾（DCF）的（非对角线）元素如下：

pdf_R	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	–	0.55	0.70	0.40
B_2	0.60	–	0.45	0.35
B_3	0.50	0.40	–	0.80
B_4	0.45	0.30	0.75	–

pCF_R	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	–	0.30	0.20	0.40
B_2	0.35	–	0.25	0.30
B_3	0.25	0.35	–	0.15
B_4	0.40	0.30	0.10	–

计算所需的 R 值：

$$\tilde{R}(B_1, B_3) = 0.70(1-0.20) = 0.56, \quad \tilde{R}(B_3, B_1) = 0.50(1-0.25) = 0.375,$$
$$\tilde{R}(B_1, B_4) = 0.40(1-0.40) = 0.24, \quad \tilde{R}(B_4, B_1) = 0.45(1-0.40) = 0.27.$$

相对于 $A = \{B_3, B_4\}$ 的 $x = B_1$ 下近似/上近似：

$$\underline{PL}_R(A)(B_1) = \min_{y \in \{B_3, B_4\}} \max\big(1 - \tilde{R}(B_1, y),\ 1 - \tilde{R}(y, B_1)\big).$$

对于 $y = B_3$：$\max(1-0.56,\ 1-0.375) = \max(0.44, 0.625) = 0.625$。对于 $y = B_4$：$\max(1-0.24,\ 1-0.27) = \max(0.76, 0.73) = 0.76$。因此 $PL_R(A)(B_1) = \min\{0.625, 0.76\} = 0.625$。

$$\overline{PL}_R(A)(B_1) = \max_{y \in U} \min\big(\tilde{R}(B_1, y),\ 1 - \tilde{R}(y, B_1)\big).$$

计算四个最小值（包括自身）：

$$\min(1,0) = 0, \quad \min(0.55(1-0.30) = 0.385,\ 1 - 0.60(1-0.35) = 1 - 0.39 = 0.61) = 0.385,$$
$$\min(0.56,\ 1 - 0.375 = 0.625) = 0.56, \quad \min(0.24,\ 1 - 0.27 = 0.73) = 0.24.$$

因此 $PL_R(\overline{A})(B_1) = \text{最大值}\{0, 0.385, 0.56, 0.24\} = 0.56$。解释：$B_1$ 与有缺陷批次具有中等相似度（上限为 0.56），但未达到确定性要求（下限为 0.625），即标记为需要重新检验。

对于 $x = B_2$（快速检查 A）：

$$\tilde{R}(B_2, B_3) = 0.45(1 - 0.25) = 0.3375, \quad \tilde{R}(B_3, B_2) = 0.40(1 - 0.35) = 0.26,$$

$$\tilde{R}(B_2, B_4) = 0.35(1 - 0.30) = 0.245, \quad \tilde{R}(B_4, B_2) = 0.30(1 - 0.30) = 0.21.$$

$$\underline{PL}_R(A)(B_2) = \min\{\max(1 - 0.3375, 1 - 0.26),\ \max(1 - 0.245, 1 - 0.21)\}$$

$$= \min\{\max(0.6625, 0.74),\ \max(0.755, 0.79)\} = \min\{0.74, 0.79\} = 0.74,$$

$$\overline{PL}_R(A)(B_2) \geq \max\{\min(0.3375, 1 - 0.26) = 0.3375,\ \min(0.245, 1 - 0.21) = 0.245\} = 0.3375,$$

因此， B_2 在上区域中较弱，表明其存在缺陷的可能性较低，但与故障特征仍有不可忽视的相似性。

3.17 多属性软粗糙集

多属性软粗糙集将参数化软隶属关系与多属性粗糙近似相结合，用于对决策情境中能够处理矛盾的粒化不确定性进行建模（参见 [739]）。本节将多属性粗糙近似机制与多属性软信息相结合。由此得到的结构称为多属性软粗糙集；下文将说明，它既可特化为多属性粗糙集，也可特化为多属性软集。

定义 3.17.1（多属性软近似空间）。设 $U \neq \varnothing$ 为一个论域， E 为一个非空参数集。多属性软近似空间是一个元组

$$\mathbb{S} := (U, E, \mu_S, pCF_E, \{R_e\}_{e \in E}, \Phi, \Psi),$$

其中:

- μ_S： $U \times E \to [0,1]^j$ 是一个矛盾多元隶属度（DAF），为每一对（x， e）$\in U \times E$赋予一个（可能为向量值的）隶属度 μ_S（x， e），其中 $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- pCF_E： $E \times E \to [0,1]^t$ 是参数之间的矛盾度函数，满足

$$pCF_E(e, e) = \mathbf{0}, \qquad pCF_E(e, e') = pCF_E(e', e) \quad (e, e' \in E);$$

- 对于每个 $e \in E$， R_e 是定义在 U 上的矛盾多元关系，其定义为

$$pdf_{R_e} : U \times U \to [0,1]^s, \qquad pCF_{R_e} : U \times U \to [0,1]^t,$$

以及一个固定的聚合函数

$$\Phi : [0,1]^s \times [0,1]^t \longrightarrow [0,1]$$

该函数对每个自变量均单调，并满足

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \Phi(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 0 \quad (\mathbf{a} \in [0,1]^s,\ \mathbf{b} \in [0,1]^t).$$

与矛盾多元粗糙集情形一样，我们将其简写为

$$\tilde{R}_e(x, y) := \Phi\big(pdf_{R_e}(x, y),\ pCF_{R_e}(x, y)\big) \in [0,1].$$

- Ψ： $[0,1]^j \times [0,1] \to [0,1]^j$ 是一个固定的多元聚合算子，在每个自变量上单调，即，

$$\mu_1 \leq \mu_2,\ \lambda_1 \leq \lambda_2 \quad \Longrightarrow \quad \Psi(\mu_1, \lambda_1) \leq \Psi(\mu_2, \lambda_2),$$

并满足边界条件

$$\Psi(\mathbf{0}, \lambda) = \mathbf{0}, \qquad \Psi(\mu, 0) = \mathbf{0} \quad (\mu \in [0,1]^j,\ \lambda \in [0,1]).$$

对于每个 $e \in E$，有序对 (U, R_e) 按照上一小节的定义构成一个可立体粗糙近似空间，因此存在可立体下近似和上近似。

定义 3.17.2（多元软粗糙下近似与上近似）. 设 $\mathbb{S}$ 为如上所述的多元软近似空间，并设 $A \subseteq U$。对于每个固定参数 $e \in E$ 和元素$x \in U$，定义 A 关于 R_e 的局部多元粗糙下近似与上近似 如下:

$$\underline{PL}_{R_e}(A)(x) := \inf_{y \in A} \max\big(1 - \tilde{R}_e(x,y),\, 1 - \tilde{R}_e(y,x)\big),$$

$$\overline{PL}_{R_e}(A)(x) := \sup_{y \in U} \min\big(\tilde{R}_e(x,y),\, 1 - \tilde{R}_e(y,x)\big),$$

与多元粗糙情形完全相同，但将 R 替换为 R_e。

多元软粗糙下近似 A的映射定义为

$$\underline{PSR}(A) : U \times E \to [0,1]^j,$$

定义为

$$\underline{PSR}(A)(x,e) := \Psi\big(\mu_S(x,e),\, \underline{PL}_{R_e}(A)(x)\big), \qquad (x,e) \in U \times E,$$

而多元软粗糙上近似的 A映射定义为

$$\overline{PSR}(A) : U \times E \to [0,1]^j,$$

由.....给出

$$\overline{PSR}(A)(x,e) := \Psi\big(\mu_S(x,e),\, \overline{PL}_{R_e}(A)(x)\big), \qquad (x,e) \in U \times E.$$

因此，对于每个固定的 $e \in E$，函数 $x \mapsto PS\underline{R(A)}(x,\ e)$ 和 $x \mapsto PS\overline{R(A)}(x,\ e)$ 描述了在结合软隶属度 $\mu_S(x,\ e)$ 与从 R_e 得到的粗糙信息后，x 属于 A 在参数 e 下的粗糙下近似/上近似的程度。

定义 3.17.3（本体论软粗糙集）。设 $\mathbb{S}$ 和 A 如上所述。有序对

$$PSR_{\mathbb{S}}(A) := \big(\underline{PSR}(A),\, \overline{PSR}(A)\big)$$

称为 A 在本体论软近似空间上的本体论软粗糙集 $\mathbb{S}$.

等价地，对于每个 $e \in E$，我们可以将

$$F_L(e) : U \to [0,1]^j, \quad F_L(e)(x) := \underline{PSR}(A)(x,e),$$

$$F_U(e) : U \to [0,1]^j, \quad F_U(e)(x) := \overline{PSR}(A)(x,e),$$

s使得 $PSR_{\mathbb{S}}(A)$ 自然对应于定义在 $(U,\ E$ 上的一对本体论软集 $(F_L,\ F_U)$).

下表 3.25 展示了本原软粗糙集如何作为现有若干软粗糙模型的共同推广。

下面给出一个具体示例。

T表3.25：作为若干软粗糙模型共同推广的多元生成软粗糙集 ls.

目标软粗糙模型	陪域 F_L, F_U	of j	$PSR_{\mathbb{S}}(A)$的特化
多元生成软粗糙 set	$[0,1]^j$	$j \in \{1,2,3\}$	属性值一般 pCF 的基础模型。
模糊软粗糙集 [740,741]	$[0,1]$	$j=1$	取 F_L, F_U: $U \to [0,1]$ 并设 $pCF \equiv 0$。
直觉模糊软粗糙集 [742–744]	$[0,1]^2$	$j=2$	取 F_L, F_U: $U \to [0,1]^2$ 并设 $pCF \equiv 0$。
中智软粗糙集 [745–748]	$[0,1]^3$	$j=3$	取 F_L, F_U: $U \to [0,1]^3$ 并设 $pCF \equiv 0$。
犹豫模糊 soft 粗糙集 [749–751]	$[0,1]^3$	$j=3$	在 $[0,1]^3$ 中表示犹豫信息和集合 $pCF \equiv 0$。
图像模糊软粗糙集 [752]	$[0,1]^3$	$j=3$	在以下情境中使用图像模糊的接受／中立／拒绝 $[0,1]^3$ 与 $pCF \equiv 0$。
球形模糊 soft 粗糙集 [709,710,753]	$[0,1]^3$	$j=3$	在 $[0,1]^3$中使用球形模糊分量和集 $pCF \equiv 0$。
四分区中智软粗糙集	$[0,1]^4$	$j=4$	取 F_L, F_U: $U \to [0,1]^4$ 并设 $pCF \equiv 0$。
五分区 Neu- 中智软粗糙集	$[0,1]^5$	$j=5$	取 F_L, F_U: $U \to [0,1]^5$ 并设定 $pCF \equiv 0$。

示例 3.17.4（两个参数下的供应商选择）。 考虑一个采购部门，它必须决定是否将某个供应商视为“战略合作伙伴”。

论域与参数。

$$U = \{S_1, S_2\}, \quad E = \{e_1, e_2\},$$

其中 S_1 = 为本地供应商， S_2 = 为全球供应商， e_1 =为“准时交付”， e_2 =为“生态合规”。目标概念为

$$A = \{S_2\},$$

意为“战略合作伙伴候选者”。

软（普利索真）基于参数的视角。对于每一对 $(x,e) \in U \times E$，决策者给出模糊软隶属度 $\mu_S(x,e) \in [0,1]$:

$\mu_S(x,e)$	e_1 (on–time)	e_2 (eco)
S_1	0.70	0.60
S_2	0.90	0.80

普利索真粗糙关系。对于每个参数 $e \in E$，我们在 U 上有一个普利索真关系 R_e，其标量从属度为 pdf_{R_e}，矛盾度为 pCF_{R_e}。我们在标量情形 $s=t=1$ 下进行研究，并定义

$$\tilde{R}_e(x,y) := pdf_{R_e}(x,y)\,\big(1 - pCF_{R_e}(x,y)\big) \in [0,1],$$

˜设定 $R_e(x,x) = 1$ 为约定。

对于准时交付 e_1:

$pdf_{R_{e_1}}(x,y)$	S_1	S_2
S_1	–	0.80
S_2	0.75	–

$pCF_{R_{e_1}}(x,y)$	S_1	S_2
S_1	–	0.20
S_2	0.25	–

so

$$\tilde{R}_{e_1}(S_1,S_2) = 0.80(1-0.20) = 0.64, \qquad \tilde{R}_{e_1}(S_2,S_1) = 0.75(1-0.25) = 0.5625.$$

对于环保合规 e_2:

$pdf_{R_{e_2}}(x,y)$	S_1	S_2
S_1	–	0.60
S_2	0.70	–

$pCF_{R_{e_2}}(x,y)$	S_1	S_2
S_1	–	0.30
S_2	0.20	–

thus

$$\tilde{R}_{e_2}(S_1,S_2)=0.60(1-0.30)=0.42,\qquad \tilde{R}_{e_2}(S_2,S_1)=0.70(1-0.20)=0.56.$$

Plithogenic 粗糙下近似/上近似（按参数）。对于 $A=\{S_2\}$ 和任意 $x\in U$，局部 Plithogenic 粗糙下近似和上近似为

$$\underline{PL}_{R_e}(A)(x)=\max\big(1-\tilde{R}_e(x,S_2),\,1-\tilde{R}_e(S_2,x)\big),$$

$$\overline{PL}_{R_e}(A)(x)=\max_{y\in U}\min\big(\tilde{R}_e(x,y),\,1-\tilde{R}_e(y,x)\big).$$

对于 $x=S_1$ 和 e_1:

$$\underline{PL}_{R_{e_1}}(A)(S_1)=\max\big(1-0.64,\;1-0.5625\big)=\max(0.36,\;0.4375)=0.4375.$$

对于上近似,

$$\overline{PL}_{R_{e_1}}(A)(S_1)=\max\Big\{\min\big(\tilde{R}_{e_1}(S_1,S_1),1-\tilde{R}_{e_1}(S_1,S_1)\big),\;\min\big(\tilde{R}_{e_1}(S_1,S_2),1-\tilde{R}_{e_1}(S_2,S_1)\big)\Big\}$$
$$=\max\;\{\min(1,\;0),\;\min(0。64,\;1-0.5625)\}=\max\{0,\min(0。64,\;0。4375)\}=\max\{0,0.4375\}=0.4375$$
.

对于 $x=S_1$ 和 e_2:

$$\underline{PL}_{R_{e_2}}(A)(S_1)=\max\big(1-0.42,\;1-0.56\big)=\max(0.58,\;0.44)=0.58,$$

$$\overline{PL}_{R_{e_2}}(A)(S_1)=\max\big\{\min(1,0),\;\min(0.42,1-0.56)\big\}=\max\{0,\;\min(0.42,0.44)\}=0.42.$$

˜对于“典型”的战略供应商 $x=S_2$，我们有 $R_e(S_2,\;S_2)=1$，因此

$$\underline{PL}_{R_e}(A)(S_2)=\max(1-1,1-1)=0$$

对于两者 e_1，e_2，而上限惩罚仍然适中，例如

$\underline{PL}_{R_{e_1}}(A)(S_2)$ =最大值{最小值(1，0)，最小值(0.5625，$1-0.64$)} =最大值{0,最小值(0.5625，0.36)} $=0.36$,

$$\overline{PL}_{R_{e_2}}(A)(S_2)=\max\big\{\min(1,0),\;\min(0.56,1-0.42)\big\}=\max\{0,\;\min(0.56,0.58)\}=0.56.$$

Plithogenic 软粗糙近似。取 $j=1$ 并选择标量化方式

$$\Psi(a,b):=a\,(1-b),\qquad a,b\in[0,1],$$

使粗糙“惩罚” b 转换为支持因子（$1-b$），并与软隶属度 a相结合。

A的复数理软粗糙下近似和上近似为

$$\underline{PSR}(A)(x,e)=\Psi\big(\mu_S(x,e),\,\underline{PL}_{R_e}(A)(x)\big)=\mu_S(x,e)\big(1-\underline{PL}_{R_e}(A)(x)\big),$$

$$\overline{PSR}(A)(x,e) = \Psi\big(\mu_S(x,e),\, \overline{PL}_{R_e}(A)(x)\big) = \mu_S(x,e)\big(1 - \overline{PL}_{R_e}(A)(x)\big).$$

对于 $x = S_1$:

$$\underline{PSR}(A)(S_1,e_1) = 0.70\big(1-0.4375\big) = 0.70 \times 0.5625 = 0.39375,$$
$$\overline{PSR}(A)(S_1,e_1) = 0.70\big(1-0.4375\big) = 0.39375,$$
$$\underline{PSR}(A)(S_1,e_2) = 0.60\big(1-0.58\big) = 0.60 \times 0.42 = 0.252,$$
$$\overline{PSR}(A)(S_1,e_2) = 0.60\big(1-0.42\big) = 0.60 \times 0.58 = 0.348.$$

对于 $x = S_2$:

$$\underline{PSR}(A)(S_2,e_1) = 0.90\big(1-0\big) = 0.90, \qquad \overline{PSR}(A)(S_2,e_1) = 0.90\big(1-0.36\big) = 0.90 \times 0.64 = 0.576,$$
$$\underline{PSR}(A)(S_2,e_2) = 0.80\big(1-0\big) = 0.80, \qquad \overline{PSR}(A)(S_2,e_2) = 0.80\big(1-0.56\big) = 0.80 \times 0.44 = 0.352.$$

阐释。对于“战略合作伙伴”这一概念 $A = \{S_2\}$，可得出犹豫软粗糙集

$$PSR_{\mathbb{S}}(A) = \big(\underline{PSR}(A), \overline{PSR}(A)\big)$$

它针对每个参数分别给出一对分级软近似，这些近似共同反映:

- 采购团队的软参数化偏好（μ_S 准时交付和生态合规方面），
- 战略供应商在各参数下的犹豫粗糙邻域 S_2 （通过R_{e_1}, R_{e_2}，包括矛盾），
- 以及通过 Ψ 得出的综合评估。

此处， S_2 的下近似值较高（ e_1为 0.90， e_2为 0.80），这意味着它高度符合“战略合作伙伴”的倾向性软粗糙下近似。供应商 S_1 的值处于中等水平，尤其是在生态合规方面，表明它是一个处于临界状态的候选者；在升级为战略合作伙伴之前，可能需要改进合同条款或接受进一步审计。

接下来，我们将证明上述概念同时扩展了倾向性粗糙集和倾向性软集。

定理 3.17.5 （倾向性粗糙集的推广）。 设（U、 R）是定义 *2.XX*（倾向性粗糙近似空间）中的倾向性粗糙近似空间，并设 $A \subseteq U$。考虑倾向性软近似空间

$$\mathbb{S}_R \;:=\; (U, E, \mu_S, pCF_E, \{R_e\}_{e\in E}, \Phi, \Psi)$$

如下所示:

- 取一个单元素参数集 $E := \{e_0\}$;

- 将多元生成软隶属度定义为常数

$$\mu_S(x, e_0) \;:=\; 1 \in [0,1]^j, \qquad x \in U,$$

并且参数矛盾是平凡的

$$pCF_E(e_0, e_0) \;:=\; \mathbf{0};$$

- 集 $R_{e_0} := R$ 并采用与定义 $R(x,y)$ 中相同的聚合 Φ；
- 在标量情形下，通过以下方式选择多元聚合 Ψ： $[0,1]^j \times [0,1] \to [0,1]$ $j = 1$

$$\Psi(a, \lambda) \;:=\; \lambda, \qquad a, \lambda \in [0,1],$$

即 Ψ仅投影到第二个参数。

那么，对于每个 $x \in U$，

$$\underline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \underline{PL}_R(A)(x), \qquad \overline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \overline{PL}_R(A)(x),$$

从而 $PSR_{\mathbb{S}_R}(A)$ 与*Plithogenic*粗糙集 $PL_R(A) = (PL_R(A)\ PL_R(A))$相一致。

证明。固定 $x \in U$。由于 $E = \{e_0\}$，所有表达式均在 e_0处求值。根据 $PSR(A)$的定义，We have

$$\underline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \Psi\big(\mu_S(x, e_0),\, \underline{PL}_{R_{e_0}}(A)(x)\big).$$

在 $\mathbb{S}_R$ 中我们施加了

$$\mu_S(x, e_0) = 1, \qquad R_{e_0} = R,$$

因此

$$\underline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \Psi\big(1,\, \underline{PL}_R(A)(x)\big).$$

所选取的 $\Psi(a, \lambda) = \lambda$ 给出

$$\underline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \underline{PL}_R(A)(x).$$

上近似的计算类似:

$$\overline{PSR}(A)(x, e_0) \;=\; \Psi\big(\mu_S(x, e_0),\, \overline{PL}_{R_{e_0}}(A)(x)\big) \;=\; \Psi\big(1,\, \overline{PL}_R(A)(x)\big) \;=\; \overline{PL}_R(A)(x).$$

因此，这一对

$$PSR_{\mathbb{S}_R}(A) \;= \big(\underline{PSR}(A)(\cdot, e_0),\, \overline{PSR}(A)(\cdot, e_0)\big)$$

恰好就是犹豫粗糙集 $PL_R(A)$，其中将单元素参数e_0按自然方式识别。这表明，每个犹豫粗糙集都是犹豫软粗糙集的一个特例。

□

定理 3.17.6 （犹豫软集的推广）。设(U, E, μ_S, pCF_E) 是一个犹豫软集（参见表 *3.20* 中化归为 *PSS* 的情况），其中

$$\mu_S : U \times E \to [0,1]^j, \qquad pCF_E : E \times E \to [0,1]^t,$$

并设 $A \subseteq U$ 为任意对象。取 U 上的任意一族犹豫关系 $\{R_e\}_{e \in E}$，并按如下方式定义$\mathbb{S}_S$

$$\mathbb{S}_S \;:=\; (U, E, \mu_S, pCF_E, \{R_e\}_{e \in E}, \Phi, \Psi),$$

其中， Φ与前面相同，而 Ψ 现在取为对第一个自变量的投影:

$$\Psi(\mu, \lambda) \;:=\; \mu, \qquad \mu \in [0,1]^j,\ \lambda \in [0,1].$$

那么，对于所有 $(x, e) \in U \times E$，

$$\underline{PSR}(A)(x, e) \;=\; \mu_S(x, e), \qquad \overline{PSR}(A)(x, e) \;=\; \mu_S(x, e),$$

使得 $PSR_{\mathbb{S}_S}(A)$ 与原始多属性软集 (U, E, μ_S, pCF_E) 一致（视为一对相同的下界/上界多属性软集）。

证明。 固定 $(x,e)\in U\times E$。根据 $PSR(A)$ 的定义，

$$\underline{PSR}(A)(x,e) \;=\; \Psi\big(\mu_S(x,e),\,\underline{PL}_{R_e}(A)(x)\big).$$

结合 $\Psi(\mu,\ \lambda),\ =\mu$ 我们得到

$$\underline{PSR}(A)(x,e) \;=\; \mu_S(x,e),$$

独立地于 $PL_{R_e}(A)(x)$ 的值。同样的论证也适用于上近似 n:

$$\overline{PSR}(A)(x,e) \;=\; \Psi\big(\mu_S(x,e),\,\overline{PL}_{R_e}(A)(x)\big) \;=\; \mu_S(x,e).$$

因此，对于每个 $e\in E$，映射

$$x\longmapsto \underline{PSR}(A)(x,e),\qquad x\longmapsto \overline{PSR}(A)(x,e)$$

二者都与原始的犹豫软隶属函数 $x\mapsto\mu_S(x,\ e)$ 重合。等价地，由 $PSR_{\mathbb{S}_S}(A)$ 编码的犹豫软集对 $(F_L,\ F_U)$ 满足

$$F_L(e)=F_U(e)=\mu_S(\cdot,e)\qquad (e\in E),$$

这恰好就是给定的犹豫软集（U、 E、 μ_S、 pCF_E）。因此，每个犹豫软集都可以实现为犹豫软粗糙集的一种特化。 □

3.18 线性丢番图犹豫集

线性丢番图犹豫集使用多分量隶属度和整数系数，这些隶属度和系数受线性丢番图方程约束，并处于一种能够处理矛盾的犹豫属性结构中，用于描述复杂不确定性。

定义 3.18.1 （线性丢番图犹豫数）。固定一个整数 $s\geq 1$ 和一个常数$C>0$。一个 s维线性丢番图犹豫数是一个二元组

$$\Lambda \;:=\; \big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\alpha}\big)\;\in\;[0,1]^s\times[0,1]^s,$$

其中

$$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_s),\qquad \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_s),$$

满足线性丢番图型约束

$$0\;\leq\;\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\,\mu_i\;\leq\;C,\qquad 0\;\leq\;\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\;\leq\;C. \tag{3.12}$$

数量

$$\pi(\Lambda)\;:=\;C-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\,\mu_i$$

起到（依赖于参考值的）犹豫度或剩余度的作用。

定义 **3.18.2** （线性丢番图多元属性集）。 设 X 为一个非空论域，并设 v 为一个多元属性，其属性值集合为 P_v。设

$$pCF:P_v\times P_v\longrightarrow[0,1]$$

be t矛盾度函数。固定一个整数 $s\geq 1$ 和一个常数 $C>0$.

在 X 上关于 $(v,\ P_v,\ pCF)$ 的线性丢番图多生成集（LDPS）是一种结构

$$\mathsf{PS}_{LD}\;:=\;\big(X,\ v,\ P_v,\ pCF,\ \mathrm{LDpdf},\ C\big),$$

其中

$$\mathrm{LDpdf} : X \times P_v \longrightarrow [0,1]^s \times [0,1]^s, \qquad (x,a) \longmapsto \big(\boldsymbol{\mu}(x,a), \boldsymbol{\alpha}(a)\big),$$

使得，对于所有 $x \in X$ 和 $a \in P_v$，

$$0 \;\le\; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(a)\,\mu_i(x,a) \;\le\; C, \qquad 0 \;\le\; \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(a) \;\le\; C. \tag{3.13}$$

Here

$$\boldsymbol{\mu}(x,a) = \big(\mu_1(x,a), \ldots, \mu_s(x,a)\big), \qquad \boldsymbol{\alpha}(a) = \big(\alpha_1(a), \ldots, \alpha_s(a)\big),$$

分别是 x 相对于值 a 以及与 a相关的参考参数的多元成分度。

对于每个 (x,a)，这一对

$$\Lambda(x,a) := \big(\boldsymbol{\mu}(x,a), \boldsymbol{\alpha}(a)\big)$$

按照前述定义的意义，它是一个 s维线性丢番图多元数。在 (x,a) 处的剩余度为

$$\pi(x,a) := C - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(a)\,\mu_i(x,a).$$

表3.26介绍了线性丢番图多元集，它是对若干现有线性丢番图模型的统一概括。

表 3.26：作为共同推广的线性丢番图多元生成集

模型	组成部分	参考参数	丢番图约束	多元生成 part
线性 Dio-丢番图 模糊集 [754–756]	$(\mu_D,\ \nu_D)$	$(\alpha,\ \beta)$	$0 \le \alpha\mu_D + \beta\nu_D \le 1,\quad 0 \le \alpha+\beta \le 1$	无
线性 丢番图-tine 中智集 [757]	(T_D, I_D, F_D)	(α, δ, β)	$0 \le \alpha T_D + \delta I_D + \beta F_D \le 2,\quad 0 \le \alpha + \delta + \beta \le 2$	none
线性 丢番图球形模糊集合 [758–760]	(T_D, U_D, K_D)	(α, β, η)	$0 \le \alpha T_D + \beta U_D + \eta K_D \le 1,\quad 0 \le \alpha+\beta+\eta \le 1$	none
线性 丢番图 tine 犹豫模糊集 [761]	$(h_D^-,\ h_D^+)$	(α, β)	$0 \le \alpha h_D^- + \beta h_D^+ \le 1,\quad 0 \le \alpha+\beta \le 1$	无
线性 丢番-图普利真集合	$(\mu_1, \ldots, \mu_s)$	$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$	$0 \le \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\mu_i \le C,\quad 0 \le \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \le C$	(v, P_v, pCF)

下面给出一个具体示例。

例 3.18.3 （用于智能手机选择的线性丢番图多元属性集合）。 考虑一个家庭正在选择智能手机

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{\text{EcoPhone},\ \text{GamePhone},\ \text{BudgetPhone}\}.$$

令 v 为多元属性“评价准则”，其取值集为

$$P_v = \{\text{price},\ \text{battery},\ \text{camera}\}.$$

多元属性矛盾度 pCF：$P_v \times P_v \to [0,1]$ 设为

$$pCF(\text{价格、电池}) = 0.30、 \qquad pCF(\text{价格、相机}) = 0.20、 \qquad pCF(\text{电池、相机}) = 0.40、$$

与 $pCF(a,\ a) = 0$ 以及对称性 $pCF(a,\ b) = pCF(b,\ a)$。

取 $s = 3$ 个分量和 $C = 2$。对每个值 $a \in P_v$，令

$$\boldsymbol{\alpha}(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a), \alpha_3(a)) = (1,\ 0.5,\ 0.5),$$

使得

$$0 \le \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(a) = 1 + 0.5 + 0.5 = 2 \le C.$$

将 (x, a) 的三个隶属分量解释为一个中智型三元组

$$\boldsymbol{\mu}(x, a) = (\mu_1(x, a), \mu_2(x, a), \mu_3(x, a)) = (T, I, F) \in [0, 1]^3,$$

其中，T 衡量支持 x 在标准 a 上表现良好的程度，I 表示不确定性，F 表示反面证据。

对于 EcoPhone x_1，定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}(x_1, \text{price}) &= (0.70,\ 0.10,\ 0.20),\\ \boldsymbol{\mu}(x_1, \text{battery}) &= (0.90,\ 0.05,\ 0.10),\\ \boldsymbol{\mu}(x_1, \text{camera}) &= (0.75,\ 0.15,\ 0.20).\end{aligned}$$

在（x_1, a）处的线性丢番图多属性约束为

$$0 \le \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(a)\mu_i(x_1, a) \le C, \qquad 0 \le \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(a) \le C.$$

对 $a =$ 电池进行显式检验：

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\text{battery})\mu_i(x_1, \text{battery}) = 1 \cdot 0.90 + 0.5 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot 0.10 = 0.90 + 0.025 + 0.05 = 0.975.$$

Thus

$$0 \le 0.975 \le C = 2, \qquad 0 \le 1 + 0.5 + 0.5 = 2 \le 2,$$

因此，线性丢番图条件在（x_1,电池）处成立。相应的剩余度为

$$\pi(x_1, \text{battery}) := C - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\text{battery})\mu_i(x_1, \text{battery}) = 2 - 0.975 = 1.025.$$

类似地，对 $a \in P_v$（例如 GamePhone 在摄像头方面更优，Budget-Phone 在价格方面更优）定义 $\boldsymbol{\mu}(x_2, a)$ 与 $\boldsymbol{\mu}(x_3, a)$，并始终确保

$$0 \le \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(a)\mu_i(x, a) \le 2.$$

所得结构

$$\mathsf{PS}_{LD} = \big(X,\ v,\ P_v,\ pCF, \text{LDpdf},\ C\big),$$

with

$$\text{LDpdf}(x, a) = \big(\boldsymbol{\mu}(x, a), \boldsymbol{\alpha}(a)\big), \qquad (x, a) \in X \times P_v,$$

是一个线性丢番图普利托根集。它结合了：（i）对加权隶属度施加的丢番图型线性约束，（ii）借助 pCF表达的准则之间的普利托根矛盾，用以刻画一个现实的多准则智能手机选择问题。

3.19 树形多元矛盾集

树普利托根集将属性组织在一棵有根树中，并采用跨层次、顾及矛盾的分层加权来聚合其普利托根隶属度 [762]。树软集 [319–321, 763, 764] 和树粗糙集 [762, 765] 等相关概念在文献中亦已为人所知。

定义 3.19.1（树形多元矛盾集）。[762] 设 S 为一个全集，$P \subseteq S$ 为其非空子集。设 Tree(A) 为一棵有限的有根属性树，其节点为属性 a_i，按层级 $1, \dots, m$排列。对于 Tree(A) 中的每个节点（属性）$a_i \in$，设 Pv_i 为 a_i 的可取值集合，并令

$$pdf_i : P \times Pv_i \longrightarrow [0,1]^{s_i}$$

为附加到 a_i 上的多元矛盾隶属度（可包含多个分量）。进一步设有一个全局矛盾度函数

$$pCF : \Big(\bigcup_i Pv_i\Big) \times \Big(\bigcup_i Pv_i\Big) \longrightarrow [0,1]^t$$

满足 (i) 对所有 a，$pCF(a,a) = 0$（自反性）；以及 (ii) 对所有 a, b，$pCF(a,b) = pCF(b,a)$（对称性）。

一个树形多元矛盾集是如下元组

$$\mathrm{TPS} = \big(P,\ \mathrm{Tree}(A),\ \{Pv_i\}_{a_i \in \mathrm{Tree}(A)},$$

$$\{pdf_i\}_{a_i \in \mathrm{Tree}(A)},\ pCF\big),$$

它针对每个节点子集 $X \subseteq$ Tree(A)以及每个元素 $x \in P$，收集 x 相对于 X中所出现属性的全部普利索真隶属度 $pdf_i(x, \cdot)$，同时根据其取值标签之间的相互矛盾程度，用 pCF 对它们进行调制/加权。特别地，若该树仅有一个层级且仅有一个属性，则其退化为普通的普利索真集。

表 3.27 描述了 TreePlithogenicSet，这是一种统一树形模糊集、直觉模糊集和中智集的模型。

表3.27：树普利索真集作为基于树的模糊集／直觉模糊集／中智集的统一模型。

目标（树）	属性／树限制	在TPS中的结果
树模糊集 [762]	一棵有根属性树；每个节点在 $[0,1]$ 中都有一个单一标量隶属度	TreePlithogenic 集合，其中 $s_i = 1$ 适用于所有节点和 $pCF \equiv 0$；模糊情形可还原为——ered
树直觉主义模糊集 [762]（树——模糊集）	一棵有根属性树；每个节点存储 (μ, ν)，其中包含 $\mu + \nu \le 1$	具有 $s_i = 2$ 和.....的树形矛盾集 $pCF \equiv 0$；恢复直觉树
树形中智集 Set [762]（树状图像模糊，犹豫模糊，树状球形模糊 Set）	一棵以属性为根的树；每个节点存储 $(T,\ I,\ F) \in [0,1]^3$	含有 $s_i = 3$ 和的树Plithogenic集 $pCF \equiv 0$；恢复的中智树
树-四分划中智集	一棵有根属性树；	带有 $s_i = 4$ 和 $pCF \equiv 0$；恢复的中智树
树-五分区中智集	一棵有根属性树；	TreePlithogenic 集，包含 $s_i = 5$ 和 $pCF \equiv 0$；恢复出的中智树

下面给出这一概念的一个具体示例。

例 3.19.2（招聘数据工程师：考虑矛盾的层次化匹配）。 设属性树的根节点为 Fit，含有三个子节点：Technical、Experience 和 Culture。每个子节点有两个叶属性：

$$\text{Technical} = \{\text{Coding},\ \text{DataModeling}\},$$

$$\text{Experience} = \{\text{Projects},\ \text{Domain}\},$$

$$\text{Culture} = \{\text{Communication},\ \text{Teamwork}\}.$$

每个节点使用模糊多属性矛盾隶属度（ $[0,1]$ 中的标量），并在每个层级将主导值设为 High。语言标签为 {低，中，高}，与高相矛盾的值为

$$pCF(\text{High},\text{High}) = 0, \quad pCF(\text{Med},\text{High}) = 0.3, \quad pCF(\text{Low},\text{High}) = 0.8.$$

兼容性权重为 $w(\ell \mid \text{高}) = 1 - pCF(\ell,\ \text{高})$。

候选项 c 的叶节点评估（观测标签；基础隶属度 μ）：

Leaf	标签	μ	$w(\cdot \mid \text{高})$
编程	High	0.82	1.0
数据建模	Med	0.68	0.7
项目	High	0.75	1.0
领域	Med	0.55	0.7
沟通	Med	0.62	0.7
团队合作	High	0.78	1.0

按加权平均值聚合每个内部节点 $\widehat{\mu} = \frac{\sum w\mu}{\sum w}$：

$$\mu_{\text{Technical}} = \frac{0.82\cdot 1 + 0.68\cdot 0.7}{1 + 0.7} = \frac{0.82 + 0.476}{1.7} = \frac{1.296}{1.7} = 0.76235.$$

$$\mu_{\text{Experience}} = \frac{0.75\cdot 1 + 0.55\cdot 0.7}{1 + 0.7} = \frac{0.75 + 0.385}{1.7} = \frac{1.135}{1.7} = 0.66765.$$

$$\mu_{\text{Culture}} = \frac{0.62\cdot 0.7 + 0.78\cdot 1}{0.7 + 1} = \frac{0.434 + 0.78}{1.7} = \frac{1.214}{1.7} = 0.71412.$$

通过阈值确定中间节点的标签（用于根节点层级的矛盾判断）：若 $\mu \geq 0.70$，则为高；若 $0.50 \leq \mu < 0.70$，则为中；否则为低。因此

$$\text{Technical} = \text{High}, \quad \text{Experience} = \text{Med}, \quad \text{Culture} = \text{High},$$

因此，根节点权重为 w（高 $\mid$ 高）$= 1$、 w（中 $\mid$ 高）$= 0.7$。

根节点聚合（适配度）：

$$\mu_{\text{Fit}} = \frac{0.76235\cdot 1 + 0.66765\cdot 0.7 + 0.71412\cdot 1}{1 + 0.7 + 1} = \frac{0.76235 + 0.46736 + 0.71412}{2.7} = \frac{1.94383}{2.7} = 0.72068.$$

因此，候选项 c 获得了考虑矛盾因素的层级适配度评分 ≈ 0.721。

示例 3.19.3（急诊分诊：临床树中的肺炎严重程度）。 树结构：根节点为严重程度，下设生命体征、影像学检查、实验室检查三个子节点；叶节点为生命体征={SpO_2, 呼吸频率}、影像学检查={胸部 X 光、CT}、实验室检查={CRP、WBC}。所有层级的主导标签均为重度。标签包括 {轻度、中度、重度}，并存在矛盾

$$pCF(\text{Severe},\text{Severe}) = 0, \quad pCF(\text{Moderate},\text{Severe}) = 0.35, \quad pCF(\text{Mild},\text{Severe}) = 0.85,$$

以及权重 $w(\ell \mid \text{重度}) = 1 - pCF(\ell,\ \text{重度})$。

患者 p的叶片评估：

Leaf	标签	μ	$w(\cdot \mid$ 重度)
SpO_2	重度	0.88	1.0
呼吸频率	中度	0.65	0.65
CXR	中度	0.70	0.65
CT	Mild	0.40	0.15
CRP	中度	0.60	0.65
WBC	重度	0.75	1.0

节点聚合：

$$\mu_{\text{Vitals}} = \frac{0.88 \cdot 1 + 0.65 \cdot 0.65}{1 + 0.65} = \frac{0.88 + 0.4225}{1.65} = \frac{1.3025}{1.65} = 0.78939.$$

$$\mu_{\text{Imaging}} = \frac{0.70 \cdot 0.65 + 0.40 \cdot 0.15}{0.65 + 0.15} = \frac{0.455 + 0.06}{0.80} = \frac{0.515}{0.80} = 0.64375.$$

$$\mu_{\text{Labs}} = \frac{0.60 \cdot 0.65 + 0.75 \cdot 1}{0.65 + 1} = \frac{0.39 + 0.75}{1.65} = \frac{1.14}{1.65} = 0.69091.$$

中间标签（若为 $\mu \geq 0.70$，则为高/重度）：生命体征=重度，影像学检查=中度，实验室检查=中度。根节点权重： w（重度 $\mid$ 重度） $= 1$， w（中度 $\mid$ 重度） $= 0.65$。

根节点聚合（严重程度）：

$$\mu_{\text{Severity}} = \frac{0.78939 \cdot 1 + 0.64375 \cdot 0.65 + 0.69091 \cdot 0.65}{1 + 0.65 + 0.65}$$

$$= \frac{0.78939 + 0.41844 + 0.44909}{2.30} = \frac{1.65692}{2.30} = 0.72040.$$

患者的矛盾感知严重程度评分为 ≈ 0.720。

示例 3.19.4 （供应商选择：成本–质量–交付树下的适宜性）。 树：根节点为适宜性，其子节点为成本、质量、交付。所有层级的主导标签均为“优选”。标签{高风险，可接受，优选}及

pCF（优选，优选） $= 0$， pCF（可接受，优选） $= 0.4$， pCF（高风险，优选） $= 0.85$，

以及 w（$\ell \mid$ 优选） $= 1 - pCF$（ℓ，优选） $\in \{1, 0.6, 0.15\}$。

供应商 s的叶节点：

Leaf	标签	μ	$w(\cdot \mid$ 首选)
单价	可接受	0.62	0.6
总成本	首选	0.78	1.0
缺陷率	首选	0.83	1.0
认证	可接受	0.58	0.6
准时	可接受	0.65	0.6
交货期	有风险	0.35	0.15

节点聚合：

$$\mu_{\text{Cost}} = \frac{0.62 \cdot 0.6 + 0.78 \cdot 1}{0.6 + 1} = \frac{0.372 + 0.78}{1.6} = \frac{1.152}{1.6} = 0.72.$$

$$\mu_{\text{Quality}} = \frac{0.83 \cdot 1 + 0.58 \cdot 0.6}{1 + 0.6} = \frac{0.83 + 0.348}{1.6} = \frac{1.178}{1.6} = 0.73625.$$
$$\mu_{\text{Delivery}} = \frac{0.65 \cdot 0.6 + 0.35 \cdot 0.15}{0.6 + 0.15} = \frac{0.39 + 0.0525}{0.75} = \frac{0.4425}{0.75} = 0.59.$$

中间标签：成本=首选，质量=首选，交付=可接受。根权重： w（首选 |首选） $= 1$， w（可接受 | 首选） $= 0.6$。

根节点聚合（适宜性）：

$$\mu_{\text{Suitability}} = \frac{0.72 \cdot 1 + 0.73625 \cdot 1 + 0.59 \cdot 0.6}{1 + 1 + 0.6} = \frac{0.72 + 0.73625 + 0.354}{2.6} = \frac{1.81025}{2.6} = 0.69625.$$

因此，在指定的层级结构和矛盾关系下，供应商获得的矛盾感知适宜性为 ≈ 0.696，即处于“优选”的临界边缘。

3.20 森林型Plithogenic集

森林型Plithogenic集涵盖多棵属性树，并融合各树的Plithogenic隶属度，同时对树间矛盾进行加权，以获得一致的评估结果 [762]。

定义 3.20.1 （森林型Plithogenic集）。 [762] 设 $\{\text{TPS}_t\}_{t\in T}$ 是一族树型Plithogenic集，其中第 t 棵树具有属性树 Tree($A^{(t)}$)、值集 $\{Pv_i^{(t)}\}$、隶属映射 $\{pdf_i^{(t)}\}$，以及（可能存在的）其自身矛盾映射 $pCF^{(t)}$。构造属性树的不相交并（森林）：

$$\text{Forest}\big(\{A^{(t)}\}_{t\in T}\big) := \bigsqcup_{t\in T} \text{Tree}(A^{(t)}).$$

定义在共同论域 P 上的森林*Plithogenic*集是一个元组

$$\text{FPS} = \big(P,\ \text{Forest}(\{A^{(t)}\}),\ \{Pv_i^{(t)}\},\ \{pdf_i^{(t)}\},\ \widetilde{pCF}\big),$$

其中， $\widetilde{pCF}$ 将所有 $pCF^{(t)}$ 扩展到来自每棵树的值标签并集。对于森林节点的任意子集 X 和任意元素 $x \in P$， x 的森林级隶属度通过聚合节点出现在 X 中的每棵树所提供的 Plithogenic 隶属度而得到，并受$\widetilde{\ }$共同矛盾控制 pCF 的约束。如果森林恰好由一棵树组成，则上述定义退化为 TreePlithogenic 集。

表 3.28 说明了 ForestPlithogenicSet 如何作为一种统一模型，涵盖基于森林的模糊集、直觉模糊集和中智集。

下面给出这一概念的一个具体示例。

示例 3.20.2 （智慧城市选址：由环境、基础设施和社会经济树构成的森林）。城市选址通过交通、资源、风险、环境和发展等标准评估潜在的城市地点，以选出最优开发地点（参见 [766]）。

考虑三个针对地块 P 的树状矛盾学集：TPS_{Env}、$\text{TPS}_{\text{Infra}}$ 和 $\text{TPS}_{\text{Socio}}$。每个节点都采用 $[0,1]$ 中的模糊隶属度。语言标签为 {低,中,高}，其中与主导标签“高”相矛盾：

$$pCF(\text{High},\text{High}) = 0, \quad pCF(\text{Med},\text{High}) = 0.3,$$

表3.28：ForestPlithogenic集作为森林型模糊集／直觉模糊集／中智集的统一模型。

目标（森林）	森林限制	FPS中的结果
ForestFuzzy集 [762]	属性树构成的有限不相交族；每个节点在 $[0,1]$ 中均为模糊的；不存在跨树矛盾	带有 $s_i = 1$ 的森林犹豫集，适用于所有节点以及 $\widetilde{pCF} \equiv 0$
森林直觉主义模糊集 [762]	树木森林；每个节点都有（μ，ν）；没有跨树矛盾	带有 $s_i = 2$ 和的森林犹豫集 $\widetilde{pCF} \equiv 0$
森林中智集 [762]	树的森林；每个节点具有（T，I，F）	ForestPlithogenic 集，含有 $s_i = 3$ 和 $\widetilde{pCF} \equiv 0$
森林-四分中智集	树的森林	带有 $s_i = 4$ 和 $\widetilde{pCF} \equiv 0$
森林五分区中智集	树木森林	带有 $s_i = 5$ 和 $\widetilde{pCF} \equiv 0$

$$pCF(\text{Low}, \text{High}) = 0.8,$$

以及权重 $w(\ell \mid \text{高}) = 1 - pCF(\ell, \text{高}) \in \{1,\, 0.7,\, 0.2\}$。

对于地块 $x \in P$，各叶节点的评估结果（标签；基础隶属度 μ）如下：

（环境）空气质量=（高；0.80），绿化覆盖率=（中；0.65），噪声=（高；0.75）。

$$\mu_{\text{Env}}(x) = \frac{0.80 \cdot 1 + 0.65 \cdot 0.7 + 0.75 \cdot 1}{1 + 0.7 + 1} = \frac{0.80 + 0.455 + 0.75}{2.7} = \frac{2.005}{2.7} = 0.74259.$$

（基础设施）交通可达性=（中；0.68），道路连通性=（高；0.77），公用设施=（中；0.60 ）.

$$\mu_{\text{Infra}}(x) = \frac{0.68 \cdot 0.7 + 0.77 \cdot 1 + 0.60 \cdot 0.7}{0.7 + 1 + 0.7} = \frac{0.476 + 0.77 + 0.42}{2.4} = \frac{1.666}{2.4} = 0.69417.$$

（社会经济）安全性=（中；0.70），社区支持=（高；0.74），租金=（低；0.45）。

$$\mu_{\text{Socio}}(x) = \frac{0.70 \cdot 0.7 + 0.74 \cdot 1 + 0.45 \cdot 0.2}{0.7 + 1 + 0.2} = \frac{0.49 + 0.74 + 0.09}{1.9} = \frac{1.32}{1.9} = 0.69474.$$

阈值判定（ $\mu \geq 0.70$ 时为高， $0.50 \leq \mu < 0.70$ 时为中）得出：环境=高、基础设施=中、社会经济=中。森林层级的聚合结果（主导等级为高）为

$$\mu_{\text{Forest}}(x) = \frac{0.74259 \cdot 1 + 0.69417 \cdot 0.7 + 0.69474 \cdot 0.7}{1 + 0.7 + 0.7}$$

$$= \frac{0.74259 + 0.48592 + 0.48632}{2.4} = \frac{1.71483}{2.4} = 0.71451.$$

因此， x 获得了一个能够识别矛盾的森林评分 ≈ 0.715。

示例 3.20.3（医院再入院风险：由临床病史、当前状态和社会决定因素构成的森林）。 医院再入院风险用于估计出院患者近期再次入院的概率，从而指导护理协调、后续随访规划和资源配置（参见 [767]）。

树：$\mathrm{TPS}_{\mathrm{CH}}$、$\mathrm{TPS}_{\mathrm{CS}}$、$\mathrm{TPS}_{\mathrm{SD}}$，标签为 {低，中等，高}，且以高ris为主 k.

与高的矛盾： pCF（高，高） $= 0$， pCF（中等，高） $= 0.35$， pCF（低，高） =0.85，因此 w（$\cdot \mid$ 高） $\in \{1, 0.65, 0.15\}$。

患者 p 叶节点评估（标签； μ）：

（临床病史）合并症=（高；0.82），既往入院=（中等；0.66）。

$$\mu_{\mathrm{CH}}(p) = \frac{0.82 \cdot 1 + 0.66 \cdot 0.65}{1 + 0.65} = \frac{0.82 + 0.429}{1.65} = \frac{1.249}{1.65} = 0.75697.$$

（当前状态）血压控制=（中等；0.55），依从性=（低；0.40），活动能力=（中等；0.60）。

$$\mu_{\mathrm{CS}}(p) = \frac{0.55 \cdot 0.65 + 0.40 \cdot 0.15 + 0.60 \cdot 0.65}{0.65 + 0.15 + 0.65} = \frac{0.3575 + 0.06 + 0.39}{1.45} = \frac{0.8075}{1.45} = 0.55690.$$

（社会决定因素）支持=（低；0.35），住房=（中等；0.58），可及性=（中等；0.62）。

$$\mu_{\mathrm{SD}}(p) = \frac{0.35 \cdot 0.15 + 0.58 \cdot 0.65 + 0.62 \cdot 0.65}{0.15 + 0.65 + 0.65} = \frac{0.0525 + 0.377 + 0.403}{1.45} = \frac{0.8325}{1.45} = 0.57310.$$

树标签：CH=高，CS=中等，SD=中等。森林聚合（主导为高）：

$$\mu_{\mathrm{Forest}}(p) = \frac{0.75697 \cdot 1 + 0.55690 \cdot 0.65 + 0.57310 \cdot 0.65}{1 + 0.65 + 0.65}$$

$$= \frac{0.75697 + 0.36199 + 0.37252}{2.30} = \frac{1.49148}{2.30} = 0.64847.$$

因此， p的矛盾感知森林再入院评分为 ≈ 0.648 （中等–高）。

示例 3.20.4（投资组合选择：风险、收益与流动性的森林）。 投资组合选择旨在选定资产的最优组合，以平衡预期收益、风险承受能力、多元化以及流动性或监管等约束（参见 [768]）。

树：$\mathrm{TPS}_{\mathrm{Risk}}$、$\mathrm{TPS}_{\mathrm{Return}}$、$\mathrm{TPS}^{\mathrm{Liq}}$。标签 {不理想，可接受，有吸引力}，主导为有吸引力。

矛盾：

$$pCF(\mathrm{Attractive}, \mathrm{Attractive}) = 0$$

，

$$pCF(\mathrm{Acceptable}, \mathrm{Attractive}) = 0.4$$

，

$$pCF(\mathrm{Undesirable}, \mathrm{Attractive}) = 0.85$$

，因此 $w \in \{1, 0.6, 0.15\}$。

资产 a 叶片评估（标签； μ）：

（风险）波动率=（可接受；0.68），回撤=（可接受；0.70），分散化=（有吸引力；0.74）。

$$\mu_{\text{Risk}}(a) = \frac{0.68 \cdot 0.6 + 0.70 \cdot 0.6 + 0.74 \cdot 1}{0.6 + 0.6 + 1} = \frac{0.408 + 0.42 + 0.74}{2.2} = \frac{1.568}{2.2} = 0.71273.$$

（收益）CAGR=（有吸引力；0.80），夏普=（可接受；0.66），阿尔法=（有吸引力；0.75 ）.

$$\mu_{\text{Return}}(a) = \frac{0.80 \cdot 1 + 0.66 \cdot 0.6 + 0.75 \cdot 1}{1 + 0.6 + 1} = \frac{0.80 + 0.396 + 0.75}{2.6} = \frac{1.946}{2.6} = 0.74846.$$

（流动性）换手率=（可接受；0.64），买卖价差=（不理想；0.40），深度=（可接受；0.67）。

$$\mu_{\text{Liq}}(a) = \frac{0.64 \cdot 0.6 + 0.40 \cdot 0.15 + 0.67 \cdot 0.6}{0.6 + 0.15 + 0.6} = \frac{0.384 + 0.06 + 0.402}{1.35} = \frac{0.846}{1.35} = 0.62667.$$

树标签：风险=有吸引力，收益=有吸引力，流动性=可接受。森林聚合（主导为有吸引力）：

$$\mu_{\text{Forest}}(a) = \frac{0.71273 \cdot 1 + 0.74846 \cdot 1 + 0.62667 \cdot 0.6}{1 + 1 + 0.6} = \frac{0.71273 + 0.74846 + 0.37600}{2.6} = \frac{1.83719}{2.6} = 0.70738.$$

因此作为 集合 a 的矛盾感知森林得分为 ≈ 0.707，即总体而言略具吸引力。

3.21 Plithogenic 软专家集

软专家集通过纳入多位专家基于参数给出的意见，将软集扩展为可同时应对不确定性和不同观点的决策工具 [769–771]。Plithogenic 软专家集在经典（模糊／直觉模糊／中智）软专家集的基础上，为每个专家–参数–意见三元组附加一个 plithogenic 隶属度，并结合矛盾感知融合机制，从而进一步丰富其表达能力 [772]。这使其能够对异质的多分量隶属关系进行建模，同时明确惩罚相互冲突的标签。

定义 3.21.1（Plithogenic 软专家集（PSES））。[772] 设 U 为论域； E 为参数集； X 为专家集； $O = \{1 = \text{同意}, 0 = \text{不同意}\}$ 为意见集。令$Z = E \times X \times O$ 并固定一个有限索引集 $A \subseteq Z$，其中包含已激活的三元组。

For 对于每个参数 $e \in E$，令 Pv_e 为其可接受值标签的集合。定义标签全集 e

$$\mathcal{L} := \Big(\bigsqcup_{e \in E} Pv_e \Big) \sqcup O$$

为所有参数值集与意见的不相交并。对于每个 $e \in E$，固定一个（可能为向量值的）多元本原隶属度（DAF）

$$pdf_e : U \times Pv_e \longrightarrow [0,1]^{s_e},$$

并定义一个全局矛盾度函数（DCF）

$$pCF : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow [0,1]^t, \qquad pCF(\ell,\ell) = \mathbf{0}, \quad pCF(\ell_1,\ell_2) = pCF(\ell_2,\ell_1).$$

设 $\Phi\colon\ [0,1]^s \times [0,1]^t \to [0,1]$ 为一种聚合算子（$s\colon\ = \max_e s_e$），它关于第一个参数单调不减，关于第二个参数单调不增，并满足中性元／湮灭条件

$$\Phi(\mathbf{0},\mathbf{b}) = 0, \qquad \Phi(\mathbf{a},\mathbf{0}) = \Psi(\mathbf{a}) \in [0,1].$$

一个关于 U 的多属性软专家集（PSES）是一个元组

$$\mathrm{PSES} \ = \ \big(U, E, X, O,\ A,\ \{Pv_e\}_{e\in E},\ \{pdf_e\}_{e\in E},\ pCF,\ \Phi,\ \mathrm{val}\big),$$

其中，$\mathrm{val}\colon\ A \to \bigsqcup_{e\in E} Pv_e$ 为每个 $\alpha = (e,\ x,\ o) \in A$ 赋予专家 x 在意见 o 下使用的值标签 $\mathrm{val}(\alpha) \in Pv_e$。

其多属性软专家映射 为

$$F_{\mathrm{PL}} : A \ \longrightarrow\ [0,1]^U, \qquad F_{\mathrm{PL}}(\alpha)(u) \ :=\ \Phi\Big(\ \iota_e\big(pdf_e(u, \mathrm{val}(\alpha))\big),\ pCF\big(\mathrm{val}(\alpha), o\big)\Big),$$

其中，$\alpha = (e,\ x,\ o)$ 和 $\iota_e\colon\ [0,1]^{s_e} \hookrightarrow [0,1]^s$ 是自然嵌入到公共 s 维立方体中的填充。

注 3.21.2（定义良好性与约化）。(i) 若 $t = 0$（不存在矛盾通道），则 $F_{\mathrm{PL}}(\alpha)(u) = \Psi\big(\iota_e(pdf_e(u,\ \mathrm{val}(\alpha)))\big)$，从而恢复不受矛盾惩罚的多分量隶属度。

(ii) 选择 $s = 1$ 和 $t = 0$ 可还原为模糊软专家集；选择 $s = 2$ 和 $t = 0$ 可还原为直觉模糊软专家集；选择 $s = 3$ 和 $t = 0$ 可还原为中智软专家集。参见表 3.29。

描述表 3.29 中的内容：归约表明，殊异软专家集（PSES）包括 es 模糊集、直觉模糊集和中智软专家集。

表 3.29：殊异软专家集（PSES）向若干软专家模型的归约 ls.

目标模型	$F(\alpha)$ 的图像	矛盾-tion	从 PSES 归约
模糊软专家集 [771, 773, 774]	$[0,1]$	$t = 0$	取 $s = 1$；每个 $pdf_e(u,\ v) \in [0,1]$；集 $pCF \equiv 0$ 和 $\Phi(a,\ 0) = a$。
直觉模糊 Soft 专家 Set [769, 770, 775]	$[0,1]^2$	$t = 0$	取 $s = 2$；$pdf_e(u,v) = (\mu,\nu)$，并采用通常的 IF 约束；集合 $pCF \equiv 0$ 并采用标准的 IF 运算。
中智软专家集 [776–778]	$[0,1]^3$	$t = 0$	取 $s = 3$；$pdf_e(u,v) = (T,I,F)$；令集合 $pCF \equiv 0$，并逐分量应用中智软专家运算。
犹豫模糊 Soft 专家集 [779, 780]	$[0,1]^3$	$t = 0$	取 $s = 3$；将犹豫信息编码在 $(T,\ I,\ F)$ 型分量中；设置 $pCF \equiv 0$ 并使用犹豫软专家聚合。
图像模糊软专家集 [781]	$[0,1]^3$	$t = 0$	取 $s = 3$；将 $(T,\ I,\ F)$ 解释为图像模糊接受度/中立度/拒绝度；集合 $pCF \equiv 0$ 并采用图像模糊规则。
球形模糊 Soft 专家集 [782–784]	$[0,1]^3$	$t = 0$	取 $s = 3$；施加球形模糊约束于 $(T,\ I,\ F)$；令 $pCF \equiv 0$ 并采用球形软专家算子。

下面给出了这一概念的一个具体示例。

例 3.21.3 （作为 PSES 的可持续供应商选择）。 依据环境、社会和经济标准对供应商进行系统评估，以减少影响，并确保采购选择可靠、合乎道德且具有长期可持续性（参见 [785]）。

设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ 为候选供应商集合。设

$E = \{e_1 =$“ 成本” $e_2 =$“可持续性”$\}$, $X = \{x_1 =$采购经理 $x_2 =$ 可持续发展专员$\}$,

以及 $O = \{1 =$ 同意 $0 =$ 不同意$\}$。

对于参数，我们取

$$Pv_{e_1} = \{\text{low}, \text{medium}, \text{high}\}, \qquad Pv_{e_2} = \{\text{green}, \text{neutral}, \text{risky}\},$$

并令 $\mathcal{L}$ 为所有 Pv_e 与 O的不交并。考虑被激活的三元组

$$A = \big\{(e_1, x_1, 1),\ (e_2, x_1, 1),\ (e_2, x_2, 1)\big\}.$$

赋值映射 $\mathsf{val}: A \to \bigsqcup_{e\in E} Pv_e$ 由下式给出

$$\text{val}(e_1, x_1, 1) = \text{low}, \quad \text{val}(e_2, x_1, 1) = \text{neutral}, \quad \text{val}(e_2, x_2, 1) = \text{green}.$$

令 $s_{e_1} = s_{e_2} = 1$ 并定义模糊 DAF

$$pdf_{e_1}, pdf_{e_2} : U \times Pv_{e_i} \to [0, 1]$$

例如，通过

$$\begin{aligned} pdf_{e_1}(u_1, \text{low}) &= 0.9, & pdf_{e_1}(u_2, \text{low}) &= 0.6, & pdf_{e_1}(u_3, \text{low}) &= 0.2, \\ pdf_{e_2}(u_1, \text{green}) &= 0.7, & pdf_{e_2}(u_2, \text{green}) &= 0.4, & pdf_{e_2}(u_3, \text{green}) &= 0.1, \\ pdf_{e_2}(u_1, \text{neutral}) &= 0.5, & pdf_{e_2}(u_2, \text{neutral}) &= 0.7, & pdf_{e_2}(u_3, \text{neutral}) &= 0.6. \end{aligned}$$

为刻画多属性矛盾，令 $t = 1$ 并定义

$$pCF : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to [0, 1]$$

by

$$pCF(\text{low}, 1) = 0.1, \quad pCF(\text{green}, 1) = 0.1, \quad pCF(\text{neutral}, 1) = 0.3,$$

并对其余所有对，令 $pCF(\ell, \ell) = 0$且 $pCF(\ell_1, \ell_2) = 0$，从而使“中性”可持续性与强烈正面意见的矛盾程度略高于“绿色”。

取聚合算子

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1], \qquad \Phi(a, b) = a(1 - b),$$

当矛盾度 b较大时，该算子会降低隶属度。

然后，定义多元软专家映射

$$F_{\text{PL}} : A \to [0, 1]^U$$

对于 $\alpha = (e, x, o) \in A$和 $u \in U$，可由下式给出

$$F_{\text{PL}}(\alpha)(u) = \Phi\big(pdf_e(u, \text{val}(\alpha)),\ pCF(\text{val}(\alpha), o)\big).$$

例如，对于 $\alpha_1 = (e_1, x_1, 1)$（成本，经理，同意），可得

$$F_{\mathrm{PL}}(\alpha_1)(u_1) = \Phi\big(0.9,\, 0.1\big) = 0.9 \times (1 - 0.1) = 0.81,$$

因此，采购经理强烈支持将供应商 u_1 评为“低成本”。类似地，对于 $\alpha_2 = (e_2,\ x_1,\ 1)$ 和供应商 u_2，

$$F_{\mathrm{PL}}(\alpha_2)(u_2) = \Phi\big(pdf_{e_2}(u_2, \mathrm{neutral}),\, pCF(\mathrm{neutral}, 1)\big) = 0.7 \times (1 - 0.3) = 0.49,$$

这反映出，“中性”的可持续性评估会因矛盾度 0。3 而受到部分惩罚。

因此，该决策情景在供应商全集 U上构成一个 Plithogenic 软专家集 .

示例 3.21.4（课程推荐作为 PSES）。设 $U = \{c_1, c_2, c_3\}$ 为某大学的一组选修课程。设

$E = \{e_1 = \text{“难度”}\ \ e_2 = \text{“就业市场相关性”}\}, \qquad X = \{x_1 = \text{导师}\ \ x_2 = \text{行业导师}\},$

并再次 $O = \{1 = \text{同意}\ \ 0 = \text{不同意}\}$。

参数取为

$$Pv_{e_1} = \{\mathrm{easy}, \mathrm{moderate}, \mathrm{hard}\}, \qquad Pv_{e_2} = \{\mathrm{low}, \mathrm{medium}, \mathrm{high}\},$$

并考虑已激活的三元组

$$A = \big\{(e_1, x_1, 1),\ (e_2, x_1, 1),\ (e_2, x_2, 1)\big\}.$$

设

$$\mathrm{val}(e_1, x_1, 1) = \mathrm{moderate}, \quad \mathrm{val}(e_2, x_1, 1) = \mathrm{high}, \quad \mathrm{val}(e_2, x_2, 1) = \mathrm{high},$$

因此，两位专家都强调与就业市场的高度相关性，而顾问则认为难度为中等。

令 $s_{e_1} = s_{e_2} = 1$，并定义模糊 DAF 如下

$$pdf_{e_1}(c_1, \mathrm{moderate}) = 0.8, \quad pdf_{e_1}(c_2, \mathrm{moderate}) = 0.5, \quad pdf_{e_1}(c_3, \mathrm{moderate}) = 0.3,$$
$$pdf_{e_2}(c_1, \mathrm{high}) = 0.6, \qquad pdf_{e_2}(c_2, \mathrm{high}) = 0.9, \qquad pdf_{e_2}(c_3, \mathrm{high}) = 0.4.$$

为使矛盾结构保持简单，令 $t = 1$ 并定义

$$pCF(\mathrm{moderate}, 1) = 0.2, \quad pCF(\mathrm{high}, 1) = 0.1,$$

并令 $pCF(\ell, \ell) = 0$, $pCF(\ell_1, \ell_2) = 0$ 适用于所有其他数对。因此，“与就业市场高度相关”几乎完全与正面意见相容，而“难度适中”则带有略高的矛盾惩罚。

使用相 同的聚合 $\Phi(a, b) = a(1 - b)$ 如上所述，我们得到 $\alpha = (e_2, x_1, 1)$（顾问，高度相关性）和课程 c_2:

$$F_{\mathrm{PL}}(\alpha)(c_2) = \Phi\big(pdf_{e_2}(c_2, \mathrm{high}),\, pCF(\mathrm{high}, 1)\big) = 0.9 \times (1 - 0.1) = 0.81,$$

这表明，在就业市场相关性高且矛盾度低的情况下，推荐 c_2 得到了强有力的立体学支持。

相比之下，对于 $\alpha' = (e_1,\ x_1,\ 1)$（导师，难度中等）和课程 c_3:

$$F_{\mathrm{PL}}(\alpha')(c_3) = \Phi\big(pdf_{e_1}(c_3, \mathrm{moderate}),\, pCF(\mathrm{moderate}, 1)\big) = 0.3 \times (1 - 0.2) = 0.24,$$

这表明，在相同的专家意见下，对 c_3 的支持较弱。

因此，这一大学课程推荐场景提供了一个关于 U 的 Plithogenic 软专家集的又一具体现实实例。

3.22 动态犹豫集

动态 Plithogenic 集（DPS）使 Plithogenic 隶属度和矛盾度依赖于时间，因此每个时刻都会产生一个（静态的）Plithogenic 集快照 [786]。

定义 3.22.1（动态犹豫集）：设 $P \neq \varnothing$ 为一个论域，设 v 为一个属性，其值集为 P_v，设 $T \subseteq \mathbb{R}$ 为一个非空时间域。固定整数 $s \geq 1$ 和 $t \geq 0$。维数为 (s,t) 的动态犹豫集是一个元组

$$\mathrm{DPS} \;=\; (P,\; v,\; P_v,\; pdf,\; pCF,\; T),$$

其中

$$pdf:\; T \times P \times P_v \longrightarrow [0,1]^s, \qquad pCF:\; T \times P_v \times P_v \longrightarrow [0,1]^t$$

分别是随时间变化的隶属度函数（DAF）和矛盾度函数（DCF）。对于每个固定的 $t_0 \in T$，时刻 t_0 的快照是（静态）犹豫集

$$\mathrm{PS}^{(t_0)} \;=\; \big(P,\; v,\; P_v,\; pdf^{(t_0)},\; pCF^{(t_0)}\big),$$

其中 $pdf^{(t_0)}(x,a) := pdf(t_0,x,a)$，以及 $pCF_{(t_0)}(a,b) := pCF(t_0,a,b)$。我们要求，对于所有 $t \in T$以及所有$a,b \in P_v$，

$$pCF(t,a,a) = \mathbf{0} \in [0,1]^t \quad \text{(reflexivity)}, \qquad pCF(t,a,b) = pCF(t,b,a) \quad \text{(symmetry)}.$$

我们在表 3.30 中简要总结了动态模糊、动态直觉模糊和动态中智模型如何作为动态单体集（DPS）框架的特例而形成。

表 3.30：动态模糊／直觉模糊／中智系列作为动态单体集（DPS）的特例。

动态模型	s	t	由 DPS 导出的方式
动态模糊 Set（DFS）[344,787]	1	0	取 $pdf:\; T \times P \times P_v \to [0,1]$ 和 pCF缺失（或 $pCF \equiv \mathbf{0}$）每个快照都是一个模糊集；隶属度随 t变化。
动态直觉主义-tic 模糊集（DIFS）[788,789]	2	0	取 $pdf(t,x,a) = (\mu,\nu) \in [0,1]^2$，其中 $\mu+\nu \leq 1$；pCF 不存在（或 $\equiv \mathbf{0}$）。
动态中智集（DNS）（参见 [786,790]）	3	0	取 $pdf(t,\; x,\; a) = (T,\; I,\; F) \in [0,1]^3$；$pCF$absent（或 $\equiv \mathbf{0}$）。
动态犹豫模糊集（参见 [791,792]）	3	0	取 $pdf(t,\; x,\; a) \in [0,1]^3$；$pCF$缺失（或 $\equiv \mathbf{0}$）。

下面给出了这一概念的一个具体示例。

示例 3.22.2（在线平台中的动态立体生成顾客满意度）。顾客满意度衡量产品和服务在多大程度上满足或超出顾客期望，从而对忠诚度、重复购买和声誉产生积极影响（参见 [793]）。

考虑一个在线订阅平台，该平台会跟踪顾客在一次重大界面改版前后对其基础版和高级版套餐的感受。

Let

$$P = \{\mathrm{Basic},\; \mathrm{Premium}\}$$

作为计划的全集，并令属性为 $v =$“总体满意度”，其取值集

$$P_v = \{\mathrm{low},\; \mathrm{medium},\; \mathrm{high}\}.$$

我们取一个时间域

$$T = \{t_1, t_2\} \subset \mathbb{R},$$

其中， t_1 表示“重新设计前”， t_2 表示“重新设计后”。

选择 $s = 3$ 和 $t = 1$。对于每个 $(t,\ x,\ a) \in T \times P \times P_v$，时变 DAF

$$pdf : T \times P \times P_v \longrightarrow [0,1]^3$$

返回一个三元组 $pdf(t,\ x,\ a) = (\mu_T,\ \mu_I,\ \mu_F)$，其分别表示值 a 在时间 t对方案 x 的认可程度（μ_T）、犹豫程度（μ_I）和拒绝程度（μ_F）。

例如，对于高级方案，我们可以设定

	t_1 （重新设计前）	t_2 （重新设计后）
pdf（t，优质，高）	(0.45，0.30，0.25)	(0.80，0.10，0.10)
pdf（t，优质，中）	(0.35，0.25，0.40)	(0.15,0.15, 0.70)
$pdf(t,$高级,低级)	(0.10,0.20, 0.70)	(0.05,0.10, 0.85)

基本方案也同样如此（ t_2之后的改进幅度较小）。

矛盾度函数

$$pCF : T \times P_v \times P_v \longrightarrow [0,1]$$

为简化起见，取为与时间无关：

$pCF(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$	low	介质	high
low	0	0.3	0.9
介质	0.3	0	0.5
high	0.9	0.5	0

并且根据定义是对称的。于是

$$\mathrm{DPS}_{\mathrm{cust}} = (P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF,\ T)$$

是一个动态多元论集合。动态特性体现在从 t_1 到 t_2的从属度三元组变化上：重新设计后，高级方案的“高满意度”程度从(0.45，0.30，0.25)变为(0.80，0.10，0.10)，而各满意度水平之间的矛盾结构保持不变。这使分析人员能够在多元论框架下比较不同时期的客户情绪快照。

例 3.22.3 （城市动态多元异质空气质量风险评估）。 空气质量风险评估用于衡量污染物暴露、健康影响及不确定性，以有效确定缓解政策、法规和城市规划决策的优先次序（参见 [794]）。

某城市每日监测两个城区 A 和 B的空气质量，并将每个城区划分为定性健康风险等级。

设论域为

$$P = \{\text{District } A,\ \text{District } B\},$$

并设属性为 $v =$“空气质量健康风险”，其取值集合为

$$P_v = \{\text{low},\ \text{moderate},\ \text{high}\}.$$

取一个由连续三天构成的离散时间域，

$$T = \{d_1, d_2, d_3\} \subset \mathbb{R},$$

分别为 $d_1 =$ “星期一”、 $d_2 =$ “星期二”、 $d_3 =$ “星期三”。

我们再次固定 $s = 3$、 $t = 1$，并将 $pdf(d,\ x,\ a) = (\mu_T,\ \mu_I,\ \mu_F) \in [0,1]^3$解释为与第 d 天地区 x 的标签 a相关的可接受风险、不确定性和不可接受风险程度。

假设对于地区 A ，我们得到以下 DAF 值：

	d_1 (晴朗)	d_2 (薄雾)	d_3 (污染事件)
$pdf(d,A,$ 低)	(0.80, 0.10, 0.10)	(0.40, 0.20, 0.40)	(0.10, 0.10, 0.80)
$pdf(d,A,$ 中等)	(0。15，0。20，0。65)	(0.40, 0.25, 0.35)	(0。30，0。20，0。50)
$pdf(d,A,$ 高)	(0.05, 0.10, 0.85)	(0.20, 0.20, 0.60)	(0.60, 0.15, 0.25)

晴朗天气时， d_1 该市主要将第 A 区视为“低风险”；而在污染事件期间， d_3 权重则转向“高风险”。第B区也可以设定类似（但可能不同）的变化。

随时间变化的矛盾度

$$pCF : T \times P_v \times P_v \longrightarrow [0,1]$$

可以体现公共卫生关注重点的变化。例如，污染事件发生后，当局可能会更加关注“中等”与“高”之间的差异。一种简单的设定方式是

$pCF(d_1,\ \cdot,\ \cdot)$	low	中等	high
low	0	0.2	0.8
中等	0.2	0	0.4
high	0.8	0.4	0

$pCF(d_3, \cdot, \cdot)$	low	中等	high
low	0	0.3	0.9
中等	0.3	0	0.6
high	0.9	0.6	0

在 $pCF(d_2,\ \cdot,\ \cdot)$ 之间选取中间值，并施加对称性约束。这里，“中等”与“高”风险之间的矛盾度从 d_1 上的 0.4 增至 d_3 上的 0.6，反映出在观察到严重事件后，健康政策阈值变得更加严格。

Then

$$\mathrm{DPS}_{\mathrm{air}} = (P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF,\ T)$$

是一个动态犁晶集，其快照 $\mathrm{PS}^{(d_1)}$、$\mathrm{PS}^{(d_2)}$ 和 $\mathrm{PS}^{(d_3)}$ 分别表示该城市每天的犁晶风险评估，同时考虑随时间变化的隶属度以及风险标签之间随时间变化的矛盾度。

3.23 概率犁晶集

概率犁晶集合为每个元素赋予一个随机（可能包含多个分量的）犁晶度，并通过考虑矛盾的聚合器融合各属性上的此类度量。它涵盖概率模糊集、概率直觉模糊集和概率中智集。

定义 3.23.1（概率犁晶度（PPD））。设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间。固定一个有限属性系统

$$\mathrm{Att} = \{a_1, \ldots, a_m\}, \qquad Pv_i \text{ (admissible values of } a_i).$$

对于底层论域 P，节点 a_i 处的 s_i 分量概率犁晶度是一个可测映射

$$\mu_i :\ P \times Pv_i \times \Omega \longrightarrow [0,1]^{s_i}, \qquad (x, \alpha, \omega) \longmapsto \mu_i(x, \alpha; \omega),$$

这意味着，对于每个固定的（$x,\ \alpha$），随机向量 $\mu_i(x,\ \alpha;\ \cdot)$ 描述了随机成员关系（可能是多值的，例如（$\mu,\ \nu$）或（$T,\ I,\ F$））。

定义 3.23.2（概率复形集（PPS））。设 $pCF\colon \left(\bigcup_i Pv_i\right)\times\left(\bigcup_i Pv_i\right)\to[0,1]$ 是一个具有 $pCF(a,\ a)\ =\ 0$ 的对称矛盾度。设 Agg_{pCF} 是一个可测的矛盾感知聚合器，对于 $[0,1]$ 中的任意有限组分量 $\{z_j\}_j$ 及其两两矛盾度 $\{c_{jk}\}$，返回 $[0,1]$ 中的一个值；一种典型选择是基于矛盾度加权的 t–范数/t–余范数混合

$$\mathsf{Agg}_{pCF}(u,v;c)\ :=\ (1-c)\,T(u,v)+c\,S(u,v),\quad c\in[0,1],$$

迭代扩展至 $n\geq 2$ 个输入，其中 T 是一个 t–范数，而 S 是一个 t–余范数。

A概率犹豫集 是一个元组

$$\mathrm{PPS}=\Big(P,\ \{(a_i,Pv_i,\mu_i)\}_{i=1}^{m},\ pCF,\ \mathsf{Agg}_{pCF}\Big).$$

对于属性值 $\gamma\ =\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\ \in\prod_i Pv_i$ 和 $x\in P$ 的任意选择，定义聚合随机度

$$\overline{\mu}(x,\gamma;\omega)\ :=\ \underset{1\leq i\leq m}{\mathsf{Agg}_{\mathrm{pCF}}}\big(\mu_i(x,\alpha_i;\omega)\big)\ \in[0,1]^{\,s},$$

其中，当 $s:=\max_i s_i>1$ 时，聚合按分量进行；Agg_{pCF} 中使用的成对矛盾为 $pCF(\alpha_i,\alpha_j)$。

可以提取具有代表性的精确摘要，例如 $\mathbb{E}[\mu(x,\gamma;\ \omega)],$,¯或分位数概况 $q_p(x,\gamma)$，其按分量定义为

$$q_p(x,\gamma)\ :=\ \inf\big\{t\in[0,1]\ :\ \mathbb{P}\big(\overline{\mu}(x,\gamma;\omega)\leq t\big)\geq p\big\}.$$

注释 3.23.3（集合运算（按 ω–方式定义））。 对于定义在同一 $(P,\{Pv_i\},pCF,\mathsf{Agg}_{pCF})$ 上且具有隶属度 μ_A,μ_B 的两个¯PPS:

$$\begin{aligned}
&\text{Union:} && \overline{\mu}_{A\cup B}(x,\gamma;\omega):=\mathsf{Agg}^{(\cup)}_{pCF}\big(\overline{\mu}_A(x,\gamma;\omega),\overline{\mu}_B(x,\gamma;\omega)\big),\\
&\text{Intersection:} && \overline{\mu}_{A\cap B}(x,\gamma;\omega):=\mathsf{Agg}^{(\cap)}_{pCF}\big(\overline{\mu}_A(x,\gamma;\omega),\overline{\mu}_B(x,\gamma;\omega)\big),\\
&\text{Complement:} && \overline{\mu}_{A^c}(x,\gamma;\omega):=\mathsf{Comp}\big(\overline{\mu}_A(x,\gamma;\omega)\big),
\end{aligned}$$

其中，$\mathsf{Agg}^{(\cup)}_{pCF}$（分别地，$\mathsf{Agg}^{(\cap)}_{pCF}$）通常通过局部矛盾度偏向于 S（分别地，T）来获得，而 Comp 是多元哲学补集（对于 $s=1$，$\mathsf{Comp}(u)\ =1-u$；对于 (μ,ν) 或 (T,I,F)，按分量应用标准对偶关系）。必要时，可将上述随机输出的 $\mathbb{E}[\cdot]$ 作为清晰输出。

注释 3.23.4（与概率模糊集的联系）。 在概率模糊集（PFS）中，隶属度是概率空间上的随机变量，通常形式化为一个可测映射$\mu_A\colon\ T\times\Omega\ \to[0,1]$（对于固定的 t，在 ω 中可测；对于固定的 ω，在 t 中为模糊隶属）。这产生了一种“3D”视图，其中隶属度具有概率分布。当 $m=1$、$s=1$ 和 $pCF\equiv 0$ 时，PPS 退化为 PFS（因此 Agg_{pCF} 是恒等映射）。有关 PFS 的可测定义和随机隶属度视角，请参阅相关文献。

表3.31总结了概率多元生成集向其对应的模糊、多值直觉模糊、中智以及经典多元生成特殊情形的约化。

下面给出了这一概念的一个具体示例。

例 3.23.5（可持续采购中的概率犹豫型供应商评估）。 考虑一家制造企业，该企业需要在未来需求和监管条件不确定的情况下选择一家长期原材料供应商。

表 3.31：概率犹豫型集（PPS）的化简。固定一个属性并取 $pCF \equiv 0$，再分别选择 $s=1$，2、3，即可将 PPS 化简为 PFS/PIFS/PNS。

目标模型	组成部分（陪域）	约束条件	从 PPS 约化
概率模糊集（PFS） [795–798]	标量等级 $u \in [0,1]$ (范围-dom)	不超出 $u \in [0,1]$	$m=1$, $s=1$, $pCF \equiv 0$; Agg_{pCF} 恒等式; $\overline{\mu}(x,\alpha;\cdot) \in [0,1]$
概率直觉模糊集（PIFS） [180, 799, 800]	对 $(\mu,\ \nu) \in [0,1]^2$ (随-dom)	$\mu+\nu \le 1$ 几乎处处	$m=1$, $s=2$, $pCF \equiv 0$; $\neg\mu(x,\ \alpha;\ \cdot) \in [0,1]^2$ 几乎必然地 $\mu+\nu \le 1$
概率中智 Neu-Set (PNS) [801–803]	三元组 $(T、I、F) \in [0,1]^3$ (随机-dom)	通常为 $0 \le T、I、F \le 1$	$m=1$、$s=3$、$pCF \equiv 0$; $\neg_{\pi}(x、\alpha;\ \cdot) \in [0,1]^3$
概率犹豫模糊集 [804, 805, 805]	犹豫模糊三元组（随-dom)	−	$m=1$, $s=3$, $pCF \equiv 0$; $\neg_{\pi}(x,\alpha;\ \cdot) \in [0,1]^3$
概率四分划分的中智性集	四分划分的中智性四元组（随机）	−	$m=1$, $s=4$, $pCF \equiv 0$; $\neg_{\pi}(x,\ \alpha;\ \cdot) \in [0,1]^4$
概率五分划分的中智性集	五分划分中智五元组（随机）	−	$m=1$, $s=5$, $pCF \equiv 0$; $\neg_{\pi}(x,\alpha;\ \cdot) \in [0,1]^5$

论域与属性。设备选方案的论域为

$$P = \{S_1, S_2, S_3\},$$

其中 S_1 为现任供应商，S_2, S_3 为新的候选供应商。公司依据有限属性体系对供应商进行评价

$$\mathrm{Att} = \{a_1, a_2, a_3\},$$

其中

$$a_1 = \text{“unit cost”}, \quad a_2 = \text{“quality stability”}, \quad a_3 = \text{“environmental performance”}.$$

对于每个 a_i，我们使用相同的语言值集

$$Pv_i = \{\text{low},\ \text{medium},\ \text{high}\}$$

解释为对公司而言的低/中/高有利程度。

不确定情景与概率度。未来情况存在不确定性，因此公司对三个可能性相同的情景进行建模：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \qquad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \tfrac{1}{3} \quad (k=1,2,3),$$

表示

$$\omega_1 = \text{“demand boom”},\ \omega_2 = \text{“baseline”},\ \omega_3 = \text{“strict carbon regulation”}.$$

我们对所有 i 均选取 $s_i = 1$，因此每个概率犹豫度 $\mu_i(x,\alpha;\ \omega) \in [0,1]$ 都是普通的随机模糊隶属度。

为便于说明，考虑属性 a_3 （环境绩效）和供应商 S_1。$\alpha \in Pv_3$ 的随机隶属度 $\mu_3(S_1,\alpha;\ \omega)$规定如下：

$\mu_3(S_1,\alpha;\omega)$	ω_1	ω_2	ω_3
$\alpha = \text{low}$	0.20	0.10	0.05
$\alpha = \text{medium}$	0.50	0.40	0.30
$\alpha = \text{high}$	0.30	0.50	0.65

在严格监管之前（ω_1, ω_2）， S_1 的环境绩效大多为“中”到“高”，但在严格监管 ω_3下，公司预计 S_1 会加大对绿色技术的投资，使“高”的隶属度提高到0.65。

同理，我们为每个供应商、属性–取值和情景定义 μ_1 和 μ_2，分别表示 a_1（成本）和 a_2（质量）。例如，对于成本上的 S_2：

$\mu_1(S_2, \alpha; \omega)$	ω_1	ω_2	ω_3
$\alpha = \text{low}$	0.80	0.75	0.70
$\alpha = \text{medium}$	0.15	0.20	0.25
$\alpha = \text{high}$	0.05	0.05	0.05

这表明，即使发生监管变化， S_2 预计仍能始终保持低成本。

矛盾度与聚合。我们在所有取值集的并集上定义一个简单的矛盾度:

$$pCF(\text{low}, \text{high}) = pCF(\text{high}, \text{low}) = 0.9, \quad pCF(\text{low}, \text{medium}) = pCF(\text{medium}, \text{low}) = 0.4,$$

$$pCF(\text{medium}, \text{high}) = pCF(\text{high}, \text{medium}) = 0.5, \quad pCF(\alpha, \alpha) = 0,$$

并将 pCF 平凡地扩展到各个属性（如有需要，可将不同属性的取值视为中度矛盾）。

作为矛盾感知聚合器，该公司选择

$$\mathsf{Agg}_{pCF}(u, v; c) = (1 - c)\min\{u, v\} + c\max\{u, v\},$$

当 c 较小时（值相容），倾向于 t–范数最小值；当 c 较大时（强烈矛盾），则倾向于 t–余范数最大值。

对于固定供应商 S_2 和特定的取值剖面

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\text{low cost},\ \text{high quality},\ \text{high environment}),$$

聚合后的随机度

$$\overline{\mu}(S_2, \gamma; \omega) = \mathsf{Agg}_{pCF}\big(\mu_1(S_2, \text{low}; \omega),\ \mu_2(S_2, \text{high}; \omega),\ \mu_3(S_2, \text{high}; \omega)\big)$$

是 $[0, 1]$中的情景依赖型随机隶属度。一个清晰的概括，例如

$$\mathbb{E}\big[\overline{\mu}(S_2, \gamma; \omega)\big] = \sum_{k=1}^{3} \overline{\mu}(S_2, \gamma; \omega_k)\, \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

给出了供应商 S_2 在剖面 γ下的预期多元体适宜度，而分位数则反映了风险规避型观点。总之，

$$\mathrm{PPS}_{\text{supply}} = \Big(P,\ \{(a_i, Pv_i, \mu_i)\}_{i=1}^{3},\ pCF,\ \mathsf{Agg}_{pCF}\Big)$$

是一个概率多元体集，用于在未来条件不确定的情况下对可持续供应商评估进行建模。

例 3.23.6（预防医学中的概率多值疾病风险评估）。 疾病风险评估是利用医学数据、生物标志物、生活方式、遗传因素和环境，对随时间罹患特定疾病的可能性及其影响所进行的系统评估（参见 [806]）。

公共卫生机构希望利用若干不确定指标，评估个人罹患慢性病（例如 2 型糖尿病）的风险。

论域与属性。 设 P 为参加筛查项目的患者群体。对于固定患者 $x \in P$，我们评估以下属性系统:

$$\mathrm{Att} = \{a_1, a_2, a_3\},$$

with

$a_1 =$ “体质指数（BMI）” $a_2 =$“空腹血糖” $a_3 =$ “身体活动水平” l”.

每个属性都由一个定性值集来描述:

$$Pv_1 = \{\text{normal},\ \text{overweight},\ \text{obese}\},$$

$$Pv_2 = \{\text{normal},\ \text{impaired},\ \text{high}\},$$

$$Pv_3 = \{\text{low},\ \text{moderate},\ \text{high}\}.$$

将测量不确定性视为概率空间。 测量结果存在噪声，且可能因就诊次数而异，因此该机构考虑了三种等概率的“数据状态”:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \qquad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \tfrac{1}{3},$$

其中，对于给定的患者 x,

$\omega_1 =$ “乐观的实验室读数” $\omega_2 =$ “典型读数” $\omega_3 =$“悲观的实验室读数”。

我们选择 $s_1 = s_2 = s_3 = 3$ 并视

$$\mu_i(x, \alpha; \omega) = \big(T_i(x, \alpha; \omega),\ I_i(x, \alpha; \omega),\ F_i(x, \alpha; \omega)\big) \in [0, 1]^3$$

为由支持度 (*T*)、不确定度 (*I*)和反证据 (*F*)构成的中智型三元组，对应于属性 a_i 在数据状态 ω下的取值 α 。

例如，对于BMI中等偏高的患者 x ， a_1 的随机程度可能为

$\mu_1(x, \alpha;\ \omega)$	ω_1	ω_2	ω_3
$\alpha =$正常	(0.30, 0.20,0.50)	(0.20, 0.20, 0.60)	(0.10, 0.15, 0.75)
$\alpha =$超重	(0.50, 0.20,0.30)	(0.55, 0.20, 0.25)	(0.45, 0.20, 0.35)
$\alpha =$肥胖	(0。20，0。20，0。60)	(0.25, 0.25, 0.50)	(0.45, 0.20, 0.35)

这表明，在悲观解读下， ω_3支持 $\alpha =$肥胖的证据有所增加。

同样，对于空腹血糖 a_2 ，同一位患者 x的情况可能如下:

$\mu_2(x, \alpha;\ \omega)$	ω_1	ω_2	ω_3
$\alpha =$正常	(0.70, 0.10,0.20)	(0.55, 0.15, 0.30)	(0.40, 0.15, 0.45)
$\alpha =$受损	(0.20, 0.15,0.65)	(0.30, 0.20, 0.50)	(0.35, 0.20, 0.45)
$\alpha =$高	(0.10, 0.20,0.70)	(0.15, 0.20, 0.65)	(0.25, 0.20, 0.55)

以及描述身体活动的类似表格，用于 a_3 。

矛盾结构与风险聚合。 某些属性值共同增加疾病风险（例如“肥胖”和“高血糖”），而其他属性值则具有保护作用或能部分抵消风险（例如

“肥胖”但“高活动量”）。这可通过所有 Pv_i 的并集上的一个plithogenic矛盾度 pCF 来表述。例如，

$$pCF(\text{normal BMI}, \text{normal glucose}) = 0.1, \qquad pCF(\text{obese}, \text{high glucose}) = 0.95,$$

$$pCF(\text{obese}, \text{high activity}) = 0.6,$$

以及 $pCF(\alpha,\ \alpha) = 0$ 具有对称性。

矛盾感知型聚合器

$$\mathsf{Agg}_{pCF} : ([0,1]^3)^n \times [0,1]^{n\times n} \longrightarrow [0,1]^3$$

对各属性上的中智三元组进行组合。对于选定的风险导向型配置

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\text{obese},\ \text{high glucose},\ \text{low activity}),$$

聚合后的随机三元组

$$\overline{\mu}(x, \gamma; \omega) \in [0,1]^3$$

表示在数据状态ω下，x 成为“高风险患者”的概率多元发生度。

取期望

$$\mathbb{E}\big[\overline{\mu}(x, \gamma; \omega)\big]$$

得到一个平均中智风险三元组，而 $\mu(x, \gamma;\ \omega)$ 的分位数给出保守的风险界。因此

$$\mathrm{PPS}_{\mathrm{med}} = \Big(P,\ \{(a_i, Pv_i, \mu_i)\}_{i=1}^{3},\ pCF,\ \mathsf{Agg}_{pCF}\Big)$$

是一个概率普利托根集合，用于在测量噪声与不确定的未来健康状态下对疾病–风险评估进行建模。

3.24 三角普利托根集合

三角普利托根集合用 $[0,1]$，上的一个或多个三角模糊数刻画每个元素的归属度，并通过属性–值矛盾函数调节这些程度。

定义 3.24.1（三角模糊数（TFN））.（参见 [807–809]）$[0,1]$ 上的 TFN 是满足 $0 \le \ell \le m \le u \le 1$ 的三元组 $\tau = (\ell, m, u)$。其隶属函数 $\mu_\tau\colon\ [0,1] \to [0,1]$ 为

$$\mu_\tau(z) = \begin{cases} 0, & z \le \ell, \\ \dfrac{z-\ell}{m-\ell}, & \ell < z \le m, \\ \dfrac{u-z}{u-m}, & m < z < u, \\ 0, & z \ge u. \end{cases}$$

定义 3.24.2（三角形多元生成集（TPS））。设 U 为论域，v 为属性，其取值集为 P_v。固定整数 $p, q, r \ge 0$（三角细化签名），并令 $s := p+q+r \in \{1,2,3\}$。定义三角形多元生成隶属 映射

$$\text{tPDF}:\ U \times P_v \longrightarrow \big([0,1]^3\big)^s, \qquad (x,a) \longmapsto \Big(\ T_i(x,a)\Big)_{i=1}^{p} \ \Big|\ \Big(\ I_j(x,a)\Big)_{j=1}^{q} \ \Big|\ \Big(\ F_k(x,a)\Big)_{k=1}^{r},$$

其中，每个分量 $T_i(x,a)$、$I_j(x,a)$、$F_k(x,a)$ 均为 TFN $T_i(x,a) = (\ell^{T_i}, m^{T_i}, u^{T_i})$ 等。令多元生成矛盾 为

$$pCF\colon\ \ P_v \times P_v \to [0,1]^t, \qquad pCF\ (a,\ b)\ = pCF\ (b,\ a) \qquad pCF\ (a,\ a)\ = 0.$$

一个三角形矛盾集是一个元组

$$\mathsf{TPS} = \big(U,\ v,\ P_v,\ (p,q,r),\ \mathrm{tPDF},\ pCF,\ \Phi\big),$$

与一个固定的单调聚合器一起

$$\Phi:\ \big([0,1]^3\big)^{\,s} \times [0,1]^t \longrightarrow [0,1]^3$$

该聚合器返回一个三角模糊数（TFN），并满足 $\Phi(\cdot,\mathbf{0}) =$ 分量式 TFN 聚合且不产生矛盾。对于任意 $x \in U$ 和 主导 值 $a^* \in P_v$，x 的有效三角隶属度为 TFN

$$\tau_{\mathsf{TPS}}(x \mid a^*) \ :=\ \Phi\Big(\mathrm{tPDF}(x,a^*),\ pCF\big(a^*,\cdot\big)\Big) \in [0,1]^3.$$

如有需要，可使用 TFN 去模糊化器将决策分数标量化，例如质心 $\mathsf{cen}(\ell,m,u) = \frac{\ell+m+u}{3}$，并将其应用于 $\tau_{\mathsf{TPS}}(x \mid a^*)$。

表3.32说明，经典三角模糊集、直觉模糊集和中智集是三角犁晶集的精确特例。

表3.32：通过选择特征和 $pCF \equiv 0$，经典三角模糊集／直觉模糊集／中智集成为三角犁晶集的精确特例。

目标三角模型	签名 (p,q,r)	TPS 内的恢复（集合 $pCF \equiv 0$）
三角模糊 Set（TFS）[810–812]	$(1,0,0)$	每个 x 和 a对应一个 TFN $T_1(x,a)$；有效的 TFN 是聚合后的 T（无矛盾）。
三角直觉主义 Set（TIFS）[813–815]	$(1,1,0)$	每个 (x,a) 对应一对 TFN (T_1,I_1)，并满足一致性条件（例如，峰值 $m^{T_1} + m^{I_1} \le 1$）；运算按分量进行，作用于 $(T_1,\ I_1)$。
三角形中智集合（TNS）[816–818]	$(1,\ 1,\ 1)$	每个 $(x,\ a)$ 包含一组三元TFN $(T_1,\ I_1,\ F_1)$；否范围约束之外需要耦合（可根据具体应用施加可选边界（用）。
三角犹豫模糊集 [819–821]	$(1,\ 1,\ 1)$	每个 $(x,\ a)$ 一个三元组；不要求耦合，超出范围约束（可选界限可按应用施加）。

下文给出该概念的一个简短具体示例。

例 3.24.3（网购中笔记本电脑选项的三角普利托根评估）。一位顾客希望从三个备选方案中选择一台新笔记本电脑

$$U = \{L_1, L_2, L_3\}.$$

他们针对该属性对每台笔记本电脑进行评估

$$v = \text{“overall perceived utility”}$$

以及一组语言属性值

$$P_v = \{\mathrm{low},\ \mathrm{medium},\ \mathrm{high}\}.$$

我们考虑一种纯三角模糊型细化，其中

$$(p,q,r) = (1,0,0), \qquad s = p+q+r = 1,$$

因此，对于每个（x, a），$\in U \times P_v$ 都存在一个唯一的三角模糊数 $T_1(x, a)$，用于描述“笔记本电脑 x 具有效用等级 a”这一命题的真值隶属度。因此

$$\mathrm{tPDF}(x, a) = \big(T_1(x, a)\big), \qquad T_1(x, a) = (\ell^{T_1}, m^{T_1}, u^{T_1}) \in [0, 1]^3.$$

S假设客户的近似判断（已归一化至 $[0, 1]$）如下：.

以下对象的三角隶属度： L_1。笔记本电脑 L_1 是经济型选择：大多介于“中等”和“高”之间，但存在一定不确定性。三角真隶属度如下：

$$T_1(L_1, \mathrm{low}) = (0.0, 0.1, 0.3), \qquad T_1(L_1, \mathrm{medium}) = (0.2, 0.5, 0.8), \qquad T_1(L_1, \mathrm{high}) = (0.4, 0.7, 1.0).$$

以下对象的三角隶属度： L_2。笔记本电脑 L_2 是一款均衡的中端机型：

$$T_1(L_2, \mathrm{low}) = (0.0, 0.0, 0.2), \qquad T_1(L_2, \mathrm{medium}) = (0.3, 0.6, 0.9), \qquad T_1(L_2, \mathrm{high}) = (0.5, 0.8, 1.0).$$

以下对象的三角隶属度： L_3。笔记本电脑 L_3 是一款高端机型；用户认为它很少只有“低”效用，但有时也只有“中等”效用，具体取决于个人品味：

$$T_1(L_3, \mathrm{low}) = (0.0, 0.0, 0.1), \qquad T_1(L_3, \mathrm{medium}) = (0.2, 0.4, 0.7), \qquad T_1(L_3, \mathrm{high}) = (0.6, 0.9, 1.0).$$

关于效用水平的拟态矛盾。我们对 P_v **施加矛盾度** :

$$pCF(\mathrm{low}, \mathrm{high}) = pCF(\mathrm{high}, \mathrm{low}) = 0.9, \qquad pCF(\mathrm{low}, \mathrm{medium}) = pCF(\mathrm{medium}, \mathrm{low}) = 0.4,$$

$$pCF(\mathrm{medium}, \mathrm{high}) = pCF(\mathrm{high}, \mathrm{medium}) = 0.5, \qquad pCF(a, a) = 0 \quad \text{for } a \in P_v.$$

这反映出，感知效用的“低”和“高”之间存在强烈矛盾，而“中”与二者之间存在中等程度的矛盾。

面向主导值的矛盾感知聚合。假设客户希望以高效用作为主导值 $a^* =$high。那么，三角拟态度

$$\tau_{\mathsf{TPS}}(x \mid a^*) = \Phi\Big(\mathrm{tPDF}(x, \mathrm{high}),\ pCF(\mathrm{high}, \cdot)\Big)$$

通过所选的 TFN 聚合器 Φ 获得，该聚合器会根据“高”与其他效用水平之间的矛盾强度来调整三角形。例如，如果 Φ 在 pCF(high, low) 较大时，会对三角形中更乐观的部分赋予更高权重，那么很少具有“低”效用的笔记本电脑（例如 L_3）将比“低”效用成分较大的笔记本电脑获得更有利的 $\tau_{\mathsf{TPS}}(L_3 \mid$high)。

通过质心进行去模糊化

$$\mathrm{cen}(\ell, m, u) = \frac{\ell + m + u}{3}$$

为每个 L_i 得出一个标量多元析取分数，从而构成一个具体的三角多元析取集

$$\mathsf{TPS}_{\mathrm{laptop}} = \big(U,\ v,\ P_v,\ (1, 0, 0),\ \mathrm{tPDF},\ pCF,\ \Phi\big)$$

用于现实生活中在效用水平印象相互矛盾的情况下进行在线笔记本电脑选择。

示例 3.24.4（可再生能源项目的三角多值评价）. 可再生能源是指来自太阳、风、水和生物质等可自然补充来源的能源，可在全球范围内减少排放并降低依赖性（参见 [822]）。

某市议会考虑三个可再生能源项目

$$U = \{P_1, P_2, P_3\},$$

其中 P_1 是一座太阳能农场， P_2 是一座陆上风电场， P_3 是一座生物质电厂。主要属性为

$$v = \text{“overall sustainability impact”},$$

属性值为

$$P_v = \{\text{poor},\ \text{acceptable},\ \text{good},\ \text{excellent}\}.$$

由于可持续性必须平衡环境、社会和经济维度，议会希望不仅对真实度建模，还要对不确定度和虚假度建模，且每一项均采用三角模糊形式。因此我们选择

$$(p, q, r) = (1, 1, 1), \qquad s = p + q + r = 3,$$

使得

$$\text{tPDF}(x, a) = \Big(T_1(x, a) \mid I_1(x, a) \mid F_1(x, a)\Big),$$

其中每个

$$T_1(x, a),\ I_1(x, a),\ F_1(x, a)$$

都是 $[0, 1]^3$ 中的三角模糊数。

太阳能农场的可持续性概况 P_1。 对于 P_1，假设委员会的专家小组对“良好”这一取值给出了以下三角中智型评估:

$$T_1(P_1, \text{good}) = (0.5, 0.7, 0.9),$$

这表示“P_1 良好”的真实性最有可能约为 0.7，最低支持度为 0.5，最高为 0.9。由于长期生命周期数据存在不确定性，不确定性度为

$$I_1(P_1, \text{good}) = (0.1, 0.2, 0.4),$$

而虚假性（反面证据，例如土地利用方面的顾虑）为

$$F_1(P_1, \text{good}) = (0.0, 0.1, 0.3).$$

对于更具进取性的“优秀”值，他们规定

$T_1(P_1,$ 优秀$) = (0.2,\ 0.4,\ 0.7)$ $I_1(P_1,$ 优秀$) = (0.2,\ 0.3,\ 0.5)$ $F_1(P_1,$ 优秀$) = (0.1,\ 0.2,\ 0.5)$。

风电场的概况 P_2 **和生物质电厂的概况** P_3。 对于 P_2 （风电场），视觉影响和噪声会引发与利益相关方之间更多的冲突，但碳减排效益显著。对于“良好”这一取值，可能会有

$$T_1(P_2, \text{good}) = (0.4, 0.6, 0.8), \quad I_1(P_2, \text{good}) = (0.2, 0.3, 0.4), \quad F_1(P_2, \text{good}) = (0.1, 0.2, 0.4).$$

对于 P_3 （生物质），燃料供应链和排放会带来更多不确定性：

$$T_1(P_3,\text{good})=(0.3,0.5,0.7),\quad I_1(P_3,\text{good})=(0.3,0.4,0.6),\quad F_1(P_3,\text{good})=(0.1,0.3,0.5).$$

可持续性等级之间的矛盾。 我们将P_v 上的矛盾度定义为一种有序尺度：

$$\text{poor}\prec\text{acceptable}\prec\text{good}\prec\text{excellent}.$$

Set

$$pCF(a,b):=\frac{|\iota(a)-\iota(b)|}{3},\qquad a,b\in P_v,$$

其中， ι（较差） $=0$， ι（可接受） $=1$， ι（良好） $=2$， ι（优秀） $=3$。因此

$$pCF(\text{poor},\text{excellent})=1,\quad pCF(\text{poor},\text{good})=\tfrac{2}{3},\quad pCF(\text{acceptable},\text{good})=\tfrac{1}{3},$$

且 $pCF(a,\ a)=0$。

考虑矛盾的三角形可持续性程度。 假设委员会将优秀的可持续性作为主导值 $a^*=$ 优秀。对于每个项目 $x\in\{P_1,P_2,P_3\}$ ，三角形多属性集给出一个中智型 TFN

$$\tau_{\mathsf{TPS}}(x\mid a^*)=\Phi\Big(\text{tPDF}(x,\text{excellent}),\ pCF(\text{excellent},\cdot)\Big)\in[0,1]^3,$$

其中， Φ 汇总了（T， I， F）三角数，同时考虑“优秀”与“较差”或“可接受”等较低等级之间的矛盾程度。

通过质心逐分量对 $\tau_{\mathsf{TPS}}(x\mid a^*)$ 进行去模糊化，

$$\text{cen}(T)=\frac{\ell^T+m^T+u^T}{3},\quad \text{cen}(I)=\frac{\ell^I+m^I+u^I}{3},\quad \text{cen}(F)=\frac{\ell^F+m^F+u^F}{3},$$

得到一个 关于“项目 x 在可持续性方面出色”这一陈述的真、犹豫和假值的标量概述 nt 可持续性”。通过这种方式

$$\mathsf{TPS}_{\text{sust}}=\big(U,\ v,\ P_v,\ (1,1,1),\ \text{tPDF},\ pCF,\ \Phi\big)$$

构成了一个具体的三角犹豫集，可用于对具有矛盾可持续性评价的可再生能源项目进行现实评估。

3.25 梯形 Plithogenic 集

梯形 Plithogenic 集通过梯形真度、不确定度和假度隶属度对元素进行建模，并按属性加权矛盾度，以表示不确定信息。

定义 3.25.1 （梯形模糊数）。 （参见 [823–825]）设 (a,b,c,d)，其中 $a\le b\le c\le d$。梯形隶属度函数 Trap $abcd$：$[0,1]\to[0,1]$ 为

$$\text{Trap}\,abcd=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b,\\ 1, & b\le x\le c,\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c<x<d,\\ 0, & x\ge d.\end{cases}$$

我们将梯形模糊数简记为（a,b,c,d）。

定义 3.25.2（梯形 Plithogenic 集（TPS））。设 U 为一个论域，v 为取值集为 P_v 的属性，且 $pCF\colon\ P_v \times P_v \to [0,1]$ 为一个 Plithogenic 矛盾函数，满足 $pCF(a,a) = 0$ 且 $pCF(a,b) = pCF(b,a)$。对每个 $a \in P_v$，U 上的 TPS 为每个 $x \in U$ 指定 $[0,1]$ 上的三个梯形模糊数：

$$T(x,a) = (t_1,t_2,t_3,t_4), \qquad I(x,a) = (i_1,i_2,i_3,i_4), \qquad F(x,a) = (f_1,f_2,f_3,f_4),$$

i分别解释为真、犹豫和假隶属度剖面。这些数据

$$\mathsf{TPS} = \big(U,\ v,\ P_v;\ T,I,F;\ pCF\big)$$

称为梯形多元生成集。

在选定的主导值 $a^* \in P_v$ 处，标量多元生成包含等级的计算方法是：首先通过算术平均值 $S(a,b,c,d) := \frac{a+b+c+d}{4}$ 对每个梯形去模糊化，然后按矛盾权重进行加权：

$$\lambda(a^*) := \frac{1}{|P_v|}\sum_{b\in P_v} pCF(a^*,b), \qquad \mu_{\mathrm{pl}}(x \mid a^*) := \big(1-\lambda(a^*)\big)\,S\big(T(x,a^*)\big)+\lambda(a^*)\big(1-S(F(x,a^*))\big)-\beta\,S\big(I(x,a^*)\big),$$

采用设计参数 $\beta \in [0,1]$。最后，如有必要，将 μ_{pl} 截断至 $[0,1]$。集合运算（并集／交集／补集）在 (T,I,F) 层面上，通过选定的 t-余范数／t-范数／否定算子定义，并经过去模糊化进行转换。

表 3.33 说明了经典梯形模糊、直觉模糊和中智理论家族如何作为梯形本体集的特例而产生。

表 3.33：作为梯形多元生成集特例的经典梯形模糊／直觉模糊／中智集族。

目标模型（恢复）	TPS 内的约束	经典等级的恢复
梯形模糊集（TFS）[826–828]	集合 $I(x,a) \equiv (0,0,0,0)$，$F(x,a) \equiv (0,0,0,0)$ 和 $pCF \equiv 0$。	$\mu(x) = S\big(T(x,a^*)\big)$ 给出通常的梯形隶属度。
梯形直觉模糊集（TIFS）[829–831]	仅在直觉模糊环境中使用 (T,F)。istic约束 $t_4(x,a)+f_4(x,a) \le 1$，以及 $pCF \equiv 0$。	$\mu(x) = S(T(x,a^*))$，$\nu(x) = S(F(x,a^*))$，其中 $\mu+\nu \le 1$。
梯形Vague集	仅对vague使用两个值约束 $t_4(x,a) + f_4(x,a) \le 1$，以及 $pCF \equiv 0$。	请参阅参考文献。
梯形中智学的 Set（TrNS）[832–834]	Keep (T,I,F) with $t_4(x,a) + i_4(x,a)+f_4(x,a) \le 3$ 和 $pCF \equiv 0$。	$T(x)$ $I(x)$ $F(x)$ 是梯形；分类-性 TrNS 运算按分量进行。
梯形犹豫模糊集 [835,836]	$pCF \equiv 0$ 和犹豫模糊约束	三元值为梯形；经典-cal运算按分量进行。
梯形图像模糊集 [837,838]	$pCF \equiv 0$. 图像模糊 Con-约束	三重值为梯形；分类运算按分量进行。
梯形球形模糊集 [839]	$pCF \equiv 0$。球形模糊约束-条件	三元值为梯形；经典-运算按分量进行。
梯形四分划分中智 Sets	$pCF \equiv 0$。四分中智约束	四元组取值为梯形；经典运算按分量进行。
梯形五分划中智 Sets	$pCF \equiv 0$。五划分新中智约束	五元组数值为梯形；经典运算分量适用两两地。

下面给出这一概念的一个具体示例。

例 3.25.3（将供应商可持续性评估表示为梯形本体集）。 设有一个采购部门，必须评估两家候选供应商

$$U = \{S_A, S_B\}$$

相对于某一属性

$$v = \text{“sustainability level”}$$

其 plithogenic 值集为

$$P_v = \{\text{low}, \text{medium}, \text{high}\}.$$

属性值之间的矛盾度选取为

$pCF(\cdot,\ \cdot)$	low	中等	high
low	0	0.2	0.7
中	0.2	0	0.3
high	0.7	0.3	0

使得 $pCF(a,\ a) = 0$ 且 $pCF(a,\ b) = pCF(b,\ a)$ 对所有 $a,\ b \in P_v$ 均成立。假设决策者取主导值 $a^* =$高。

对于每个供应商 $x \in U$ 和主导值 a^*，梯形犹豫集在 $[0,1]$ 上定义梯形真隶属度、不确定隶属度和假隶属度函数（$T,\ I,\ F$），如下所示：

	$T(x,\ \text{高})$	$I(x,\ \text{高})$	$F(x,\ \text{高})$
S_A	$(0.6, 0.7, 0.9, 1.0)$	$(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$	$(0.0, 0.0, 0.1, 0.2)$
S_B	$(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$	$(0.2, 0.3, 0.3, 0.4)$	$(0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$

从语言学角度解读，S_A 的梯形轮廓主要处于“高度可持续”区域，不确定性较小，虚假度较低；而 S_B 仅具有中等可持续性，虚假度和不确定性更高。

使用算术平均值

$$S(a,b,c,d) := \frac{a+b+c+d}{4},$$

我们得到 S_A 在 $a^* =$取高值时：

$$S\big(T(S_A, \text{high})\big) = \frac{0.6+0.7+0.9+1.0}{4} = \frac{3.2}{4} = \frac{4}{5},$$

$$S\big(I(S_A, \text{high})\big) = \frac{0.1+0.2+0.2+0.3}{4} = \frac{0.8}{4} = \frac{1}{5},$$

$$S\big(F(S_A, \text{high})\big) = \frac{0+0+0.1+0.2}{4} = \frac{0.3}{4} = \frac{3}{40}.$$

在主导值 $a^* =$取高值时，矛盾导式全局矛盾因子为

$$\lambda(\text{high}) = \frac{1}{|P_v|} \sum_{b \in P_v} pCF(\text{high}, b) = \frac{1}{3}\big(0 + 0.3 + 0.7\big) = \frac{11}{30}.$$

对于设计参数 $\beta \in [0,1]$，矛盾导式包含度为

$$\mu_{\text{pl}}(x \mid a^*) := \big(1 - \lambda(a^*)\big)\, S\big(T(x, a^*)\big) + \lambda(a^*)\big(1 - S(F(x, a^*))\big) - \beta\, S\big(I(x, a^*)\big),$$

因此，以 $\beta = \frac{1}{2}$ 为例，我们得到

$$\mu_{\text{pl}}(S_A \mid \text{high}) = \Big(1 - \frac{11}{30}\Big) \cdot \frac{4}{5} + \frac{11}{30}\Big(1 - \frac{3}{40}\Big) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}.$$

现在我们对每一项进行化简：

$$1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}, \qquad 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40},$$

$$\Big(1-\frac{11}{30}\Big)\cdot\frac{4}{5}=\frac{19}{30}\cdot\frac{4}{5}=\frac{76}{150}=\frac{38}{75},$$
$$\frac{11}{30}\Big(1-\frac{3}{40}\Big)=\frac{11}{30}\cdot\frac{37}{40}=\frac{407}{1200},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$$

因此

$$\mu_{\mathrm{pl}}(S_A\mid\text{high})=\frac{38}{75}+\frac{407}{1200}-\frac{1}{10}=\frac{608}{1200}+\frac{407}{1200}-\frac{120}{1200}=\frac{895}{1200}=\frac{179}{240}\approx 0.746.$$

因此，在梯形多元论模型下，供应商 S_A 在多元论可持续性集合中获得较高的隶属度（≈ 0.75），定量反映了其高真度、低假度、有限的不确定性，以及所选属性值“高”与其他可能值之间的矛盾。这些数据

$$\mathsf{TPS}_1=\big(U,\,v,\,P_v;\;T,I,F;\;pCF\big)$$

构成了一个用于可持续供应商评估的具体梯形多元论集合 .

示例 3.25.4（将慢性疾病风险评估表示为梯形多元论集合）。慢性疾病风险评估利用病史、生活方式、生物标志物和人口统计数据，估算个人长期患病的可能性 [840]。

考虑一家医院根据多项临床指标，将患有慢性疾病的患者划分为不同的风险类别。设

$$U=\{P_1,P_2\}$$

表示两名患者，并设

$$v=\text{“cardiovascular risk level”}$$

具有多元属性值集

$$P_v=\{\text{low},\text{moderate},\text{high}\}.$$

矛盾度反映了各类别偏离期望的“低风险”状态的程度：

$pCF(\cdot,\cdot)$	low	moderate	high
low	0	0.5	0.9
moderate	0.5	0	0.4
high	0.9	0.4	0

并选择主导值 $a^*=$low，以体现让患者保持低风险的临床目标。

对于每位患者 $x\in U$ 和 $a^*=$ low，梯形多元属性集会为命题“x属于低心血管风险”规定梯形真度、不确定度和假度隶属度分布：

	$T(x,\ \text{low})$	$I(x,\ \text{low})$	$F(x,\ \text{低})$
P_1	(0.5, 0.6, 0.8, 0.9)	(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)	(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)
P_2	(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)	(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)	(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)

患者 P_1 在“低风险”方面具有相对较高的真实隶属度和中等的虚假隶属度，而 P_2 的真实隶属度较低、虚假隶属度较高，反映出临床上更高的风险。

使用相同的均值算子 $S(a,\ b,\ c,\ d)=\frac{a+b+c+d}{4}$，我们计算 P_1：

$$S\big(T(P_1,\text{low})\big)=\frac{0.5+0.6+0.8+0.9}{4}=\frac{2.8}{4}=\frac{7}{10},$$
$$S\big(I(P_1,\text{low})\big)=\frac{0.1+0.2+0.2+0.3}{4}=\frac{0.8}{4}=\frac{1}{5},$$

$$S\big(F(P_1,\text{low})\big)=\frac{0.1+0.2+0.3+0.4}{4}=\frac{1.0}{4}=\frac{1}{4}.$$

a^* =low 处的矛盾因子为

$$\lambda(\text{low})=\frac{1}{|P_v|}\sum_{b\in P_v}pCF(\text{low},b)=\frac{1}{3}\big(0+0.5+0.9\big)=\frac{1.4}{3}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}.$$

再次固定 $\beta=\frac{1}{2}$,- P_1 在低风险立体生成集中的立体生成包含度为

$$\mu_{\text{pl}}(P_1\mid\text{low})=\Big(1-\frac{7}{15}\Big)\cdot\frac{7}{10}+\frac{7}{15}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}.$$

我们逐项简化:

$$1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15},\qquad 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$\Big(1-\frac{7}{15}\Big)\cdot\frac{7}{10}=\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{10}=\frac{56}{150}=\frac{28}{75},$$

$$\frac{7}{15}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)=\frac{7}{15}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{60}=\frac{7}{20},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$$

因此

$$\mu_{\text{pl}}(P_1\mid\text{low})=\frac{28}{75}+\frac{7}{20}-\frac{1}{10}=\frac{112}{300}+\frac{105}{300}-\frac{30}{300}=\frac{187}{300}\approx 0.623.$$

因此，患者 P_1 属于立体生成低风险集，其包含度为中等（约为 0.62）；该度数由梯形真值／不确定性／假值轮廓以及期望状态“低”与其他风险类别之间的矛盾共同决定。

汇总各项要素

$$\mathsf{TPS}_2=\big(U,\,v,\,P_v;\;T,I,F;\;pCF\big),$$

医院获得一个具体的梯形犹豫集，可用于对患者进行排序、设计随访间隔，或在心血管风险不确定的情况下分配监测资源。

3.26 非标准犹豫集

非标准模糊集为每个元素赋予一个接近 $[0,1]$, 的超实数隶属度，从而允许存在无穷小的低估／高估偏差，并通过单子进行分析。非标准中智集为真度、不确定度和假度赋予接近 $[0,1]$, 的超实数值，从而允许存在无穷小的不一致，并对不确定性建模中的变异性进行更精细的刻画 [841]。非标准犹豫集将对象及属性值映射为超实数隶属度向量，并在内部使用基于矛盾度加权的 t-范数／t-余范数算子来聚合证据。

定义 3.26.1（非标准原语）。[841] 设 ${}^*\mathbb{R}$ 是一个扩展了 $\mathbb{R}$ 的超实数域。若元素 $\varepsilon\in{}^*\mathbb{R}$ 满足无穷小 条件，即 $|\varepsilon|<\frac{1}{n}$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。将 $[0,1]$ 的晕 记作

$$[0,1]_{\text{ns}}\;:=\;\{\,x\in{}^*\mathbb{R}\mid\exists y\in[0,1]\text{ with }x\approx y\,\},$$

更宽泛地，对于一个固定的正无穷小量 δ，定义非标准带

$$[0,1]^{(\delta)}\;:=\;[-\delta,\;1+\delta]\;\subset{}^*\mathbb{R}.$$

标准部分映射 st 将近标准的 $x\in{}^*\mathbb{R}$ 映到满足 $x\approx y$ 的唯一 $y\in\mathbb{R}$ 。

定义 3.26.2（非标准中智集（NSN））。[841] U 上的非标准中智集是一个映射三元组

$$T_A, I_A, F_A : U \longrightarrow [0,1]^{(\delta)} \subset {}^*\mathbb{R},$$

可选择受近标准中智边界约束

$$T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \;\le\; 3 + \delta \qquad (x \in U).$$

集合运算通过内部 t 范数 T_* 和 t 余范数 S_* 逐分量进行：

$$\begin{aligned}(T,I,F)_{A\cup B}(x) &= \big(S_*(T_A,T_B),\; S_*(I_A,I_B),\; T_*(F_A,F_B)\big),\\ (T,I,F)_{A\cap B}(x) &= \big(T_*(T_A,T_B),\; T_*(I_A,I_B),\; S_*(F_A,F_B)\big),\\ (T,I,F)_{A^{\complement}}(x) &= \big(F_A(x),\; 1-I_A(x),\; T_A(x)\big).\end{aligned}$$

定义 3.26.3（非标准多元集（NSP））。 固定一个多元集上下文

$$PS = \big(P,\; v,\; Pv,\; pdf,\; pCF\big),$$

其中 P 是一个论域， v 是一个属性，其取值集为 Pv，隶属度为

$$pdf:\; P \times Pv \;\longrightarrow\; \big([0,1]^{(\delta)}\big)^s \subset ({}^*\mathbb{R})^s,$$

且矛盾度为

$$pCF:\; Pv \times Pv \;\longrightarrow\; [0,1]^{(\delta)} \;\subset {}^*\mathbb{R} \quad \text{with} \quad pCF(a,a) = 0,\;\; pCF(a,b) = pCF(b,a).$$

一个非标准多元论集合是由（P， v， Pv， pdf， pCF）以及固定的内部 t-范数/t-余范数（T_*， S_*）构成的选择，用于聚合相互矛盾的值。对于 a， $b \in [0,1]^{(\delta)}$ 和 $c \in [0,1]^{(\delta)}$，定义 DCF 加权二元聚合算子

$$a \;\widetilde{\wedge}_c\; b \;:=\; (1-c)\,T_*(a,b) \;+\; c\,S_*(a,b),$$

并逐分量扩展到 $\big([0,1]^{(\delta)}\big)^s$ 中的向量。给定属性值的有限多重集$\{u_1,\dots,u_m\} \subset Pv$， $x \in P$的聚合隶属度为

$$\mu_{\mathrm{NSP}}(x;\{u_j\}) \;:=\; pdf(x;u_1) \;\widetilde{\wedge}_{c_{12}}\; pdf(x;u_2) \;\widetilde{\wedge}_{c_{13}}\; \cdots \;\widetilde{\wedge}_{c_{1m}}\; pdf(x;u_m), \quad c_{1j} := pCF(u_1,u_j).$$

当仅考虑一个值 u时， $\mu_{\mathrm{NSP}}(x;\,\{u\}) = pdf(x;\,u)$。

表 3 .34 展示了将非标准多元论集合描述为一种共同推广 .

表 3.34：作为一种共同推广的非标准多元论集合

模型	隶属形式	作为 NSP 的实现
非标准模糊集	$\mu:\; U \to [0,1]^{(\delta)}$	Take $Pv = \{u_0\}$， $s = 1$， 定义 $pdf(x;\,u_0) := \mu(x)$， $pCF(u_0,\,u_0) = 0$。
非标准直觉模糊集	$(\mu,\,\nu) : U \to \big([0,1]^{(\delta)}\big)^2$	Take $Pv = \{u_0\}$， $s = 2$， set $pdf(x;\,u_0) := (\mu(x)\;\nu(x))$， $pCF(u_0,\,u_0) = 0$。
非标准中性直觉集 [842–844]	$(T,I,F) : U \to \big([0,1]^{(\delta)}\big)^3$	Take $Pv = \{u_0\}$， $s = 3$， set $pdf(x;\,u_0) := (T(x)\;I(x)\;F(x))$， $pCF(u_0,\,u_0) = 0$。
非标准四分划分中智智性集	$q:\; U \to \big([0,1]^{(\delta)}\big)^4$	Take $Pv = \{u_0\}$， $s = 4$， set $pdf(x;\,u_0) := q(x)$， $pCF(u_0,\,u_0) = 0$。
非标准佩塔-分割中性-智态集	$p:\; U \to \big([0,1]^{(\delta)}\big)^5$	Take $Pv = \{u_0\}$， $s = 5$， set $pdf(x;\,u_0) := p(x)$， $pCF(u_0,\,u_0) = 0$。

下面给出这一概念的一个具体例子。

示例 3.26.4（可再生能源项目的非标准多属性评价）. 考虑两个可再生能源项目

$$P = \{x_{\text{wind}}, x_{\text{solar}}\},$$

以及带有值集的本性属性 $v =$ “可持续性标准”

$$Pv = \{\text{emissions},\ \text{cost}\}.$$

在超实数域 ${}^*\mathbb{R}$ 中运算，并固定一个正无穷小量 $\delta > 0$；记 $[0,1]^{(\delta)} = [-\delta, 1+\delta]$。令$s = 1$，使得

$$pdf:\ P \times Pv \ \longrightarrow\ [0,1]^{(\delta)}$$

返回一个单一的（超实数）隶属度，并令 pCF：$Pv \times Pv \to [0,1]^{(\delta)}$。

解释：$pdf(x;\ u)$ 是项目 x 在标准 u下属于本性属性“可持续”的（非标准）隶属度；$pCF(u_1, u_2)$ 衡量两个标准之间的矛盾程度。

假设对于满足 $0 < |\varepsilon| \ll \delta$ 的小无穷小量 ε，

$$\begin{aligned} pdf(x_{\text{wind}}; \text{emissions}) &= 0.94 + \varepsilon, \\ pdf(x_{\text{wind}}; \text{cost}) &= 0.68 - \varepsilon, \\ pdf(x_{\text{solar}}; \text{emissions}) &= 0.90 - \varepsilon, \\ pdf(x_{\text{solar}}; \text{cost}) &= 0.72 + \varepsilon, \end{aligned}$$

因此，每个值都属于 $[0,1]^{(\delta)}$，并且与经典隶属度“无限接近”。

设准则之间的矛盾程度为

$$c\ :=\ pCF(\text{emissions}, \text{cost}) = 0.30 \in [0,1]^{(\delta)},$$

并选择内部 t–范数/t–余范数

$$T_*(a,b) = \min(a,b), \qquad S_*(a,b) = \max(a,b)$$

（在超实数上）。NSP 定义中的 DCF 加权聚合算子为

$$a\ \widetilde{\wedge}_c\ b := (1-c)\,T_*(a,b) + c\,S_*(a,b),$$

因此，对于同时满足两个准则的 x_{wind}，我们得到

$$\mu_{\text{NSP}}\big(x_{\text{wind}}; \{\text{emissions}, \text{cost}\}\big) = (0.94+\varepsilon)\ \widetilde{\wedge}_{0.30}\ (0.68-\varepsilon).$$

Here

$$T_* = \min(0.94+\varepsilon,\ 0.68-\varepsilon) = 0.68-\varepsilon, \qquad S_* = \max(0.94+\varepsilon,\ 0.68-\varepsilon) = 0.94+\varepsilon,$$

so

$$\begin{aligned} \mu_{\text{NSP}}\big(x_{\text{wind}}; \{\text{emissions}, \text{cost}\}\big) &= (1-0.30)(0.68-\varepsilon) + 0.30(0.94+\varepsilon) \\ &= 0.7 \cdot 0.68 + 0.3 \cdot 0.94 + (-0.7+0.3)\varepsilon \\ &= 0.758 - 0.4\,\varepsilon\ \in\ [0,1]^{(\delta)}. \end{aligned}$$

其标准部分为

$$\text{st}\big(\mu_{\text{NSP}}(x_{\text{wind}}; \{\text{emissions}, \text{cost}\})\big) = 0.758,$$

可解释为经典的综合可持续性得分。无穷小修正 -0.4ε 保留了额外的超实数精度（例如专家判断中的微观不确定性），可借助非标准分析工具加以利用，同时通过对标准的矛盾加权融合，保持多元矛盾特性。

3.27 精细化矛盾集

精细多元矛盾集通过多个分量的真度、不确定度和假度来表示元素，并在属性值和情境之间采用考虑矛盾的加权方式。精细模糊集 [403, 845, 846], 精细直觉模糊集 [844, 847–849], 以及精细中智集 [119, 404, 850, 851] 在现有文献中也广为人知。

定义 3.27.1（精细化矛盾集）。设 U 为一个论域， v 为一个属性，其值集为 P_v（有限或可数），并设

$$p, q, r \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \qquad s := p + q + r \geq 1.$$

固定指标集 $I_T = \{1, \dots, p\}$、 $I_I = \{1, \dots, q\}$、 $I_F = \{1, \dots, r\}$。精细化签名是三元组（p， q， r）。

一个附属于 v 的精细化矛盾隶属度（*RPA*）是一个映射， v

$$\mathrm{pdf}: \ U \times P_v \longrightarrow [0,1]^s, \qquad \mathrm{pdf}(x,a) = \big(T_i(x,a)_{i\in I_T},\ I_j(x,a)_{j\in I_I},\ F_k(x,a)_{k\in I_F}\big),$$

其中列出的每个分量都属于 $[0,1]$。矛盾集矛盾函数为

$$pCF: \ P_v \times P_v \longrightarrow [0,1]^t, \qquad t \in \mathbb{N}_{\geq 0},$$

满足自反性 $pCF(a,a) = 0$ 以及对称性 $pCF(a,b) = pCF(b,a)$。

由 $(U, v, P_v;$ pdf $pCF)$ 确定的精炼拟态集合（*RPS*）是数据

$$\mathsf{RPS} = \big(U,\ v,\ P_v,\ (p,q,r),\ \mathrm{pdf},\ pCF\big).$$

语义：对于 $x \in U$ 和 $a \in P_v$， $T_i(x,a)$ 是精炼真隶属度， $I_j(x,a)$ 是精炼不确定性隶属度，而 $F_k(x,a)$ 是精炼假隶属度（若存在），它们均针对属性值 a进行评估。在这一层次上，除通常的取值范围约束 $[0,1]$外，不施加进一步的耦合约束；模型特定的约束（例如直觉主义约束或中智约束）将在下文作为特例出现。

注3.27.2（典型的标量化/聚合（可选））。 在决策任务中，通常会固定一个主导值 $a^* \in P_v$ 和一个聚合函数 Φ： $[0,1]^s \times [0,1]^t \to [0,1]$ ，该函数对每个自变量均单调，并且 $\Phi(\cdot,0)$ 会退化为基础的精炼得分。 x 在a^* 处的拟态包含度为

$$\mu_{\mathrm{pl}}(x \mid a^*) := \Phi\big(\mathrm{pdf}(x,a^*),\ pCF(a^*,\cdot)\big),$$

with 通过在聚合层面选定一对 t-余范数/t-范数来实现并集/交集。

表 3.35 概述了精化模糊集、直觉模糊集、中智集、四分区中智集和五分区中智集。写作 $\sup T := \sup_{i\in I_T} T_i$ 等。通过选择 $(p,\ q,\ r)$ 并施加如下约束，可得到精化模糊、精化直觉模糊和精化中智集族，作为其精确特例（“无矛盾”时取 $t = 0$ 或 $pCF \equiv 0$ ）。

下面给出这一概念的一个具体示例。

示例 3.27.3（采用精化证据通道的医院分诊）。 考虑急诊室的肺炎分诊。设论域为 $U = \{p_A, p_B\}$（两名患者）。设属性为 $v =$“证据来源”，其取值集为 $P_v =$ {影像，实验室，症状} = （胸部影像、实验室指标、症状）。

细化签名 $(p,\ q,\ r) = (2,\ 1,\ 1)$，使每个细化的附属向量都具有 $(T_1,\ T_2;\ I_1;\ F_1) \in [0,1]^4$。对于 $x \in U$ 和 $a \in P_v$，细化的多元逻辑度 pdf$(x,\ a)$ 为：

表 3.35：作为精细化矛盾集特例的精细化模糊集、直觉模糊集、中智集、四分区中智集和五分区中智集。

目标精细化模型	RPS 内的约束与恢复	
精细化模糊集（RFS）[403, 845, 852]	仅有真值分量 $T_i \in [0,1]$，其值为 $pCF \equiv 0$。对（T_i）进行单调聚合，得到通常的精细模糊等级。	Any
精细直觉模糊集 (RIFS) [847–849]	成对分量（T_i, I_i）满足 $T_i + I_i \leq 1$ 对于每个 i，其中 $pCF \equiv 0$。经典精细直觉模糊集通过对（T_i，I_i）进行逐分量运算可恢复。	
细化中智集（RNS）[404, 853–855]	细化的真值分量、不确定性分量、和假值分量 T_i，I_j，$F_k \in [0,1]$ 带有上确界 $T+$上确界 $I+$上确界 $F \leq 3$。分 $pCF \equiv 0$ 可还原为标准的细化中智框架（当且仅当存在一个 T 时的单值情形，I 和 F）。	Set-
细化的 四分的中智集（RQNS）	这些族 T，I，F被分为四个子块（四分划），每个块均遵循通常的中智界限（例如，逐块求和 ≤ 1）。$pCF \equiv 0$，可得到细化的四分划中智集。	With
细化 五分区中智集（RPNS）	真、未定和假分量被组织为五个子块（五分区），并满足相应的中智约束；取 $pCF \equiv 0$ 可得精细五分区中智集作为一种特殊情形。	

	Img			Lab			Sym		
p_A	(0.80, 0.75;	0.10;	0.05)	(0。60，0。55;	0。20;	0.10)	(0.70, 0.65;	0.15;	0.12)
p_B	(0.45, 0.40;	0.25;	0.30)	(0.50, 0.48;	0.22;	0.28)	(0。60，0。50;	0.25;	0.20)

选取一个对称矛盾映射 pCF：$P_v \times P_v \to [0,1]$，定义为

$$pCF = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(rows/cols ordered as Img, Lab, Sym).}$$

固定主导值 $\delta =$Img，并使用矛盾感知权重 $w(a \mid \delta) := 1 - pCF(a, \delta)$，得到

$$w(\text{Img}) = 1, \quad w(\text{Lab}) = 0.8, \quad w(\text{Sym}) = 0.7, \quad \sum_a w(a \mid \delta) = 2.5.$$

将 x 的 δ–相对精化度按分量定义为加权平均值

$$(T_i, I_1, F_1)^{(\delta)}(x) = \frac{\sum_{a \in P_v} w(a \mid \delta)\,(T_i, I_1, F_1)(x, a)}{\sum_{a \in P_v} w(a \mid \delta)} \quad (i = 1, 2).$$

数值聚合（保留三位小数）：

	$T_1^{(\delta)}$	$T_2^{(\delta)}$	$I_1^{(\delta)}$	$F_1^{(\delta)}$
p_A	$\frac{0.80+0.48+0.49}{2.5} = 0.708$	$\frac{0.75+0.44+0.455}{2.5} = 0.658$	$\frac{0.10+0.16+0.105}{2.5} = 0.146$	$\frac{0.05+0.08+0.084}{2.5} = 0.086$
p_B	$\frac{0.45+0.40+0.42}{2.5} = 0.508$	$\frac{0.40+0.384+0.35}{2.5} = 0.454$	$\frac{0.25+0.176+0.175}{2.5} = 0.240$	$\frac{0.30+0.224+0.14}{2.5} = 0.266$

对于一个具体的标量化，取

$$\Phi(T_1, T_2, I, F) := 0.5 \cdot \tfrac{T_1+T_2}{2} + 0.2 \cdot (1 - I) + 0.3 \cdot (1 - F).$$

Then

$$\Phi(p_A) = 0.5{\cdot}0.683{+}0.2{\cdot}0.854{+}0.3{\cdot}0.914 = 0.787, \qquad \Phi(p_B) = 0.5{\cdot}0.481{+}0.2{\cdot}0.760{+}0.3{\cdot}0.734 = 0.613.$$

因此，在影像主导的情境下， p_A 具有更高的精细化多元论支持度。

示例 3.27.4 （ESG 主导政策下的供应商选择）。 某零售商评估两家供应商$U = \{s_A, s_B\}$。属性 $v =$ “准则”包括 $P_v = \{$ESG、Qual、Deliv$\}$（环境、社会与治理，产品质量，交付可靠性）。采用精细化签名（p, q, r） $=$ （2，1，1），并记录精细化隶属度：

	ESG			Qual			交付可靠性		
s_A	(0.85, 0.80;	0.10;	0.05)	(0.75, 0.70;	0.12;	0.08)	(0。60，0。55;	0.15;	0.12)
s_B	(0。60，0。55;	0。20;	0.20)	(0.80, 0.78;	0.10;	0.10)	(0.75, 0.70;	0.12;	0.12)

矛盾矩阵（对称）：

$$pCF = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(rows/cols ordered as ESG, Qual, Deliv).}$$

当主导值为 $\delta =$ESG 时，权重为

$$w(\text{ESG}) = 1, \quad w(\text{Qual}) = 0.8, \quad w(\text{Deliv}) = 0.7, \quad \sum_a w(a \mid \delta) = 2.5.$$

逐分量汇总：

	$T_1^{(\delta)}$	$T_2^{(\delta)}$	$I_1^{(\delta)}$	$F_1^{(\delta)}$
s_A	$\frac{0.85+0.60+0.42}{2.5} = 0.748$	$\frac{0.80+0.56+0.385}{2.5} = 0.698$	$\frac{0.10+0.096+0.105}{2.5} = 0.120$	$\frac{0.05+0.064+0.084}{2.5} = 0.079$
s_B	$\frac{0.60+0.64+0.525}{2.5} = 0.706$	$\frac{0.55+0.624+0.490}{2.5} = 0.666$	$\frac{0.20+0.080+0.084}{2.5} = 0.146$	$\frac{0.20+0.080+0.084}{2.5} = 0.146$

使用相同的标量化方法 $\Phi(T_1,\ T_2,\ I,\ F) = 0.5 \cdot \frac{T_1+T_2}{2} + 0.2(1 - I) + 0.3(1 - F)$，我们得到

$$\Phi(s_A) = 0.5{\cdot}0.723{+}0.2{\cdot}0.880{+}0.3{\cdot}0.921 = 0.814, \qquad \Phi(s_B) = 0.5{\cdot}0.686{+}0.2{\cdot}0.854{+}0.3{\cdot}0.854 = 0.770.$$

在采用 ESG 主导且考虑矛盾权重的策略下， s_A 更受青睐。

3.28 子集值多元集

子集值多元集将每个项目及属性值映射为隶属向量的子集，并通过矛盾度权重汇总矛盾。

定义 3.28.1 （子集值模糊集（SVFS））。 设 X 为非空论域， $\mathcal{P}([0,1])$ 为 $[0,1]$ 的幂集。 X 上的一个**子集值模糊集** 是一个映射

$$A : X \to \mathcal{P}([0,1]) \setminus \{\varnothing\}, \qquad x \longmapsto A(x),$$

其中， $A(x) \subseteq [0,1]$ 是 x的可容许隶属度集合（可能包含多个元素）。当每个 $A(x)$都是单元素集合时，便可得到普通模糊集。

定义 3.28.2（子集值中智集（SVNS））。 [841] 设 X 是一个非空论域。定义在 X 上的子集值中智集为每个 $x \in X$ 赋予一个三元组

$$\mathcal{A}(x) \;=\; \big(T_{\mathcal{A}}(x),\, I_{\mathcal{A}}(x),\, F_{\mathcal{A}}(x)\big),$$

其中 $T_{\mathcal{A}}(x)$ $I_{\mathcal{A}}(x)$ $F_{\mathcal{A}}(x)$ $\in \mathcal{P}([0,1]) \setminus \{\varnothing\}$。用 inf 和 sup 表示通常的下界和上界（必要时按约定取闭集），则要求

$$0 \le \text{下确界}\, T_{\mathcal{A}}(x) + \text{下确界}\, I_{\mathcal{A}}(x) + \text{下确界}\, F_{\mathcal{A}}(x) \;\le \text{上确界}\, T_{\mathcal{A}}(x) + \text{上确界}\, I_{\mathcal{A}}(x) + \text{上确界}\, F_{\mathcal{A}}(x) \;\le\; 3 \qquad (\forall x \in X).$$

When 若 $T_{\mathcal{A}}(x)$ $I_{\mathcal{A}}(x)$ $F_{\mathcal{A}}(x)$ 中的每一个都是单元素集，则可简化为单值中智集。

定义 3.28.3（子集值哲学集（SVPS））。 哲学语境 是一个元组

$$PS = \big(P,\; v,\; Pv,\; pdf,\; pCF\big),$$

其中

- P 是一个项目全集；
- v 是一个固定属性，其取值集为 Pv；
- pdf：$P \times Pv \to \mathcal{P}([0,1]^s) \setminus \{\varnothing\}$（对于某个固定的 $s \in \mathbb{N}$）是一个隶属度映射，它为每个 $(x,\, u) \in P \times Pv$ 指定一个可接受隶属向量的子集 $pdf(x;\, u) \subseteq [0,1]^s$；
- pCF：$Pv \times Pv \to [0,1]$ 是矛盾度，满足 $pCF(a,\; a) = 0$ 以及 $pCF(a,\; b) = pCF(b,\; a)$，对所有 $a,\, b \in Pv$ 均成立。

一个子集值多元融合集定义在 PS 上，由以下数据给出

$$(P,\; v,\; Pv,\; pdf,\; pCF).$$

对于每个项目 $x \in P$ 和每个属性值 $u \in Pv$，子集 $pdf(x;\, u) \subseteq [0,1]^s$ 收集了在 u 下 x 的所有可接受隶属向量。

[3]

Exam例 3.28.4（用于医疗治疗副作用风险的子集值多元属性集）。 设 e 论域 由以下项目构成

$$P = \{\mathrm{DrugA}, \mathrm{DrugB}\},$$

并考虑一个多元属性

$$v = \text{“evidence type”}, \qquad P_v = \{\mathrm{Trial}, \mathrm{Post}\},$$

其中 Trial = 对照临床试验，Post =上市后监测报告。

取 $s = 2$，其分量为

$$\mu_1 = \text{“severe side–effect risk”}, \qquad \mu_2 = \text{“mild side–effect risk”},$$

使得每个隶属向量都属于 $[0,1]^2$。对于每个 $(x, u) \in P \times P_v$，该映射

$$pdf : P \times P_v \longrightarrow \mathcal{P}([0,1]^2) \setminus \{\varnothing\}$$

[3]在实际应用中，通常通过固定的 t–范数 / t–余范数，并以矛盾度 pCF 作为权重，对 $pdf(x;\, u)$ 的元素进行组合，从而定义多元操作（例如合取或聚合）。对于本节中的表示与约化结果，只需要子集值映射 pdf 和函数 pCF。

表3.36：作为一种共同推广的子集值多元集。

模型	$pdf(x;u)$的图像	s	SVPS的特例
子集值模糊集（SVFS）	$\mathcal{P}([0,1]) \setminus \{\varnothing\}$	1	单属性值 u_0；集合 $pdf(x;u_0) = A(x)$；取 $pCF \equiv 0$。
子集值直觉模糊集（SVIFS）	$\mathcal{P}([0,1]^2) \setminus \{\varnothing\}$	2	单值 u_0； $pdf(x;\ u_0)$ 是 IF 对 $(\mu,\ \nu)$ 的子集满足通常的直觉-主义边界； $pCF \equiv 0$。
子集值中智集（SVNS） [841]	$\mathcal{P}([0,1]^3) \setminus \{\varnothing\}$	3	单值 u_0； pdf（x； u_0）是中智的子集三元组 (T,I,F) 满足中智 约束； $pCF \equiv 0$。
子集值多元融合集（SVPS）	$\mathcal{P}\left([0,1]^s\right) \setminus \{\varnothing\}$	$s \geq 1$	一般情况：任意 s，中的多个属性值 P_v，以及非平凡矛盾函数 pCF：$P_v \times P_v \to [0,1]$。

将来自不同研究或专家组的可能配对 (μ_1, μ_2) 组成一个子集 .

一种可能的定义如下：

$$
\begin{aligned}
pdf(\text{DrugA}; \text{Trial}) &= \big\{(0.10, 0.30),\ (0.15, 0.35)\big\},\\
pdf(\text{DrugA}; \text{Post}) &= \big\{(0.20, 0.40),\ (0.25, 0.50)\big\},\\
pdf(\text{DrugB}; \text{Trial}) &= \big\{(0.05, 0.20),\ (0.08, 0.25)\big\},\\
pdf(\text{DrugB}; \text{Post}) &= \big\{(0.12, 0.28),\ (0.18, 0.35)\big\}.
\end{aligned}
$$

证据类型之间的plithogenic矛盾度可建模为

$$
pCF : P_v \times P_v \to [0,1], \qquad pCF(u,u) = 0,\ \ pCF(u_1,u_2) = pCF(u_2,u_1),
$$

例如

$$
pCF(\text{Trial}, \text{Post}) = 0.4, \quad pCF(\text{Trial}, \text{Trial}) = pCF(\text{Post}, \text{Post}) = 0.
$$

解读。对于每种药物 x 和证据类型 u，子集 $pdf(x;\ u)$ 汇集了来自不同数据集或统计模型的若干种合理风险概况（μ_1, μ_2），而非单一固定数值对。随后，矛盾权重 $pCF(\text{Trial}, \text{Post})$ 会通过本体生成机制，对 Trial 和 Post 中这些以子集表示的程度进行聚合：证据来源之间分歧越大（ pCF 越大），综合风险评估就越谨慎、越保守。因此，(P, v, P_v, pdf, pCF) 构成一个以子集表示的本体生成集，用于描述真实世界中医疗副作用的不确定性。

3.29 图像本体生成集

图像Plithogenic集通过基于属性的矛盾加权聚合，对中立及其他程度进行建模，从而捕捉不确定环境中的复杂观点。

定义 3.29.1（图像模糊集（PFS））。 [7] 设 U 为一个非空论域。其上的一个图像模糊集 A 是一个族

$$A = \Big\{ \langle x, \mu_A(x), \eta_A(x), \nu_A(x) \rangle \ : \ x \in U \Big\},$$

其中，对于每个 $x \in U$,

$$\mu_A(x),\ \eta_A(x),\ \nu_A(x) \in [0,1]$$

den分别表示正、中性和负 的 x 相对于 A的程度，且满足

$$0 \ \le \ \mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x) \ \le \ 1.$$

剩余量

$$\pi_A(x) \ := \ 1 - \mu_A(x) - \eta_A(x) - \nu_A(x)$$

称为 x 在 A中的拒绝度 。

定义 3.29.2（图像中智集（PNS））。 [445] 设 U 为非空论域。论域 U 上的图像中智集 B 是一个族

$$B = \Big\{ \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x) \rangle \ : \ x \in U \Big\},$$

其中，对每个 $x \in U$,

$$T_B(x),\ I_B(x),\ F_B(x) \in [0,1]$$

d分别表示 x 相对于 B的真、不确定和假度，且

$$0 \ \le \ T_B(x) + I_B(x) + F_B(x) \ \le \ 3.$$

“picture”（图像）一词强调，三元组 $(T_B(x)\ I_B(x)\ F_B(x))$从三个方面（正面／中性／负面）呈现评价，而在数学上， B 是一个单值中智集。

定义 3.29.3（图像多元异质集（PPlS））。 设 P 为非空论域， v 为一个属性， P_v 为 v的非空属性值集合。取整数 $t \ge 1$ 和 $r \ge 0$。定义在 (P, v, P_v) 上的图像多元异质集 是一个元组

$$PS_{\text{pic}} \ = \ (P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF),$$

其中:

- 图像多元异质隶属度函数

  $$pdf : \ P \times P_v \longrightarrow [0,1]^{t+1}$$

  写作

  $$pdf(x,a) \ = \ \big(\alpha_1(x,a), \ldots, \alpha_t(x,a), \eta(x,a)\big),$$

  其中每个分量均属于 $[0,1]$; 此处

  $$\alpha(x,a) := \big(\alpha_1(x,a), \ldots, \alpha_t(x,a)\big)$$

  是底层的矛盾性隶属向量，且

  $$\eta(x,a) := \alpha_{t+1}(x,a)$$

  是 x 相对于 $v = a$的附加图像中立度;

- 矛盾度函数(DCF)

  $$pCF : \ P_v \times P_v \longrightarrow [0,1]^r$$

  对所有 $a,\ b \in P_v$, 均满足

  $$pCF(a,a) = \mathbf{0} \in [0,1]^r, \qquad pCF(a,b) = pCF(b,a).$$

表 3.37：将图像模糊集、图像中智集和多因集约化为图像多因框架。

源模型	表示为图像型多元集
P [7,上的图像模糊集 365]	选择 $t=2$, $r=0$, $P_v=\{a^*\}$ 并设 $pdf(x,a^*)=(\mu(x)\ \nu(x)\ \eta(x))$（正，负-性，中性）。
图像中智集 在 P [445]上	选取 $t=3$、 $r=0$, $P_v=\{b^*\}$ 并设 $pdf(x,\ b^*)=(T(x)\ I(x)\ F(x),\ 0)$; 前三个坐标给出中智三元组 且中性通道固定为 0。
关于 P的偏析集	给定 $pdf_0 : P\times P_v \to [0,1]^t$, 定义 $pdf(x,a)=(pdf_0(x,a),0)$ ；额外的中立坐标始终为 0。

因此，图像肇基集是一种肇基集，其隶属向量含有 t “普通”分量，以及一个额外的中立分量，该分量存储在第 $(t+1)$ 个坐标中。

表 3.37 简要概述了如何在统一的图像 Plithogenic 框架中分别表示图像模糊集、图像中智集和 Plithogenic 集。

定理 3.29.4（图像 Plithogenic 集作为一种共同推广）。图像 *Plithogenic* 集类严格推广了图像模糊集类、图像中智集类和 *Plithogenic* 集类。具体而言：

1. 每个定义在 P 上的图像模糊集，都可以通过选取合适的 (t,r)、P_v、 pdf 和 pCF，表示为图像 *Plithogenic* 集。*2.* 每个定义在 P 上的图像中智集，都可以通过选取合适的(t,r)、 P_v、 pdf 和 pCF，表示为图像 *Plithogenic* 集。*3.* 每个定义在 P 上的 *Plithogenic* 集，都可以通过附加一个取值为零的中性坐标，嵌入图像 *Plithogenic* 集中。

证明。（1）还原图像模糊集。

设 P 上的一个图像模糊集为 A：

$$A=\Big\{\ \langle x,\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in P\Big\},$$

with

$$\mu_A(x),\eta_A(x),\nu_A(x)\in[0,1],\qquad 0\le \mu_A(x)+\eta_A(x)+\nu_A(x)\le 1.$$

选取

$$t:=2,\qquad r:=0,\qquad P_v:=\{a^*\}$$

并定义 $pCF(a^*,\ a^*):=0$。定义 pdf: $P\times P_v\to[0,1]^{t+1}=[0,1]^3$ 为

$$pdf(x,a^*):=\big(\alpha_1(x,a^*),\alpha_2(x,a^*),\eta(x,a^*)\big):=\big(\mu_A(x),\nu_A(x),\eta_A(x)\big).$$

那么，对于每个 $x\in P$，我们有

$$\alpha_1(x,a^*)=\mu_A(x),\quad \alpha_2(x,a^*)=\nu_A(x),\quad \eta(x,a^*)=\eta_A(x),$$

以及归一化

$$0 \le \alpha_1(x,a^*) + \eta(x,a^*) + \alpha_2(x,a^*) \le 1$$

恰好是图像模糊三元组 $(\mu_A(x)\ \eta_A(x)\ \nu_A(x))$ 的约束。因此

$$PS^A_{\text{pic}} := (P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF)$$

是一个图像幂集，其坐标可还原 A。

反过来，假设给定一个图像幂集 (P, v, P_v, pdf, pCF)，且满足

$$t = 2, \quad r = 0, \quad P_v = \{a^*\},$$

并且对每个 $x \in P$,

$$pdf(x,a^*) = \big(\alpha_1(x,a^*), \alpha_2(x,a^*), \eta(x,a^*)\big) \in [0,1]^3$$

满足

$$0 \le \alpha_1(x,a^*) + \eta(x,a^*) + \alpha_2(x,a^*) \le 1.$$

定义

$$\mu_A(x) := \alpha_1(x,a^*), \quad \nu_A(x) := \alpha_2(x,a^*), \quad \eta_A(x) := \eta(x,a^*).$$

Then

$$0 \le \mu_A(x) + \eta_A(x) + \nu_A(x) \le 1,$$

so

$$A := \Big\{\ \langle x, \mu_A(x), \eta_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in P\Big\}$$

是一个图像模糊集。因此，图像模糊集恰好是那些具有 $t = 2$、$r = 0$、单元素集 P_v 以及约束 $\alpha_1 + \eta + \alpha_2 \le 1$ 的图像普利索金集；这证明了 (1)。

(2) 图像中智集的还原。

设 B 为 P 上的图像中智集:

$$B = \Big\{\ \langle x, T_B(x), I_B(x), F_B(x)\rangle : x \in P\Big\},$$

with

$$T_B(x), I_B(x), F_B(x) \in [0,1], \qquad 0 \le T_B(x) + I_B(x) + F_B(x) \le 3.$$

选取

$$t := 3, \qquad r := 0, \qquad P_v := \{b^*\},$$

且 $pCF(b^*, b^*) := 0$。定义 $pdf:\ P \times P_v \to [0,1]^{t+1} = [0,1]^4$ 为

$$pdf(x,b^*) := \big(\alpha_1(x,b^*), \alpha_2(x,b^*), \alpha_3(x,b^*), \eta(x,b^*)\big) := \big(T_B(x), I_B(x), F_B(x), 0\big).$$

然后，对于每个 $x \in P$,

$$\alpha_1(x,b^*) = T_B(x), \quad \alpha_2(x,b^*) = I_B(x), \quad \alpha_3(x,b^*) = F_B(x), \quad \eta(x,b^*) = 0.$$

因此，$pdf(x,\ b^*)$ 的前 $t = 3$ 个分量重现了中智三元组 $(T_B,\ I_B,\ F_B)$，而额外的中性坐标恒等于 0。

因此

$$PS^B_{\text{pic}} := (P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF)$$

是一个编码 B的图像多元生成集合。

反之，假设给定一个图像多元生成集合，其具有

$$t = 3, \quad r = 0, \quad P_v = \{b^*\},$$

且满足

$$pdf(x, b^*) = \big(\alpha_1(x, b^*), \alpha_2(x, b^*), \alpha_3(x, b^*), \eta(x, b^*)\big) \in [0, 1]^4,$$

并附加约束

$$0 \le \alpha_1(x, b^*) + \alpha_2(x, b^*) + \alpha_3(x, b^*) \le 3,$$

例如，其中 $\eta(x,\ b^*) = 0$ 对所有 x 均成立。定义

$$T_B(x) := \alpha_1(x, b^*), \quad I_B(x) := \alpha_2(x, b^*), \quad F_B(x) := \alpha_3(x, b^*).$$

那么，上述 B 是一个图像中智集。因此，图像中智集对应于具有 $t = 3$、$r = 0$、单元素集 P_v 且中性坐标恒为零（或以其他方式与中智三元组分离）的图像多元集；由此证明了（2）。

（3）多元集的嵌入。

Let

$$PS = (P,\ v,\ P_v,\ pdf_0,\ pCF)$$

是任意满足下列条件的多元本原集合:

$$pdf_0 :\ P \times P_v \to [0, 1]^t, \qquad pdf_0(x, a) = \big(\alpha_1(x, a), \ldots, \alpha_t(x, a)\big),$$

and

$$pCF :\ P_v \times P_v \to [0, 1]^r$$

自反且对称。

定义

$$pdf :\ P \times P_v \to [0, 1]^{t+1}$$

通过附加一个等于零的中性坐标来定义:

$$pdf(x, a) := \big(\alpha_1(x, a), \ldots, \alpha_t(x, a), \eta(x, a)\big), \qquad \eta(x, a) := 0.$$

那么，(P, v, P_v, pdf, pCF) 是一个图像多元本原集合，其属性系统和矛盾结构与 PS 相同，且底层的多元本原部分保持不变:

$$\alpha_i(x, a) \text{ in } PS \quad \longleftrightarrow \quad \alpha_i(x, a) \text{ in } PS_{\text{pic}} \text{ for } i = 1, \ldots, t.$$

反过来，对于任何中性坐标满足下列条件的图像多元本原集合 (P, v, P_v, pdf, pCF)

$$\eta(x, a) \equiv 0 \quad \text{for all } (x, a) \in P \times P_v$$

只需舍弃最后一个坐标，即可确定一个矛盾集:

$$pdf_0(x, a) := \big(\alpha_1(x, a), \ldots, \alpha_t(x, a)\big).$$

因此，矛盾集恰好是其中中性坐标恒为零的图像矛盾集，从而证明了（3）。

综合（1）、（2）和（3），我们得出结论：通过对参数（$t,\ r$）、值集 P_v、矛盾函数 pCF 以及 pdf 各坐标的代数约束作出适当选择，图像模糊集、图像中智集和多元生成集可视为图像多元生成集中特定且定义良好的子类。因此，图像多元生成框架严格推广了这三种结构。

□

下面给出这一概念的一个具体示例。

Exam例 3.29.5（公共交通政策评估）。 考虑一座城市对两个候选方案进行评估 te
公共 交通政策

$$P = \{p_1 = \text{“new bus lanes”},\ p_2 = \text{“fare discount”}\}.$$

设 v 为属性市民态度，其取值集为

$$P_v = \{a^+ = \text{support},\ a^- = \text{oppose}\}.$$

我们取 $t = 2, r = 1$ 并对每个 $(x,\ a) \in P \times P_v$ 作如下解释，

$$pdf(x, a) = \big(\alpha_1(x, a), \alpha_2(x, a), \eta(x, a)\big),$$

其中， α_1 为正向程度， α_2 为负向程度， η 为图式中立程度（“未决定／混合”）。

例如，根据一项调查，我们可以设定

$$\begin{aligned} pdf(p_1, a^+) &= (0.7, 0.1, 0.1), \quad pdf(p_1, a^-) = (0.2, 0.6, 0.1), \\ pdf(p_2, a^+) &= (0.6, 0.2, 0.1), \quad pdf(p_2, a^-) = (0.1, 0.5, 0.2). \end{aligned}$$

为了编码支持与反对之间的多元矛盾，我们定义

$$pCF(a^+, a^+) = pCF(a^-, a^-) = 0, \qquad pCF(a^+, a^-) = pCF(a^-, a^+) = 0.9.$$

因此，图式多元集合

$$PS^{\text{policy}}_{\text{pic}} = \big(P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF\big)$$

在单一框架中，对公民的正向／负向／中立意见及其在“支持”与“反对”之间的强烈矛盾进行建模。

例 3.29.6（在线产品推荐）。 设

$$P = \{x_1, x_2, x_3\}$$

设电商平台上有三款候选智能手机。令 v 表示属性客户情感类别，其中

$$P_v = \{a_1 = \text{battery},\ a_2 = \text{camera}\}.$$

我们再次选择 $t = 2$、 $r = 1$ ，并写作

$$pdf(x, a) = (\alpha_1(x, a), \alpha_2(x, a), \eta(x, a)),$$

其中， α_1 为正面情感程度， α_2 为负面情感程度， η 为产品 x在方面 a上的中性（“混合／无明确意见”）程度。

成员资格评估示例:

$$\begin{aligned} pdf(x_1, a_1) &= (0.8, 0.1, 0.05), \quad pdf(x_1, a_2) = (0.4, 0.3, 0.2), \\ pdf(x_2, a_1) &= (0.5, 0.3, 0.1), \quad pdf(x_2, a_2) = (0.7, 0.1, 0.1), \\ pdf(x_3, a_1) &= (0.3, 0.5, 0.1), \quad pdf(x_3, a_2) = (0.4, 0.4, 0.1). \end{aligned}$$

为了将“电池”和“相机”作为方面时仅存在轻微矛盾这一情况建模，我们定义

$$pCF(a_1, a_1) = pCF(a_2, a_2) = 0, \qquad pCF(a_1, a_2) = pCF(a_2, a_1) = 0.3.$$

接着是图像多源集

$$PS_{\text{pic}}^{\text{phone}} = \big(P,\ v,\ P_v,\ pdf,\ pCF\big)$$

针对每部手机和每个方面，捕捉顾客意见的正面/负面/中性图景，并在汇总总体推荐时纳入“电池”与“相机”这两个方面之间具有矛盾感知的交互。

第 4 章

模糊集、直觉主义集、中智集、杂合成集及其他集合的统一框架

在本章中，我们提出一个适用于模糊集、直觉集、中智集、普利斯托杰尼克集以及其他不确定性处理集合的统一框架。

4.1 不确定集

不确定集是任意一种集合论模型，它为元素赋予分级的、可能由多个分量构成的隶属度，从而推广了模糊、直觉主义、中智、杂合成及相关不确定性框架，并将其统一起来 [856]。

定义 4.1.1（不确定集）。[856]设 $\mathbb{U}$ 为定义**??**中所述所有不确定模型的集合。固定

$$U \in \mathbb{U}, \quad \mathrm{Dom}(U) \subseteq [0,1]^r$$

对某个整数 $r \geq 1$，并令 X 为一个非空基集（论域）。

一个定义在 X 上的 U 型不确定集是一对

$$\mathsf{A}^U \;=\; (X, \mu),$$

其中

$$\mu \colon X \longrightarrow \mathrm{Dom}(U)$$

为每个元素 $x \in X$ 指定一个 U–隶属度

$$\mu(x) \in \mathrm{Dom}(U).$$

等价地，一旦确定了基集 X 和不确定模型 U，我们便可用其隶属函数来表示不确定集，并简记为

$$\mathsf{A}^U \;:\; X \longrightarrow \mathrm{Dom}(U), \quad x \longmapsto \mu(x),$$

并将定义在 X 上的所有 U 型不确定集构成的集合视为函数空间

$$\big(\mathrm{Dom}(U)\big)^X \;=\; \{\, \mu \mid \mu : X \to \mathrm{Dom}(U) \,\}.$$

从这个意义上说，不确定集是对基集 X 的一种 U 标记，其中标记由取自 $\mathsf{Dom}(U)$ 的隶属度元组构成。

注 4.1.2（经典模糊型集合的恢复）。设 X 是一个非空集合，且 $\mathbf{A}^U = (X, \mu)$ 是一个 U 型不确定集。

1.（模糊集）取 U =模糊集，其中

$$\mathrm{Dom}(U) = [0,1] = [0,1]^1.$$

那么，类型为 U 的不确定集恰好是 Zadeh 意义下的模糊集，因为

$$\mu : X \to [0,1]$$

是通常的模糊隶属函数。

2.（直觉模糊集）取 U =直觉模糊集，其中

$$\mathrm{Dom}(U) = \big\{(\mu,\nu) \in [0,1]^2 \mid \mu + \nu \le 1\big\} \subseteq [0,1]^2.$$

则 $\mathbf{A}^U = (X, \mu)$ 与直觉模糊集重合，因为对每个 $x \in X$,

$$\mu(x) = \big(\mu_A(x), \nu_A(x)\big) \in [0,1]^2$$

满足 $\mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$。

3.（中智集）取 U =中智，其中

$$\mathrm{Dom}(U) = \big\{(T,I,F) \in [0,1]^3 \mid 0 \le T + I + F \le 3\big\} \subseteq [0,1]^3.$$

则 $\mathbf{A}^U = (X, \mu)$ 恰好是单值中智集，因为

$$\mu(x) = \big(T_A(x), I_A(x), F_A(x)\big) \in [0,1]^3$$

且对所有 $x \in X$ 有 $0 \le T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \le 3$。

4.（多属性集）对于带有程度域的多属性模型 U =多属性

$$\mathrm{Dom}(U) = \Big\{ \big(v, \mathrm{pdf}(x,v), \mathrm{pCF}(v_1,v_2)\big) \;\Big|\; v \in P_v,\ \mathrm{pdf}(x,v) \in [0,1]^s,\ \mathrm{pCF}(v_1,v_2) \in [0,1]^t \Big\} \subseteq [0,1]^{s+t+\ell},$$

U 上的 X 型不确定集会在 X上再现一个多理性集，因为每个

$$\mu(x) \in \mathrm{Dom}(U)$$

都编码了与 $x \in X$相关的多理性程度。

因此，通过选择不同的不确定模型 $U \in \mathbb{U}$ 及其对应的定义域 $\mathrm{Dom}(U) \subseteq [0,1]^r$，定义 4.1.1 中不确定集的一般概念统一了模糊集、直觉模糊集、中智集、多理性集以及许多其他现有的不确定性集合框架。

4.2 函数集

函子集为一个范畴中的每个对象赋予一个相应的集合，并通过函子 [856] 沿态射传递其元素。这些构造不仅涵盖模糊、直觉模糊、中智、柱状以及相关的不确定性框架，还将集合概念推广至具有不确定性以外特征的情形。

定义 4.2.1（函子集）。 [856] 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴，并且

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

是一个（协变）自函子。对于任意对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$， F 上的集合 X 是一个元素

$$s \in F(X).$$

我们用 $F(X)$ 简记 X 上所有 F-集合的集合。态射 $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ 会诱导出一个正向推送

$$F(f)\colon F(X) \longrightarrow F(Y), \qquad s \mapsto F(f)(s).$$

下面给出这一概念的一个具体示例。

例 4.2.2（城市物流：采购订单函子）。 令 $\mathcal{C}$ 为由城市 T =东京、 O =大阪、 F = 福冈以及路线态射生成的（小）范畴

$$f : T \to O, \qquad g : O \to F, \qquad g \circ f : T \to F,$$

以及恒等态射 id_T、id_O、id_F。定义函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 如下：

$$F(T) = \{\mathrm{PO}\ T{-}101 : (50),\ T{-}102 : (30)\},$$

$$F(O) = \{\mathrm{PO}\ O{-}201 : (40)\}, \quad F(F) = \varnothing,$$

其中，“PO $X - \cdot : (q)$”表示目的地为 X、数量为 q 的采购订单。对于路线$h\colon X \to Y$，定义 $F(h) : F(X) \to F(Y)$，方法是更改目的地的标签，同时保留商品和数量：

$$F(h) : \mathrm{PO}\ X{-}n : (q) \longmapsto \mathrm{PO}\ Y{-}n : (q).$$

于是函子性成立：

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \quad (\text{trivial retagging}), \qquad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (\text{same two-step retagging}).$$

对 PO $T{-}101 : (50)$ 进行具体检验：

$$F(f) :\ \mathrm{PO}\ T{-}101 : (50) \mapsto \mathrm{PO}\ O{-}101 : (50), \qquad F(g) :\ \mathrm{PO}\ O{-}101 : (50) \mapsto \mathrm{PO}\ F{-}101 : (50),$$

因此，$(F(g) \circ F(f))(\mathrm{PO}\ T{-}101 : (50)) = \mathrm{PO}\ F{-}101 : (50)$，根据 $g \circ f\colon T \to F$ 的定义，这等于 $F(g \circ f)(\mathrm{PO}\ T{-}101 : (50))$。因此， F 体现了沿物流网络对订单进行函子性传递。

例 4.2.3（跨时区日历：会议时段函子）。设 $\mathcal{T}$ 为一个范畴，其对象是固定的 UTC 时差 $\{0, +9, -5\}$（UTC、JST、EST），其态射是由以下形式给出的时差变更

$$h_{\alpha\to\beta} : \alpha \to \beta,$$

$$h_{\beta\to\gamma} \circ h_{\alpha\to\beta} = h_{\alpha\to\gamma},$$

$$h_{\alpha\to\alpha} = \mathrm{id}_\alpha.$$

定义 $G :\ \mathcal{T} \to$ 集合，其中 $G(\alpha)$ 表示偏移量为 α 的本地会议时间戳集合（以朴素日期时间表示）。对于 $h_{\alpha\to\beta} :\ \alpha \to \beta$，定义 $G(h_{\alpha\to\beta})$ 将本地时间转换为：

$$G(h_{\alpha\to\beta})(\text{YYYY-MM-DD hh:mm at } \alpha) \ :=\ \text{YYYY-MM-DD hh:mm} + (\beta - \alpha) \text{ hours, now at } \beta.$$

函子性显而易见：

$$G(\mathrm{id}_\alpha) = \mathrm{id}_{G(\alpha)},$$

$$G(h_{\beta\to\gamma} \circ h_{\alpha\to\beta}) = G(h_{\beta\to\gamma}) \circ G(h_{\alpha\to\beta})$$

因为时间移位加法满足结合律。数值检验：

$$\text{Slot } s = \text{2025-11-08 10:00 at UTC} \in G(0).$$

Then

$$G(h_{0\to+9})(s) = \text{2025-11-08 19:00 at JST}, \quad G(h_{+9\to-5}) = \text{shift by } -14 \text{ h},$$

so

$$\big(G(h_{+9\to-5}) \circ G(h_{0\to+9})\big)(s) = \text{2025-11-08 05:00 at EST}.$$

直接可得,

$$G(h_{0\to-5})(s) = \text{2025-11-08 05:00 at EST},$$

因此， $G(h_{+9\to-5} \circ h_{0\to+9}) = G(h_{+9\to-5}) \circ G(h_{0\to+9})$ 位于 s 上。因此， G 函子性地将会议时段跨时区传递。

例 4.2.4 （地理空间包含：兴趣点函子）。 设 $(\mathcal{R}, \subseteq)$ 为一个区域偏序集，其中态射为包含关系，从而构成一个范畴：对象是区域 X，态射是$i_{X\subseteq Y}$：当 $X \subseteq Y$ 时有 $X \to Y$。考虑链

$$\text{Ward} = \text{Shinjuku} \ \subseteq \ \text{City} = \text{Tokyo} \ \subseteq \ \text{Country} = \text{Japan}.$$

定义 $H\colon \mathcal{R} \to \mathsf{Set}$ 如下:

$$H(X) = \{\text{POIs located in } X\}.$$

对于 $i_{X\subseteq Y}\colon X \to Y$，定义 $H(i_{X\subseteq Y})\colon H(X) \to H(Y)$ 为元素上的包含映射（同一兴趣点，如今视为位于较大的区域内）。具体数据:

$$H(\text{Shinjuku}) = \{\text{POI1: park}, \ \text{POI2: museum}, \ \text{POI3: station}\},$$

$$H(\text{Tokyo}) = \{\text{POI1}, \text{POI2}, \text{POI3}, \text{POI4: gallery}\}.$$

Then

$$H(i_{\text{Shinjuku}\subseteq\text{Tokyo}})(\text{POI2}) = \text{POI2} \in H(\text{Tokyo}).$$

函子性:

$$H(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H(X)} \quad \text{(identity inclusion)}, \qquad H(i_{X\subseteq Z}) = H(i_{Y\subseteq Z}) \circ H(i_{X\subseteq Y})$$

每当 $X \subseteq Y \subseteq Z$ 时。从数值上看,

$$H(i_{\text{Shinjuku}\subseteq\text{Japan}})(\text{POI3}) = \text{POI3} = \Big(H(i_{\text{Tokyo}\subseteq\text{Japan}}) \circ H(i_{\text{Shinjuku}\subseteq\text{Tokyo}})\Big)(\text{POI3}).$$

因此， H 沿区域包含关系函子性地嵌入 POI，并保持复合运算。

4.3 其他不确定集与未来工作

本节介绍一些其他以不确定性为导向的框架。这些框架常与模糊集、直觉模糊集、中智集和可塑集一同研究。展望未来，预计将这些辅助概念与本文探讨的模糊、直觉模糊、中智和可塑模型相结合后，会产生更多扩展和新的理论发展。请注意，这些框架也可以在函子集框架内进行推广。

- 近集 [857–859]: 近集根据容差关系，将在感知或描述上相似的对象归为一组，支持近似分类、检索和匹配任务。文献中也有模糊近集 [860–863] 等相关概念。

- 加权集 [864, 865]: 加权集为每个元素赋予一个正的重要性系数，从而能够对项目进行优先级聚合、排序或决策分析。文献中也有加权模糊集 [716, 866, 867],、加权直觉模糊集 [868, 869],、加权粗糙集 [870–872], 以及加权中智集 [873, 874] 等相关概念。

- Z-数 [875–877]：Z-数通过将模糊约束与可靠性度量相结合来描述不确定信息，同时反映数值和置信度。文献中也有直觉模糊 Z-数 [878–881] 和中智 Z-数 [882–886]等相关概念。

- D-数 [887–889]：D-数通过允许不完整或非互斥的质量分配，扩展了邓普斯特–谢弗证据理论，从而在开放或动态框架情境下提升知识融合能力 [890]。文献中也将中智 D-数视为一种相关概念。

- 多重集 [891–893]：多重集为每个元素分配多个隶属度，并将其排列成一个 $n \times k$矩阵，以此对模糊性和多重性进行建模。文献中也将中智多重集视为一种相关概念 [12, 894]。

免责声明

资金支持

This 本研究未获得任何外部机构或项目的资金支持。

致谢

我们谨向在本研究过程中提供宝贵见解、支持和鼓励的所有人致以诚挚的谢意。我们也感谢读者对本研究的关注，并感谢参考文献作者的学术贡献，这些贡献对本研究产生了深远影响。最后，我们衷心感谢促成本研究成果传播的出版商和审稿人。

数据可用性

由于本研究纯属理论和数学研究，因此未使用任何实证数据或计算分析。研究人员可在未来的研究中采用以数据为导向的方法或实验方法，进一步拓展这些研究成果。

伦理声明

由于本研究不涉及人类参与者或动物实验，因此无需获得伦理审批。

利益冲突

作者声明，他们与本文的内容或发表不存在任何利益冲突。

代码可用性

本研究未开发任何代码或软件。

临床试验

本研究未涉及任何临床试验。

参与同意

不适用。

生成式人工智能及人工智能辅助工具的使用

我会使用生成式人工智能和人工智能辅助工具完成英语语法检查等任务，但不会以任何违反道德规范的方式使用这些工具。

免责声明（其他）

本文提出了尚未经过实证验证的理论观点与框架。我们鼓励读者探索其实际应用，并进一步完善这些概念。尽管我们已尽力确保内容准确并恰当注明引文，但仍可能存在无意的错误或疏漏。本文所表达的观点与解释仅代表作者本人，并不一定反映其所属机构的立场。

附录（表格目录）

1.1 代表性集合扩展及每个元素所存储的规范信息 . . . . 6 1.2 理论矛盾标量变体（$t=1$）及其经典极限 . . . . . 6 1.3 模糊、直觉模糊、中智及多元理论框架中经典概念的平行扩展.7 1.4 第 2 部分——经典、模糊、直觉模糊、中智及多元理论框架中的其他概念.8 1.5 第 3 部分——经典、模糊、直觉模糊、中智及多元理论框架中的更多概念.8 2.1 扩展粗糙集族的简明比较.15 2.2 软集、超软集与超超软集的简明比较。此处 $\mathcal{P}(U)$ 表示 U 的幂集.17 3.1 本章不确定集族概览（第一部分）.22 3.2 本章不确定集族概览（第二部分）.23 3.3 按分量数划分的多元理论集族目录 s.25 3.4 按矛盾度量函数 pCF 中的矛盾维度 t 对多元理论集进行概览： $Pv \times Pv \to [0,1]^t$.26 3.5 $m \in \{1,2,3,...\}$（极性级别）、 $t=0$（无 DCF）及 $s \in \{1,2,3,4,5\}$ 的情形。此处m=1 = 为经典型， m=2 = 为双极型， m=3 = 为三极型.28 3.6 m（极性级别）、 $t=1$（单一 DCF）及 $s \in \{1,2,3,4,5\}$ 的情形。此处 m=1 =为经典型， m=2 = 为双极型， m=3 = 为三极型. 29 3.7 $t \in \{0,1\}$ 与 $s \in \{1,2,3\}$的复合多元理论集（CPS）情形汇总。此处$\Gamma^{(\delta)}$ 为考虑矛盾的复合隶属度（定义 3.3.1）， $\gamma_i \in \mathbb{D}$ 为 CDAF 分量， $w(a \mid \delta) = 1-\Phi$（pCF$_1(a,\delta)$ . . ., pCF$_t(a,\delta)$）。对于 $t=1$，取$\Phi(z)=z$；对于 $t=0$，设定 $\Phi \equiv 0$.35 3.8 (m,n)-超超多元理论集的特化形式.39 3.9 按 DAF 分量数划分的超多元理论集特化形式.39 3.10 多元理论语言集的约化形式.43 3.11 q阶 n元组多元理论集 PS$_{q,n}$ 的命名映射.46 3.12 当 $t=0$（无显式矛盾维度）时，类型-n 多元理论集的命名方式 48 3.13 $n=2$ 和 $n=3$ 在 $t=0$ 下的具体实例.49 3.14 按阶数和实例划分的迭代多元理论集分类体系 . . . . . 53 3.15 通过令 s 等于区间分量数，并取 $t=0$（无 DCF）或 $t \geq 1$（考虑 DCF），可将典型区间值模糊/中智集族表示为区间值多元理论集（IVPS）的特例.56 3.16 通过隶属度函数的取值范围比较多元理论集、上集、下集与偏移集.59 3.17 多元理论偏移集 $PS_{\text{off}}(s,t)$ 在 $t=1$ 下的特例.60 3.18 经典立方集族作为多元理论立方集的特例.63 3.19 多元理论超超软集（PSHSS）作为模糊、直觉模糊、中智及分区中智超超软集的统一推广 . . . 66 3.20 PSHSS 向多元理论超软集/多元理论软集的约化，以及其模糊、直觉模糊和中智特化形式.67 3.21 参数 s 和 t 在犹豫多元理论隶属度中的作用.70 3.22 球形模糊类模型作为球形多元理论集的特例（单一属性 a^*, $pCF \equiv 0$）.77

3.23 T-球形模糊型模型作为 T-球形多元生成集的特例（单一属性 a^*, $pCF \equiv 0$，阶数 $t \geq 1$，半径 1）.83 3.24 粗糙型模型的示例，这些模型通过选择 DAF 维度 s并（可选地）选择 DCF 维度 t，成为多元生成粗糙集$PL_R(A) = (PL_R(A)\ PL_R(A))$ 的特例.86 3.25 多元生成软粗糙集作为若干软粗糙模型的共同推广。. . . 91 3.26 线性丢番图多元生成集作为共同推广.96 3.27 树多元生成集作为基于树的模糊集／直觉模糊集／中智集的统一模型.98 3.28 森林多元生成集作为基于森林的模糊集／直觉模糊集／中智集的统一模型.102 3.29 多元生成软专家集（PSES）向若干软专家模型的约化。. . . 105 3.30 动态模糊／直觉模糊／中智族作为动态多元生成集（DPS）的特例. 108 3.31 概率多元生成集（PPS）的约化。固定一个属性、取 $pCF \equiv 0$并分别选择 $s = 1, 2, 3$, PPS 可分别退化为 PFS/PIFS/PNS。. . . . . 112 3.32 经典三角模糊集／直觉模糊集／中智集，通过选择签名和 $pCF \equiv 0$，成为三角多元生成集的精确特例.116 3.33 经典梯形模糊集／直觉模糊集／中智族作为梯形多元生成集的特化形式.120 3.34 非标准多元生成集作为共同推广.124 3.35 精细化模糊集、直觉模糊集、中智集、四分区中智集和五分区中智集作为精细化多元生成集的特例。. . . . 127 3.36 子集值多元生成集作为共同推广.130 3.37 图像模糊集、图像中智集和多元生成集向图像多元生成框架的约化.132

*

参考文献

[1] Lotfi A Zadeh。模糊集。《信息与控制》，8(3):338–353，1965。[2] Krassimir T Atanassov。《直觉模糊集理论》，第283卷。施普林格，2012。[3] Said Broumi、Assia Bakali 和 Ayoub Bahnasse。中智集：概述。《无限研究》，2018。[4] Said Broumi、Mohamed Talea、Assia Bakali 和 Florentin Smarandache。单值中智图。《新理论杂志》，10:86–101，2016。[5] Humberto Bustince 和 P Burillo。模糊集是直觉模糊集。《模糊集与系统》，79 405，1996 3 403( ): – 。[6] Vicenç Torra 和 Yasuo Narukawa。论犹豫模糊集与决策。载于《2009年IEEE国际模糊系统会议》，第1378–1382页。IEEE，2009。[7] Bui Cong Cuong。图像模糊集。《计算机科学与控制论杂志》，30:409，2015。[8] R Radha、A Stanis Arul Mary 和 Florentin Smarandache。四分中智毕达哥拉斯软集。《国际中智科学杂志》（IJNS）第14卷，2021年，第11页，2021。[9] Mithun Datta、Kalyani Debnath 和 Surapati Pramanik。具有区间隶属度的五分中智软集。《中智集与系统》，79(1):37，2025。[10] Florentin Smarandache。多元生成学、多元生成集、逻辑、概率与统计。《无限研究》，2017。[11] Jayanta Ghosh 和 Tapas Kumar Samanta。超模糊集与超模糊群。《国际先进科学与技术杂志》，41:27–37，2012。[12] Takaaki Fujita。通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他。Biblio Publishing，2025。[13] Takaaki Fujita 和 Smarandache Florentin。跨多个科学领域的中智应用综述与导论。中智科学国际协会（NSIA）出版社，2025。[14] Florentin Smarandache 和 NM Gallup。将直觉模糊集推广为中智集。载于《国际粒计算会议》，第8–42页。Citeseer，2006。[15] Florentin Smarandache 和 Maissam Jdid。中智理论与多元生成理论及其应用概述。《无限研究》，2023。[16] Florentin Smarandache。中智集是直觉模糊集、不一致直觉模糊集（图像模糊集、三元模糊集）、毕达哥拉斯模糊集、球形模糊集和q-重正交对模糊集的推广，而中智化则是遗憾理论、灰色系统理论和三支决策的推广（再探）。《新理论杂志》，29:1–31，2019。[17] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。多元生成图、中智图与模糊图的层级综述：调查与应用。载于《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》（第二卷）。Biblio Publishing，2024。[18] Florentin Smarandache。多元生成集：经典集、模糊集、直觉模糊集和中智集的扩展（再探）。《无限研究》，2018。[19] Florentin Smarandache 和 Nivetha Martin。用于新型多属性决策的多元生成n-超图。《无限研究》，2020。[20] Nivetha Martin、R Priya 和 Florentin Smarandache。多属性决策中的广义多元生成集。载于《应用数学中的中智与多元生成库存模型》，第519–546页。IGI Global Scientific Publishing，2025。[21] T Bharathi、S Leo 和 Bijan Davvaz。多元生成积模糊图中的支配。《应用数学、统计与信息学杂志》，19:5–22，2023。[22] Thummapudi Bharathi 和 S Leo。多元生成积模糊图研究及其在社交网络中的应用。《印度科学与技术杂志》，14(40):3051–3063，2021。[23] Muhammad Azeem、Humera Rashid、Muhammad Kamran Jamil、Selma Gütmen 和 Erfan Babaee Tirkolaee。多元生成模糊图：基本性质与潜在应用研究。《动力学与博弈杂志》，第0–0页，2024。

[24] SP Priyadharshini 和 F Nirmala Irudayam。《多准则决策中的多维单值普利托根中智集新方法》。Infinite Study，2021。[25] Ruixuan Chen、Qun Liu、Yucang Zhang 和 Wuyin Weng。《用于不确定性感知食品安全分析的概率普利托根中智粗糙集》。Neutrosophic Sets & Systems，90，2025。[26] Thomas Jech。《集合论：第三个千年版（修订扩充版）》。Springer，2003。[27] Florentin Smarandache。《中智学：中智概率、集合与逻辑：分析综合与综合分析》。1998。[28] Yousef Al-Qudah 和 Nasruddin Hassan。《利用不确定周期数据进行决策的复值多模糊关系》。International Journal of Engineering & Technology，2018。[29] Humberto Bustince。《具有预定性质的直觉模糊关系的构造》。Fuzzy Sets and Systems，109(3):379–403，2000。[30] Adel Al-Odhari。《中智集合论中中智关系的一些结果》。Neutrosophic Knowledge，5:76–86，2024。[31] Takaaki Fujita。《大型不确定语言模型与超语言模型的理论阐释：推进自然不确定语言处理与超语言处理》。载于《通过图化、超化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第245页，2025。[32] Luan Nguyen-Huynh 和 Tai Vo-Van。《基于聚类技术与正规模糊函数的新型模糊时间序列预测模型》。Knowledge and Information Systems，65:3489–3509，2023。[33] Nihat Tak。《用于预测的 I 型循环直觉模糊函数》。Expert Systems with Applications，140:112913，2020。[34] A Vadivel 和 C John Sundar。《基于中智集的中智函数在移动网络中的应用》。载于《2021年新兴工业4.0趋势（ETI 4.0）》，第1–8页。IEEE，2021。[35] Adel Al-Odhari。《三类中智集合论上的可逆中智函数》。Neutrosophic Knowledge，6:21–29，2025。[36] Yaser Ahmad Alhasan 和 Raja Abdullah Abdulfatah。《普利托根函数值》。Neutrosophic Sets and Systems，58:596–602，2023。[37] Reinhard Diestel。《图论》。Springer（印刷版）；Reinhard Diestel（电子书），2024。[38] Azriel Rosenfeld。《模糊图》。载于《模糊集及其在认知与决策过程中的应用》，第77–95页。Elsevier，1975。[39] M. G. Karunambigai、R. Parvathi 和 R. Buvaneswari。《直觉模糊图中的弧》。Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets，17:37–47，2011。[40] Said Broumi、Mohamed Talea、Assia Bakali 和 Florentin Smarandache。《区间值中智图》。Critical Review，XII，2016:5–33，2016。[41] Claude Berge。《超图：有限集的组合学》，第45卷。Elsevier，1984。[42] Yifan Feng、Haoxuan You、Zizhao Zhang、Rongrong Ji 和 Yue Gao。《超图神经网络》。载于《AAAI人工智能会议论文集》，第33卷，第3558–3565页，2019。[43] Takaaki Fujita。《分子模糊图、超图与超超图》。Journal of Intelligent Decision and Computational Modelling，1(3):158–171，2025。[44] John N Mordeson 和 Premchand S Nair。《模糊图与模糊超图》，第46卷。Physica，2012。[45] R Parvathi、S Thilagavathi 和 MG Karunambigai。《直觉模糊超图》。Cybernetics and Information Technologies，9(2):46–53，2009。[46] Muhammad Akram、Sundas Shahzadi 和 AB Saeid。《单值中智超图》。TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics，8(1):122–135，2018。[47] Nivetha Martin 和 Florentin Smarandache。《基于普利托根超软集的同心普利托根超图——一种新颖视角》。Neutrosophic Sets and Systems，33:5，2020。[48] Florentin Smarandache。《将超图扩展为 n-超超图和普利托根 n-超超图，并将超代数扩展为 n 元（经典／中智／反）超代数》。Infinite Study，2020。[49] Takaaki Fujita 、 Atiqe Ur Rahman 、 Arkan A Ghaib 、 Talal Ali Al-Hawary 和 Arif Mehmood Khattak。《软超超图与粗糙超超图的性质及示例》。Prospects for Applied Mathematics and Data Analysis，5(1):12–31，2025。[50] Florentin Smarandache。《n-超超图简介——当今最一般形式的图》。Infinite Study，2022。[51] Takaaki Fujita 和 Arif Mehmood。《模糊容忍超图与模糊容忍超超图》。Neutrosophic Computing and Machine Learning。ISSN 2574-1101，41:46–70，2025。[52] Mohammad Hamidi、Florentin Smarandache 和 Mohadeseh Taghinezhad。《基于赋值模糊超超图的决策》。Infinite Study，2023。[53] Takaaki Fujita。《复值直觉模糊超超图与复值 q-rung 正交对模糊超超图》。Authorea Preprints，2025。[54] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《若干超超图类别的简要研究》。Neutrosophic Sets and Systems，77:548–593，2024。

[55] 穆罕默德·卡塔尼。用于社交网络决策的直觉模糊拟超图集成。《国际分析与应用期刊》，23:137–137，2025。[56] 藤田隆明和弗洛伦丁·斯马兰达克。具有现实应用的中智软 n-超超图。Infinite Study，2025。[57] 埃哈卜·罗斯迪、马尔瓦·卡沙巴和玛丽亚姆·埃马德·艾哈迈德·阿里。用于主动网络攻击对策的中智超超图融合：一种软计算框架。《中智集与系统》，94 252，2025 232：–。[58] 萨洛蒙·马科斯·贝罗卡尔·比列加斯、威尔纳·蒙塔尔沃·弗里塔斯、卡门·罗萨·贝罗卡尔·比列加斯、玛丽亚·伊塞尔·弗洛雷斯·富恩特斯·里维拉、罗伯托·埃斯佩霍·里维拉、劳拉·戴西·包蒂斯塔·普马和但丁·曼努埃尔·马卡萨纳·费尔南德斯。利用拟层性 n-超超图评估信息技能与数字能力之间的关联程度。《中智集与系统》，84(1):41，2025。[59] 爱德华多·马丁·坎波韦德·巴伦西亚、杰西卡·保拉·丘伊萨卡·巴斯克斯和弗朗西斯科·安赫尔·贝塞拉·洛伊斯。利用拟层性 n-超超图对生存与阿苏艾省制造业企业增长之间的关系进行多中智分析，2020 28，2025 2023，84 1 –。《中智集与系统》，( ): 。[60] 何塞·路易斯·阿格雷达·奥尼亚、安德烈斯·塞巴斯蒂安·莫雷诺·阿维拉和马蒂乌斯·罗多尔福·门多萨·波马。利用拟层性 n-超超图，通过绘制拉塔昆加市城区噪声地图研究声压级。《中智集与系统》，74:119–127，2024。[61] 维尔纳·H·格鲁布。线性代数，第23卷。施普林格科学与商业媒体，2012。[62] 普尔巴莎·吉里。关于 m-极模糊集与 m-极模糊矩阵的研究。《国际模糊数学档案期刊》，2021。[63] 夏美美。基于阿基米德 t-余范数和 t-范数的区间值直觉模糊矩阵博弈。《国际一般系统期刊》，47(3):278–293，2018。[64] 李伟明和叶军。采用直觉模糊矩阵能量法的 MAGDM 模型及其在医院选址问题中的应用。《公理》，12(8):766，2023。[65] 罗伯托·卡洛斯·希梅内斯·马丁内斯、塞萨尔·埃利亚斯·保卡尔·保卡尔、何塞·伊格纳西奥·克鲁斯·阿博莱达、米格尔·安赫尔·瓜姆博·列雷纳和埃里克·冈萨雷斯·卡瓦列罗。用于解决项目管理冲突的中智矩阵博弈。《中智集与系统》，44(1):2，2021。[66] 哈米耶特·梅尔克佩奇。关于符号 3-拟层性与 4-拟层性实方阵代数性质的新结果。《对称性》，15(8):1494，2023。[67] 奥利弗·冯·施塔岑、阿马尔·拉瓦什德和卡拉·扎尤德。关于符号 2-拟层性分裂复实方阵及其代数性质。《中智集与系统》，59:211–222，2023。[68] 卡拉蒂·拉尔。模糊代数在编码理论中的应用。《国际工程研究与应用期刊》，6:88–93，2016。[69] 普纳姆·库马尔·夏尔马。直觉模糊格序 g-模。《模糊扩展与应用期刊》，5(1):141–158，2024。[70] 阿德里安·I·班。直觉模糊代数和直觉模糊测度的例子。NIFS，9(3):4–10，2003。[71] WB·瓦桑塔·坎达萨米和弗洛伦丁·斯马兰达克。若干中智代数结构与中智 N-代数结构。Infinite Study，2006。[72] 穆罕默德·阿博巴拉。关于若干中智代数方程。《新理论期刊》，33:26–32，2020。[73] AAA·阿格布拉和MA·易卜拉欣。关于符号拟层性代数结构与超结构。《中智集与系统》，56(1):17，2023。[74] 弗洛伦丁·斯马兰达克。《超超代数与中智超超代数导论》。Infinite Study，2022。[75] 孙开标、袁学海和李红星。基于模糊关系的模糊超群。《计算机与应用数学》，60(3):610–622，2010。[76] 礼萨·阿梅里和马德·莫塔梅尼。模糊超环的模糊超理想。《世界应用科学期刊》，16(11):1604–1614，2012。[77] 纳尔杰斯·菲鲁兹库希、阿巴斯·阿米尼、程春、迈赫迪·索莱马尼和比詹·达夫瓦兹。模糊超代数的基本关系与恒等式。《智能与模糊系统期刊》，41(1):2265–2274，2021。[78] 科斯塔克·希拉、塞尔坎·奥纳尔、巴伊拉姆·阿里·埃尔索伊和比詹·达夫瓦兹。关于布尔超代数的广义直觉模糊子超代数。《不等式与应用期刊》，2013:1–15，2013。[79] 梅利斯·博拉特、塞尔坎·奥纳尔和巴伊拉姆·阿里·埃尔索伊。直觉模糊软超代数。《超结构期刊》，12(2)，2023。[80] S.奥纳尔。关于超代数上的中智软集的注记。《对称性》，16(10):1288，2024。[81] 弗洛伦丁·斯马兰达克。超超结构与中智超超结构的基础。《中智集与系统》，63(1):21，2024。[82] 伯特·门德尔松。《拓扑学导论》。Courier Corporation，1990。[83] S. P.蒂瓦里和阿努帕姆·K.辛格。模糊预序、模糊拓扑与模糊迁移系统。载于《印度逻辑及其应用会议》，2013。[84] 洛特菲·A·扎德。模糊拓扑。I. 模糊点的邻域结构与摩尔系 乐彩

[85] Seok Jong Lee 和 Eun Pyo Lee. 直觉模糊拓扑空间范畴。《韩国数学会通报》，37(1):63–76，2000。[86] Sarannya Kumari R、Sunny Joseph Kalayathankal、Mathews M George 和 Florentin Smarandache. 关于 n-柱状模糊中智拓扑空间的一些相关概念。《模糊拓展与应用期刊》，4(1):40–51，2023。[87] Kumari R Sarannya、Sunny Joseph Kalayathankal、George Mathews 和 Florentin Smarandache. n-柱状模糊中智拓扑空间。2023。[88] Nehmat Ahmed 和 Osama Pirbal. 元致性清晰超软拓扑。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，17(4):3043–3060，2024。[89] Takaaki Fujita. 超概率与超超概率简介及再考察：综合概述。《亚洲概率与统计学杂志》，27(5):82–109，2025。[90] Hao ran Lin、Bing yuan Cao 和 Yun zhang Liao. 模糊统计与模糊概率。2018。[91] Yanfeng Li、Hongzhong Huang、Jinhua Mi、Weiwen Peng 和 X. M. Han. 基于贝叶斯网络与模糊概率的含共因失效多状态系统可靠性分析。《运筹学年刊》，311:195–209，2019。[92] Claudilene Gomes Da Costa、Benjamin Callejas Bedregal 和 Adrião Duarte Doria Neto. 直觉模糊概率。载于《巴西人工智能研讨会》，第273–282页。Springer，2010。[93] Claudilene G Da Costa、Benjamín Bedregal 和 Adrião D Dória Neto. Atanassov 的直觉模糊概率与马尔可夫链。《知识型系统》，43:52–62，2013。[94] Florentin S marandache. 中智学、中智集、中智概率、中智统计及其在决策中的应用简介。载于《中智范式：决策与统计分析的进展——处理中不确定性的中智原理》，第3–21页。Springer，2025。[95] Chonglei Zhao 和 Qingmei Wang. 用于模拟数字系统中民族音乐教育与传承时序不确定性的随机中智概率场。《中智集与系统》，90:419–430，2025。[96] Mohamed Bisher Zeina、Nizar Altounji、Mohammad Abobala 和 Yasin Karmouta. 符号型 2-元致概率论导论。Infinite Study，2023。[97] Florentin Smarandache. 元致概率与统计是多变量概率与统计的推广。2021。[98] Irving M Copi、Carl Cohen 和 Kenneth McMahon. 逻辑学导论。Routledge，2016。[99] Florentin Smarandache. 从中智学导出的定义。Infinite Study，2003。[100] Florentin Smarandache. 元致生成、元致集、逻辑、概率与统计。arXiv 预印本 arXiv:1808.03948，2018。[101] Pablo Pedregal. 优化导论，第46卷。Springer，2004。[102] János Fülöp. 决策方法导论。载于 BDEI-3 研讨会，华盛顿，第1–15页，2005。[103] Ngoc Bao Tu Nguyen、Guochao Lin 和 Thanh-Tuan Dang. 面向咖啡豆供应链绿色供应商选择的两阶段集成模糊决策框架。《数学》，2021。[104] Samanta Bacić、Hrvoje Tomić、Katarina Rogulj 和 Goran Andlar. 城市绿色基础设施实施的模糊决策估值模型。《能源》，2024。[105] Zeshui Xu 和 Na Zhao. 直觉模糊决策的信息融合：综述。《信息融合》，28:10–23，2016。[106] Esra Cakr 和 Mehmet Ali Ta. 圆形直觉模糊决策及其应用。《专家系统与应用》，225:120076，2023。[107] Dragan Pamucar、Morteza Yazdani、Radojko Obradovic、Anil Kumar 和 Mercedes Torres-Jiménez. 面向韧性供应商选择问题的新型模糊混合中智决策方法。《国际智能系统杂志》，35(12):1934–1986，2020。[108] Arunodaya Raj Mishra、Dragan Pamucar、Pratibha Rani、Rajeev Shrivastava 和 Ibrahim M. Hezam. 运用带有散度度量的单值中智决策框架评估可持续储能技术。《专家系统与应用》，238:121791，2023。[109] Mohamed Abdel-Basset、Rehab Mohamed、Abdel Nasser H. Zaied 和 Florentin Smarandache. 结合质量功能展开的混合元致决策方法：选择供应链可持续性指标。《对称性》，11:903，2019。[110] Konrad W. Leszczynski、Pawel A. Penczek 和 W. Daniel Grochulski. Sugeno 模糊测度与模糊聚类。《模糊集与系统》，15:147–158，1985。[111] Renato Coppi 和 Pierpaolo D’Urso. LR 模糊时间轨迹的三向模糊聚类模型。《计算统计与数据分析》，43(2):149–177，2003。[112] Bui Cong Cuong、Pier Luca Lanzi、Nguyen Tho Thong 等. 一种用于地理人口分析的新型直觉模糊聚类方法。《专家系统与应用》，39(10):9848–9859，2012。[113] SV Aruna Kumar 和 BS Harish. 一种用于医学图像分割的改进型直觉模糊聚类算法。《智能系统杂志》，27(4):593–607，2018。[114] Jun Ye. 基于相似性度量的单值中智聚类算法。《分类学杂志》，34(1):148–162，2017。

[115] Yanhui Guo、Amira S Ashour 和 Florentin Smarandache。利用中智聚类与自适应区域生长检测皮肤镜图像中皮损的新方法。《Symmetry》，10(4):119，2018。[116] L-K Hua。《数论导论》。Springer Science & Business Media，2012。[117] Witold Kosinski。基于有序模糊数的计算与推理。载于 EUSFLAT 会议论文集，第 412–417 页，2005 年。[118] Miguel Ortiz-Barrios、Natalia Jaramillo-Rueda、Andrea Espeleta-Aris、Berk Kucukaltan 和 Llanos Cuenca。结合直觉模糊数的综合模糊决策方法：在临床实验室灾害应急准备中的应用。《Expert Systems with Applications》，263:125712，2025。[119] Yaser Ahmad Alhasan、Florentin Smarandache、Abuobida Alfahal 和 Raja Abdullah Abdulfatah。2-精细化中智数的扩展研究。Infinite Study，2024。[120] Mehmet Merkepçi、Hamiyet Merkepçi 和 Alexandra Ioanid。RSA 密码学中的符号型多元数：迈向后量子安全之路。《IEEE Access》，2025。[121] Mohamed A Khamsi 和 William A Kirk。《度量空间与不动点理论导论》。John Wiley & Sons，2011。[122] Elif Güner 和 Halis Aygün。关于 2-模糊度量空间。载于《智能与模糊系统国际会议论文集》，第 1258–1266 页。Springer，2020。[123] Khaleel Ahmad、Ghulam Murtaza、Umar Ishtiaq 和 Salvatore Sessa。通过直觉模糊度量空间中的强耦合不动点生成分形的新方法。《International Journal of Analysis and Applications》，23:202–202，2025。[124] Murat Kirişci 和 Necip Şimşek。中智度量空间。《Mathematical Sciences》，14(3):241–248，2020。[125] Umar Ishtiaq、Khalil Javed、Fahim Uddin、Manuel de la Sen、Khalil Ahmed 和 Muhammad Usman Ali。正交中智度量空间中的不动点结果。《Complexity》，2021(1):2809657，2021。[126] Hazim M Wali Al-Tameemi。弱模糊复数的模糊度量空间与多元度量空间。《International Journal of Neutrosophic Science (IJNS)》，23(4)，2024。[127] Terence Tao。《测度论导论》，第 126 卷。American Mathematical Soc.，2011。[128] Jun Li 和 Masami Yasuda。模糊测度空间上的鲁辛定理。《Fuzzy Sets and Systems》，146(1):121–133，2004。[129] Mohammed J Mohammed 和 Amneh Kareem Yousif。关于直觉模糊测度上的黎茨定理。《Basrah Journal of Science (A)》，34(3):74–86，2016。[130] Adrian I Ban。关于相对于直觉模糊测度的 Sugeno 积分的切比雪夫型不等式。《CYBERNETICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES》，9(2)，2009。[131] Florentin Smarandache。中智测度、中智积分与中智概率导论。Infinite Study，2013。[132] Florentin Smarandache。中智测度与中智积分。Infinite Study，2013。[133] Joseph L Doob。什么是随机过程？《The American Mathematical Monthly》，49(10):648–653，1942。[134] Erhan Cinlar。《随机过程导论》。Courier Corporation，2013。[135] Guangyuan Wang 和 Yue Zhang。模糊随机过程理论。《Fuzzy Sets and Systems》，51(2):161–178，1992。[136] Said Melliani、M Elomari、M Atraoui 和 LS Chadli。具有非局部条件的直觉模糊微分方程。《Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets》，21(4):58–68，2015。[137] Carlos A Granados Ortiz 和 Leon A Valencia Henao。关于精细化中智随机过程。《Revista Ciencia en Desarrollo》，15(1):115，2024。[138] Mohamed Bisher Zeina[1] 和 Yasin Karmouta。中智随机过程导论。《Neutrosophic Sets and Systems》，第 54 卷/*2023* {中智代数结构、NeutroAlgebra 与 AntiAlgebra 以及 SuperHyperAlgebra 与中智 SuperHyperAlgebra 专刊。阿拉伯世界研究者的贡献}：《信息科学与工程国际期刊》，第 168 页，2024。[139] Abdulrahman Astambli、Mohamed Bisher Zeina 和 Moustafa Mazhar Ranneh。引入多元随机过程及其在泊松过程中的应用。《Neutrosophic Sets and Systems》，83:553–565，2025。[140] James R Norris。《马尔可夫链》。第 2 号。Cambridge University Press，1998。[141] Konstantin E Avrachenkov 和 Elie Sanchez。模糊马尔可夫链与决策。《Fuzzy Optimization and Decision Making》，1(2):143–159，2002。[142] Muslem Al-Saidi、Áron Ballagi、Oday Ali Hassen 和 Saad M Saad。用于自动手语识别的手势图像认知分类器：基于中智马尔可夫链范式的软体机器人辅助。《Computers》，13(4):106，2024。[143] Muslem Al-Saidi、Áron Ballagi、Oday Ali Hassen 和 Saad M Saad。用于主体独立手语识别的二型中智马尔可夫链模型：一种具备不确定性感知能力的新型软传感器范式。《Sensors (Basel, Switzerland)》，24(23):7828，2024。[144] D Nagarajan、M Lathamaheswari、Said Broumi、J Kavikumar 和 Florentin Smarandache。区间中智马尔可夫链的长期行为。载于《基于中智集与多元集的优化理论》，第 151–168 页。Elsevier，2020。[145] Suhar Massassati、Mohamed Bisher Zeina 和 Yasin Karmouta。多元马尔可夫链与中智马尔可夫链：随机过程中的不确定性与模糊性建模。《Neutrosophic Sets and Systems》，59(1):10，2023。

[146] 内莉·雷吉娜·西凯拉·奥尔特加、保罗·塞萨尔·萨卢姆和爱德华多·马萨德。流行病建模中的模糊动力系统。《Kybernetes》，29(2):201–218，2000。[147] 朱莉·A·迪克森和巴特·科斯科。作为模糊动力系统的虚拟世界，1996。[148] 弗洛伦丁·斯马兰达克。中智系统与中智动力系统。《论文集》第八卷：中智理论与应用，第50页，2022。[149] 克莱·C·罗斯。关于微分方程。载于《微分方程：结合 Mathematica® 的入门》，第1–25页。施普林格，1984。[150] 奥斯莫·卡莱瓦。模糊微分方程。《模糊集与系统》，24(3):301–317，1987。[151] 梅赫兰·马赞达拉尼和李秀。模糊微分方程综述。《IEEE Access》，9:62195–62211，2021。[152] 阿希什·阿查里亚、桑乔伊·马哈托、尼基莱什·希尔、阿尼梅什·马哈塔、苏普里亚·穆克吉、萨纳特·库马尔·马哈托和巴纳马利·罗伊。一种用于湖泊水体与沉积物磷模型的直觉模糊微分方程方法。《Healthcare Analytics》，5:100294，2024。[153] 斯内赫·拉塔和阿米特·库马尔。一种求解时变直觉模糊微分方程的新方法及其在分析工业系统直觉模糊可靠性中的应用。《Concurrent Engineering》，20(3):177–184，2012。[154] I·R·苏马蒂和V·莫哈纳·普里娅。关于中智微分方程的新视角。《Infinite Study》，2018。[155] 阿卜杜勒·阿拉明、桑卡尔·普拉萨德·蒙达尔、沙里富尔·阿拉姆、阿里·艾哈迈迪安、索海尔·萨拉赫舒尔和迈赫迪·萨利米。中智齐次差分方程的解与解释。《Symmetry》，12(7):1091，2020。[156] 康斯坦丁诺斯·E·帕索普洛斯和迈克尔·N·弗拉哈蒂斯。通过粒子群优化求解全局优化问题的近期方法。《自然计算》，1(2):235–306，2002。[157] 韦尔登·A·洛德威克和雅努什·卡茨普日克。《模糊优化：最新进展与应用》，第254卷。施普林格，2010。[158] 普拉门·P·安格洛夫。直觉模糊环境下的优化。《模糊集与系统》，86 306，1997 3 299( ): – 。[159] 菲罗兹·艾哈迈德。用于多目标规划问题的交互式中智优化技术：在制药供应链管理中的应用。《运筹学年鉴》，311(2):551–585，2022。[160] 格雷厄姆·克利福德·古德温、斯特凡·F·格雷贝、马里奥·E·萨尔加多等。《控制系统设计》，第240卷。普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，2001。[161] 奥斯卡·卡斯蒂略和帕特里夏·梅林。三型模糊控制。载于《智能控制中的三型模糊逻辑》，第1–4页。施普林格，2023。[162] 奥斯卡·卡斯蒂略、法蒂赫·库特卢和厄兹坎·阿坦。双转子多输入多输出系统的直觉模糊控制。《智能与模糊系统杂志》，38(1):821–833，2020。[163] 曼努埃尔·迈克尔·贝劳恩-埃斯皮里图、凯蒂·玛丽露·莫斯科索-保卡尔丘科、路易斯·恩里克·埃斯皮诺萨-基斯佩、法布里-西奥·米格尔·莫雷诺-梅嫩德斯、赫苏斯·塞萨尔·桑多瓦尔-特里戈斯、埃德森·希尔梅尔·胡尔卡-马塞洛、贝妮·哈内特·图亚-塞尔纳和埃德加·古铁雷斯-戈麦斯。使用中智控制系统模型实现工业规模柑橘皮精油提取的自动化与优化。《中智集与系统》，62(1):2，2023。[164] 佩德罗·M·加西亚、吉尔伯托·F·卡斯特罗、伊内尔达·A·马蒂略和迈克尔·Y·L·巴斯克斯。无人机（UAV）改进设计以获得更长飞行续航时间，并用于基于中智控制的火龙果作物分析。《国际中智科学杂志（IJNS）》，19(3)，2022。[165] 藤田孝明、艾哈迈德·海拉特和拉埃德·哈塔姆莱。析取模糊控制系统中的倒置逻辑：具备矛盾感知能力的规则反转与去析取化。《统计、优化与信息计算》，2025。[166] 约翰·E·霍普克罗夫特、拉吉夫·莫特瓦尼和杰弗里·D·乌尔曼。《自动机理论、语言与计算导论》。《ACM SIGACT News》，32(1):60–65，2001。[167] 李永明和王倩。泛模糊自动机。《模糊集与系统》，249:27–48，2014。[168] 马尔齐耶·沙姆西扎德和穆罕默德·迈赫迪·扎赫迪。直觉广义模糊自动机。《软计算》，20:3505–3519，2016。[169] V·卡蒂克扬、和R·卡鲁派亚。区间中智自动机的子系统。《数学进展：科学期刊》，2020。[170] 藤田孝明和弗洛伦丁·斯马兰达克。不确定自动机与不确定图文法。《中智集与系统》，74:128–191，2024。[171] 斯坦尼斯瓦夫·祖科夫斯基。格论导论。《形式化数学》，1(1):215–222，1990。[172] 瓦西里斯·G·卡布拉索斯和瓦西利奥斯·佩特里迪斯。模糊格神经计算（FLN）模型。《神经网络：国际神经网络学会官方期刊》，2000。[173] 瓦桑塔·坎达萨米和弗洛伦丁·斯马兰达克。中智格。《Infinite Study》，2014。[174] 藤田孝明。拓展析取超超结构的视野：在决策、控制与神经系统中的应用。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第416页，2025。[175] 史蒂夫·阿沃迪。《范畴论》，第52卷。牛津大学出版社，2010。[176] 菅野道夫和佐佐木守俊。L。

-模糊范畴。《模糊集与系统》 ，11(1-3):43–64 ，1983.

[177] Zhang Cheng与Yuan Xue-hai. 由函子范畴表示的四种直觉模糊范畴. 《直觉模糊集札记》, 1999.[178] Bobylev Vjacheslav. 油气储量与资源的中智范畴. 《模糊扩展与应用期刊》, 第e224649页, 2025.[179] Peter J Brockwell与Richard A Davis. 时间序列：理论与方法. 施普林格科学与商业媒体, 2009.[180] Radha Mohan Pattanayak、Himansu Sekhar Behera与Sibarama Panigrahi. 一种基于概率直觉模糊集的高阶模糊时间序列预测新模型. 《人工智能的工程应用》, 99:104136, 2021.[181] Qiang Song与Brad S Chissom. 模糊时间序列及其模型. 《模糊集与系统》, 54(3):269–277, 1993.[182] Ya'nan Wang、Yingjie Lei、Xiaoshi Fan与Yi Wang. 基于直觉模糊推理的直觉模糊时间序列预测模型. 《工程中的数学问题》, 2016(1):5035160, 2016.[183] Sanjay Kumar与Sukhdev Singh Gangwar. 直觉模糊时间序列：一种处理时间序列预测中非确定性的方法. 《IEEE模糊系统汇刊》, 24(6):1270–1281, 2015.[184] Mohamed Abdel-Basset、Victor Chang、Mai Mohamed与Florentin Smarandache. 一种基于中智时间序列的精细化预测方法. 《对称》, 11(4):457, 2019.[185] Rafif Alhabib与AA Salama. 中智时间序列——研究其模型（线性—对数）并检验其线性模型系数的显著性. 《中智集与系统》, 33(1):7, 2020.[186] SS Saravanaraj 、 Vediyappan Govindan 、 Said Broumi 等 . 利用中智时间序列进行情感分析以预测股票市场. 《国际中智科学期刊》（IJNS）, 25(2), 2025.[187] Jan LG Dietz. 企业本体：理论与方法论. 施普林格, 2006.[188] Quan Thanh Tho、Siu Cheung Hui、Alvis Cheuk M Fong与Tru Hoang Cao. 面向语义网的自动模糊本体生成. 《IEEE知识与数据工程汇刊》, 18(6):842–856, 2006.[189] Jun Zhai、Yan Chen、Qinglian Wang与Miao Lv. 面向语义网知识共享的基于直觉模糊集的模糊本体模型. 载于2008年第12届计算机支持的协同设计国际会议, 第465–469页. IEEE, 2008.[190] Saad M Darwish、Raad A Ali与Adel A Elzoghabi. 面向电子教育系统的基于中智本体的英语作文自动评分引擎. 《应用科学》, 13(15):8601, 2023.[191] Huda Lafta Majeed、Esraa Saleh Alomari、Ali Nafea Yousif、Oday Ali Hassen、Saad M Darwish与Yu Yu Gromov. 用于网络安全教育自动作文评分的二型中智本体. 《网络安全与信息管理期刊》, 15(2), 2025.[192] S. A. Orlovsky. 基于模糊偏好关系的决策. 《模糊集与系统》, 1:155–167, 1978.[193] Tien-Chin Wang与Yueh-Hsiang Chen. 将一致性模糊偏好关系应用于合作伙伴选择. Omega, 35(4):384–388, 2007.[194] SA484282 Orlovsky. 基于模糊偏好关系的决策. 载于《智能系统模糊集读本》, 第717–723页. 爱思唯尔, 1993.[195] Huchang Liao与Zeshui Xu. 基于乘法一致性的直觉模糊偏好关系优先级. 《IEEE模糊系统汇刊》, 22(6):1669–1681, 2014.[196] Zhou-Jing Wang. 基于直觉模糊偏好关系推导直觉模糊权重. 《应用数学建模》, 37(9):6377–6388, 2013.[197] Ru-xia Liang、Jian-qiang Wang与Hong-yu Zhang. 一种基于具有完全权重信息的单值梯形中智偏好关系的多准则决策方法. 《神经计算与应用》, 30(11):3383–3398, 2018.[198] Fanyong Meng、Na Wang与Yanwei Xu. 区间中智偏好关系及其在虚拟企业合作伙伴选择中的应用. 《环境智能与人性化计算期刊》, 10 5036, 2019 12 5007( ): – .[199] Fanyong Meng、Na Wang与Yanwei Xu. 三角模糊中智偏好关系及其在企业资源规划软件选择中的应用. 《认知计算》, 12(1):261–295, 2020.[200] Marcin Detyniecki. 聚合算子基础. AGOP聚合算子国际暑期学校, 阿斯图里亚斯, 2001.[201] Abbas Mardani、Mehrbakhsh Nilashi、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Siti Rahmah Awang、Habib Zare与Noriza Mohd Jamal. 基于模糊聚合算子的决策方法：1986年至2017年三十年综述. 《国际信息技术与决策期刊》, 17(02):391–466, 2018.[202] Gagandeep Kaur与Harish Garg. 立方直觉模糊聚合算子. 《国际不确定性量化期刊》, 8(5), 2018.[203] Zeshui Xu. 直觉模糊聚合算子. 《IEEE模糊系统汇刊》, 15 1187, 2007 6 1179( ): – .[204] Kalyan Mondal、Surapati Pramanik与Bibhas C Giri. 用于多准则决策的粗糙中智聚合算子. 载于《使用中智集的模糊多准则决策》, 第79–105页. 施普林格, 2018.[205] Chiranjibe Jana、Madhumangal Pal、Faruk Karaaslan与JQ Wang. 梯形中智聚合算子及其在多属性决策过程中的应用. 《伊朗科学》, 27 1673, 2020 3 1655( ): – .

[206] Sonia Guerra Iglesias、Andrea Eugenia Pacheco Lemus、Vallardo Villegas-Ricauter、Lorena del Carmen Bodero Arizaga 和 Luis Enrique Silva Adriano。使用成岩性模糊软集研究残障人士沟通中的包容性感知。《中智集与系统》，92:641–651，2025。[207] Alfréd Rényi。关于熵与信息的度量。载于《第四届伯克利数学统计与概率研讨会论文集》，第1卷：统计理论贡献，第4册，第547–562页。加利福尼亚大学出版社，1961。[208] Shifei Ding、Zhongzhi Shi、Shixiong Xia 和 Fengxiang Jin。模糊信息度量研究。载于《第四届国际模糊系统与知识发现会议（FSKD 2007）》，第3卷，第376–380页。IEEE，2007。[209] Jun Ye。直觉模糊熵的两种有效度量。《Computing》，87(1):55–62，2010。[210] Haibo Wu、Ye Yuan、Lijun Wei 和 Lidan Pei。单值中智集的熵、相似度量与交叉熵及其在多属性决策中的应用。《Soft Computing》，22 7376，2018 22 7367( ): – 。[211] Shio Gai Quek、Ganeshsree Selvachandran、Florentin Smarandache、J Vimala、Son Hoang Le、Quang-Thinh Bui 和 Vassilis C Gerogiannis。成岩性集的熵度量及其在多属性决策中的应用。《Mathematics》，8(6):965，2020。[212] A Ardeshir Goshtasby。相似性与差异性度量。载于《图像配准：原理、工具与方法》，第7–66页。Springer，2012。[213] Liu Xuecheng。模糊集的熵、距离度量和相似度量及其关系。《Fuzzy sets and systems》，52(3):305–318，1992。[214] Yafei Song、Xiaodan Wang、Wen Quan 和 Wenlong Huang。构造直觉模糊集相似度量的新方法。《Soft Computing》，23(6):1985–1998，2019。[215] Jun Ye 和 Qiansheng Zhang。用于多属性决策的单值中智相似度量。《Neutrosophic sets and systems》，2:48–54，2014。[216] Rakhal Das、Anjan Mukherjee 和 Binod Chandra Tripathy。中智相似度量在新冠肺炎中的应用。《Annals of Data Science》，9(1):55–70，2022。[217] S Anitha 和 A Francina Shalini。成岩性立方模糊集的相似度量：示例与可能性。Infinite Study，2023。[218] Emmanual N Barron。博弈论：导论。John Wiley & Sons，2024。[219] Jean-Pierre Aubin。合作模糊博弈。《Mathematics of Operations Research》，6(1):1–13，1981。[220] Rajkumar Verma 和 Abha Aggarwal。具有语言直觉模糊收益的矩阵博弈：基本结果与求解方法。《Artificial Intelligence Review》，54(7):5127–5162，2021。[221] Nemis García Arias、Edwin Prado Calderón、Leonardo Rosillo Abarca 和 Sol David Lopezdomínguez Rivas。应用于政治情境的中智博弈，第37卷。Infinite Study，2020。[222] Kevin Gurney。神经网络导论。CRC出版社，2018。[223] Feipeng Da 和 Wenzhong Song。用于直接自适应控制的模糊神经网络。《IEEE Transactions on Industrial Electronics》，50(3):507–513，2003。[224] Łukasz Apiecionek、Rafał Moś 和 Dawid Ewald。采用有序模糊数的生活质量技术模糊神经网络。《Applied Sciences》，13(6):3487，2023。[225] Krassimir Atanassov、Sotir Sotirov 和 Tania Pencheva。直觉模糊深度神经网络。《Mathematics》，11(3):716，2023。[226] RJ Kuo 和 WC Cheng。具有高斯隶属函数的直觉模糊神经网络。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，36(6):6731–6741，2019。[227] Yasmine M Ibrahim、Reem Essameldin 和 Saad M Darwish。使用中智神经网络进行社交媒体取证的自适应仇恨言论检测方法。《Computers, Materials & Continua》，79(1)，2024。[228] OM Khaled、AA Salama、Mostafa Herajy、MM El-Kirany、Huda E Khalid、Ahmed K Essa 和 Ramiz Sabbagh。采用中智神经网络检测物联网网络中网络攻击的新方法。《Neutrosophic Sets and Systems》，86(1):48，2025。[229] Yasmine M Ibrahim、Reem Essameldin 和 Saad M Darwish。使用中智神经网络对社交媒体取证中的网络欺凌相关仇恨言论进行细粒度分类。载于《国际高级智能系统与信息学会议》，第53–62页。Springer，2024。[230] Jun Ye 和 Wenhua Cui。中智复合正交神经网络及其在中智函数逼近中的应用。《Symmetry》，11(2):147，2019。[231] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。超超图神经网络与成岩性图神经网络：理论基础。Infinite Study，2025。[232] John Fox。回归诊断：导论。Sage出版社，2019。[233] Hsiao-Fan Wang 和 Ruey-Chyn Tsaur。模糊回归模型的洞见。《Fuzzy sets and systems》，112(3):355–369，2000。[234] Yun-Hsi O Chang 和 Bilal M Ayyub。模糊回归方法——比较评估。《Fuzzy sets and systems》，119(2):187–203，2001。[235] Abdullah Ali H Ahmadini。直觉模糊逻辑回归模型参数估计的新技术。《Ain Shams Engineering Journal》，13(1):101518，2022。

[236] Rangasamy Parvathi、C Malathi、Muhammad Akram 和 Krassimir T Atanassov。直觉模糊线性回归分析。《模糊优化与决策》，12(2):215–229，2013。[237] Juan Carlos López Gutiérrez、Isarelis Pérez Ones、Jesús Estupiñán Ricardo 和 Jean Pierre Ramos Carpio。将中智理论融入回归模型，以提升对社会创新生态系统中不确定性的预测能力。《中智集与系统》，71(1):18，2024。[238] Muhammad Aslam 和 Osama H Arif。含虚拟变量的中智回归建模：应用与模拟。《国际分析与应用期刊》，22:114–114，2024。[239] Mahmoud A Abo-Sinna 和 Nagwa G Ragab。基于 Kuhn-Tucker 必要条件的中智非线性回归。《统计应用专业期刊》，12(1):49–59，2023。[240] Ramez A. Elmasri 和 Shamkant B. Navathe。《数据库系统基础》。1989。[241] Zong Min Ma。模糊数据库建模的文献综述。《智能数据库：技术与应用》，第167–196页，2007。[242] Jose Galindo、Angelica Urrutia 和 Mario Piattini。《模糊数据库：建模、设计与实现》。IGI Global，2006。[243] Francesco Camastra、Angelo Ciaramella、Giuseppe Salvi、Salvatore Sposato 和 Antonino Staiano。论模糊知识库系统的可解释性。《PeerJ计算机科学》，10，2024。[244] Lazarieva N. 利用 Sugeno 模糊知识库对复杂控制系统中的多工厂依赖关系进行建模。《人工智能》，2023。[245] Supriya Kumar De、Ranjit Biswas 和 Akhil Ranjan Roy。直觉模糊数据库。载于：第二届IFS国际会议，NIFS，第4卷，第43–31页，1998。[246] AA Salama、Mohamed Eisa 和 MM Abdelmoghny。中智关系数据库。《无限研究》，2014。[247] Soumitra De、Jaydev Mishra 和 Siddhartha Chatterjee。中智数据库中的无损连接分解与依赖保持。《固态技术》，63(1):908–916，2020。[248] Soumitra De 和 Jaydev Mishra。中智数据库系统中的多值依赖。载于：国际通信与计算技术会议，第267–280页。Springer，2023。[249] S De 和 J Mishra。中智逻辑——通过中智数据库模型执行不精确查询的更佳方法。《印度科学与技术期刊》，17(29):2981–2991，2024。[250] Ayush K Varshney 和 Vicenç Torra。各类模糊规则系统近期趋势与应用的文献综述。《国际模糊系统期刊》，25(6):2163–2186，2023。[251] Muhammad Arif Butt 和 Muhammad Akram。一种用于操作系统进程调度器的新型直觉模糊规则决策系统。《SpringerPlus》，5(1):1547，2016。[252] Sameh H Basha、Areeg S Abdalla 和 Aboul Ella Hassanien。NRCS：中智规则分类系统。载于：SAI智能系统会议论文集，第627–639页。Springer，2016。[253] Amr Hefny、Aboul Ella Hassanien 和 Sameh H Basha。基于手写动态签名分析的中智规则身份验证系统。《计算机、材料与连续介质》，69(2)，2021。[254] James G Oxley。《拟阵理论》，第3卷。牛津大学出版社（美国），2006。[255] Deyin Wu 和 Yonghong Li。闭合 GV 模糊拟阵的诱导基公理。《智能与模糊系统期刊》，40(1):1037–1049，2021。[256] Hui-Min Xiao、Mei-Qi Wang、Yan-Li Cao 和 Yu-Jie Guo。基于模糊拟阵的犹豫模糊聚类方法研究。《智能与模糊系统期刊》，40(5):9031–9039，2021。[257] Xiaonan Li 和 Huangjian Yi。直觉模糊拟阵。《智能与模糊系统期刊》，33:3653–3663，2017。[258] Takaaki Fujita。中智拟阵、反拟阵与贪婪拟阵：不确定性下组合结构的统一框架。《Abhath基础与应用科学期刊》，4(1):73–93，2025。[259] Takaaki Fujita。中智闭包拟阵简札。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他：第三卷》，146，2024。[260] Takaaki Fujita。模糊与中智偏移综述：与若干集合概念及归一化函数的联系。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第74页，2024。[261] Ethem Alpaydin。《机器学习导论》。MIT出版社，2020。[262] Meysam Gheisarnejad、Ardashir Mohammadzadeh、Hamed Farsizadeh 和 Mohammad Hassan Khooban。面向电信应用的基于5G电信变换器的深度三型模糊机器学习控制稳定化。《IEEE电路与系统II：简报》，69:544–548，2022。[263] Li Liu 和 Fanzhang Li。动态模糊机器学习综述。《ACM计算调查》，55 42，2022 1 : – 。[264] Grigore Albeanu。迈向直觉模糊学习计算模型。载于：《电子学习与教育软件会议论文集》（eLSE），第9卷，第610–615页。Carol I国防大学出版社，2013。[265] Majed Albaity、Tahir Mahmood 和 Zeeshan Ali。基于直觉模糊软 WASPAS 方法的机器学习与人工智能对商业的影响。《数学》，11(6):1453，2023。

[266] 穆罕默德·阿尔希科、迈萨姆·杰迪和赛义德·布鲁米。《人工智能与中智机器学习在新冠肺炎诊断和检测中的应用》。《应用数学与数据分析展望》期刊，1(2)，2023。[267] 阿齐丁·埃尔哈苏尼、苏菲安·伊德布拉欣和弗洛伦丁·斯马兰达奇。《中智环境中的机器学习：综述》。《无限研究》，2019。[268] M·阿尔·塔汉和比詹·达瓦兹。《与电化学电池相关的弱化学超结构》。《伊朗数学化学杂志》，9(1)：65–75，2018。[269] 托马斯·武尤克利斯。《定义在同一集合上的 Hv 群》。《离散数学》，155(1-3)：259–265，1996。[270] 比詹·达瓦兹和伊琳娜·克里斯蒂亚。《模糊代数超结构》。《模糊与软计算研究》，321：38–46，2015。[271] 星期日·阿德西纳·阿德比西和阿德通吉·佩辛斯·阿朱埃比希。《涉及中智超结构的阶、典型中智群的构造与建立》。《工程中的超软集方法》，3 31，2025 26：–。[272] 阿德尔·阿尔-奥达里。《三类中智集的中智幂集与中智超结构》。《纯粹与应用数学年刊》，31(2)：125–146，2025。[273] 藤田孝明和弗洛伦丁·斯马兰达奇。《不确定标记图与不确定图类（附各类不确定集综述）》。《无限研究》，2024。[274] 汉斯-于尔根·齐默尔曼。《模糊集理论及其应用》。《施普林格科学与商业媒体》，2011。[275] 克拉西米尔·阿塔纳索夫。《直觉模糊集》。《国际生物自动化杂志》，20：1，2016。[276] 克拉西米尔·T·阿塔纳索夫和G·加尔戈夫。《直觉模糊逻辑》。《施普林格》，2017。[277] 克拉西米尔·阿塔纳索夫和乔治·加尔戈夫。《直觉模糊逻辑基础。第一部分》。《模糊集与系统》，95(1)：39–52，1998。[278] 王海斌、弗洛伦丁·斯马兰达奇、张艳青和拉杰谢卡尔·桑德拉曼。《单值中智集》。《无限研究》，2010。[279] 弗洛伦丁·斯马兰达奇。《逻辑的统一场：中智逻辑》。《哲学》，第1–141页。美国研究出版社，1999。[280] 阮春涛、穆姆塔兹·阿里和弗洛伦丁·斯马兰达奇。《一种基于新相关系数并应用于医学诊断的直觉模糊聚类算法》。《智能与模糊系统杂志》，36(1)：189–198，2019。[281] 路易斯·A·P·桑托斯。《作为医学诊断所用X射线束传感器的双极结型晶体管综述》。《传感器》，22(5)：1923，2022。[282] 兹齐斯瓦夫·帕夫拉克。《粗糙集》。《国际计算机与信息科学杂志》，11：341–356，1982。[283] 兹齐斯瓦夫·帕夫拉克、S·K·迈克尔·王、沃伊切赫·齐亚尔科等。《粗糙集：概率方法与确定性方法》。《国际人机研究杂志》，29(1)：81–95，1988。[284] 赛义德·布鲁米、弗洛伦丁·斯马兰达奇和马莫尼·达尔。《粗糙中智集》。《无限研究》，32 502，2014 493：–。[285] 兹齐斯瓦夫·帕夫拉克。《粗糙集：数据推理的理论方面》，第9卷。《施普林格科学与商业媒体》，2012。[286] 兹齐斯瓦夫·帕夫拉克。《粗糙集理论及其在数据分析中的应用》。《控制论与系统》，29 688，1998 7 661( )：–。[287] 恩里科·布兰齐耶里和安东·布里尔。《基于学习的电子邮件垃圾邮件过滤技术综述》。《人工智能评论》，29：63–92，2008。[288] 埃马纽埃尔·格本加·达达、约瑟夫·斯蒂芬·巴西、哈鲁纳·奇罗马、沙菲伊·穆罕默德·阿卜杜勒哈米德、阿德巴约·奥卢索拉·阿德通比和奥佩耶米·埃马纽埃尔·阿吉布瓦。《用于电子邮件垃圾邮件过滤的机器学习：综述、方法与开放研究问题》。《Heliyon》，5，2019。[289] 田口玄一。《日本的质量工程》。《统计学通讯：理论与方法》，14 2801，1985 2785：–。[290] 藤田孝明。《直觉超粗糙集、单向 s-超粗糙集、容忍超粗糙集和动态超粗糙集札记》。《软计算融合应用》，2024。[291] 藤田孝明和弗洛伦丁·斯马兰达奇。《超模糊、超中智、超等离子、超软与超粗糙集简明导论及实践示例》。《中智集与系统》，80 631，2025 609：–。[292] 藤田孝明。《超粗糙 TOPSIS 方法与超超粗糙 TOPSIS 方法》。《不确定性论述与应用》，2(1)：61–75，2025。[293] T·藤田和A·迈赫穆德。《分级超粗糙集与语言超粗糙集》。《Galoitica：数学结构与应用杂志》，12(1)：1–23，2025。[294] T·藤田。《不确定粗糙集与不确定超粗糙集札记》。《应用信息科学》，7：1–14，2025。[295] 藤田孝明。《超模糊超粗糙集、超中智超粗糙集与超软超粗糙集研究及其在网络安全中的应用》。《人工智能与网络安全》，2：14–36，2025。

[296] Salvatore Greco、Benedetto Matarazzo、Roman Slowinski 和 Jerzy Stefanowski。支配型粗糙集方法的变精度模型。载于《粗糙集与计算当前趋势：第二届国际会议》，RSCTC 2000，加拿大班夫，2000年10月16日至19日，修订论文集第2卷，第170–181页。Springer，2001。[297] Salvatore Greco、Benedetto Matarazzo 和 Roman Słowiński。有序数据的粒计算与数据挖掘：基于支配的粗糙集方法。载于《粒计算、模糊计算与软计算》，第117–145页。Springer，2023。[298] Shaoyong Li、Tianrui Li 和 Dun Liu。属性集变化下基于支配的粗糙集方法中近似集的增量更新。《知识型系统》，40：17–26，2013。[299] Wajid Ali、Tanzeela Shaheen、Iftikhar Ul Haq、Hamza Ghazanfar Toor、Tmader Alballa 和 Hamiden A. Wahed Khalifa。一种基于幂聚合算子和直觉模糊数的新型区间值决策理论粗糙集模型及其在医学诊断中的应用。《数学》，2023。[300] Xuelan Zhang、Jiaheng Kang、Yue Che、Xiran Cao 和 Peize Li。决策理论粗糙集模型与基于空间分析的垃圾焚烧发电厂选址：一项针对中国一线城市的案例研究。《环境科学与污染研究》，30：115699–115720，2023。[301] Tanzeela Shaheen、Hamrah Batool Khan、Wajid Ali、Shaheryar Najam、Md. Zia Uddin 和 Mohammad Mehedi Hassan。序贯决策理论粗糙集模型的一种新型推广及其应用。《Heliyon》，10，2024。[302] KP Girish 和 Sunil Jacob John。粗多重集及其多重集拓扑。载于《粗糙集论丛》第14卷，第62–80页。Springer，2011。[303] KP Girish 和 Sunil Jacob John。论粗多重集关系。《粒计算、粗糙集与智能系统国际期刊》，3(4)：306–326，2014。[304] Junbo Zhang、Tianrui Li 和 Hongmei Chen。复合粗糙集。载于《人工智能与计算智能国际会议》，第150–159页。Springer，2012。[305] Junbo Zhang、Yun Zhu、Yi Pan 和 Tianrui Li。用于计算复合粗糙集近似的高效并行布尔矩阵算法。《信息科学》，329：287–302，2016。[306] Hongmei Chen、Tianrui Li、Junbo Zhang、Chuan Luo 和 Xinjiang Li。概率复合粗糙集与属性约简。2014。[307] Pradip Kumar Maji、Ranjit Biswas 和 A Ranjan Roy。软集理论。《计算机与数学及其应用》，45(4-5)：555–562，2003。[308] Dmitriy Molodtsov。软集理论——初步结果。《计算机与数学及其应用》，37 31，1999 4 5 19(-): – 。[309] Katherine Taken Smith 和 Austin Pinkerton。大学生的公寓选择：美国人与亚洲人使用的标准、信息来源和媒体是否不同？《国际住房市场与分析期刊》，14(1)：55–71，2021。[310] V Aslıhan Nasır、Sema Yoruker、Figen Güneş 和 Yeliz Ozdemir。影响消费者购买笔记本电脑的因素。载于第六届全球商业与经济学会议，2006。[311] Muhammad Ihsan、Atiqe Ur Rahman 和 Muhammad Haris Saeed。带有招聘流程决策应用的超软专家集。2021。[312] Florentin Smarandache。将软集扩展为超软集，进而扩展为矛盾学超软集。《中智集与系统》，22(1)：168–170，2018。[313] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。驾驭双极不确定性：用于知识表示的双极不确定软集与双极不确定超软集。《无限研究》，2026。[314] Viviana del Rocío Marfetan Marfetan、Lesly Gissela Tipanguano Chicaiza、Styven Andrés Pila Chicaiza 和 Estephany Monserrath Ojeda Sanchez。使用不确定软集和 C4.5 算法对厄瓜多尔动物虐待案件进行分类。《中智集与系统》，92：121–133，2025。[315] Wei Wei 和 Pingting Peng。用于考虑不确定性的优先决策的加权不确定软集及其在装备制造企业绿色竞争力评价中的应用。《中智集与系统》，85：1018–1026，2025。[316] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。高级软集变体导论：超超软集、不确定超超软集、不确定树软集、双超软集、图软集及其他。《中智集与系统》，82：817–843，2025。[317] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。在软集理论中运用量子叠加：引入量子超软集与超超软集。《欧洲纯粹与应用数学期刊》，18(3)：6607–6607，2025。[318] Yan Cao。将树软范式与超软范式融入城市老年护理评估：一种综合性的 n-超超图方法。《中智集与系统》，85：852–873，2025。[319] Adebisi Sunday Adesina。不确定软集、不确定超软集和树软集的进一步运算（补、交、并）及其应用。《基础与应用科学杂志》，21：47–52，2025。[320] M Myvizhi、Ahmed A Metwaly 和 Ahmed M Ali。用于细化空气污染分析的树软方法：案例研究。《中智集与系统》，68(1)：17，2024。[321] Florentin Smarandache。树软集与超软集的比较及树软集的模糊扩展。《工程中的超软集方法》，2024。

[322] Li Song、Jianyong Liu、Han Ding 和 Wenhui Zhang。基于智能制造环境的机械自动化生产控制系统分析的 Forestsoft 集。Neutrosophic Sets and Systems，85：229–254，2025。[323] Hairong Luo。通过层次化且具备不确定性感知的分析框架评估大学创新创业教育的 Forestsoft 集方法。Neutrosophic Sets and Systems，86 342，2025 332：–。[324] Hao Jin。利用 Forestsoft 超图和虚拟仿真技术评估建筑立面设计效果。Neutrosophic Sets and Systems，86：171–183，2025。[325] Mei Hong、Shengyan Xue 和 Xiaoli Zhou。用于虚拟现实数字媒体艺术设计创新评价的超维自适应 plithogenic-neutrosophic forestsoft 超超软集模型。Neutrosophic Sets and Systems，86：89–104，2025。[326] Hind Y Saleh、Areen A Salih、Baravan A Asaad 和 Ramadhan A Mohammed。二元双极软点与二元双极软集上的拓扑及其对称性质。Symmetry，16(1)：23，2023。[327] Asghar Khan、Muhammad Izhar 和 Mohammed M. Khalaf。广义多重模糊双极软集及其在决策中的应用。J. Intell. Fuzzy Syst.，37：2713–2725，2019。[328] Asghar Khan、Muhammad Izhar 和 Mohammed M Khalaf。双框架软 LA 半群。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，33(6)：3339–3353，2017。[329] Muhammad Izhar、Tariq Mahmood、Asghar Khan、Muhammad Farooq 和 Kostaq Hila。应用于 Abel-Grassmann 超群胚的双框架软集理论。New Mathematics and Natural Computation，18 841，2022 03 819( )：–。[330] Florentin Smarandache。超超软集与模糊扩展超超软集的基础：一种新视角。Neutrosophic Systems with Applications，11：48–51，2023。[331] Qi Liu、Enhong Chen、Hui Xiong、Yong Ge、Zhongmou Li 和 Xiang Wu。一种用于旅行套餐推荐的鸡尾酒式方法。IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering，26(2)：278–293，2012。[332] Devendra Kumar Tayal、Sumit Kumar Yadav 和 Divya Arora。利用基于方面的情感分析和 plithogenic 集对产品进行个性化排序。Multimedia Tools and Applications，82：1261–1287，2022。[333] Walid Abdelfattah。基于 plithogenic 集和数学规划的 DEA 总体效率评估变量选择程序。International Journal of Scientific Research and Management，2022。[334] Florentin Smarandache 和 Mumtaz Ali。中智三元组群（再探）。Neutrosophic sets and Systems，26(1)：2，2019。[335] Fazeelat Sultana、Muhammad Gulistan、Mumtaz Ali、Naveed Yaqoob、Muhammad Khan、Tabasam Rashid 和 Tauseef Ahmed。plithogenic 图研究：在全球传播冠状病毒病（COVID-19）中的应用。Journal of ambient intelligence and humanized computing，14(10)：13139–13159，2023。[336] S Sudha、Nivetha Martin 和 Florentin Smarandache。扩展 Plithogenic 集在 Plithogenic 社会关系图中的应用。Infinite Study，2023。[337] Stacy Sirmans、C Sirmans 和 John Benjamin。公寓租金的确定：配套设施、服务和外部因素的价值。Journal of Real Estate Research，4(2)：33–43，1989。[338] Mohammad Hasan Molooy Zada、Da Pan 和 Guiju Sun。个性化膳食规划的动态营养素分析综合系统综述：基于元分析和 PRISMA 的证据综合。Foods，14 3625，2025 21( )：。[339] R Moheith 和 J Subhashini。基于人工智能的食物推荐与卡路里估算：利用 CNN 实现个性化膳食规划。载于《可持续电气工程与智能系统》，第330–335页。CRC Press，2025。[340] Mafalda Nogueira、Francisca Dias 和 Vera Santos。可持续出行选择：探究消费者价值观、态度、感知行为控制和主观规范对其选择可持续出行方式可能性的影响。Journal of Consumer Behaviour，22(2)：511–528，2023。[341] Takaaki Fujita。模糊集、中智集和 plithogenic 集的层次不确定性简述。《通过图化、超化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第285页。[342] Young Bae Jun、Seok-Zun Song 和 Seon Jeong Kim。N-超集。Mathematics，6(6)：87，2018。[343] Witold Pedrycz。阴影集：模糊集的表示与处理。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)，28(1)：103–109，1998。[344] Mingjie Cai、Qingguo Li 和 Guangming Lang。动态模糊集的阴影集。Granular Computing，2：85 – 94，2016。[345] Gianpiero Cattaneo 和 Davide Ciucci。阴影集及相关代数结构。Fundamenta Informat- icae，55(3-4)：255–284，2003。[346] Krassimir T Atanassov。圆形直觉模糊集。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，39(5)：5981–5986，2020。[347] Muhammad Akram、A Nagoor Gani 和 A Borumand Saeid。模糊超图。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，26(2)：647–653，2014。[348] Wen-Ran Zhang。双极模糊集与关系：认知建模和多智能体决策分析的计算框架。NAFIPS/IFIS/NASA '94：《北美模糊信息处理学会双年会第一届国际联合会议论文集》。The Industrial Fuzzy Control and Intellige，第305–309页，1994。

[349] Yangxue Li 和 Yong Deng。直觉证据集。IEEE Access，7:106417–106426，2019。[350] Yige Xue 和 Yong Deng。直觉证据集下可能性测度的合取。Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing，12(7):7827–7836，2021。[351] Jiawei Zou。基于直觉证据集的极端不确定环境下决策。在 2022 年第七届云计算与大数据分析国际会议（ICCCBDA）论文集，第 73–80 页。IEEE，2022。[352] Chen Shouyu 和 Guo Yu。可变模糊集及其在防洪工程系统综合风险评估中的应用。Fuzzy Optimization and Decision Making，5(2):153–162，2006。[353] Wen-chuan Wang、Dong-mei Xu、Kwok-wing Chau 和 Guan-jun Lei。基于可变模糊集理论和模糊二元比较法的河流水质评估。Water Resources Management，28(12):4183–4200，2014。[354] Yunhai Fang、Xilai Zheng、Hui Peng、Huan Wang 和 Jia Xin。用于水质评估的可变模糊集相对隶属度计算新方法。Ecological Indicators，98:515–522，2019。[355] Vasile Patrascu。基于五值表示的知识表示新方法。arXiv 预印本 arXiv:1502 05562，2015。。[356] Vasile Patrascu。在五值表示框架下双极模糊集的相似度、基数和熵。arXiv 预印本 arXiv:1506.02060，2015。[357] Yong-Uk Cho、Young-Bae Jun 和 Seok-Zun Song。伪 MV 代数的双模糊理想。JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTING，22(1/2):475，2006。[358] Tadeusz Gerstenkorn 和 Jacek Mańko。双模糊概率集。Fuzzy Sets and Systems，71(2):207–214，1995。[359] Vicenç Torra。犹豫模糊集。International Journal of Intelligent Systems，25(6):529–539，2010。[360] M Murali Krishna Rao 和 B Venkateswarlu。 γ-半环的三极模糊内理想。Asia Pacific Journal of Management，5(2):192–207，2018。[361] M Murali Krishna Rao、B Venkateswarlu 和 Y Adi Narayana。半环上的三极模糊软理想与三极模糊软内理想。Italian Journal of Pure and Applied Mathematics，(422019):731743，2019。[362] M Murali Krishna Rao。

γ 15 2 199 206, -半群2018的三极模糊内理想。Ann. Fuzzy Math. Inform，( ): – 。[363] Xue Rong Zhao 和 Yiyu Yao。由阴影集定义的三路模糊划分。Information Sciences，497:23–37，2019。[364] Qingqing Hu 和 Xiaohong Zhang。三路模糊集及其应用（III）。Axioms，12(1):57，2023。[365] Sankar Das、Ganesh Ghorai 和 Madhumangal Pal。图像模糊容忍图及其应用。Complex & Intelligent Systems，8(1):541–554，2022。[366] Muhammad Akram、Danish Saleem 和 Talal Al-Hawary。球形模糊图及其在决策中的应用。Mathematical and Computational Applications，25(1):8，2020。[367] Fatma Kutlu Gündoğdu 和 Cengiz Kahraman。球形模糊集与球形模糊 TOPSIS 方法。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，36(1):337–352，2019。[368] Chris J Hinde、Robert Steven Patching 和 Stephen A McCoy。直觉模糊集中的语义转移与矛盾证据。载于 2008 年 IEEE 国际模糊系统会议（IEEE 计算智能世界大会）论文集，第 2095–2102 页。IEEE，2008。[369] CJ Hinde、RS Patching 和 SA McCoy。不一致直觉模糊集与质量赋值。载于《模糊集、直觉模糊集、广义网及相关主题的发展：基础》，第 133–153 页，2007。[370] Chao Wang、Minghu Ha 和 Xiaowei Liu。用于投票的三元模糊集数学模型。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，29(6):2381–2386，2015。[371] M Kavitha 和 R Irene Hepzibah。勾股中智模糊集上的新运算。TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics，2025。[372] Sujit Das、Bikash Koli Roy、Mohuya B Kar、Samarjit Kar 和 Dragan Pamučar。中智模糊集及其在决策中的应用。Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing，11 5029，2020 11 5017( ): – 。[373] Melvin Fitting。Kleene 三值逻辑及其衍生逻辑。Fundamenta Informaticae，20(1-3):113–131，1994。[374] John T Kearns。Kleene 三值逻辑系统的强完备性。Mathematical Logic Quarterly，25(3-6):61–68，1979。[375] Shawkat Alkhazaleh。中智模糊集理论。Critical Review，10:29–39，2015。[376] Ashraf Al-Quran、Hazwani Hashim 和 Lazim Abdullah。区间中智模糊集与 DEMATEL 结合新语言变量的混合方法。Symmetry，12(2):275，2020。[377] Satham Hussain、Jahir Hussain、Isnaini Rosyida 和 Said Broumi。四分区中智软图。载于《模糊集与逻辑研究进展及应用手册》，第 771–795 页。IGI Global，2022。[378] Ilanthenral Kandasamy。双值中智集、其最小生成树及聚类算法。Journal of Intelligent Systems，27(2):163–182，2018。[379] Qaisar Khan、Peide Liu 和 Tahir Mahmood。双值中智集的若干广义骰子测度及其应用。Mathematics，6(7):121，2018。

[380] Bin Zhu 和 Zeshui Xu。对对偶犹豫模糊集的一些结果。《智能与模糊系统杂志》，26(4):1657–1668，2014。[381] José Carlos R Alcantud、Gustavo Santos-García、Xindong Peng 和 Jianming Zhan。对偶扩展犹豫模糊集。《对称性》，11(5):714，2019。[382] Florentin Smarandache。模糊集是双重细化不确定性中智集的子类，也是一般细化中智集的子类。《中智集与系统》，58，2023。[383] Pritpal Singh 等。模糊集理论：处理人类感知无意识性与模糊性的新方法。《全文论文》，5(1):52–2，2023。[384] Florentin Smarandache。模糊集（as）是四分区中智集（qns）的一个特例。《思想之巢》，第16页。[385] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。局部中智逻辑与局部中智集：融入局部性及其应用。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第51页，2025。[386] Nguyen Xuan Thao、Florentin Smarandache 和 Nguyen Van Dinh。支撑中智集：软计算中的一个新概念。《无限研究》，2017。[387] Yuri Kaluzhny 和 Alexei Yu Muravitsky。基于Belnap四值逻辑的知识表示。《应用非经典逻辑杂志》，3(2):189–203，1993。[388] Marcelo E Coniglio 和 Abilio Rodrigues。从Belnap-Dunn四值逻辑到证据与真值的六值逻辑。《逻辑学研究》，112(3):561–606，2024。[389] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。对跖图里扬中智图。《中智优化与智能系统》，5:1–13，2024。[390] Takaaki Fujita。粗糙图里扬中智有向图与粗糙五分区中智有向图综述。《中智优化与智能系统》，5:48–79，2025。[391] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。毕达哥拉斯、费马型与复图里扬中智图。《SciNexuses》，2:39–63，2025。[392] Prem Kumar Singh、Naveen Surathu、Ghattamaneni Surya Prakash 等。基于图里扬的社交网络四路未知画像表征。《全文论文》，10(2):27–7，2024。[393] Rama Mallick 和 Surapati Pramanik。五分区中智集及其性质。《中智集与系统》，35:49，2020。[394] Radha R. 和 Stanis Arul Mary。五分区中智毕达哥拉斯集。《高级科学中心国际研究期刊》，2021。[395] Suman Das、Rakhal Das 和 Binod Chandra Tripathy。粗糙五分区中智集上的拓扑。《伊拉克科学杂志》，2022。[396] Jiarong Jia。面向工艺与艺术博物馆公共数字文化服务水平评估的三值中智偏移。《中智集与系统》，88(1):44，2025。[397] Takaaki Fujita。三值中智集、四值中智集、五值中智集与双值不确定软集。《应用中智系统》，25(5):3，2025。[398] Hongxin Wang。中医学生的职业认同形成：采用三值中智集的教育视角。《中智集与系统》，88:83–92，2025。[399] Fang Sun、Mifeng Ren、Yujing Shi 和 Xuanbai Feng。面向新能源发电系统数字化监控与远程运维的维护平台设计质量评估的四值中智偏移。《中智集与系统》，88:940–953，2025。[400] Wenwen Meng。基于人工智能的跨境电子商务人才培养质量评估的五值中智偏移。《中智集与系统》，88(1):54，2025。[401] Yuan Sun。数字时代运用五值中智集评估基础教育信息化绩效。《中智集与系统》，88(1):18，2025。[402] Takaaki Fujita。高级分区中智集：六分区、七分区、八分区、九分区和十分区结构的形式化。《Abhath基础与应用科学期刊》（已录用），2025。[403] Muhammad Arshad、Muhammad Saeed 和 Atiqe Ur Rahman。细化模糊集上的凸性兼凹性及其若干性质。《不确定性论述与应用》，1(1):140–150，2024。[404] Florentin Smarandache。n值细化中智逻辑及其在物理学中的应用。《无限研究》，4:143–146，2013。[405] Ryszard Wójcicki。关于n值卢卡西维奇逻辑最大度有限性的一个定理。《逻辑学分会通报》，4(1):19–23，1975。[406] Giovanni Panti。多值逻辑。载于《不确定性与不精确性的量化表示》，第25–74页。Springer，1998。[407] Fujita Takaaki 和 Arif Mehmood。迭代多模糊集、迭代多中智集、迭代多软集与多重超致集。《中智计算与机器学习》。ISSN 2574-1101，41:1–30，2025。[408] Florentin Smarandache。多重中智集导论。《无限研究》，2023。[409] Raúl González Salas、Jhael Mikaela Gómez Ashqui 和 Marco Paúl Medina Valencia。采用超致模糊软集评估罗非鱼物种的病毒易感性：针对tilv的多专家方法。《中智集与系统》，89:185–196，2025。

[410] Manuel Michael Beraún-Espíritu、Ketty Marilú Moscoso-Paucarchuco、Humberto Dax Bonilla-Mancilla、Edson Hilmer Julca-Marcelo、Anani Basaldua Galarza、Jean Pierre Espeza-Gavilán、Lizve Vilcapoma Ureta和Jacqueline Denisse Llacza-Molina。秘鲁胡宁虹鳟生产中的环境可持续性与组织承诺：一种基于多属性模糊软集的方法。《中智集与系统》，84 33，2025 1( )：。[411] T Bharathi和Arul Priya Sampath。多属性积直觉模糊图。《非洲数学》，36(4):1–18，2025。[412] V. S. Subha和R. Selvakumar。多属性中智超软粗糙集的一种新方法及其在面包店行业决策问题中的应用。《数学与应用通讯》，2024。[413] Takaaki Fujita。双值与多值多属性模糊集中的倒置逻辑：面向处理两个或多个矛盾值。2025。[414] Florentin Smarandache。《思想巢》。科学日志，第十三卷：结构/中性结构/反结构。无限研究，2024。[415] Salvatore Cardamone、Timothy J Hughes和Paul LA Popelier。多极静电学。《物理化学化学物理》，16(22):10367–10387，2014。[416] Sheikh Zain Majid、Muhammad Saeed、Umar Ishtiaq和Ioannis K Argyros。使用模糊超软集与多属性多极模糊超软集进行坝址选择的混合模型开发。《基础》，4(1):32–46，2024。[417] Juanjuan Chen、Shenggang Li、Shengquan Ma和Xueping Wang。m极模糊集：双极模糊集的扩展。《科学世界期刊》，2014(1):416530，2014。[418] Rajab Ali Borzooei、Hee Sik Kim、Young Bae Jun和Sun Shin Ahn。关于多极直觉模糊b-代数。《数学》，8(6):907，2020。[419] Kyung Tae Kang、Seok-Zun Song和Young Bae Jun。有限度多极直觉模糊集及其在bck/bci-代数中的应用。《数学》，8(2):177，2020。[420] V Rajam和N Rajesh。up-代数的多极中智子代数/理想。《国际中智科学杂志》（IJNS），23(4)，2024。[421] Limin Wu。用于将可持续性融入物流的多极区间值中智软集：基于绩效的绿色供应链评价。《中智集与系统》，88:988–998，2025。[422] Muhammad Saqlain、Muhammad Riaz、Natasha Kiran、Poom Kumam和Miin-Shen Yang。使用m极中智超软集广义相关系数的水质评价。《中智集与系统》，第55卷/2023：信息科学与工程国际期刊，第58页，2024。[423] M Sivakumar、Rabıyathul Basarıya、Abdul Rajak、M Senthil、T Vetriselvi、G Raja和R Rajavarman。变革阿拉伯语文本分析：将应用语言学与m极中智集相结合，研究社交媒体上的情绪变化与抑郁。《国际中智科学杂志》（IJNS），25(2)，2025。[424] Muhammad Akram。双极模糊图。《信息科学》，181(24):5548–5564，2011。[425] Deva Nithyanandham、Felix Augustin、David Raj Micheal和Nagarajan Deivanayagam Pillai。基于能量的双极直觉模糊有向图决策系统在新冠疫苗选择中的应用。《应用软计算》，147:110793，2023。[426] N Deva和A. Felix。双极直觉模糊竞争图。《物理学杂志：会议系列》，2267，2022。[427] K Sankar和Devarasan Ezhilmaran。平衡双极直觉模糊图。《国际工程与技术研究杂志》（IRJET），3(11):806–812，2016。[428] A Iampan、T Eswarlal等。双极模糊关系及其在现实问题中的应用。《IAENG国际计算机科学杂志》，51(9)，2024。[429] Hanan H Sakr、Abdisalam Hassan Muse、Mohamed S Mohamed和Saieed F Ateya。双极模糊软集的应用。《数学杂志》，2023(1):5467353，2023。[430] Muhammad Akram、Musavarah Sarwar、Wieslaw A Dudek、Muhammad Akram、Musavarah Sarwar和Wies- law A Dudek。双极中智图结构。《用于双极模糊信息分析的图》，第393–446页，2021。[431] Muhammad Akram和Maryam Nasir。基于直觉中智环境的若干竞争图。《信息》，8(4):132，2017。[432] Said Broumi、Assia Bakali、Mohamed Talea和Florentin Smarandache。1型广义双极中智图。无限研究，2017。[433] Waheed Ahmad Khan、Khurram Faiz和Abdelghani Taouti。双极图像模糊集与关系及其应用。《宋卡王子大学科学与技术杂志》，44(4)，2022。[434] Waheed Ahmad Khan、Mahnoor Bushra、Trung Tuan Nguyen、Minh Hoan Pham和Hai Van Pham。双极图像模糊影响图模型的若干新概念及其在多属性决策中的应用。《IEEE Access》，2025。[435] Zaheer Ahmad、Shahzaib Ashraf、Shawana Khan、Mehdi Tlija、Chiranjibe Jana和Dragan Pamucar。双极犹豫模糊软聚合信息下可持续能源解决方案的增强决策模型。《AIMS数学》，10(2):4286–4321，2025。

[436] Peide Liu、Mengjiao Shen 和 Witold Pedrycz。基于双层级双极犹豫模糊语言信息的 MAGDM 框架及其在人才优选中的应用。《国际模糊系统杂志》，24(4):1757–1779，2022。[437] Adem Yolcu。具有建筑风险评估多准则群体决策应用的双极球形模糊软拓扑。《Symmetry》，14(11):2362，2022。[438] Kalyan Sinha 和 Pinaki Majumdar。双极四分区单值中智粗糙集，第 38 卷。Infinite Study，2020。[439] Kalyan Sinha 和 Pinaki Majumdar。双极四分区单值中智集。《Proyecciones (Antofagasta)》，39(6):1597–1614，2020。[440] G Muhiuddin、Mohamed E Elnair、Satham Hussain 和 Durga Nagarajan。基于 TOPSIS 方法的双极四分区中智环境决策模型。《Neutrosophic Sets and Systems》，85:899–918，2025。[441] Pranab Biswas、Surapati Pramanik 和 Bibhas Chandra Giri。单值双极五分区中智集及其在 MADM 策略中的应用。2022。[442] Guifang Shen。高校混合式体育教学过程：基于单值双极五分区中智集的绩效评估视角。《Neutrosophic Sets and Systems》，87 1100，2025 1092: – 。[443] Nuttapong Wattanasiripong、Nuchanat Tiprachot 和 Somsak Lekkoksung。关于三极复模糊集及其在有序半群中的应用。《国际分析与应用杂志》，23:139–139，2025。[444] Asmaa Ghasoob Raoof、SR Yaseen、Qays Hatem Imran、S Khalil、Ali Younis Shakir 等。通过 m-极中智拓扑空间研究上软连通性的新类别。《Neutrosophic Sets and Systems》，94:175–187，2025。[445] Florentin Smarandache。《理念之巢：Scilogs，III：中智学万岁！》，第 3 卷。Infinite Study，2017。[446] Muhammad Riaz、Muhammad Tahir Hamid、Deeba Afzal、Dragan Pamucar 和 Yuming Chu。q-犹豫正交对 m-极模糊集在机器人农业耕作中的多准则决策。《PLoS ONE》，16，2021。[447] Harish Garg、Muhammad Riaz、Muhammad Abdullah Khokhar 和 Maryam Saba。立方 m-极模糊集的相关性度量及其应用。《工程数学问题》，2021。[448] Aiyared Iampan、Rana Muhammad Zulqarnain、Imran Siddique、Hamiden Abd 和 El-Wahed Khalifa。基于相关系数的广义多极中智软集决策方法。《Neutrosophic Sets and Systems》，51:221–233，2022。[449] Shovan Dogra 和 Madhumangal Pal。BCK 代数的 m-极图像模糊理想。《国际计算智能系统杂志》，13(1):409–420，2020。[450] Jasminara Khatun、Biswajit Bera、Sk Amanathulla 和 Madhumangal Pal。m-极图像模糊图上的若干运算。《TWMS 应用与工程数学杂志》，2025。[451] Muhammad Akram、Arooj Adeel 和 José Carlos R Alcantud。采用 m-极犹豫模糊 TOPSIS 方法的多准则群体决策。《Symmetry》，11(6):795，2019。[452] Muhammad Akram 和 Arooj Adeel。基于犹豫 m-极模糊模型的群体决策新型 TOPSIS 方法。《智能与模糊系统杂志》，37(6):8077–8096，2019。[453] Muhammad Riaz、Maryam Saba、Muhammad Abdullah Khokhar 和 Muhammad Aslam。m-极球形模糊集的新概念及其新型相关性度量，并应用于模式识别和医学诊断。《AIMS 数学》，6(10):11346–11379，2021。[454] Rukhsana Kausar、Shaista Tanveer、Muhammad Riaz、Dragan Pamucar 和 Cirovic Goran。基于 LAM 和 SIR 模型的 m-极球形模糊信息拓扑数据分析。《Symmetry》，14(10):2216，2022。[455] S Satham Hussain、Durga Nagarajan、Hossein Rashmanlou 和 Farshid Mofidnakhaei。m-极四分区中智环境下的新型供应链决策模型。《应用数学与计算》，第 1–26 页，2024。[456] Basavaraj V Hiremath、Durga Nagarajan、Satham Hussain、Hossein Rashmanlou 和 Farshid Mofidnakhaei。m-极四分区中智图及其在移动网络选择决策中的应用。《Neutrosophic Sets and Systems》，82:458–477，2025。[457] Fransisca Dini Ariyanti、Andrew Russell 和 Leonardo Setiawan。采用 PDCA 改进供应商管理系统，并运用模糊层次分析法优化运输供应商选择。载于《IOP 地球与环境科学会议系列》，第 794 卷，页码 012077。IOP Publishing，2021。[458] S Alireza Fayazi 和 Ardalan Vahidi。面向自动驾驶车辆的智慧城市交叉路口控制方案的车辆在环（VIL）验证。载于《2017 IEEE 控制技术与应用会议（CCTA）》，第 1575–1580 页。IEEE，2017。[459] Prem Kumar Singh。复合拟形集。《国际中智科学杂志》，2022。[460] Daniel Ramot、Ron Milo、Menahem Friedman 和 Abraham Kandel。复模糊集。《IEEE 模糊系统汇刊》，10:171–186，2002。[461] Daniel Ramot、Menahem Friedman、Gideon Langholz、Ron Milo 和 Abraham Kandel。关于复模糊集。第 10 届 IEEE 国际模糊系统会议。（目录号 01CH37297），3:1160–1163，第 2 卷，2001。[462] Omolbanin Yazdanbakhsh 和 Scott Dick。复模糊集与逻辑系统综述。《模糊集与系统》，338:1–22，2017。[463] Abdulazeez Alkouri 和 Abdul Razak Salleh。复直觉模糊集。2012。

[464] Muhammad Azam、Muhammad Sajjad Ali Khan 和 Shilin Yang。在复杂直觉模糊集环境下评估信息安全管理的决策方法。《数学杂志》，2022(1):9704466，2022。[465] M Bilal、I Ul Haq、N Kausar、MI Khan、D Pamucar 和 J El Maalouf。复杂直觉模糊环境下的多准则决策方法。《数学与计算机科学杂志》，38 370，2025 3 341( ): – 。[466] Prem Kumar Singh。基于复杂模糊集的概念格。《混沌、孤子与分形》，96:145–153，2017。[467] Jinze Du 和 Chang Wang。用四元数表示复杂模糊软集。《智能与模糊系统杂志》，45:6679–6690，2023。[468] R Rajalakshmi、M Gayathri Lakshmi、Mana Donganont、Prasanta Kumar Raut 和 Bhabani S Mohanty。复中智集在现实世界决策问题中的应用。《中智集与系统》，91:209–221，2025。[469] Maha Mohammed Saeed、Sami Ullah Khan、Fatima Suriyya、Arif Mehmood 和 Jamil J Hamja。区间值复中智集与复中智软拓扑空间。《国际分析与应用杂志》，23:132–132，2025。[470] RK Saini、F Smarandache、Moh Kasim 和 Ashik Ahirwar。利用二型区间值语言复中智集对农食系统进行决策建模。《中智集与系统》，969, 2025 87 948: – 。[471] Naeem Jan、Jeonghwan Gwak 和 Dragan Pamucar。双极复图像模糊软集环境下用于人机交互的稳健混合决策模型。《信息科学》，645:119163，2023。[472] Himanshu Dhumras、Varun Shukla、Rakesh Kumar Bajaj、Maha Driss 和 Wadii Boulila。复图像模糊集的相似性度量及其在模式识别领域的应用。《IEEE Access》，12 83117，2024 83104: – 。[473] Tahir Mahmood、Raja Zohaib Hayat、Jabbar Ahmmad、Ubaid ur Rehman 和 Dragan Pamucar。基于 Dombi 算子的复犹豫模糊多准则决策方法，用于选择人工智能控制微电网的储能系统。《当代数学》，第3269–3300页，2025。[474] Tahir Mahmood、Muhammad Rehan Ali、Jabbar Ahmmad、Ubaid Ur Rehman 和 Muhammad Hamza Farooq。复犹豫模糊集的双参数相似性度量及其在模式识别和医学诊断中的应用。《计算与决策：国际期刊》，2:451–481，2025。[475] Eman A AbuHijleh。复犹豫模糊图。《模糊信息与工程》，15(2):149–161，2023。[476] Weizhong Wang、Yushuo Cao、Muhammet Deveci 和 Qun Wu。基于可扩展复球形模糊决策模型的食物垃圾处理方法选择框架。《应用软计算》，150:111068，2024。[477] Masfa Nasrullah Ansari、Abdul Razaq、Hanan Alolaiyan、Umer Shuaib、Mohammed Abdullah Salman 和 Qin Xin。以复杂球形模糊知识赋能 Web 3.0 去中心化身份系统。《科学报告》，14(1):23590，2024。[478] Carlos Granados。四分单值中智性质及其在影响能源价格因素分析中的应用。《可持续发展过程集成与优化》，7(3):575–582，2023。[479] Hüseyin Kamacı。复四分单值中智集的粗糙近似。《新理论杂志》，(34):45–63，2021。[480] T Porchudar 和 D Ajay。油料农业中的复五分中智爱因斯坦聚合算子多准则决策方法。载于《智能与模糊系统国际会议》，第736–743页。Springer，2024。[481] T Porchudar、D Ajay、T Sathinathan 和 S John Borg。复五分中智聚合算子及其在选择种植小米品种中的应用。《中智集与系统》，94 85，2025 60: – 。[482] Yue Xiang、Zhuozhen Jiang、Chenghong Gu、Fei Teng、Xiangyu Wei 和 Yang Wang。智能电网中的电动汽车充电：一种时空模拟方法。《能源》，189:116221，2019。[483] Sarah M Hooper、Jared A Dunnmon、Matthew P Lungren、Domenico Mastrodicasa、Daniel L Rubin、Christopher Ré、Adam Wang 和 Bhavik N Patel。上游医学影像处理对头部 CT 分诊神经网络下游性能的影响。《放射学：人工智能》，3(4):e200229，2021。[484] Takaaki Fujita。超超立体生成立方集与超超立体生成立方集。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第79页，2025。[485] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。通过 (m, n)-超超不确定集和 (h, k) 元 (m, n)-超超不确定集进行层次化不确定性建模：模糊、中智、软、粗糙和立体生成集理论的统一扩展。《欧洲纯数学与应用数学杂志》，18(4):6834–6834，2025。[486] Florentin Smarandache。超不确定集/逻辑/概率/统计、超超不确定集/逻辑/概率/统计。Infinite Study，2017。[487] Florentin Smarandache。超超函数、超超结构、中智超超函数与中智超超结构：当前认知与未来方向。Infinite Study，2023。[488] Takaaki Fujita。森林超立体生成集与森林超粗糙集。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，2025。

[489] Takaaki Fujita. 符号超释真集。通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、真值中立、软、粗糙及其他，130页，2025。[490] Takaaki Fujita. 扩展超释真集与一般扩展释真图简记。通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、真值中立、软、粗糙及其他，57页，2025。[491] Takaaki Fujita. 超模糊集、超真值中立集与超释真集简评。通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、真值中立、软、粗糙及其他，260页。[492] Seok-Zun Song, Seon Jeong Kim, and Young Bae Jun. BCK/BCI代数中的超模糊理想。《数学》，5(4):81，2017。[493] Young Bae Jun, Kul Hur, and Kyoung Ja Lee. BCK/BCI代数中的超模糊子代数。《模糊数学与信息学年刊》，2017。[494] Yong Lin Liu, Hee Sik Kim, and J. Neggers. 超模糊子集与子群胚。《智能模糊系统杂志》，33:1553–1562，2017。[495] Z Nazari and B Mosapour. 超模糊集的熵。《动力系统与几何理论杂志》，16(2):173–185，2018。[496] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. 超真值中立集的若干类型（7）：m型、非平稳型、子集值型与复精细型。Infinite Study，2025。[497] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. 超真值中立集的若干类型（1）：双极型、毕达哥拉斯型、双值型、区间值集。Infinite Study，2025。[498] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. 超真值中立集与森林超真值中立集及其在农业中的实际应用。《农业优化》，2:10–21，2025。[499] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. 关于畜牧应用中的超真值中立集与森林真值中立集的探讨及新型真值中立集的提出。《精准畜牧》，2:11–22，2025。[500] Yusak O Susilo and Oded Cats. 探究不同旅行者群体多模式出行满意度的关键决定因素。《交通研究A辑：政策与实践》，67:366–380，2014。[501] Tadeusz Sawik. 韧性多层级供应组合选择的两阶段模型。《国际生产研究杂志》，58(19):6043–6060，2020。[502] Ze-Ling Wang, Hu chen Liu, Jin-Ye Xu, and Ye-Jia Ping. 一种采用双层级犹豫模糊语言术语集与公理化设计方法的质量功能展开新方法。《质量工程》，33:511–522，2021。[503] Jordi Montserrat-Adell, Zeshui Xu, Xunjie Gou, and Núria Agell. 自由双层级犹豫模糊语言术语集：在群体决策中备选方案排序上的应用。《信息融合》，47:45–59，2019。[504] Peide Liu, Mengjiao Shen, and Witold Pedrycz. 基于双层级双极犹豫模糊语言信息的MAGDM框架及其在人才优选中的应用。《国际模糊系统杂志》，24:1757–1779，2022。[505] Huakun Chen, Jingping Shi, Yongxi Lyu, and Qianlei Jia. 一种结合云模型、Z数与区间值语言真值中立集的决策模型。《熵》，2024。[506] Ming Tang and Yanzhao Sun. 运用二元组语言真值中立多属性决策方法，结合核心能力评估，对体育院校田径学生进行综合分析。《真值中立集与系统》，77 354，2025 331: – 。[507] Ru-xia Liang, Zi-bin Jiang, and Jian-qiang Wang. 一种用于高校人力资源管理的语言真值中立多准则群体决策方法。《对称性》，10(9):364，2018。[508] Ying-Ying Li, Hongyu Zhang, and Jian-Qiang Wang. 语言真值中立集及其在多准则决策问题中的应用。《不确定性量化国际期刊》，7(2)，2017。[509] Xingang Wang, Yushui Geng, Peipei Yao, and Mengjie Yang. 基于扩展VIKOR与语言真值中立集的多属性群体决策方法。《智能与模糊系统杂志》，36 160，2019 1 149( ): – 。[510] Qun Wu, Yimeng Wang, and Yuhan Wangzhu. 将数值尺度模型与态度评估相结合及其在犹豫模糊语言多属性决策中的应用。《运筹智能杂志》，3(1):17–45，2025。[511] Yas Abbas Alsultanny. 评估IT帮助台技术以提升用户满意度。《基因组学与蛋白质组学数据挖掘杂志》，2015。[512] Muhmamet Deveci, Dragan Pamucar, Ilgin Gokasar, Mario Köppen, and Brij Bhooshan Gupta. 基于q-阶正交对模糊集的OPA-RAFSI模型，研究元宇宙中自动驾驶车辆的个人出行。《IEEE智能交通系统汇刊》，24:15642–15651，2023。[513] Vanita Rani and Satish Kumar. 一种量化q-阶正交对模糊集间差异性的创新距离度量。《决策分析期刊》，11:100440，2024。[514] Wasim Akram Mandal. 双极毕达哥拉斯模糊集及其在多属性决策问题中的应用。《数据科学年刊》，10:555–587，2021。[515] Yang Zhou, Yuan Xu, Wuhuan Xu, Jun Wang, and Guangming Yang. 一种基于区间值毕达哥拉斯模糊语言集的新型多属性群体决策方法。《IEEE Access》，8 176817，2020 176797: – 。

[516] Chao Zhang、Juanjuan Ding、Jianming Zhan和Deyu Li。基于可调多粒度毕达哥拉斯模糊概率粗糙集的不完备三支多属性群决策。《国际近似推理杂志》，147:40–59，2022。[517] Tapan Senapati和Ronald R. Yager。费马模糊集。《环境智能与人性化计算杂志》，11:663 – 674，2019。[518] Mehdi Keshavarz-Ghorabaee、Maghsoud Amiri、Mohammad Hashemi-Tabatabaei、Edmundas Kazimieras Zavad- skas和Art?ras Kaklauskas。基于费马模糊集与WASPAS的绿色建筑供应商评价新决策方法。2020。[519] S. Jeevaraj。区间值费马模糊集的排序及其应用。《专家系统与应用》，185 115613，2021 : 。[520] Tareq M. Al-shami和Abdelwaheb Mhemdi。正交对模糊集的广义框架：(m,n)-模糊集及其在多准则决策方法中的应用。《信息》，14:56，2023。[521] Xindong Peng和Lin Liu。q阶正交对模糊集的信息测度。《国际智能系统杂志》，34(8):1795–1834，2019。[522] P Chellamani、D Ajay、Mohammed M Al-Shamiri和Rashad Ismail。毕达哥拉斯中智平面图及其在决策中的应用。无限研究，2023。[523] D. Ajay、S. John Borg和P. Chellamani。毕达哥拉斯中智图中的控制及其在模糊智能决策中的应用。载于智能与模糊系统国际会议，第667–675页，沙姆，2022年7月。施普林格国际出版。[524] Muhammad Sajjad Ali Khan、Saleem Abdullah、Asad Ali、Nasir Siddiqui和Fazli Amin。毕达哥拉斯犹豫模糊集及其在权重信息不完全条件下的群决策应用。《智能与模糊系统杂志》，33(6):3971–3985，2017。[525] Tingting Zheng、Maoyin Zhang、Longmei Li、Qiuyue Wu和Ligang Zhou。区间值毕达哥拉斯犹豫模糊集的相关系数及其应用。《IEEE接入》，8:9271–9286，2020。[526] Bui Cong Cuong。毕达哥拉斯图像模糊集，第1部分——基本概念。《计算机科学与控制论杂志》，35(4):293–304，2019。[527] Bui Cong Cuong。毕达哥拉斯图像模糊集（ppfs），第2部分——ppfs上的若干主要图像逻辑算子及ppf系统中的若干图像推理过程。《计算机科学与控制论杂志》，38(1):1–14，2022。[528] Ibtisam AH Masmali。半超群中的毕达哥拉斯图像模糊超理想。《国际数学与计算机科学杂志》，16:1533–1553，2021。[529] S krishna Prabha、Said Broumi、Souhail Dhouib和Mohamed Talea。在费马中智图上实现破圈算法以发现最短路径。《中智集与系统》，72 271，2024 256: – 。[530] Said Broumi、R Sundareswaran、M Shanmugapriya、Assia Bakali和Mohamed Talea。费马中智图的理论与应用。《中智集与系统》，50:248–286，2022。[531] Said Broumi、S Krishna Prabha和Vakkas Uluçay。基于得分函数的区间值费马中智最短路径问题。《中智系统及其应用》，11:1–10，2023。[532] Umar Ali、Junxiang Li、Tapan Senapati、SA Edalatpanah、Szabolcs Duleba和Sarbast Moslem。复杂费马图像模糊环境下的混合决策模型及其在应急管理中的应用。《复杂与智能系统》，12(1):15，2026。[533] Umar Ali、Junxiang Li、Qin Qi、Usman Zulfiqar、Taha Radwan、Imran Siddique和Rana Muhammad Zulqar- nain。区间值费马图像模糊结构下可持续物流管理的新型决策支持系统。《科学报告》，15(1):31840，2025。[534] M Kirisci。费马犹豫模糊集及其医学决策应用。《计算机与结构》，2022。[535] Murat Kirişci。肺癌数据分析：费马犹豫模糊集方法。载于《应用数学、建模与计算机仿真》，第701–710页。IOS出版社，2022。[536] Sumbal Ali、Asad Ali、Ahmad Bin Azim、Ahmad Aloqaily和Nabil Mlaiki。利用基于q阶正交对中智软集的聚合算子及其在多属性决策问题中的应用。《细胞》，2024。[537] S Santhoshkumar、J Aldring和D Ajay。复杂q阶正交对中智集上聚合算子的分析及其应用。载于智能与模糊系统国际会议，第744–751页。施普林格，2024。[538] Mehmet Ünver和Murat Olgun。q阶正交对图像模糊拓扑空间与参数相关连续性：控制系统应用。《工程中的数学问题》，2023(1):8848196，2023。[539] Prayosi Chatterjee和Mijanur Rahaman Seikh。在q阶正交对图像模糊环境中基于置信水平的决策方法评价城市固体废物管理。《工业信息集成杂志》，42:100708，2024。[540] Sumbal Ali、Asad Ali、Ahmad Bin Azim、Ahmad ALoqaily和Nabil Mlaiki。q阶正交对图像模糊软集环境下的平均聚合算子及其在多属性决策问题中的应用。《AIMS数学》，8(4):9027–9053，2023。[541] Yuhui Wang、Zhifeng Shan和Lin Huang。面向q阶正交对犹豫模糊集多属性决策的TOPSIS方法扩展。《IEEE接入》，8:165151–165167，2020。

[542] Hongwu Qin、Yibo Wang、Xiuqin Ma和Jemal H Abawajy。一种在q阶正交对犹豫模糊环境下基于Choquet积分的新型VIKOR方法。IEEE模糊系统汇刊，32 2902，2024 5 2890( )：– 。[543] Chung Kit Wu、Chi-Tsun Cheng、Yoko Uwate、Guanrong Chen、Shahid Mumtaz和Kim Fung Tsang。下一代消费电子的研究现状与研究机遇。IEEE消费电子汇刊，69(4)：937–948，2022。[544] Mayada Abualhomos、Abdallah Shihadeh、Ahmad A Abubaker、Khaled Al-Husban、Takaaki Fujita、Ahmed Atal- lah Alsaraireh、Mutaz Shatnawi和Abdallah Al-Husban。模糊、中智与多值偏移的n型扩展统一框架：定义与相互联系。模糊扩展与应用杂志，2025。[545] Mohammad Hossein Fazel Zarandi、R. Gamasaee和Oscar Castillo。从1型到n型模糊逻辑与系统。载于《模糊逻辑五十周年》，2016。[546] Poli Venkatasubba Reddy。n型模糊控制系统。技术报告，EasyChair，2024。[547] Smriti Srivastava和Rajesh Kumar。一种用于控制车辆转向角的新型高阶n型模糊逻辑系统的设计与应用：软计算方法。软计算，28 4758，2024 6 4743( )：– 。[548] Arnab Kumar De、Debjani Chakraborty和Animesh Biswas。二型模糊集理论文献综述。软计算，26：9049 – 9068，2022。[549] Hao Li、Xianchao Dai、Ligang Zhou和Qun Wu。将词语编码为区间二型模糊集：保留区域方法。信息科学，629：760–777，2023。[550] Juan Carlos FigueroaGarcía、Jennifer Soraya Ramos-Cuesta和G HernándezPérez。关于区间二型模糊集的方差。IEEE模糊系统汇刊，31：2320–2330，2023。[551] Patricia Melin、Emanuel Ontiveros-Robles、Claudia I. González、Juan Ramón Castro和Oscar Castillo。一种应用于控制的参数化阴影二型模糊隶属函数方法。软计算，23：3887 – 3901，2018。[552] Claudia I. González、Patricia Melin、Oscar Castillo、Daniela Juarez和Juan Ramón Castro。面向基于阴影集的广义二型模糊逻辑系统。载于EUSFLAT/IWIFSGN，2017。[553] Sukhveer Singh和Harish Garg。对称三角区间二型直觉模糊集及其在多准则决策中的应用。对称，10：401，2018。[554] Harish Garg和Sukhveer Singh。一种新型三角区间二型直觉模糊集及其聚合算子。伊朗模糊系统杂志，15：69–93，2018。[555] Xiaoyu Peng和Xiaodong Pan。基于模糊划分的区间二型模糊系统及其逼近性质。计算与应用数学，43，2024。[556] Houju Hori Jr.。二型模糊事件及其应用。苏美里安兹科学研究杂志，2021。[557] Marwan H Hassan、Saad M Darwish和Saleh M Elkaffas。二型中智集及其在医学数据库死锁解决中的应用。计算机、材料与连续体，74(2)，2023。[558] Yongwei Yang和Jibo Li。二型图像模糊集上的算术聚合算子及其在决策中的应用。工程快报，31(4)，2023。[559] Amandeep Singh和Satish Kumar。二型图像模糊环境下的精度与得分函数及基于VIKOR的CoCoSo方法及其在决策中的应用。国际信息技术与决策杂志，第1–57页，2025。[560] Serif Özlü。基于图像二型犹豫模糊集向量相似度度量的多准则决策。粒计算，8：1505–1531，2023。[561] Faruk Karaaslan和Şerif Özlü。对偶二型犹豫模糊集的相关系数及其在聚类分析中的应用。国际智能系统杂志，35(7)：1200–1229，2020。[562] Binoy Krishna Giri和Sankar Kumar Roy。基于区间二型球面模糊集的CI-MM-Dombi算子及其在含风险准则的可持续供应链中的应用：采用CI-TODIM-MARCOS方法。软计算，28(17)：10023–10056，2024。[563] Zhi Liu、Ardashir Mohammadzadeh、Hamza Turabieh、Majdi M. Mafarja、Shahab S. Band和Amir H. Mosavi。一种用于太阳能管理系统的新型在线学习区间三型模糊控制系统。IEEE Access，9：10498–10508，2021。[564] Manas Ghosh和Jamuna Kanta Sing。利用多特征向量与区间三型模糊集的秩级融合增强人脸识别。2023年IEEE第三届应用信号处理会议（ASPCON），第118–123页，2023。[565] Oscar Castillo和Patricia Melin。迈向区间三型直觉模糊集与系统。数学，2022。[566] Mohamed Hamdy、Amal Ibrahim、Belal Abozalam和Salah Helmy。光伏太阳能系统三型直觉模糊逻辑MPPT控制器的设计与实现：比较研究。ISA汇刊，154 511，2024 488：– 。[567] Patricia Melin和Oscar Castillo。基于三型与直觉模糊逻辑的集成神经模型中的聚合。载于《基于神经网络、模糊逻辑与优化算法的混合智能系统新方向》，第73–83页。Springer，2024。[568] Hui Liu。用于高校思想政治教育质量评价中多层不确定性建模的中智III型集。中智集与系统，86(1)：13，2025。

[569] Snigdha Dubey、Gaurav Tiwari、Sneha Singh、Saveli Goldberg 和 Eugene Pinsky。利用机器学习进行医疗保健治疗规划。《人工智能前沿》，6:1124182，2023。[570] Ya-Hui Lee 和 Woo-Tsong Lin。对完整全球物流系统的可测量可靠性进行建模。载于《2008年第四届网络计算与高级信息管理国际会议》，第2卷，第540–546页。IEEE，2008。[571] Jaclyn Miller 和 Beverly Koerin。我们能否在入学时评估适合度？对社会工作硕士申请程序的综述。《社会工作教育杂志》，34(3):437–452，1998。[572] Ambalal V Patel。具有可变交叉点水平的多模糊集的模糊比例微分控制器分析结构与分析。《模糊集与系统》，129(3):311–334，2002。[573] Jun Ye、Shigui Du 和 Rui Yong。多模糊立方集及其在多准则群体决策中的相关系数。《工程数学问题》，2021(1):5520335，2021。[574] Krittika Linesawat 和 Somsak Lekkoksung。多直觉模糊集及其在有序半群中的应用研究。《国际分析与应用杂志》，23:63–63，2025。[575] Tao Feng、Ju-Sheng Mi、Shao-Pu Zhang 和 Xin Zhang。基于DS证据理论和三支决策的多直觉模糊信息系统融合决策规则。《国际模糊系统杂志》，27(2):528–549，2025。[576] Deji Selang、Haidong Zhang 和 Yanping He。基于多直觉模糊β邻域的多属性群体决策问题的三支决策方法。《信息科学》，659:120063，2024。[577] N Ramakrishna。关于多模糊集的其他一些运算。《国际数学趋势与技术杂志-IJMTT》，66，2020。[578] Hanan H Sakr、Abdisalam Hassan Muse 和 Ramy Aldallal。基于双极值多模糊软集的广义决策技术。《函数空间杂志》，2022(1):9453172，2022。[579] Tuqa AH Al-Tamimi、Luay AA Al-Swidi、Ali HM Al-Obaidi 等。多中智集推广形式的伙伴集。《国际中智科学杂志》，(1):08–8，2024。[580] Johanna Estefanía Calle Imbaquingo、Karen Milagros Díaz Salambay、Jordy Alexis Vargas Yumbo 和 Kevin Christopher Carrasco Azogue。源自祖先逻辑的跨文化教育：应用艾尼多中智方法强化瓦奥拉尼社区的混合方法论。《中智集与系统》，92:263–283，2025。[581] Ennio Jesús Mérida Córdova、Elizabeth Esther Vergel Parejo 和 Raúl López Fernández。结合艾尼多中智方法的ScholarAI学术文章检索策略：用于人工智能伦理信息管理。《中智集与系统》，92:380–397，2025。[582] Raghunathan Krishankumar、Dragan Stevan Pamucar、Muhammat Deveci、Manish Aggarwal 和 Kattur Soundarapandian Ravichandran。采用基于多犹豫模糊语言的Choquet积分方法，评估清洁能源满足智慧城市需求的能力。《可再生能源》，2022。[583] Pu Ji、Hong yu Zhang 和 Jian qiang Wang。用于酒店选址的基于投影的多犹豫模糊语言项集超越排序方法。《认知计算》，10:737–751，2018。[584] Peide Liu 和 Hui Gao。基于广义Maclaurin对称均值和多犹豫模糊语言信息的多准则决策。《对称性》，10:81，2018。[585] Naeem Jan、Tahir Mahmood、Lemnaouar Zedam 和 Zeeshan Ali。多值图像模糊软集及其在群体决策问题中的应用。《软计算》，24:18857–18879，2020。[586] Robert B Dial 和 Richard E Bunyan。公共交通规划系统。《社会经济规划科学》，1(3):345–362，1968。[587] Avishai Ceder。《公共交通规划与运营：建模、实践与行为》。CRC出版社，2016。[588] Florentin Smarandache。《理念之巢》。Scilogs，第九卷：永恒中智学，第9卷。Infinite Study，2022。[589] Chris Cornelis、Glad Deschrijver 和 Etienne E Kerre。区间值模糊逻辑的进展与挑战。《模糊集与系统》，157(5):622–627，2006。[590] Ting-Yu Chen 和 Chueh-Yung Tsao。区间值模糊TOPSIS方法及实验分析。《模糊集与系统》，159(11):1410–1428，2008。[591] Behzad Ashtiani、Farzad Haghighirad、Ahmad Makui 和 Golam ali Montazer。基于区间值模糊集的模糊TOPSIS方法扩展。《应用软计算》，9(2):457–461，2009。[592] Zeshui Xu 和 Xunjie Gou。区间值直觉模糊信息聚合及应用综述。《粒计算》，2(1):13–39，2017。[593] Krassimir T Atanassov。关于区间值直觉模糊集。载于《区间值直觉模糊集》，第9–25页。Springer，2019。[594] Shyi-Ming Chen、Li-Wei Lee、Hsiang-Chuan Liu 和 Szu-Wei Yang。基于区间值直觉模糊值的多属性决策。《专家系统与应用》，39(12):10343–10351，2012。[595] Yuanna Liu 和 Wen Jiang。区间值直觉模糊集的一种新距离测度及其在决策中的应用。《软计算》，24(9):6987–7003，2020。[596] Amit Kumar、Shiv Prasad Yadav、Surendra Kumar 等。利用区间值模糊集分析船舶动力装置的模糊可靠性。《国际应用科学与工程杂志》，4(1):71–82，2006。[597] Amit Kumar、Shiv Prasad Yadav 和 Surendra Kumar。使用基于t ω（最弱t-范数）的L-R型区间值模糊集算术运算进行模糊系统可靠性分析。《国际质量与可靠性管理杂志》，24(8):846–860，2007。

[598] Xindong Peng. New operations for interval-valued pythagorean fuzzy set. *Scientia Iranica*, 26:1049–1076, 2018.

[599] Weijian Ren and Yuhong Du. Development and application of an interval-valued pythagorean fuzzy set-based grade evaluation method to foreign fiber content. *Journal of Natural Fibers*, 20, 2023.

[600] D Nagarajan and J Kavikumar. Single-valued and interval-valued neutrosophic hidden markov model. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022(1):5323530, 2022.

[601] Prasanta Kumar Raut, Sakya Singh Satapathy, Siva Prasad Behera, Said Broumi, and Ajay Kumar Sahoo. Solving the shortest path problem in an interval-valued neutrosophic pythagorean environment using an enhanced a* search algorithm. *Neutrosophic Sets and Systems*, 76:360–374, 2025.

[602] Ecenur Alioğulları, Yusuf Sait Türkan, Emre Çakmak, and Erfan Babaee Tirkolaee. Evaluation of risk strategies for supply chain sustainability with interval-valued neutrosophic fuzzy edas. *Heliyon*, 10(19), 2024.

[603] Irfan Deli. Interval-valued neutrosophic soft sets and its decision making. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 8(2):665–676, 2017.

[604] Ahmed Mostafa Khalil, Sheng-Gang Li, Harish Garg, Hongxia Li, and Shengquan Ma. New operations on interval-valued picture fuzzy set, interval-valued picture fuzzy soft set and their applications. *Ieee Access*, 7:51236–51253, 2019.

[605] Yongsheng Rao, Ruxian Chen, Waheed Ahmad Khan, and Alishba Zahid. Some new concepts of interval-valued picture fuzzy graphs and their application toward the selection criteria. *International Journal of Fuzzy Systems*, 27(2):463–480, 2025.

[606] Sijia Zhu and Zhe Liu. Distance measures of picture fuzzy sets and interval-valued picture fuzzy sets with their applications. *AIMS Math*, 8(12):29817–29848, 2023.

[607] Bahram Farhadinia. Information measures for hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets. *Information Sciences*, 240:129–144, 2013.

[608] Bahram Farhadinia. Correlation for dual hesitant fuzzy sets and dual interval-valued hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(2):184–205, 2014.

[609] Fatma Kutlu Gündogdu and Cengiz Kahraman. A novel fuzzy topsis method using emerging interval-valued spherical fuzzy sets. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 85:307–323, 2019.

[610] Reza Ghasemi Pirbalouti, Mohammadreza Karimi Dehkordi, Javad Mohammadpour, Esmaeil Zarei, and Mohammad Yazdi. An advanced framework for leakage risk assessment of hydrogen refueling stations using interval-valued spherical fuzzy sets (iv-sfs). *International Journal of Hydrogen Energy*, 2023.

[611] Surapati Pramanik. Interval quadripartitioned neutrosophic sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 51(2022):146–156, 2022.

[612] Satham S Hussain, Muhammad Aslam, Hossein Rahmonlou, and N Durga. Applying interval quadripartitioned single-valued neutrosophic sets to graphs and climatic analysis. In *Data-Driven Modelling with Fuzzy Sets*, pages 100–143. CRC Press, 2024.

[613] Surapati Pramanik. Interval pentapartitioned neutrosophic sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, page 232, 2021.

[614] Said Broumi, D Ajay, P Chellamani, Lathamaheswari Malayalan, Mohamed Talea, Assia Bakali, Philippe Schweizer, and Saeid Jafari. Interval valued pentapartitioned neutrosophic graphs with an application to mcdm. *Operational Research in Engineering Sciences: Theory and Applications*, 5(3):68–91, 2022.

[615] Lynette Cheah and Qiuhong Huang. Comparative carbon footprint assessment of cross-border e-commerce shipping options. *Transportation Research Record*, 2676:584 – 595, 2021.

[616] M. M. Dhingra and Subhash C. Kundu. Factors affecting placement and hiring decisions: A study of students' perceptions. *Industry and Higher Education*, 35:223 – 232, 2020.

[617] Juan Francisco Velasco-Muñoz, José A. Aznar-Sánchez, Ana Batlles-delaFuente, and Maria Dolores Fidelibus. Sustainable irrigation in agriculture: An analysis of global research. *Water*, 2019.

[618] Genesis Carmen Alcívar Junco. Identification of gaps in ecuadorian inclusive university education through plithogenic offsets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 92:510–522, 2025.

[619] Roger Martinez Isaac, Rudy García Cobas, Carlos Roberto Humanante Cabrera, María Andrea Soto Granda, and Linda Florangely Soto Torres. Empowering multigrade interdisciplinary assessment through plithogenic offsets and artificial intelligence for dynamic and personalized education. *Neutrosophic Sets and Systems*, 92:398–412, 2025.

[620] Paola Elizabeth Cortez-Clavijo, Mishelle Adriana Flores-Friend, Lilibeth Alexandra Orrala Soriano, Cynthia Nataly Espíndola-Vásquez, Sandra Betzabeth Maldonado-López, Karla Estefanía Suarez Mena, César Teodoro Arízaga-Sellán, and Gerzon Alfredo Cochea-Panchana. Model for the evaluation of the educom-digital project effectiveness at the santa elena peninsula state university based on plithogenic offset. *Neutrosophic Sets and Systems*, 88:340–354, 2025.

[621] Adán Humberto Estela Estela, David Chacón Chacón, and Carlos Fretel Martínez. Multicriteria analysis of peruvian salad as a tourism product using plithogenic offsets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 84(1):65, 2025.

[622] Takaaki Fujita. Review of plithogenic directed, mixed, bidirected, and pangene offgraph. *Advancing Uncertain Combinatorics through Graphization, Hyperization, and Uncertainization: Fuzzy, Neutrosophic, Soft, Rough, and Beyond*, page 120, 2024.

[623] Florentin Smarandache. *Neutrosophic Overset, Neutrosophic Underset, and Neutrosophic Offset. Similarly for Neutrosophic Over-/Under-/Off-Logic, Probability, and Statistics*. Infinite Study, 2016.

[624] Takaaki Fujita. A review of fuzzy and neutrosophic offsets: Connections to some set concepts and normalization function. In *Advancing Uncertain Combinatorics through Graphization, Hyperization, and Uncertainization: Fuzzy, Neutrosophic, Soft, Rough, and Beyond (Third Volume)*. Biblio Publishing, 2024.

[625] Yingjie Yang, Sifeng Liu, and Robert John. Uncertainty representation of grey numbers and grey sets. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 44(9):1508–1517, 2013.

[626] Yinjie Yang, Robert John, and Sifeng Liu. Some extended operations of grey sets. *Kybernetes*, 41(7/8):860–873, 2012.

[627] Li Li and Xican Li. The method and its applications of determining possibility function of grey set. *Grey Systems: Theory and Application*, 13(1):172–192, 2023.

[628] Bing Li. A neutrosophic offset logic and statistical framework for analyzing international chinese communication in integrated media environments. *Neutrosophic Sets and Systems*, 86:654–668, 2025.

[629] Qingde Li and Xiangheng Kong. A mathematical neutrosophic offset framework with upside down logics for quality evaluation of multi-sensor intelligent vehicle environment perception systems. *Neutrosophic Sets and Systems*, 87:1014–1023, 2025.

[630] Atreya Chakraborty, Cresenta Fernando, and Rajiv Mallick. The importance of being known: Relationship banking and credit limits. *Quarterly Journal of Finance and Accounting*, pages 27–48, 2010.

[631] Zhi Cai, Sai Dai, Kun Zhao, and Junfeng Yang. Future power grid dispatch and control mode with large-scale clean energy integration in china. In *2016 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC)*, pages 1749–1754. IEEE, 2016.

[632] SP Priyadharshini, F Nirmala Irudayam, and Florentin Smarandache. *Plithogenic cubic sets*. Infinite Study, 2020.

[633] Priyadharshini Sam Ponnukumar, Nirmala Irudayam Francis Xavier, and Ramkumar Jaganathan. Stable plithogenic cubic sets. *Journal of Fuzzy Extension and Applications*, 6(2):410–423, 2025.

[634] SP Priyadharshini and J Ramkumar. Mappings of plithogenic cubic sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 79:669–685, 2025.

[635] S Anitha and Dr A Francina Shalini. Plithogenic cubic vague sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 58(1):7, 2023.

[636] SP Priyadharshini, F Nirmala Irudayam, and J Ramkumar. An unique overture of plithogenic cubic overset, underset and offset. In *Neutrosophic Paradigms: Advancements in Decision Making and Statistical Analysis: Neutrosophic Principles for Handling Uncertainty*, pages 139–156. Springer, 2025.

[637] Young Bae Jun, Florentin Smarandache, and Chang Su Kim. Neutrosophic cubic sets. *New mathematics and natural computation*, 13(01):41–54, 2017.

[638] Mumtaz Ali, Irfan Deli, and Florentin Smarandache. The theory of neutrosophic cubic sets and their applications in pattern recognition. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 30(4):1957–1963, 2016.

[639] Muhammad Gulistan, Ahmed Elmoasry, and Naveed Yaqoob. N-version of the neutrosophic cubic set: application in the negative influences of internet. *The Journal of Supercomputing*, 77(10):11410–11431, 2021.

[640] Jianming Zhan, Madad Khan, Muhammad Gulistan, and Ahmed Ali. Applications of neutrosophic cubic sets in multi-criteria decision-making. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 7(5), 2017.

[641] Surapati Pramanik, Shyamal Dalapati, Shariful Alam, and Tapan Kumar Roy. Nc-todim-based magdm under a neutrosophic cubic set environment. *Information*, 8(4):149, 2017.

[642] Durga Banerjee, Bibhas C Giri, Surapati Pramanik, and Florentin Smarandache. Gra for multi attribute decision making in neutrosophic cubic set environment. *Neutrosophic Sets and Systems*, 15:60–69, 2017.

[643] TD Puspitasari, EO Sari, Prawidya Destarianto, and HY Riskiawan. Decision support system for determining scholarship selection using an analytical hierarchy process. In *Journal of physics: Conference series*, volume 953, page 012119. IOP Publishing, 2018.

[644] Jinta Jose, Bobin George, and Rajesh K Thumbakara. Soft directed graphs, their vertex degrees, associated matrices and some product operations. *New Mathematics and Natural Computation*, 19(03):651–686, 2023.

[645] Sagvan Y Musa, Ramadhan A Mohammed, and Baravan A Asaad. N-hypersoft sets: An innovative extension of hypersoft sets and their applications. *Symmetry*, 15(9):1795, 2023.

[646] Sagvan Y Musa. N-bipolar hypersoft sets: Enhancing decision-making algorithms. *Plos one*, 19(1):e0296396, 2024.

[647] Abdullah Ali Salamai. A superhypersoft framework for comprehensive risk assessment in energy projects. *Neutrosophic Sets and Systems*, 77:614–624, 2025.

[648] Florentin Smarandache. *New types of soft sets "hypersoft set, indetermsoft set, indetermhypersoft set, and treesoft set": an improved version*. Infinite Study, 2023.

[649] Takaaki Fujita and Florentin Smarandache. *Plithogenic Superhypersoft Set and Plithogenic Forest SuperHypersoft Set*. Infinite Study, 2025.

[650] Florentin Smarandache. Foundation of the superhypersoft set and the fuzzy extension superhypersoft set: A new vision. *Neutrosophic Systems with Applications*, 2023.

[651] T Kiruthika, M Karpagadevi, S Krishnaprakash, and G Deepa. Superhypersoft sets using python and its applications in neutrosophic superhypersoft sets under topsis method. *Neutrosophic Sets and Systems*, 91:586–616, 2025.

[652] Yaohua Kang and Ning Qin. Neutrosophic superhypersoft set approach for evaluating teacher education quality in normal universities. *Neutrosophic Sets and Systems*, 86(1):19, 2025.

[653] 圣地亚哥·萨洛蒙·奇卡伊萨-托阿帕希、安东尼·亚历山大·奥尔特加-托阿潘塔和埃克托尔·路易斯·劳伦西奥-阿方索。基于中智超超软集分析采用不同自动化机制的加压系统中的水力行为。《中智集与系统》，89(1):6，2025。[654] 弗洛伦丁·斯马兰达克、A. 萨兰娅、A. 卡拉瓦蒂和 S. 克里希纳普拉卡什。中智超超软集。《中智集与系统》，77:41–53，2024。[655] 尼维莎·马丁和弗洛伦丁·斯马兰达克。组合型柏拉图生成超软集简介。《中智集与系统》，35:503–510，2020。[656] 尼维莎·马丁、弗洛伦丁·斯马兰达克和赛义德·布鲁米。使用具有双主导属性的扩展型柏拉图生成超软集建立新冠肺炎决策模型。《国际中智科学杂志》，2021。[657] N·安吉尔、P·潘迪亚马尔和尼维莎·马丁。基于柏拉图生成超软集的柏拉图生成认知图在可持续工业发展中的应用。《中智集与系统》，73(1):7，2024。[658] E. 迪维娅和 A. 阿罗基娅·兰西。近柏拉图生成超软集。第二届数学技术与应用国际会议：ICMTA2021，2022。[659] 尼维莎·马丁、赛义德·艾哈迈德·埃达尔帕斯纳特、弗洛伦丁·斯马兰达克等。扩展型柏拉图生成超软集在电动汽车充电基础设施决策中的应用。《模糊扩展与应用杂志》，第 e226517 页，2025。[660] 西玛·达斯、莫诺吉特·曼纳和苏布拉塔·莫达克。柏拉图生成学的进展：探索软集的新维度。载于《应用数学中的中智与柏拉图生成库存模型》，第 1–18 页。IGI 全球科学出版社，2025。[661] 劳尔·冈萨雷斯·萨拉斯、哈尔·米凯拉·戈麦斯·阿什基和马尔科·保罗·梅迪纳·巴伦西亚。使用柏拉图生成模糊软集评估罗非鱼物种的病毒易感性：针对 tilv 的多专家方法。《中智集与系统》，89(1):16，2025。[662] 桑塔努·阿查吉和悉达多·梅迪。模糊软集理论中的正确结构。arXiv 预印本 arXiv:2407.06203，2024。[663] 阿基尔·兰詹·罗伊和 P.K. 马吉。基于模糊软集理论的决策问题方法。《计算与应用数学杂志》，203(2):412–418，2007。[664] 艾曼·A. 哈扎耶梅。时间影子软集：概念与应用。《国际模糊逻辑与智能系统杂志》，24(4):387–398，2024。[665] 肖卡特·阿尔哈扎莱。影子软集理论。《国际模糊逻辑与智能系统杂志》，22(4):422–432，2022。[666] 姜云成、唐勇、陈其迈、刘海和唐建超。区间值直觉模糊软集及其性质。《计算机与应用数学》，60(3):906–918，2010。[667] 徐伟、马健、王守阳和郝刚。模糊软集及其性质。《计算机与应用数学》，59(2):787–794，2010。[668] 哈利德·阿尔哈扎耶梅和纳斯鲁丁·哈桑。广义模糊软集及其应用。《纯粹与应用数学国际杂志》，77(3):391–401，2012。[669] 费萨尔·阿尔-沙尔基、阿什拉夫·阿尔-古兰等。区间复中智软集上的相似性度量及其在不确定条件下决策与医学诊断中的应用。《中智集与系统》，51:495–515，2022。[670] 侯赛因·卡马哲。语言型单值中智软集及其在博弈论中的应用。《国际智能系统杂志》，36(8):3917–3960，2021。[671] 里舒·阿罗拉和哈里什·加尔格。双犹豫模糊软集的稳健相关系数度量及其在决策中的应用。《工程应用人工智能》，72:80–92，2018。[672] 张海东、熊亮林和马伟元。关于区间值犹豫模糊软集。《工程数学问题》，2015:1–17，2015。[673] P. 切拉马尼、D. 阿贾伊、赛义德·布鲁米和 T. 安东尼·阿尔丰斯·利戈里。基于图像模糊软图的决策方法。《颗粒计算》，7:527–548，2021。[674] R.V. 贾伊库马尔、拉曼·桑达雷斯瓦兰、马拉亚纳加拉吉·尚穆加普里娅、赛义德·布鲁米和塔拉勒·阿里·阿尔-哈瓦里。图像模糊软图中的脆弱性参数及其在城市诊断中心选址中的应用。《模糊扩展与应用杂志》，5(1):86–99，2024。[675] P. A. 法蒂玛·佩尔温和苏尼尔·雅各布·约翰。球形模糊软集上的关系。第二届计算科学国际会议——建模、计算与软计算（CSMCS 2022），2023。[676] 哈里什·加尔格、法蒂玛·佩尔温 PA、苏尼尔·雅各布·约翰和路易斯·佩雷斯-多明格斯。球形模糊软拓扑及其在群体决策问题中的应用。《工程数学问题》，2022 1007133，2022 1( ): 。[677] 阿卜杜拉·希哈德、马亚达·阿布阿尔霍莫斯、阿拉·M·阿卜杜勒-拉蒂夫、阿卜杜拉·阿尔胡斯班、沙班·M·沙班、穆罕默德·阿尔斯兰和阿里夫·梅赫穆德·哈塔克。四分区中智黎曼积分和四分区中智软拓扑空间的关键特征。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，18(2):5839–5839，2025。[678] 索门·德布纳特。以 t、f、c 和 u 为依赖中智分量的区间值直觉四分区中智软集及其在决策问题中的应用。《科学新成果杂志》，11(1):26–47，2022。

[679] Raed Hatamleh、Nasir Odat、Hamza Ali Abujabal、Faria Khan、Arif Mehmood Khattak、Alaa M. Abd El-latif、Husham M. Attaalfadeel 和 Abdelhalim Hasnaoui。费马双值中性软拓扑空间。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，2025。[680] Maha Noorwali、Raed Hatamleh、Ahmed Salem Heilat、Haitham Ali Qawaqneh、Arif Mehmood Khattak、Aqeedat Hussain、Jamil J. Hamja 和 Cris L. Armada。用于复杂双值中性软集及通过余切相似度评估情感亲和力的人工智能增强框架。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，2025。[681] Bimal Shil[1], Suman Das、Rakhal Das 和 Surapati Pramanik。单值五分区中性软集。《中性集与系统》，第67卷/2024：信息科学与工程国际期刊，第57页，2024。[682] Muhammad Saeed、Muhammad Amad Sarwar、Atiqe Ur Rahman 和 Sana Naz。图中的模糊超软集表示。《巴勒斯坦数学杂志》，12(1):836–847，2023。[683] Muhammad Saeed、Muhammad Ahsan 和 Thabet Abdeljawad。复多模糊超软集的发展及其在基于熵和相似度量的多准则决策中的应用。《IEEE Access》，9:60026–60042，2021。[684] Atiqe Ur Rahman、Muhammad Saeed、HAEW Khalifa、Walaa Abdullah Afifi 等。基于可能性直觉模糊超软集的聚合运算与相似度量的决策算法技术。《AIMS数学》，7(3):3866–3895，2022。[685] Adem Yolcu、Florentin Smarandache 和 Taha Yasin Ozturk。直觉模糊超软集。2021。[686] Muhammad Saqlain、Sana Moin、Muhammad Naveed Jafar、Muhammad Saeed 和 Florentin Smarandache。中性超软集的聚合算子。《无限研究》，2020。[687] Sreelekshmi C Warrier、Terry Jacob Mathew、Nellimala Abdul Shukoor 和 Vijayakumar Varadarajan。用于决策的犹豫模糊超软集。载于《AIP会议论文集》，第3134卷，第020018页。AIP Publishing LLC，2024。[688] Xingsi Xue、Himanshu Dhumras、Garima Thakur、Rakesh Kumar Bajaj 和 Varun Shukla。图像模糊超软集的 Schweizer-Sklar t-范数算子：推动社会健康环境中的可持续技术发展。《计算机、材料与连续介质》，84(1)，2025。[689] Muhammad Saeed 和 Muhammad Imran Harl。图像模糊超软集基础及其应用。《中性集与系统》，53(1):24，2023。[690] Pranjal Bansal、Himanshu Dhumras 和 Rakesh K Bajaj。t-球形模糊超软集及其聚合算子在软计算中的应用。载于《2022年第五届多媒体、信号处理与通信技术国际会议（IMPACT）》，第1–6页。IEEE，2022。[691] Haiyue Yu、Ting Shen 和 Liwei Zhong。优化医院床位分配以协调医疗效率并提高质量。《组合优化杂志》，48，2024。[692] Alexander H. Hübner。零售商品组合规划决策支持系统。《国际零售与分销管理杂志》，45:808–825，2017。[693] Fabian Dunke 和 Stefan Nickel。定制化多层级、多准则大学课程表编制的数学启发式算法。《运筹学年鉴》，第1–36页，2023。[694] Fanyong Meng 和 Chunqiao Tan。犹豫直觉模糊语言集的距离度量。《经济计算与经济控制论研究》，51:207–224，2017。[695] Shahzad Faizi、Tabasam Rashid 和 Sohail Zafar。使用犹豫直觉模糊语言术语集的多准则群体决策超越排序方法。《智能与模糊系统杂志》，32 2164，2017 3 2153( ): – 。[696] Yiran Zheng 和 Lan Zhang。一种基于犹豫中性集与水平集的新型图像分割算法。载于《2021年电子信息技术与智慧农业国际会议（ICEITSA）》，第370–373页。IEEE，2021。[697] Yiwei Chen、Qiu Xie、Xiaoyu Ma 和 Yuwei Li。使用犹豫中性集优化建筑与拆除废弃物资源化处理厂选址：以中国厦门为例。《工程优化》，第1–22页，2024。[698] Tabasam Rashid 和 M Sarwar Sindhu。基于区间值犹豫图像模糊集的备选方案选择。《智能与模糊系统杂志》，42(1):551–561，2021。[699] Tiedong Chen 和 Long Ye。一种基于犹豫图像模糊 Schweizer–Sklar Maclaurin 对称均值算子的新型 MAGDM 方法及其应用。《熵》，24(2):238，2022。[700] Serif Özlü 和 Haci Aktas。r,s,t-球形犹豫模糊集的相关系数，以及基于聚类算法和与理想解相似度排序法的多准则决策问题。《计算与应用数学》，43，2024。[701] Lijun Ma、Kinza Javed、Zeeshan Ali 和 Shizhao Yin。迈上新台阶：教育部门安装生物识别系统以确保安全——基于复t-球形犹豫模糊 Aczel-Alsina 聚合算子。《IEEE Access》，12:22624–22648，2024。[702] Fathima Perveen PA、Sunil Jacob John 等。球形模糊软专家集。载于《AIP会议论文集》，第2261卷。AIP Publishing，2020。[703] S Gomathi、S Krishnaprakash、M Karpagadevi 和 Said Broumi。立方球形中性集。《国际中性科学杂志》，21(4):172–72，2023。[704] S Gomathi、M Karpagadevi、S Krishnaprakash、A Revathy 和 Said Broumi。用于高级决策的立方球形中性集。《中性集与系统》，73(1):24，2024。

[705] S Krishnaprakash、R Mariappan 和 Said Broumi。立方球形中智集及基于余弦相似度测度的电动卡车选择。《中智集与系统》，67(1):15，2024。[706] R. Ramesh、S. Krishnaprakash、Nikola Ivkovic、Mario Konecki 和 Chiranjibe Jana。球形图像模糊集：利用几何 Bonferroni 方法提升决策水平。《国际分析与应用期刊》，2025。[707] Sadique Ahmad、Badshah e Roome、Anisa Begum 和 Naveed Ahmad。球形图像模糊集及其在多准则决策中的应用。《欧洲纯粹与应用数学期刊》，2025。[708] Ingrid J. Hickman 和 Graeme A. Macdonald。糖尿病对肝病严重程度的影响。《美国医学杂志》，2007。[709] Muhammad Akram 和 Alessio Martino。基于 t-球形模糊软粗糙平均聚合算子的多属性群体决策。《粒计算》，8:171–207，2022。[710] Shabana Farman、Faiz Muhammad Khan 和 Naila Bibi。t-球形模糊软粗糙聚合算子及其在多准则群体决策中的应用。《粒计算》，9，2023。[711] Michael Angelo B. Promentilla 和 Fidero Kuok。基于 At- 球形中智模糊 DEMATEL-ANP 方法，研究区块链技术在智慧城市中的问题。2022 年第 14 届软件、知识、信息管理与应用国际会议（SKIMA），第145–150页，2022。[712] Mahizha Mahizha 和 Immaculate Mary. M。利用简化中智距离相似性测度与 n 值 t-球形模糊中智集，全面解决固体废弃物管理选址问题。《国际中智科学期刊》，2025。[713] Xuefeng Ding 和 Zijiang Pei。自然灾害后的应急响应方案选择：概率 t-球形犹豫模糊集、奖惩动态属性权重及非补偿方法的综合应用。《信息》，2024。[714] Takaaki Fujita。多元粗糙集。《通过图化、超化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第152页，2025。[715] Nehad N Morsi 和 Mohammed Mostafa Yakout。模糊粗糙集的公理体系。《模糊集与系统》，100(1-3):327–342，1998。[716] Chih-Ching Hsiao、Chen-Chia Chuang、Jin-Tsong Jeng 和 Shun-Feng Su。一种基于加权模糊粗糙集的规则提取方法。载于《2013年SICE年度会议》，第104–109页。IEEE，2013。[717] Oliver Urs Lenz、Chris Cornelis 和 Daniel Peralta。Fuzzy-rough-learn 0.2：用于模糊粗糙集算法和单类分类的 Python 库。2022年IEEE国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE），第1–8页，2022。[718] Zhiming Zhang。基于直觉模糊覆盖的广义直觉模糊粗糙集。《信息科学》，198:186–206，2012。[719] Zhan ao Xue、Li ping Zhao、Lin Sun、M. Zhang 和 Tianyu Xue。基于多粒度支持直觉模糊粗糙集的三支决策模型。《国际近似推理杂志》，124:147–172，2020。[720] Tahir Mahmood、Jabbar Ahmmad、Zeeshan Ali 和 Miin-Shen Yang。基于直觉模糊粗糙集的置信水平聚合算子及其在医学诊断中的应用。《IEEE Access》，11:8674–8688，2023。[721] B Surender Reddy、S Vijayabalaji、N Thillaigovindan 和 P Balaji。一种用于医疗事故失效模式与影响分析的模糊粗糙集方法。《国际分析与应用期刊》，21:134–134，2023。[722] Karan Singh、Samajh Singh Thakur 和 Mangi Lal。关系数据库模型中不确定性处理的模糊粗糙集技术。《Informatica》，19(1):113–134，2008。[723] Xianming Huang 和 Jikai Yi。模糊粗糙集及其在知识获取中的应用。载于《自然语言处理与知识工程国际会议，2003年会议录》，第519–524页。IEEE，2003。[724] Hu Zhao 和 Hong-Ying Zhang。关于两个论域上的犹豫中智粗糙集及其应用。《人工智能评论》，53:4387–4406，2020。[725] Hai-Long Yang、Chun-Ling Zhang、Zhi-Lian Guo、Yan-Ling Liu 和 Xiuwu Liao。单值中智集与粗糙集的混合模型：单值中智粗糙集模型。《软计算》，21:6253–6267，2016。[726] Muhammad Kamran、Shahzaib Ashraf 和 Muhammad Shazib Hameed。一种有前景的方法：基于单值中智粗糙集的置信水平聚合算子。《软计算》，第1–24页，2023。[727] Li Zeng。融合媒体时代，基于中智粗糙集的人工智能驱动型跨学科传播人才培养质量评估。《中智集与系统》，93:241–249，2025。[728] Dliouah Ahmed 和 Binxiang Dai。两个不同论域上的图像模糊粗糙集与粗糙图像模糊集及其应用。《数学杂志》，2020。[729] Mavera Nawaz、Arooj Adeel 和 Muhammad Akram。失效模式与影响分析中的风险评估：结合图像模糊粗糙数的 AHP-VIKOR 方法。《粒计算》，9(3):69，2024。[730] Hasan Dincer、Serhat Yüksel、Gabor Pinter 和 Alexey Mikhaylov。利用量子力学与黄金分割图像模糊粗糙集，了解加密货币挖矿的市场潜力。《区块链：研究与应用》，5(4):100230，2024。[731] Haidong Zhang、Lan Shu、Shilong Liao 和 Cairang Xiawu。对偶犹豫模糊粗糙集及其应用。《软计算》，21:3287–3305，2015。

[732] Bingyang Li、Jianmei Xiao 和 Xihuai Wang。两个论域上的区间值对偶犹豫模糊粗糙集及其应用。《智能模糊系统杂志》，35：3195–3211，2018。[733] Chenxia Jin、Jusheng Mi、Fachao Li 和 Meishe Liang。一种基于新型概率犹豫模糊粗糙集的多准则决策方法。《信息科学》，608：489–516，2022。[734] Ahmad Bin Azim、Asad Ali、Abdul Samad Khan、Fuad A Awwad、Emad AA Ismail 和 Sumbal Ali。室内定位系统评估：基于 q-球面模糊粗糙 TOPSIS 的分析。《Heliyon》，10(10)，2024。[735] Maheen Sultan 和 Muhammad Akram。利用球面模糊粗糙数选择氢能与燃料电池供应商的扩展多准则决策技术。《应用数学与计算》，71：1843 – 1886，2024。[736] Ahmad Bin Azim、Ahmad Aloqaily、Asad Ali、Sumbal Ali、Nabil Mlaiki 和 Fawad Hussain。q-球面模糊粗糙集及其在多属性决策问题中的应用。《AIMS 数学》，2023。[737] S Sudha、B Felcia Merlin、B Shoba 和 A Rajkumar。四分区中智概率分布。《国际中智科学杂志》（IJNS），25(2)，2025。[738] Hoejin Kim、Yirong Lin 和 Tzu-Liang Bill Tseng。增材制造质量控制综述。《快速成型杂志》，24(3)：645–669，2018。[739] Takaaki Fujita。一般幂集型软粗糙图及其相关图类。《通过图化、超化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第 437 页，2024。[740] Xinyi Wang 和 Qinghai Wang。可变精度模糊软粗糙集模型的不确定性度量。发表于 CECNet，2022。[741] Muhammad Riaz 和 Masooma Raza Hashmi。软粗糙毕达哥拉斯 m-极模糊集与毕达哥拉斯 m-极模糊软粗糙集及其在决策中的应用。《计算与应用数学》，39，2019。[742] Haidong Zhang、Lianglin Xiong 和 Weiyuan Ma。广义直觉模糊软粗糙集及其在决策中的应用。《计算分析与应用杂志》，20(1)，2016。[743] Anjan Mukherjee 和 Abhik Mukherjee。区间值直觉模糊软粗糙近似算子及其在决策问题中的应用。《数据科学年鉴》，9(3)：611–625，2022。[744] Muhammad Akram、Ghous Ali 和 José Carlos R Alcantud。新型决策混合模型：直觉模糊 n-软粗糙集：M. akram 等。《软计算》，23(20)：9853–9868，2019。[745] Aysun Benek 和 Taha Yasin Ozturk。中智软粗糙集环境下两种不同决策方法的比较分析。《OPSEARCH》，第 1–22 页，2025。[746] Srinivasan Vijayabalaji、Natesan Thillaigovindan、Ranganathan Rajasekaran 和 Kopikrishnan Sathiyaraj。中智软粗糙矩阵。载于《科学与技术中的现代超软计算趋势》，第 213–230 页。IGI Global Scientific Publishing，2025。[747] Jingjing Zhang。高等教育互动音乐教学质量评估中的中智软粗糙集：一种新方法。《中智集与系统》，90(1)：66，2025。[748] Minakhi Das、Debadutta Mohanty 和 Kedar Chandra Parida。关于结合粗糙集理论的中智软集。《软计算》，25(21)：13365–13376，2021。[749] Tasawar Abbas、Rehan Zafar、Sana Anjum、Ambreen Ayub 和 Zamir Hussain。一种创新的软粗糙对偶犹豫模糊集与对偶犹豫模糊软粗糙集。《VFAST 数学学报》，11 27，2023 1 17( ): – 。[750] Kholood Mohammad Alsager 和 Noura O Alshehri。基于多 q-对偶犹豫模糊软粗糙模型的决策方法。《智能与模糊系统杂志》，38(2)：1623–1635，2020。[751] Kholood Mohammad Alsager、Noura Omair Alshehri 和 Muhammad Akram。基于多 q-犹豫模糊软多粒度粗糙模型的决策方法。《对称性》，10(12)：711，2018。[752] Faisal Mehmood、Jabbar Ahmmad、Tahir Mahmood、Ubaid Rehman 和 Heng Liu。图形模糊软粗糙交互聚合算子环境下的 WASPAS 技术及其应用。可从 SSRN 4691042 获取，2017。[753] Leina Zheng、Tahir Mahmood、Jabbar Ahmmad、Ubaid ur Rehman 和 Shouzhen Zeng。球面模糊软粗糙平均聚合算子及其在多准则决策中的应用。《IEEE Access》，PP：1–1，2022。[754] Muhammad Zeeshan Hanif、Naveed Yaqoob、Muhammad Riaz 和 Muhammad Aslam。具有新型决策方法的线性丢番图模糊图。《AIMS 数学》，7(8)：14532–14556，2022。[755] J Vimala、AN Surya、Nasreen Kausar、Dragan Pamucar、Vladimir Simic 和 Mohammed Abdullah Salman。采用 (p, q)-重线性丢番图模糊集的扩展 PROMETHEE 方法及其在机器人选择问题中的应用。《科学报告》，15(1)：69，2025。[756] MJ Baqer、HA AlSattar、Sarah Qahtan、AA Zaidan、Mohd Azri Mohd Izhar 和 Iraq T Abbas。基于区间值线性丢番图模糊集的车辆工业数据采集系统决策建模方法。《国际信息技术与决策杂志》，24(01)：89–168，2025。[757] Somen Debnath。线性丢番图中智集及其性质。《中智集与系统》，53(1)：37，2023。[758] Mani Parimala 和 Saeid Jafari。球面线性丢番图模糊图：释放模糊逻辑在不确定性建模和现实世界应用中的力量。《公理》，13(3)：153，2024。

[759] 穆罕默德·里亚兹、马苏玛·拉扎·哈希米、德拉甘·帕穆阿尔和余明珠。具有 mcdm 建模不确定性的球形线性丢番图模糊集。《CMES-工程与科学计算机建模》，126 1164，2021 1125：–。[760] 马苏玛·拉扎·哈希米、赛达·泰巴·特里姆、穆罕默德·里亚兹、德拉甘·帕穆阿尔和戈兰·奇罗维奇。基于多准则决策的球形线性丢番图模糊软粗糙集。《公理》，10:185，2021。[761] 萨马扬·纳拉亚纳穆尔蒂、J. V. 布雷尼、拉埃德·A. 沙尔瓦拉、萨亚卜·R. 阿尔塞纳尼、阿里·艾哈迈迪安和姜大国。用于评估可持续储能系统的增强型模糊决策方法。《可持续能源、电网与网络》，2022。[762] 高明·藤田和弗洛伦丁·斯马兰达克。森林模糊集、森林中智集、森林等势集和森林粗糙集。《无限研究》，2025。[763] 高明·藤田和弗洛伦丁·斯马兰达克。中智树软专家集与森林软集。《无限研究》，2025。[764] 高明·藤田和弗洛伦丁·斯马兰达克。量子树软集与量子森林软集。《无限研究》，2025。[765] 高明·藤田。粗糙集、超粗糙集、超超粗糙集、树粗糙集和多重粗糙集简介。《通过图化、超化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软集、粗糙集及其他》，第394页，2025。[766] 阿马尔·阿尔哈利迪、卢伊·夸伊德尔、阿姆贾德·卡什曼、阿卜杜勒·拉赫曼·阿拉米和赛义德·吉尔耶斯。利用智能电网，以能源和水资源为指标，对约旦可持续城市选址与设计进行研究。《可持续城市与社会》，37:125–132，2018。[767] 阿凯茨·阿尔特克塞、安多尼·贝里斯泰因和曼努埃尔·格拉纳。医院再入院风险预测模型：方法系统综述。《生物医学中的计算机方法与程序》，164:49–64，2018。[768] 李斌和 Steven C H Hoi。在线投资组合选择：综述。《ACM 计算调查》（CSUR），46 36，2014 3 1( ): –。[769] 赛义德·布鲁米和弗洛伦丁·斯马兰达克。直觉模糊软专家集及其在决策中的应用。《新理论杂志》，(1):89–105，2015。[770] 阿夫尚·卡尤姆、诺尔森·穆什塔克、坦泽拉·沙欣、瓦吉德·阿里和弗洛伦丁·斯马兰达克。广义区间值直觉模糊软专家集上的若干相似性度量及其在医学诊断中的应用。《中智系统应用》，23(1):47–67，2024。[771] 优素福·库达和纳斯鲁丁·哈桑。双极模糊软专家集及其在决策中的应用。《国际应用决策科学杂志》，10:175–191，2017。[772] 高明·藤田和弗洛伦丁·斯马兰达克。一般等势软专家图研究。《等势逻辑与计算》，2:107–121，2024。[773] 陈斌。区间值广义模糊软专家集及其应用。载于《国际自然计算、模糊系统与知识发现会议》，2019。[774] 优素福·库达和纳斯鲁丁·哈桑。模糊参数化复多模糊软专家集。《2018年英国马来西亚国立大学理学院研究生学术研讨会论文集》，2019。[775] 斯里尼瓦桑·维贾亚巴拉吉、尚穆甘·卡莱塞尔万、阿金·奥斯曼·阿塔贡和侯赛因·卡马吉。直觉模糊软专家群研究。《计算数学开放问题国际期刊》，17(2)，2024。[776] 费萨尔·沙尔奇、优素福·库达和奈夫·奥泰比。基于可能性中智软专家集相似性度量的决策技术。《中智集与系统》，第55卷/2023：信息科学与工程国际期刊，第358页，2024。[777] 费萨尔·沙尔奇、阿卜杜勒·加福尔·艾哈迈德和阿什拉夫·库兰。由实空间到复空间的区间值中智软专家集。《工程与科学计算机建模》，2022。[778] 瓦卡斯·乌卢贾伊、梅梅特·沙欣和纳斯鲁丁·哈桑。用于多准则决策的广义中智软专家集。《对称性》，10:437，2018。[779] 穆罕默德·阿克拉姆、古斯·阿里和何塞·卡洛斯·罗德里格斯·阿尔坎图德。基于犹豫模糊软专家信息的多属性群决策新方法。《专家系统》，40，2023。[780] 古斯·阿里、阿伊莎·阿夫扎尔、乌姆贝尔·谢赫和穆罕默德·纳比尔。结合对偶犹豫模糊集与软专家集，对地方选举情景进行预测的多准则群决策。《粒计算》，8:2039–2066，2023。[781] 费鲁兹·蒂埃、古斯·阿里、穆罕默德·古尔扎尔、德拉甘·斯特凡·帕穆卡尔和加内什·戈赖。在图像模糊软专家信息下的一种新型群决策技术。《熵》，23，2021。[782] P. A. 法蒂玛·佩尔文、苏尼尔·雅各布·约翰和 K. P. 拉蒂什。关于球形模糊软专家集。2020。[783] 穆罕默德·阿克拉姆、古斯·阿里、彭新东和穆罕默德·扎因·乌尔·阿比丁。球形模糊 n-软专家集下的混合群决策技术。《人工智能评论》，55:4117–4163，2021。[784] 穆罕默德·M. 阿里·沙米里、古斯·阿里、穆罕默德·扎因·乌尔·阿比丁和阿鲁吉·阿迪尔。球形模糊双极软专家框架下的多属性群决策方法及其应用。《工程与科学计算机建模》，2023。[785] 瓦妮莎·巴蒂斯塔·施拉姆、卢西亚娜·普里西拉·巴罗斯·卡布拉尔和费尔南多·施拉姆。支持可持续供应商选择的方法——文献综述。《清洁生产杂志》，273:123089，2020。

[786] 高明藤田。多动态模糊集、中智集和等势集及其在纳米材料科学中的应用。2025.[787] Bogdan R Kosanovic、Luis F Chaparro 和 Robert J Sclabassi。动态模糊集的信号建模。载于《1996年IEEE声学、语音与信号处理国际会议论文集》，第5卷，第2829–2832页。IEEE，1996.[788] Mohammad Panahi Borujeni、Arash Behzadipour 和 Hossein Gitinavard。用于露天采矿作业项目可持续性风险评估的动态直觉模糊群体决策分析。《可持续采矿杂志》，24(1):15–31，2025.[789] Serhat Aydın。基于不确定动态直觉模糊集的物流服务提供商评估。载于《智能与模糊系统国际会议》，第549–557页。Springer，2019.[790] AA Salama、KF Alhasan、HA Elagamy 和 Florentin Smarandache。中智动态集。《无限研究》，2021.[791] Chenyang Song、Zeshui Xu、Yixin Zhang 和 Xinxin Wang。动态犹豫模糊贝叶斯网络及其在“21世纪海上丝绸之路”最优投资港口决策问题中的应用。《应用智能》，50:1846–1858，2020.[792] Ding-Hong Peng 和 Hua Wang。多期决策中的动态犹豫模糊聚合算子。《控制论》，43:715–736，2014.[793] Rade B Vukmir。客户满意度。《国际医疗保健质量保证杂志》，19 31，2006 1 8( ): – .[794] Yue Chen、Lorraine Craig 和 Daniel Krewski。空气质量风险评估与管理。《毒理学与环境健康杂志A辑》，71(1):24–39，2008.[795] Janani K. 和 Rakkiyappan R. 复概率模糊集及其群体决策聚合算子，并扩展至TOPSIS。《工程应用人工智能》，114:105010，2022.[796] Krishna Kumar Gupta 和 Sanjay Kumar。基于犹豫概率模糊集的时间序列预测方法。《粒计算》，4:739–758，2018.[797] Wen-Jing Huang、Yihua Li 和 Kang Xu。用于建模的一般概率模糊集及其在肌电机器人中的应用。《智能与模糊系统杂志》，37:2087–2100，2019.[798] Wen-Jing Huang、Geng Zhang 和 Han-Xiong Li。一种用于不确定性集成推理的新型概率模糊集。2012年IEEE计算智能测量系统与应用国际会议（CIMSA）论文集，第58–62页，2012.[799] Krishna Kumar Gupta 和 Sanjay Kumar。基于概率直觉模糊集的直觉模糊时间序列预测方法。载于《数学建模与科学计算国际会议》，第315–324页。Springer，2018.[800] Dheeraj Kumar Joshi 和 Sanjay Kumar。股票选择问题中概率直觉模糊多准则决策的交互式方法。《可靠性与统计研究杂志》，第 25–36 页，2018.[801] Rıdvan Şahin 和 Fatma Altun。概率单值中智犹豫模糊环境下基于MABAC方法的决策。《环境智能与人性化计算杂志》，11(10):4195–4212，2020.[802] Sendeyah Al Hantoobi、AA Zaidan、Hassan Abdulsattar Ibrahim、Sarah Qahtan、Muhammet Deveci、Sinan Isik 和 Hana Tomášková。基于概率区间中智犹豫模糊集决策模型的移动云计算委托方法安全模块。《应用软计算》，175:113089，2025.[803] Xiaobin Zheng。概率中智集下多属性决策的智能框架及其应用。《国际知识工程与智能工程系统杂志》，27(4):503–513，2023.[804] Abhijit Saha、Bijoy Krishna Debnath、Prasenjit Chatterjee、Annapurani K. Panaiyappan、Surajit Das 和 Gogineni Anusha。基于广义Dombi算子的概率犹豫模糊共识达成模型：医疗供应链框架下的供应商选择。《工程应用人工智能》，133:107966，2024.[805] Mengdi Liu、Xianyong Zhang 和 Zhiwen Mo。基于改进距离测度的概率犹豫模糊MEREC-TODIM决策。《国际模糊系统杂志》，26:2370–2393，2024.[806] Manasvi Singh、Ashish Kumar、Narendra N. Khanna、John R. Laird、Andrew N. Nicolaides、Gavino Faa、Amer M. Johri、Laura E. Mantella、José Fernandes e Fernandes、Jagjit S. Teji、Narpinder Singh、Mostafa M. Fouda、Rajesh Singh、Aditya M. Sharma、George D. Kitas、Vijay Rathore、Inder M. Singh、Kalyan Tadepalli、Mustafa Al-Maini、Esma R. Isenovic、Seemant Chaturvedi、Deepak Garg、Kosmas I. Paraskevas、Dimitri P. Mikhailidis、Vijay Viswanathan、Manudeep K. Kalra、Zoltán Ruzsa、Luca Saba、Andrew F. Laine、Deepak L. Bhatt 和 Jasjit S. Suri。个性化框架下人工智能在心血管疾病风险评估中的应用：范围综述。《eClinicalMedicine》，73，2024.[807] Hung-Chi Chang、Jing-Shing Yao 和 Liang-Yuh Ouyang。基于概率模糊集和三角模糊数、具有可变提前期的模糊混合库存模型。《数学与计算机建模》，39(2-3):287–304，2004.[808] Minsi Xiao、Lidan Qian、Bing Yang、Guangcong Zeng 和 Sili Ren。基于蒙特卡罗模拟—三角模糊数耦合模型的农业土壤重金属风险评估。《环境地球化学与健康》，46(2):62，2024.

[809] 新建·关、冯娇·余、洪石·徐、常文·李和永乐·关。基于随机森林算法和三角模糊数层次分析法的城市地铁系统洪水风险评估。《可持续城市与社会》，109:105546，2024。[810] James F. Baldwin 和 Sachin Baban Karale。用于分类模型的非对称三角模糊集。载于《知识型智能信息与工程系统国际会议》，2003。[811] Didier Dubois、Laurent Foulloy、Gilles Mauris 和 Henri Prade。概率—可能性变换、三角模糊集与概率不等式。《可靠计算》，10(4):273–297，2004。[812] James F Baldwin 和 Sachin B Karale。用于分类模型的非对称三角模糊集。载于《知识型与智能信息及工程系统国际会议》，第364–370页。Springer，2003。[813] Vishwas Deep Joshi、Priya Agarwal、Huda Alsaud、Lenka Čepová 和 B Swarna。基于完全三角直觉模糊集的多目标运输问题决策框架。《国际计算智能系统杂志》，18(1):1–29，2025。[814] Qi Yue、Wenchang Zou 和 Wen Hu。用于解决双边匹配问题的三角直觉模糊集新理论。《亚历山大工程学报》，63:57–73，2023。[815] Anupama Namburu、Senthilkumar Mohan、Sibi Chakkaravarthy 和 Prabha Selvaraj。基于三角直觉模糊集的皮肤癌分割。《SN计算机科学》，4(3):228，2023。[816] Jianping Fan、Xuefei Jia 和 Meiqin Wu。基于单值三角中智集和EDAS方法的新型多准则群体决策模型。《智能与模糊系统学报》，38(2):2089–2102，2020。[817] Jianping Fan、Xuefei Jia 和 Meiqin Wu。基于单值三角中智集和Dombi优先Bonferroni均值算子的绿色供应商选择。《国际计算智能系统杂志》，12(2):1091–1101，2019。[818] Subadhra Srinivas 和 K Prabakaran。单值三角中智模糊旅行商问题的优化。《中智集与系统》，60(1):26，2023。[819] S. Vijayalakshmi 博士和 B. Nisha 博士。关于三角犹豫模糊软集。《应用科学与工程技术研究国际期刊》，2024。[820] E. Fany Helena。三角犹豫模糊集的决策问题。《应用非线性分析通讯》，2024。[821] Raj Kumar Bera 和 Shyamal Kumar Mondal。三角犹豫模糊环境下折扣信贷关联多目标两阶段运输问题的探讨。《OPSEARCH》，2025。[822] Qusay Hassan、Patrik Viktor、Tariq J. Al-Musawi、Bashar Mahmood Ali、Sameer Algburi、Haitham M. Alzoubi、Ali Khudhair Al-Jiboory、Aws Zuhair Sameen、Hayder Mahmood Salman 和 Marek Jaszczur。可再生能源在全球能源转型中的作用。《可再生能源焦点》，2024。[823] Saeid Abbasbandy 和 T Hajjari。梯形模糊数排序的新方法。《计算机与数学及其应用》，57(3):413–419，2009。[824] YLP Thorani、P Phani Bushan Rao 和 N Ravi Shankar。广义梯形模糊数的排序。《当代数学科学国际期刊》，7(12):555–573，2012。[825] Amarpreet Kaur 和 Amit Kumar。使用广义梯形模糊数求解模糊运输问题的新方法。《应用软计算》，12(3):1201–1213，2012。[826] BongJu Lee 和 Yong Sik Yun。广义梯形模糊集。《忠清数学学会学报》，24(2):253–266，2011。[827] Jerry M Mendel。使用自动面积法计算梯形模糊集的相似度。《信息科学》，589:716–737，2022。[828] YS Yun。三维三角模糊数与梯形模糊集之间的参数运算。《代数与应用数学杂志》，21(2)，2023。[829] SN Murty Kodukulla 和 V Sireesha。利用质心概念对区间值梯形直觉模糊集进行排序的新方法。《SN计算机科学》，5(5):493，2024。[830] SN MURTY KODUKULLA 和 SIREESHA VEERAMACHANENI。区间值梯形直觉模糊集的排序方法及其在指派问题中的应用。《理论与应用信息技术杂志》，101(20)，2023。[831] Jufeng Ye。用于多准则决策的梯形直觉模糊集聚合算子。《智能信息技术国际期刊》（IJIIT），13(4):1–22，2017。[832] Jun Ye。梯形中智集及其在多属性决策中的应用。《神经计算与应用》，26:1157–1166，2015。[833] Hüseyin Kamacı、Harish Garg 和 Subramanian Petchimuthu。双极梯形中智集及其Dombi算子在多准则决策中的应用。《软计算》，25(13):8417–8440，2021。[834] Kiran Khatter。区间值梯形中智集：用于非功能需求优先级排序的多属性决策。《环境智能与人性化计算杂志》，12 1055，2021 1 1039( ): – .[835] Irfan Deli 和 Faruk Karaaslan。广义梯形犹豫模糊数及其在多准则决策问题中的应用。《软计算》，25(2):1017–1032，2021。[836] Rakhi Bihari、S Jeevaraj 和 Dragan Pamucar。梯形犹豫模糊集的完备排序原理及其在求解梯形犹豫模糊线性规划问题中的应用。《复杂与智能系统》，11(12):486，2025。

[837] 穆罕默德·阿克拉姆、阿姆娜·哈比卜和若泽·卡洛斯·R·阿尔坎图德。基于 Dijkstra 算法的梯形图像模糊数网络优化研究。《神经计算与应用》，33(4):1329–1342，2021。[838] K·德瓦和 S·莫哈纳塞尔维。基于爱因斯坦运算的梯形图像模糊聚合算子及其在多属性决策问题中的应用。载于《AIP 会议论文集》，第 2516 卷，第 200006 页。AIP 出版有限责任公司，2022。[839] V·达纳拉克什米。梯形球形模糊数及其在模糊风险分析中的应用。《Mapana 科学期刊》，22(2)，2023。[840] 吴善敏、凯瑟琳·M·斯特凡尼和金贤昌。慢性病风险预测模型的开发与应用。《延世医学杂志》，55(4):853–860，2014。[841] 弗洛伦丁·斯马兰达克。标准与非标准中智集和逻辑简介。《中智集与系统》，77:395–404，2025。[842] 弗洛伦丁·斯马兰达克。关于非标准中智逻辑（对今村《中智逻辑定义札记》的回答）。Infinite Study，2019。[843] 弗洛伦丁·斯马兰达克。非标准中智逻辑定义的改进及中智超实数简介（第五版）。Infinite Study，2022。[844] 弗洛伦丁·斯马兰达克。标准与非标准中智理论的进展。Infinite Study，2019。[845] 穆罕默德·赛义德、尔凡·赛义夫·乌丁、伊姆蒂亚兹·塔里克和哈里什·加格。精化模糊软集：性质、集合论运算与公理化结果。《计算与认知工程杂志》，3 33，2024 1 24( ): – 。[846] 弗洛伦丁·斯马兰达克。《思想巢：科学日志》，VIII：数字绘画，第 8 卷。Infinite Study，2022。[847] A·U·拉赫曼、M·阿尔沙德和 M·赛义德。精化直觉模糊集环境下凸集与凹集的概念框架。《素数数学研究杂志》，17(2):122–137，2021。[848] 阿提克·乌尔·拉赫曼、穆罕默德·拉耶斯·艾哈迈德、穆罕默德·赛义德、穆罕默德·阿赫桑、穆罕默德·阿尔沙德和穆罕默德·伊赫桑。精化直觉模糊集基础及其若干性质研究。《模糊扩展与应用杂志》，1(4):279–292，2020。[849] 穆罕默德·赛义德和法蒂玛·拉扎克。精化直觉 q-模糊集的基础探究与关键性质：数学框架及集合论运算的全面研究。Authorea 预印本，2024。[850] 郑颖、莫烈和叶志文。面向休闲体育产业竞争性计算的稳健多维 n 值精化中智逻辑框架。《中智集与系统》，86:631–643，2025。[851] 梅赫梅特·梅尔凯普奇和穆罕默德·阿博巴拉。基于精化中智整数融合与 ElGamal 算法的不确定有理数据单元加密安全模型。Infinite Study，2023。[852] 穆罕默德·赛义德、穆罕默德·拉耶斯·艾哈迈德和阿提克·乌尔·拉赫曼。精化毕达哥拉斯模糊集：性质、集合论运算与公理化结果。《计算与认知工程杂志》，2(1):10–16，2023。[853] 弗洛伦丁·斯马兰达克。复精化中智集简介。Infinite Study，2017。[854] 尔凡·德利。精化中智集与精化中智软集：理论与应用。载于《广义与混合集合结构及其在软计算中的应用研究手册》，第 321–343 页。IGI Global，2016。[855] 阿卜杜勒雷扎·拉什诺、弗洛伦丁·斯马兰达克和赛义德·萨德里。精化中智集在基于内容的图像检索中的应用。载于《2017 年第十届伊朗机器视觉与图像处理会议（MVIP）》，第 197–202 页。IEEE，2017。[856] 藤田隆明和弗洛伦丁·斯马兰达克。 u-结构与函子结构的统一框架：管理超、超拓扑、超超拓扑、树和森林型不确定上/下/离模型。《中智集与系统》，91:337–380，2025。[857] 吉姆·彼得斯和萨姆·奈姆帕利。《近集的应用》。《美国数学学会通告》，59(4)，2012。[858] 詹姆斯·F·彼得斯。近集：导论。《数学与计算机科学》，7(1):3–9，2013。[859] 詹姆斯·F·彼得斯。近集：关于对象邻近性的特殊理论。《基础信息学》，75 433，2007 1 4 407(-): – 。[860] 詹姆斯·F·彼得斯。面向计算智能工具箱的模糊集、近集与粗糙集。载于《计算智能基础》第 2 卷：近似推理，第 3–25 页。Springer，2009。[861] 约斯尔·格佐齐、内斯琳·巴克卢蒂、哈尼·哈格拉斯、穆尼尔·本·阿耶德和阿德尔·M·阿利米。基于区间二型贝塔模糊近集的内容图像检索方法。《IEEE 模糊系统汇刊》，30(3):805–817，2021。[862] S·阿妮塔·尚蒂和 R·瓦尔玛蒂。模糊近集上的图像处理。载于《2021 年 IEEE 马德拉斯分会会议（MASCON）》，第 1–5 页。IEEE，2021。[863] S·阿妮塔·尚蒂和 R·瓦尔玛蒂。模糊近集上的核。《数学进展：科学期刊》，9(4):1521–1532，2020。[864] 张芳媛、蒋梦旭和王思博。高效动态加权集合采样及其扩展。《VLDB 学报》，17(1):15–27，2023。[865] 杨健和约瑟夫·Y-T·梁。加权集合覆盖问题的一种推广。《海军研究后勤学》，52(2):142–149，2005。

[866] Ai and Cybernetics, 9(5):787–794, 2018.[867] Peter Pathinathan 和 P Mahimairaj。加权模糊集。*International Journal of*《国际技术与工程期刊》，8(5):766–769，2020.[868] Zbigniew Suraj 和 Sibasis Bandyopadhyay。直觉模糊环境中的广义加权模糊 Petri 网。载于《2016 IEEE 国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE）》，第 2385–2392 页。IEEE，2016.[869] Shan Yang、Ke Li、Shuliang Wu、Zitong Xu 和 Taoying Liu。基于直觉模糊集和 VIKOR 的东瓜山无废开采质量评价。《应用科学》，12(16):8249，2022.[870] Tinghuai Ma 和 Meili Tang。加权粗糙集模型。载于《第六届国际智能系统设计与应用会议》，第 1 卷，第 481–485 页。IEEE，2006.[871] Nayani Sateesh 、 Pasupureddy Srinivasa Rao 和 Davuluri Rajya Lakshmi。基于优化集成学习的学生表现预测：采用加权粗糙集理论进行特征挖掘。《并发与计算：实践与经验》，35(7):e7601，2023.[872] Jinfu Liu、Qinghua Hu 和 Daren Yu。加权粗糙集学习：迈向主观方法。载于《知识发现与数据挖掘进展：第 11 届亚太知识发现与数据挖掘会议（PAKDD 2007），中国南京，2007 年 5 月 22–25 日。论文集 11》，第 696–703 页。Springer，2007.[873] Linfeng Gou 和 Yu Zhong。一种基于属性加权中智集的新型故障诊断方法。《IEEE Access》，7:117740–117748，2019.[874] Florentin Smarandache 和 Mumtaz Ali。区间值双极模糊加权中智集及其应用。A A，10(1):2，2016.[875] Huakun Chen、Jingping Shi、Yongxi Lyu 和 Qianlei Jia。一种结合云模型、Z 数和区间值语言中智集的决策模型。《熵》，26(11):892，2024.[876] Honggang Peng、Zhi Xiao、Xiaokang Wang、Jianqiang Wang 和 Jian Li。多准则决策中的 Z 数支配、支持与反对关系。《信息科学》，621:437–457，2023.[877] Lotfi A Zadeh。关于 Z 数的注记。《信息科学》，181(14):2923–2932，2011.[878] Irem Ucal Sari 和 Cengiz Kahraman。直觉模糊 Z 数。载于《智能与模糊系统国际会议》，第 1316–1324 页。Springer，2020.[879] Abrar Hussain 和 Mazhar Ali。基于直觉模糊 Z 数的先进决策模型，对可持续发展目标中的思想政治教育进行批判性评估。《国际可持续发展目标期刊》，1:23–44，2025.[880] Tingting Yang。一种将多层感知器与直觉模糊 Z 数相结合的人才管理框架，用于人才分配。《科学报告》，15(1):31491，2025.[881] Duygu Sergı 和 Irem Ucal Sarı。使用区间值直觉模糊 Z 数评估学习管理系统。《土耳其在线远程教育期刊》，24(4):179–206，2023.[882] Mesut Karabacak。中智 Z 数的相关系数及其在决策中的应用。《智能模糊系统杂志》，45:215–228，2023.[883] Shigui Du、Jun Ye、Rui Yong 和 Fangwei Zhang。中智 Z 数的若干聚合算子及其多准则决策方法。《复杂与智能系统》，7:429 – 438，2020.[884] Muhammad Kamran、Nadeem Salamat 和 Muhammad Shazib Hameed。单值中智 Z 数的正弦三角聚合算子：在商业选址中的应用。《中智集与系统》，63(1):18，2024.[885] Luis León Gómez、Hortencio Flores Flores、Adán Humberto Estela Estela、Manuel Cesar Vildoso Villegas、Juvita Dina Soto Hilario、Virgilio Vildoso Gonzales 和 Abarca Arias Yessika Madelaine。利用中智 Z 数的高等教育战略规划模型。《中智集与系统》，84:648–660，2025.[886] Luis León Gómez、Hortencio Flores Flores、Adán Humberto Estela Estela、Manuel Cesar Vildoso Villegas、Juvita Dina Soto Hilario、Virgilio Vildoso Gonzales 和 Yessika Madelaine Abarca Arias。利用中智 Z 数的高等教育战略规划模型。《中智集与系统》，84(1):52，2025.[887] Bindu Nila 和 Jagannath Roy。利用基于 D 数的毕达哥拉斯模糊 DEMATEL 方法分析物流 4.0 的关键成功因素。《决策方法进展》，2(1):92–104，2024.[888] Nagarajan Deivanayagama Pillai、Bhuvaneswari Thangavel、Yasothei Suppiah 和 Kanchanna Anbazhagan。一种基于融合的框架：利用语言 D 数进行中智熵分析与属性赋权。《大数据与计算视觉》，第 e229588 页，2025.[889] Yuzhen Li 和 Yabin Shao。基于 D 数理论的模糊认知图。《IEEE Access》，10 72716，2022 72702: – .[890] Takaaki Fujita、Arif Mehmood 和 Arkan A. Ghaib。关于 D-off 数和中智 D 数的形式基础。《理论计算机科学纯数学》，5(1):48–61，2025.[891] V Shijina、Sunil John 和 Anitha Thomas。多重集。《科学新成果期刊》，4(9):18–27，2015.[892] Adithya Unni 和 Sunil Jacob John。多重集的熵。载于《AIP 会议论文集》，第 2336 卷。AIP 出版社，2021.[893] V Shijina、Adithya Unni 和 Sunil Jacob John。多重集的相似性度量及其在模式识别中的应用。《Informatica》，44(3)，2020.[894] Sanjitha Radhakrishnan 和 Baiju Thankachan。单值中智多重集及其在多准则决策中的应用。《中智集与系统》，86(1):20，2025。

这篇动态综述全面考察了多种广义集合论框架，它们旨在对现实世界中的不确定性进行建模和刻画，而这类不确定性往往涉及模糊性、部分真值和信息不完备。本文追溯了这些数学概念的发展历程，从模糊集和直觉模糊集等经典模型开始，继而探讨了更复杂、更新近的模型，包括中智集、普拉斯托基尼集和外延集。此外，本文还涵盖了一些相关概念，如含糊集、犹豫模糊集、图像模糊集和四分中智集。本文旨在对这些不同理论进行统一且与时俱进的分析，阐明其基本原理，以及它们在各个科学领域对复杂不确定性进行严谨数学建模的能力。

ISBN 978-1-59973-842-0