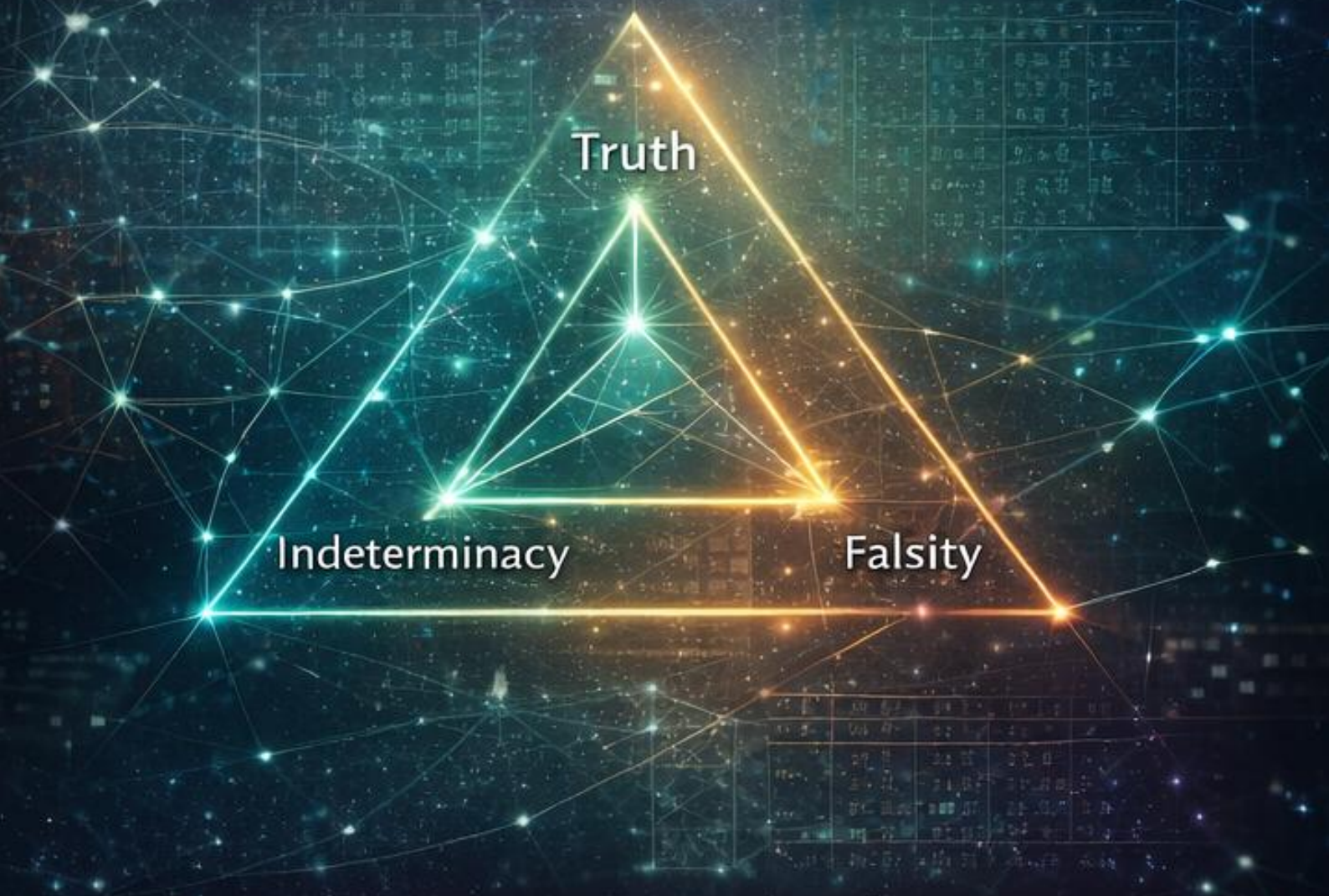
ACADEMIC MONOGRAPH SERIES ON UNCERTAINTY SCIENCE

# Survey of Various Fuzzy and Uncertain Decision-Making Methods

## Foundations, Models, and Computational Approaches in Uncertain Decision Science




Research Monograph in Fuzzy, Neutrosophic, and Multi-Criteria Decision Systems

**Takaaki Fujita, Florentin Smarandache**

# 各种模糊与不确定决策方法综述

国际中智科学协会（NSIA）出版社

盖洛普 - 瓜亚基尔美利坚合众国 – 厄瓜多尔 2026

编辑：



国际中智科学协会（NSIA）出版社
https://fs.unm.edu/NSIA/

新墨西哥大学数学与科学部，美国
新墨西哥州盖洛普校区古尔利大道
705号，邮编87301

瓜亚基尔大学，肯尼迪大道与德尔塔大道交汇处，“萨尔瓦多·阿连德博士”大学校区，厄瓜多尔瓜亚基尔，邮编090514

**同行评审：**

**Fernando A. F. Ferreira**里斯本大学学院ISCTE商学院BRU-IUL，武装部队大道，1649-026里斯本，葡萄牙 邮箱：
fernando.alberto.ferreira@iscte-iul.pt

**Julio J. Valdés**
加拿大国家研究委员会，M-50，1200蒙特利尔路，渥太华，安大略省 K1A 0R6，加拿大 电子邮箱：
julio.valdes@nrc-cnrc.gc.ca

**Tieta Putri**
工程学院，计算机科学与软件工程系，坎特伯雷大学，基督城，新西兰

ISBN 978-1-59973-883-3



# 本书目录

本书其余部分组织如下。

**1 引言** **7**

1.1 不确定集.7 1.2 不确定决策.8 1.3 我们的贡献.9

**2 预备知识** **19**

2.1 模糊集.19 2.2 直觉模糊集.20 2.3 中智集.21 2.4 多属性集.22 2.5 粗糙集.23 2.6 软集.23 2.7 不确定集.24 2.8 模糊图.24 2.9 不确定决策（UDM）.26

**3 问题层级框架 31**

3.1 模糊多准则决策（模糊多准则决策）.31 3.2 模糊多属性决策（模糊多属性决策）.34 3.3 模糊群体决策.38 3.4 模糊动态决策.42 3.5 模糊多目标决策.46 3.6 模糊伦理决策.50 3.7 模糊共识决策.53 3.8 模糊战略决策.57 3.9 模糊多专家决策.61 3.10 模糊多阶段决策.64 3.11 模糊多层决策.70 3.12 模糊多智能体决策.77 3.13 模糊多情景决策.84

**4 权重 elicitation 决策方法 ds 93**
4.1 模糊层次分析法（模糊层次分析法）.94 4.2 模糊LOPCOW（模糊综合权重线性优化法）.98 4.3 模糊 SIWEC（模糊标准简单权重计算法）.102 4.4 模糊判断矩阵.107 4.5 模糊网络分析法（ANP）（模糊网络分析法）.109 4.6 模糊序数优先方法（OPA）.114 4.7 模糊 PIPRECIA（枢轴成对相对准则重要性评估）.118 4.8 模糊 SWARA（模糊逐步权重评估比率分析法）.122 4.9 模糊 CILOS（模糊标准影响损失法）.125 4.10 模糊 IDOCRIW（模糊熵-CILOS集成客观赋权法）.132 4.11 模糊 BWM（模糊最佳-最差法）.138 4.12 模糊 CRITIC.142 4.13 模糊 MEREC（模糊基于标准移除效应的方法）.146 4.14 模糊 FUCOM.150

**5 结构/因 果决策建模（准则间影响）155**
5.1 模糊 DEMATEL（模糊决策试验与评价实验室法）. . . . . 155 5.2 模糊解释结构模型（模糊解释结构模型）.159 5.3 模糊 MICMAC（交叉影响/驱动力-依赖性分析）.165 5.4 模糊认知图（模糊认知图）. 171

**6 补偿性 决策矩阵上的评分方法（“加权和”系列） 175**
6.1 模糊 COPRAS（模糊复杂比例评估）.177 6.2 模糊 MACBETH（基于类别评价技术的模糊吸引力测度）.180 6.3 模糊 CoCoSo（模糊组合折衷解）.184 6.4 模糊 SAW（模糊简单加性加权）.189 6.5 模糊 RAFSI（通过将准则子区间函数映射到单一区间实现的备选方案模糊排序）.193 6.6 模糊 RATMI（基于迹到中位数指数的备选方案模糊排序）.197 6.7 模糊 RANCOM（模糊排序比较）.202 6.8 模糊 AROMAN（考虑两步正规化的模糊替代方案排序法）.205 6.9 模糊 MAUT（模糊多属性效用理论）. 212 6.10 模糊 SMART（模糊简单多属性评定技术）.216 6.11 模糊 REGIME.220 6.12 模糊 TODIM.223 6.13 模糊 GRA（模糊灰色关联分析）.227 6.14 模糊 ARAS（模糊加性比率评估）.231 6.15 模糊 WASPAS（模糊加权聚合和积评估）.235 6.16 模糊 MOORA（基于比率分析的模糊多目标优化）. . . . 239 6.17 模糊偏好选择指数.241 6.18 FROV（模糊价值范围法）.245 6.19 模糊 MOOSRA.248

**7 距离参照 方法/边界/折衷指数方法 25 1**
7.1 模糊TOPSIS（基于与理想解相似性的模糊偏好顺序技术）. 252 7.2 模糊 MARCOS（基于折衷解的模糊方案测量与排序）.256 7.3 模糊 CODAS（模糊组合距离评估）.259 7.4 模糊 EDAS（基于与平均解距离的模糊评估）.263

7.5 不确定 VIKOR.266 7.6 不确定MABAC（多属性边界近似区域比较）.270 7.7 模糊 MAIRCA（模糊多属性理想-现实比较分析）.273

**8 超越（非补偿性／优势度关系）决策方法** **277**
8.1 模糊ELECTRE（模糊消去与选择转换现实法）.278 8.2 模糊 FlowSort.282 8.3 不确定 PROMETHEE（用于评价丰富化的偏好排序组织法）.286 8.4 模糊 QUALIFLEX.289 8.5 模糊 ORESTE（模糊关系数据的组织、排序与综合）. 292

**9 规则归纳 / 学习 / 证据 / 序贯决策方法** **297**
9.1 模糊决策树.298 9.2 模糊DRSA（模糊基于优势关系的粗糙近似）.301 9.3 模糊马尔可夫决策过程.304 9.4 模糊证据推理.308

**10 其他相关决策方法** **313**
10.1 模糊目标规划.315 10.2 模糊DEA（模糊数据包络分析）.318 10.3 模糊社会选择.321 10.4 模糊决策表.322 10.5 模糊决策矩阵.326 10.6 模糊超滤子.328 10.7 模糊SWOT分析.331 10.8 模糊成本效益分析.335 10.9 模糊决策曲线分析.338 10.10模糊理性选择.344

**11 决策应用** **349**
11.1 计算机科学与工程应用.349 11.2 制造业应用.349 11.3 金融应用.350 11.4 商业应用.350 11.5 医学应用.351 11.6 社会科学应用.351

**12 讨论：新决策方法** **353**
12.1 统一决策结构.354 12.2 统一不确定决策结构.356 12.3 迭代多准则决策.357 12.4 迭代多属性决策.359 12.5 迭代多目标决策.360 12.6 解析超超网络过程（ASHNP）.361 12.7 解析递归超超网络过程（ARSHNP）.366 12.8 超超决策.370 12.9 不确定超超决策.371

**13 结论** **373**

**A 图结构与不确定图结构 377**A

˙1 图结构：基于统一关联的模型 -模型 . 377

A.2 不确定图结构 . 378

**附录（表格目录） 380**

**附录（图目录） 383**

# 各种模糊与不确定决策方法综述

**TakaakiFujita** [1] * **和 Florentin Smarandache**[2†] 独立研究者，东京，日本。电子邮件：Takaaki.fujita060@gmail.com[2] 新墨西哥大学盖洛普分校，美国新墨西哥州盖洛普，邮编87301。电子邮件：fsmarandache@gmail.com

## 摘要

真实应用中的决策常常受到模糊性、不完整信息、异构数据以及相互冲突的专家意见的影响。本综述回顾不确定性感知多准则决策（MCDM），并将该领域组织为一个简明的、面向任务的分类体系。

我们总结了问题层面的设定（离散、群体／共识、动态型、多阶段、多层级、多智能体以及多情景）、权重 elicitation（模糊／语言型输入下的主观方案与客观方案），以及准则间结构与因果关系建模。在求解程序方面，我们对比了用于排序或分类的补偿性评分方法、参考距离与折衷方法，以及非补偿性优序框架。我们还概述了能够产生可解释规则或策略的基于规则／证据的模型与序贯决策模型。

该综述概述了典型输入、核心计算步骤和主要输出，并就如何根据鲁棒性、可解释性和数据可用性选择方法提供了指导。最后，文章提出了在大规模和动态决策环境中开展可解释的不确定性整合、稳定性和可扩展性研究的开放方向。

关键词：模糊集、中智集、多属性集、多准则决策、决策 g

# 第1章

# 引言

## 1.1 不确定集

现实世界中的系统很少能提供完全清晰的信息。观测结果可能是不精确的、部分可靠的，或不完整的。为了以数学上严谨的方式对这类不确定性进行建模，人们提出了许多广义集合论形式体系，包括模糊集 [1], 直觉模糊集 [2],中智集 [3, 4], Vague集 [5], 犹豫模糊集 [6], 图像模糊集 [7], 四分区中智集 [8], 五分区中智集 [9], 多元生成集 [10], 超模糊集 [11],以及超中智集 [12]。模糊模型及其扩展——本书后续部分将对其进行介绍——已在决策科学、化学、控制和机器学习领域得到广泛研究 [13]。在实践中，适当的集合模型取决于：(i) 所描述的现象，以及 (ii) 为忠实表示该现象所需的不确定性成分数量。

在经典模糊范式中，论域 $X$ 的每个元素 $x$ 都被赋予一个隶属度$\mu(x) \in [0, 1]$，表示 $x$ 属于给定模糊集 [1] 的程度。作为参照，经典（清晰）集与模糊集之间的比较见表1.1。

表1.1：经典（清晰）集与模糊集的简要比较。

| 方面 | 经典（清晰）集 | 模糊集 |
|---|---|---|
| 隶属模型 | 指示函数 $\chi_A: X \to \{0, 1\}$ | 隶属函数 $\mu_A: X \to [0, 1]$ [1] |
| 决策边界 | 清晰（属于/不属于） | 渐进（隶属度） |
| 表达不确定性 | 不能直接表达（仅二值隶属） | 是（分级 隶属度 捕获 模糊性） |
| 基本运算 | $\cup$, $\cap$, $^c$ 通过布尔逻辑定义 | 广义 via t-范数/t-余范数（例如，最大值/最小值作为常见选择） |
| 典型用例 | 精确类别、确定性规则 | 模糊概念, 软阈值, 人类判断 |

对于直觉模糊集，每个 $x \in X$ 都由一对 $(\mu(x)\ \nu(x))$ 隶属度值和非隶属度值来刻画，其中 $\mu$, $\nu$: $X \to [0, 1]$ 满足

$$0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1,$$

[2,14] 而剩余量 $1-\mu(x)-\nu(x)$ 通常被解释为犹豫度。中智集通过为每个 $x \in X$ 关联一个三元组，对这种表示方式进行了细化

$$(T(x), I(x), F(x)),$$

其中，$T(x)$、$I(x)$ 和 $F(x)$ 分别表示真度、不确定度和假度，通常取值于 $[0,1]$。与直觉模糊约束不同，中智分量不必满足总和为 1，这使得我们能够灵活地对不完整、不一致或冗余信息进行编码 [14,15]。[1] 中智学强调中立性和不确定度的概念意义，并推动了中智逻辑、概率、统计学、测度论、积分及相关形式体系的平行发展。这些工具如今已广泛应用于各种科学与工程领域 [13]。

多元论集合进一步拓展了这一领域：它通过各元素的属性值及其对应的隶属度来建模，并引入不同属性值之间的矛盾（差异度）函数 [10,17,18]。这种附加结构支持对异质且可能相互冲突的评估进行情境感知聚合，从而完善经典模糊、直觉模糊和中智描述（例如参见 [19,20]）。为便于快速查阅，表 1.2 汇总了若干具有代表性的集合扩展中与各元素相关的典型信息（采用本书统一的符号表示）。

表 1.2：具有代表性的集合扩展及每个元素所存储的典型信息。

| 集合类型 | 每个元素附带的典型数据 |
|---|---|
| 模糊集 | 隶属映射 $\mu: X \to [0,1]$。 |
| 直觉模糊集 | 隶属度 $\mu$ 和非隶属度 $\nu$ 与 $\mu(x)+\nu(x) \le 1$；差距 $1-\mu(x)-\nu(x)$ 被解释为犹豫度。 |
| 中智集 | 三元组 $(T, I, F)$，其中 $T, I, F \in [0,1]$ (真度、不确定度、假度)，被视为独立坐标。 |
| 多属性集 | 元组（$P$，$v$，$Pv$，pdf，pCF），其中 pdf：$P \times Pv \to [0,1]^s$ 编码 $s$维隶属度，且 pCF：$Pv \times Pv \to [0,1]^t$ 是一个对称矛盾映射取值于 $[0,1]^t$。 |

作为进一步的推广，不确定集也广为人知 [20]。不确定集通过为元素赋予分级的多分量隶属信息（例如真度和不确定度）来扩展经典集，从而以严谨的方式对模糊性和不完整数据进行建模。这些概念也常与灰色集、区间集、粗糙集、近似集、软集和超软集等概念结合研究。

## 1.2 不确定决策

决策是通过评估目标、准则、约束和不确定性，在备选方案中选择行动，以实现期望结果。这些理念通过纳入面向不确定性的逻辑得到了拓展，进而催生了多种研究方向，例如模糊决策 [21,22], 直觉模糊

[1] 直觉模糊集不将不确定度视为主要坐标，而中智算子则将不确定度与真隶属度和假非隶属度置于同等地位 [14,16]。人们普遍认为，中智集框架涵盖了若干知名模型，包括直觉模糊集、不一致直觉模糊集（涵盖图片模糊集和三元模糊集）、勾股模糊集、球形模糊集以及 $q$阶正交对模糊集。类似地，中智化扩展了多种决策与不确定性范式，例如后悔理论、灰色系统理论和三支决策理论 [16]。

模糊决策 [23, 24], 中智决策 [25, 26], 和多元生成决策[27–29]。此外，决策本身也有多种方法，例如 TOPSIS [30],层次分析法 [31], 网络分析法 [32], CoCoSo 和 DEMATEL 都是广为人知的代表性方法。

将（i）选定的不确定集范式（例如模糊、直觉模糊、中智、多元生成或其他不确定集）与（ii）选定的决策技术相结合，可以探究由此产生哪些新颖且具有实际意义的结果。具体而言，研究会考察如何高效地支撑或改进真实世界中的决策过程，提升其准确性、鲁棒性和透明度，同时降低计算成本。

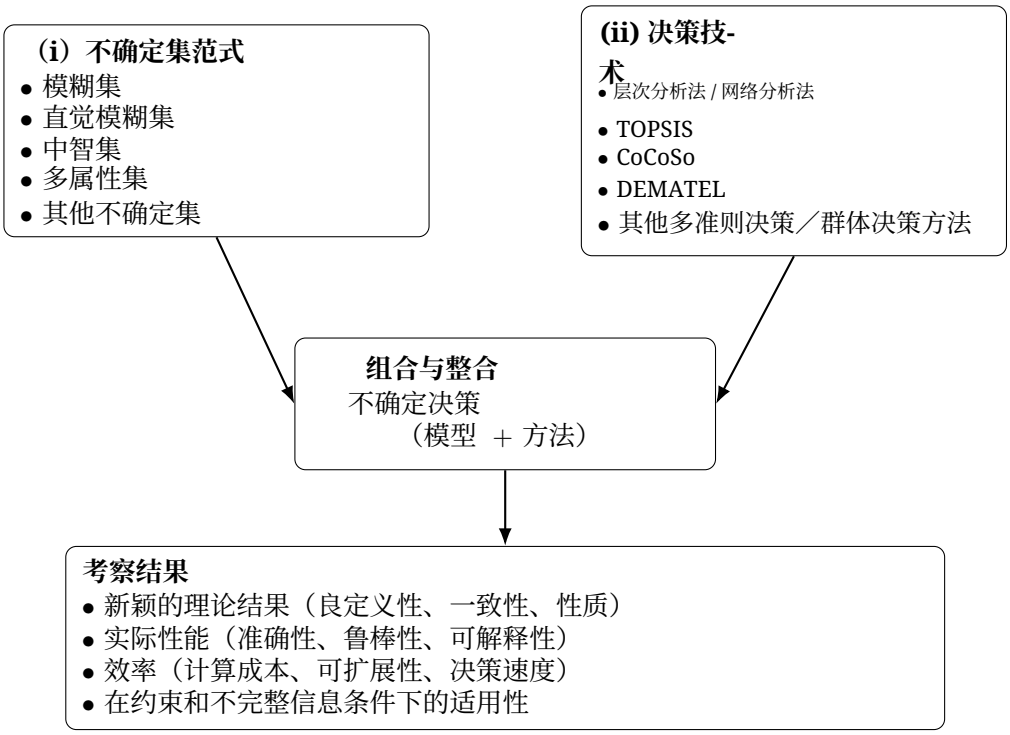



图 1.1：概念图：将不确定集范式与决策技术相结合，以获得新颖且具有实际意义的结果。

## 1.3 我们的贡献

鉴于上述讨论，决策与不确定集（包括模糊集和中智集）的范式具有根本重要性。在本书中，我们对不确定决策方法进行了全面综述。我们的首要目标是提供一份有用的参考，以支撑并启发该领域专家的未来研究。此外，我们还提出了若干新决策方法。

供参考，表1.3给出了不确定决策科学中各方法的紧凑分类体系，按任务、输入结构和典型输出进行分类。由于该表跨越多页，如有不便，敬请谅解。在本书中，这些概念将逐一简要讨论，并在适当之处一并介绍相关方法。

表1.3：不确定决策科学 中方法的紧分类体系（按任务、输入结构和典型输出分类）。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要产出-puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| **A. 问题层级框架（问题陈述 / 设定）** | | | | |
| 模糊 MCDM（一般） [33] | 框架-work | 备选方案 ×准则-ria；模糊/不确定评价；权重 | 排序/最优备选方案 | 以下大多数项目的统括性视角。 |
| 模糊多属性决策 [34] | 框架-work（离-散） | 有限 备选方案；属性； 模糊数 / 语言型评价 | 排序 | A 常见 离散多准则决策设定（基于矩阵）。 |
| 模糊群体-决策制定 [35] | 框架-work (群体) | 多位专家；个体-模糊矩阵-数值；专家权重 | 集体矩-阵；排序 | 包括 聚合 +（可选）共识阶段。 |
| 模糊共识决策-制定 | Con-共识过程 | 专家的模糊意见；相似度/共识阈值 | 共识达成 + 最终选择 | 明确迭代，直至达成共识。 |
| 模糊多个客观决策-制定 [36] | 优-化（多目-标-性） | 连续决策向量；多个（可能是可能 模糊） 目标函-tives/目标 | 折中解 | 通常 减少 to a 隶属度-最大化标量化。 |
| 模糊伦理决策制定 | 规则/准标准决策 | 伦理维度；模糊规则或模糊每个行动的得分 | 行动选择 / 排序 | 特定领域多准则决策（通常为模糊推理）。 |
| 模糊战略决策制定 | 规划决策 | 项目/度量指标；goal 成就 + 成本/资源满意度 | 最优方案 / 选择集 | 通常 建模 as 加权模糊满意度-约束条件下。 |
| 模糊动态型决策-制定（动态型 / 多准则-时期多准则决策分析）（参见 [37]） | 框架-work (dy-动态) | 时间索引 评估值/权重 $(\tilde{x}_{ij}(t)\, w_j(t))$; up-日期/折扣规则；（可选） 情景 data | 时间聚合的排序 or 自适应 pol-冰/计划 | 模型的偏好／性能不断演变跨越 不同时期; 聚合于 $t = 1,\ldots,T$之上（例如折扣的、滚动的，或状态更新的）。 |

下页继续。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出-puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊多专家决策制定 | 框架work (群体／多位专家) | 专家的模糊评估（矩阵或偏好关系）；专家权重；ag-聚合/共识rule | 集体模糊as-评估；排序/选择 | 一般群体多准则决策分析：聚合多位专家的模糊意见（可选地加入共识约束）形成一个单一决策。 |
| 模糊多阶段决策-制定 | 框架-work （多阶段） | 阶段索引cri-则/备选方案；阶段间con-制约；模糊转移/反馈规则 | 分阶段决策；最终计划/策略 | 序贯决策跨越阶段；较早的选择影响可行集和评价后续阶段（模糊不确定性传播）。 |
| 模糊多层级决策制定 | 框架work （层级的／双层） | 领导者–跟随者ob-目标/约束（或层次化准则—则）；模糊目标和约束 | 层级cal解（折中） | 模型跨越决策层级（例如，双层）：上层选择影响下层下的可行响应模糊偏好/目标。 |
| 模糊多-智能体决策-制定 | 框架-work （多智能体-智能体） | 智能体的效用-值/偏好（模糊）；交互协议（合作-性/竞争）；《信息》共享规则 | 联合决策，均衡，or协商结果 | 多个智能体with可能相互冲突的模糊偏好；so-通过聚合求解，讨价还价，or博弈论的谈判机制。 |
| 模糊多情景决策制定 | 框架-work （情景-的） | 情景集 Ω；情-景权重/概率能力（可能是模糊）；逐情景模糊性能 | 稳健排序-选择跨场景ios | 评估备选项-项在多个情景下；聚合各情景下的模糊结果（例如，期望值，最坏情况，后悔值）for稳健选择。 |
| **B. 权重 elicitation（推导准则权重）** | | | | |
| 模糊层次分析法 [38] | 权重-ing （两两-式） | 模糊倒数两两比较矩阵（层级结构） | 局部/全局权重；优先级性 | 树形/层次结构；几何均值 / 特征向量变体。 |
| 模糊网络分析法 [39] | 权重-ing （网-络） | 两两比较结果 + 比较依赖度网络；超矩阵trix | 全局先验ties | 推广AHP to相互依赖（极限超矩阵）。 |
| 模糊BWM [40] | 权重-ing （最优–最差） | 最优对其他and其他到最差模糊比率 | 权重（最优化） | 一致性控制，比.....更少的比较AHP. |

续见下一页。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊 CILOS（准则影响损失）[41] | Objective weighting | 归一化决策矩阵；影响损失计算；每项准则（模糊） | 客观权重（正可能模糊 $\tilde{w}_j$） | 赋予更大的权重 to 准则导致更大的信息/不精确-遗漏时的影响损失 or 退化的（模糊损失型赋权）。 |
| 模糊 SWARA [42] | 权重-ing（逐步-式） | 有序准则；模糊逐步重要性系数 | 权重（sequential） | Fast 偏好诱导 when 重要性顺序为已知。 |
| 模糊 FUCOM [43] | 权重-ing（完整一致-一致性） | 有序准则；连续模糊优先级比率 | 权重 + 偏差指数 | 优化强制比率 + 传递性一致性。 |
| 模糊 PIPRECIA [44] | 权重-ing (枢轴／步骤) | 序贯比较-较 to a 主元邻居；模糊尺度 | 权重（sequential) | 普通 + 反向过程常用于鲁棒-性。 |
| 模糊 OPA [45] | 权重-ing（序数） | 专家的序数排序（+可选模糊重要性） | 权重（最大值–最小值模型） | 无需成对比较矩阵；uses an 优化模型。 |
| 模糊判断矩阵 | Data 结构 | 模糊偏好 degrees（通常 complete）（补充）在 $[0,1]$ | 投入 for 权重 / 一致性 | 用于类似模糊层次分析法的流程和偏好建模。 |
| 模糊 LOPCOW（对数型百分比变更驱动客观权重 ing) [46] | Objective weighting | 模糊决策 matrix（去模糊化）；效益/成本类型；归一化 | 准则权重 $w_j$ (and 重要性排序) | 计算 $PV_j = 100 \lvert \ln(\mathrm{RMS}_j/\sigma_j) \rvert$ 来自归一化数据, then 归一化 $PV_j$ to 获得 $w_j$。 |
| 模糊 SIWEC（F-SIWEC）[47] | 权重-ing（直接评分；离散度-调整） | 专家的重要性 → 三角模糊数；化；专家权重 | 语言型评价正规-（可选） | 模糊 (or 去模糊化) 准则权重 $\tilde{w}_j$ (and 准则排序) | 无需两两比较；uses 离散度（例如标准偏差）to 反映专家的分歧。 |

续下页。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊 IDOCRIW [48] | Objective weighting (综合) | 归一化模糊决策矩阵（效益/成本）；entropy 离散度；CILOS 影响损失 (模糊化／去模糊化)；聚合规则 | 综合客观权重 $w_j^{(\mathrm{IDOCRIW})}$ (and 准则排序) | 纯粹数据驱动权重结合《信息》分散与相对损失；used to 降低 subjective and 稳定准则加权尺度／变异性不同。 |
| **C. 结构／因果建模（准则间影响）** | | | | |
| 模糊 DEMATEL [49] | 因果分析 | 模糊直接关系（影响）矩阵 准则之间 | 总关系；原因/结果组 | 输出显著度 $(D+R)$ and 关系 $(D-R)$。 |
| 模糊 ISM (Interpretive 结构模型-建模) [50] | 结构 modeling (层次 chy) | 专家可达性判断（二元 → 模糊）；可达性矩阵；传递闭包 | 层次有向影响图 | 模糊解释结构模型使用分级可达性 from 言语术语；模糊性通过闭包进行传播。 |
| 模糊 MICMAC（交叉影响／驱动型–依赖度）[51] | 影响类别 | (解释结构模型) 可达ity 矩阵 (bi-元/模糊)；交叉影响优势 | 驱动力／依赖指标；簇 (au-自主型, 依赖型, 联动型, 驱动型 ing) | 模糊 MICMAC 分析算出分级驱动型–依赖度优势并产生稳健的聚-类在模糊性下。 |
| 模糊 Total ISM (TISM) | 交互式可解释的结构模型 | ISM 可达性 + 逐链接理由（专家解释） | 层级结构 + 注释边（强度 + 解释） | 添加明确的依据—为每条连接分配..... |
| 模糊认知知 Map（模糊认知图）[52] | 因果网络 (dy-态) | 已签名有向因果图；模糊边权重；初始概念激活 | 情景动态；稳态／轨迹；影响图 | 同时保留 the ISM-导出层次结构。Uses 模糊因果权重 and 非线-性更新至模型反馈回路 and 不确定性传播。 |
| **D. 决策矩阵上的补偿性评分（“加权和”系列）** | | | | |
| 模糊 SAW [53] | 排序（加性） | 归一化模糊决策矩阵 + 权重 | 得分 and 排序 | 原型加权-sum 方法；高度可解释的。 |
| 模糊 SMART [54] | 排序（附加-性） | 价值尺度 + 摆动权重；模糊评-级方法 | 效用得分；排序 | 本质上结构化采用显式值的 SAW 尺度变换。 |

续见下页。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊多属性效用理论 [55] | 效用聚合-tion | 单属性效用-性；权重；模糊可能的结果 | 总体效用；排序 | 效用理论（通常加性/乘法形式）。 |
| 模糊 MAC-BETH [56] | 价值尺度构建tion | 定性成对-wise差值-吸引力判断 | 值函数-tions + 排序-ing | 构建数值价值尺度from语言型类别。 |
| 模糊 CO-PRAS [57] | 排序（效益/成本型） | 决策矩阵；权重；效益/成本划分 | 效用度；排序 | 区分效益型和评分中的成本总和。 |
| 模糊 MOORA [58] | 排序（比率） | 归一化决策矩阵；权重；效益–成本划分 | Net得分；排序 | 常与多准则方法搭配使用——MOORA 扩展。 |
| 模糊 ARAS [59] | 排序(add理想备选项集合。) | 决策矩阵 + 加入最优备选项集合本土；权重 | 效用比率；排序 | 将每个备选项与一个明确添加的理想项进行比较。 |
| 模糊 WAS-PAS [60] | 排序（混合） | 决策矩阵；权重；正规化tion | 综合；排序 | 结合 WSM（和）和 WPM（乘积）。 |
| 模糊 Co-CoSo [61] | 排序（折衷） | 决策矩阵；权重；正规化和/幂 | 折中得分；排序 | 结合加性与乘法聚合-tions. |
| 模糊 REGIME | 成对胜/损失聚合tion | 两两比较结果每个准则；权重 | 偏好矩-阵；排序 | 聚合准则-层面的胜/损失，跨备选方案。 |
| 模糊 TODIM [62] | 前景理论排序 | 参照点点；收益/损失；衰减-化参数；权重 | 优势度值；排序-ing | 体现损失厌恶/非对称偏好。 |
| 模糊灰色关联分析 | 相似度排序 | 参考序列；正规化数据；辨识系数-数 | 关联度；排序 | 与理想模式的接近程度-通过灰色关联等级。 |
| 模糊偏好选择指数 | 排序（指数） | 决策矩阵；归一化（通常不涉及显式权重） | 偏好指数；排序 | 轻权重 / 权重-自由变体是 com-mon. |
| 模糊范围of 值方法 | 排序（区间/值范围） | 归一化绩效表现·权重；值范围 | 总体值；排序 | 强调值之间的相互聚合中的值/范围化。 |

续见下页。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出-puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊 MOOSRA（多客观优化 tion on the 基础 of 简单比率分-析） [63] | 比率-方法评分 | 归一化 模糊性能；权重；效益/成本划分 | 比率 得分；排序 | 计算 加权比率型效用，基于模糊归一化值（通常 效益大于成本风格）以获得补偿性排序。 |
| 模糊 AROMAN（备选项集 tive 排序 ing 顺序方法 核算针对两步归一化化） [64] | 排序（基于归一化的评分） | 决策 矩阵；权重；效益/成本划分；两步归一化 | 总体效用得分；排序 | 执行两步正规化准则值，然后聚合加权 正规化性能以获得最终排序。 |
| 模糊 RANCOM（例如，PTF-RANCOM） [65] | 权重 ing（基于专家判断） | 准则；专家的语言重要性评估（模糊）；（可选） 专家权重；聚合算子 | 准则权重（and 准则 排序-ing） | 聚合 模糊 im-重要性 评价，得分 and 排名标准 then 推导出归一化权重系数-数。多准则决策分析方法。 |
| 模糊 RAFSI [66] | 排序（函数性的 map-映；排序逆转抗性参与者） | 模糊 决策 ma-trix（例如，三角模糊数）；权重；理想/反理想 参照点点；映射区间 $(n_1,\ n_2)$ | 效用 得分；排序 | Maps each 准则子区间到 com-mon 区间， 适用最大值/最小值 正规-化（通过 $A,\ H$）；then 聚合 加权分数。 |
| 模糊 RATMI | 排名（跟踪-to-中位数指标） | 模糊 决策矩阵；权重；效益型/成本型； nor-化；参数值 $v$ | 指标得分 $E_i$；排序 | 聚合 加权正规化 性绩效，通过迹指数和中位数相似度项获得最终的折中得分。 |
| **E. 参考点距离／边界／折中指数法** | | | | |
| 不确定 TOP-SIS [67] | 距离到（理想点，最差点） | （不确定/模糊）决策 矩阵；权重；度量 | 贴近系数-数；排序 | 按……排名 与……的距离模糊正理想解/模糊负理想解（理想解/反理想解）。 |

续表见下页。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 不确定 VIKOR [68] | Com-承诺程序-ming | 决策 矩阵; 权重; 最优/最劣; 参数 $v$ | 折衷指数 $Q$; 解集 | 平衡群体效用与个体遗憾。 |
| 不确定 MABAC [69] | 边界近似度 | 决策 矩阵; 权重; 边界区域构建 | 偏差得分; 排序 | 基于有符号距离的排名边界逼近面积的距离近似面积。 |
| 模糊 EDAS [70] | 距离 from 平均值 | 决策 矩阵; 平均值 解; 正/负距离 | 评价分数; 排序 | 使用与平均值的距离，而非与理想值的距离。 |
| 模糊 CODAS [71] | 距离 (Euclid + 曼哈顿距离) | 决策 矩阵; 负理想解; dis-距离度量指标 | 相对 as-评估; 排序 | 通常使用欧几里得距离 + 曼哈顿 判别-法。 |
| 模糊 MARCOS [72] | 效用与理想/反理想 | 扩展 矩阵 with 理想/反理想; 归一化; 权重 | 效用 功能; 排序 | 明确包含理想和反理想参考。 |
| 模糊 MAIRCA （多属性 属性理想–真实 Com-比较分析） | 理想–real com-比较排序 | 模糊 决策 ma-阵; 权重; the-理论/理想分布-与观测（实际）表现 | 基于差距的得分; 排序 | 比较“理论”（理想） 期望 with “真实” 模糊性能; 排名 by 聚合 模糊偏差（差距）。 |
| 模糊 FlowSort | 基于超越-的分类 | 偏好 函-数 and 流 (PROMETHEE); 参照点 pro-文件; 模糊 评估分配/权重 | 类别 as-分配 via 流 | PROMETHEE 流分类: 将备选项与限制剖面 进行比较 and 将类别 使用 正向-向/负向/净 flow 规则（模糊输入）。 |
| **F. 超越（非补偿性 / 支配关系）** | | | | |
| 不确定 ELECTRE [73] | Out-排序 / 核 | 一致性–不一致性指标; 阈值; 权重 | 超越图; 核 set | 非补偿性; 产生 a 优势度关系和最优集。 |
| 不确定 PROMETHEE [74] | Out-排序流 | 偏好函数 on 成对 差-异; 权重 | 正/负-/净流 | 生成完整或部分 排序 via 流。 |

下页继续。

| 方法 | Primary task | 典型输入 | 主要输出-puts | 备注／使用场景 |
|---|---|---|---|---|
| 模糊 QUALIFLEX [75] | Out-排序 (排列-基础排序) | 成对（可能是模糊）偏好关系，按准则划分；准则权重（可选） | Best-ing 顺序（排序）最大化一致性 | 评估排列；聚合（模糊）一致性 一致性 of 成对偏好 to 选择 the most 一致的排序。 |
| 模糊 ORESTE [76] | Out-排序（序数-距离排序） | 序数排名 / 偏好强度（可能模糊）；距离/聚合 rule | 排序（通常稳健在弱数据下） | 使用（模糊）序数信-形成与距离-基于聚合，当精确基数评价-不可用。 |
| **G. 规则归纳 / 学习 / 证据 / 序贯决策** | | | | |
| 模糊 DRSA | 基于优势度的规则 | 有序准则；支配关系；模糊边界 | 决策规则；类别近似-度 | 生成如果–那么规则 and 类似约简的结-特征。 |
| 模糊决策树 [77] | Pre-预测模型 | 训练数据；模糊划分 / 模糊partitions | Tree 模型；预测 | 面向学习的；can 支撑决策建议 建议。 |
| 模糊 Evential 推理 | 证据聚合tion | 信念度 / 证据（通常 DS-类似）+权重 | 已聚合信念／效用；排序 | 系统地融合多个不确定的 证据系统地。 |
| 模糊马尔可夫决策过程 | 序列tial 控制 | 状态，动作，（模糊）转移-换/奖励 | 最优 pol-icy; 值函数 | 多阶段 决策不确定性决策（动态规划）。 |

# 第2章

# 预备知识

本章汇集了全书中使用的基本符号和背景知识。

## 2.1 模糊集

模糊集理论通过允许分级隶属，扩展了经典子集概念，并用 $[0,1]$ [1,78,79] 中的一个值来量化隶属度。下面回顾其核心定义。

**定义 2.1.1**（模糊集）。 [1] 令 $X$ 为一个非空集。定义在 $X$ 上的一个模糊集 $A$ 由一个隶属函数指定

$$\mu_A : X \to [0,1].$$

等价地，可以写作

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\},$$

其中， $\mu_A(x)$表示 $x$ 属于 $A$的程度。

在模糊决策分析中，一种尤为常见的数值对象是三角模糊数（TFN）[80,81]。它通过简单的分段线性隶属度曲线对不精确量进行建模。

**定义 2.1.2**（三角模糊数（TFN））。[82,83] 设 $X$ 为一个论域。三角模糊数（TFN） $\tilde{x}$是 $\mathbb{R}$上的一个模糊集

其隶属函数 $\mu_{\tilde{x}}$： $\mathbb{R} \to [0,1]$ 由三个实参数确定 s

$$\tilde{x} = (l_x, m_x, u_x) \in \mathbb{R}^3, \qquad l_x \le m_x \le u_x,$$

via

$$\mu_{\tilde{x}}(t) = \begin{cases} 0, & t < l_x, \\ \dfrac{t - l_x}{m_x - l_x}, & l_x \le t \le m_x, \quad (m_x > l_x), \\ \dfrac{u_x - t}{u_x - m_x}, & m_x \le t \le u_x, \quad (u_x > m_x), \\ 0, & t > u_x. \end{cases}$$

若 $l_x = m_x$ （分别为 $m_x = u_x$），则相应的中间表达式按极限意义解释，因此$\mu_{\tilde{x}}(m_x) = 1$，且隶属度曲线仍为三角形。此外，若 $0 < l_x \leq m_x \leq u_x$，则称 $\tilde{x}$ 为正三角模糊数。

此处 $m_x$ 表示众数（最可能）值，而 $l_x$ 和 $u_x$ 分别作为下界和上界。

## 2.2 直觉模糊集

直觉模糊集通过同时记录隶属信息和非隶属信息来丰富模糊集，从而为显式的犹豫分量 [2]留出空间。标准表述如下。

**定义2.2.1**（直觉模糊集）. [84] 设 $E$ 为一个非空集。一个直觉模糊集 （IFS）$A$ 在 $E$ 上由下式给出

$$A = \big\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in E\big\},$$

其中

$$\mu_A, \nu_A : E \longrightarrow [0,1]$$

分别是隶属函数和非隶属函数，并且对于每个 $x \in E$,

$$0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1.$$

剩余部分,

$$\pi_A(x) := 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x),$$

称为犹豫度在 $x$。

当对所有 $x \in E$有 $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$时，即恢复经典模糊集情形，等价地，对每个 $x$有 $\pi_A(x) = 0$。

作为扩展 的直觉模糊集，已知若干相关概念，例如以下各项 :

- 广义直觉模糊集 [85]: 广义直觉模糊集为 $[0,1]$, 中的每个$\mu$, $\nu$赋予隶属度和非隶属度，并受最小值约束 $\leq 0.5$，扩展了 Atanassov 的$\mu + \nu \leq 1$ 条件，从而实现更丰富、更灵活的不确定性建模。

- 立方直觉模糊集 [86, 87]: 立方直觉模糊集使用一个区间值直觉对和一个清晰直觉对来描述每个元素，从而同时完整保留隶属度和非隶属度信息。

- 双极直觉模糊集 [88, 89]: 双极直觉模糊集为每个元素赋予正向隶属度和非隶属度（位于 $[0,1]$ ），以及负向隶属度和非隶属度（位于 $[-1,0]$），同时满足相应的和界。

- 复直觉模糊集 [90, 91]: 复直觉模糊集赋予隶属度和非隶属度复数值；隶属度、非隶属度及二者之和始终位于单位圆或单位正方形内。

- 区间值直觉模糊集 [92, 93]: 区间值直觉模糊集通过隶属度区间和非隶属度区间表示每个元素，其中 $[0,1]$, 中的上界满足 $\mu+\nu \leq 1$，从而明确地刻画不精确性。

## 2.3 中智集

中智集通过为每个元素赋予三个（通常相互独立的）度来表示不确定性：真度 $T$、不确定度 $I$和假度 $F$，通常取值于 $[0,1]$ [4, 14, 15, 94]。这种明确的不确定度分量灵活地推广了模糊集和直觉模糊集。

**定义 2.3.1**（中智集）。 [95, 96] 设 $X$ 是一个非空集。定义在 $X$上的中智集（NS） $A$ 由三个函数描述

$$T_A : X \to [0,1], \qquad I_A : X \to [0,1], \qquad F_A : X \to [0,1],$$

其中，对于每个 $x \in X$，值 $T_A(x)$、 $I_A(x)$ 和 $F_A(x)$ 分别量化陈述“$x \in A$”的真度、不确定度和假度。它们满足

$$0 \le T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \le 3.$$

For 参照点，图2.1展示了中智集的示意图。

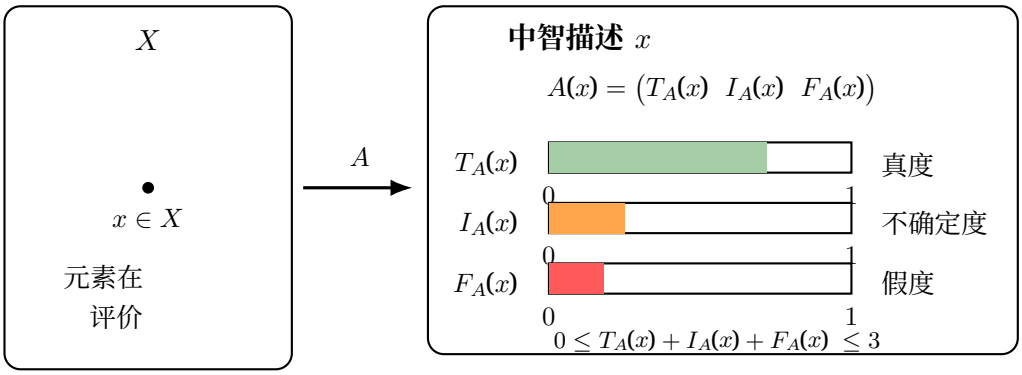



图2.1：中智集的概念示意图。对于每个 $x \in X$，其隶属状态由三元组 $\big(T_A(x)\ I_A(x)\ F_A(x)\big)$ 描述，分别表示真度、不确定度和假度。

作为中智集的扩展，已知有若干相关概念，例如：

- **立方中智集 [97, 98]:** 用区间中智三元组（$T$、 $I$、 $F$）和单值三元组共同表示每个元素，从而同时捕捉范围不确定性和代表性点，适用于决策任务。

- **双极中智集 [99, 100]:** 为每个元素指定两个中智三元组：正向（支持）和负向（反对）的真度—不确定度—假度，用于在评估中对利弊进行建模，并表示双方的不确定性。

- **$m$-极中智集 [101]:** 将双极推广至 $m$ 个极；每个元素包含 $m$ 个中智三元组，分别对应一个视角/智能体/状态，从而能够在准则集之间进行多态度评估，并涵盖不确定度和不一致性。

- **区间值中智集 [102, 103]:** 在 $[0,1]$，中，用区间替代真度、不确定度和假度，以便在聚合和排序步骤中，对每个分量的不确定性进行有界描述，而非使用单一数值。

- **超超中智集 [104–106]:** 将中智集扩展到超超结构，为更高阶的嵌套实体和关系赋予真度、不确定度和假度。

- **复中智集 [107, 108]:** 使用复值真度、不确定度和假度等级（通常以幅值和相位表示），以表征振荡或周期性信息，同时在信号场景中保留各分量的中智分离。

- **中智偏移 [109–111]:** 中智偏移通过允许真度、不确定度或假度的值分别低于 0 或高于 1，对中智集进行扩展。作为中智偏移的子类别，中智超集 $[112, 113]$ 和中智下集 $[3, 114]$ 等概念也已为人所知。

- **球形中智集 [115,116]:** 限制单值度，使得 $T$、 $I$和 $F$ 属于$[0, 1]$ 并满足球形范数界（例如 $T^2 + I^2 + F^2 \leq 1$），从而确保决策模型中的三元组可行。作为进一步扩展，n维超球形中智集也已为人所知 [117–119]。

## 2.4 多属性集

多属性集为元素分配多准则隶属向量，并通过属性值之间的矛盾度以及支配层级之间的交互，对其进行全局调节 $[17, 120–122]$。

**定义 2.4.1** （多属性集）。$[17, 120]$ 设 $P$ 为非空论域， $v$ 为一个（固定）属性，其可能值构成非空集 $Pv$。固定维数 $s, t \in \mathbb{N}$。

在（$P, v, Pv$）上的多属性集 是一个五元组

$$PS \ = \ (P, \, v, \, Pv, \, pdf, \, pCF),$$

其中

- $pdf$: $P \times Pv \longrightarrow [0, 1]^s$ 是归属度函数 （DAF）；对于 $x \in P$和 $a \in Pv$， $pdf(x, a)$ 是 $x$对应于属性值 $a$的（可能为向量值的）隶属度；
- $pCF$: $Pv \times Pv \longrightarrow [0, 1]^t$ 是矛盾度函数 (DCF)，满足

$$pCF(a, a) = 0, \qquad pCF(a, b) = pCF(b, a) \quad \text{for all } a, b \in Pv.$$

在多属性理论中，会选取一个（通常固定的）主导属性值 $a^* \in Pv$ ，并通过结合隶属度 $pdf$ 与矛盾度 $pCF$（$\cdot$， $a^*$）来定义集合论运算（如并集和交集），从而对不同属性值之间的交互和对立进行建模。

多元论集合以能够泛化各种概念而著称。如有需要，请参阅 [20] 了解更多详情。

## 2.5 粗糙集

粗糙集理论通过用确定部分（下近似）和可能部分（上近似）来近似目标子集，从而对不精确性进行建模；这两部分由不可分辨关系 [123–126]构造而成。下文回顾 Pawlak 的经典近似。

**定义 2.5.1** （粗糙集近似）。[127] 设 $X$ 是一个非空论域， $R \subseteq X \times X$是一个等价（不可分辨）关系。对于 $x \in X$，将 $x$ 的等价类记为

$$[x]_R := \{\, y \in X \mid (x, y) \in R \,\}.$$

给定任意子集 $U \subseteq X$，定义：

1. 下近似：
$$\underline{U} := \{\, x \in X \mid [x]_R \subseteq U \,\}.$$
$U$ 中的元素是确定属于 $U$ 的元素（其整个等价类都包含于 $U$）。
2. 上近似：
$$\overline{U} := \{\, x \in X \mid [x]_R \cap U \neq \varnothing \,\}.$$
$U$ 的元素是那些可能属于 $U$ 的元素（其类别与 $U$相交）。

$(U,\ U)$是 $\underline{U}$的粗糙集表示，并且始终满足

$$\underline{U} \subseteq U \subseteq \overline{U}.$$

作为粗糙集理论的扩展，人们研究了各种概念，例如概率粗糙集[128, 129] 和粒状粗糙集 [130, 131]。如有需要，请参阅 [132] 以了解更多详情。

## 2.6 软集

软集提供了一种基于参数的不确定性描述：每个参数选择论域的一个子集，而所有此类选择构成该模型。该框架由Molodtsov（1999年）提出，已广泛应用于决策问题 [133, 134]。

**定义 2.6.1** (软集)。 [134] 设 $U$ 为一个论域集， $E$ 为一个参数集。取 $A \subseteq E$，并用 $\mathcal{P}(U)$ 表示 $U$的幂集。若满足以下条件，则称有序对 $(F, A)$ 为论域 $U$上的软集：

$$F : A \to \mathcal{P}(U).$$

对于每个参数 $\epsilon \in A$，子集 $F(\epsilon) \subseteq U$称为 $(F, A)$ 的 $\epsilon$-近似 。因此，软集是 $U$的参数化子集族。

作为软集理论的扩展，人们提出了各种各样的概念，例如超软集[135, 136], 超超软集 [137, 138], 和树软集 [139, 140]。如有需要，请参阅例如 [141] 以了解更多详情。

## 2.7 不确定集

一种不确定集 为每个元素关联一个取自特定不确定性模型的程度，从而为模糊、直觉模糊、中智、多元生成及相关框架提供统一的总括性概念 [20, 142]。

**定义 2.7.1**（不确定模型）。[142] 令 $U$ 表示所有不确定模型构成的类别。每个 $M \in U$由以下内容确定：

- 一个非空集 Dom($M$)，其中包含某个固定整数 $k \geq 1$对应的可容许隶属度元组；以及
- 施加于 Dom($M$) 中元素的、特定于模型的代数或几何约束（例如，$\mu + \nu \leq 1$ 在直觉模糊情形下，或 $0 \leq T + I + F \leq 3$ 在中智情形下）。

典型实例包括：

- **模糊模型：** $\mathrm{Dom}(M) = [0, 1]$;
- **直觉模糊模型：** $\mathrm{Dom}(M) = \{(\mu,\ \nu) \in [0, 1]^2 :\quad \mu + \nu \leq 1\}$;
- **中智模型：** $\mathrm{Dom}(M) = \{(T,\ I,\ F) \in [0, 1]^3 :\quad 0 \leq T + I + F \leq 3\}$;
- **多元生成模型，**以及许多进一步的扩展。

**定义 2.7.2**（不确定集（U-集））。 [142]设 $X$ 为一个非空论域，并固定一个不确定模型$M$，其度域为 Dom($M$) $\subseteq [0, 1]^k$。在 $X$ 上的一个类型为 $M$的不确定集（简称$U$-集）是一个有序对

$$\mathcal{U} = (X, \mu_M),$$

其中

$$\mu_M : X \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

是 $\mathcal{U}$ 的不确定度函数 （隶属映射）。对于 $x \in X$，值 $\mu_M(x) \in$Dom($M$) 根据模型 $M$ 的规定，编码了 $x$ 属于 $\mathcal{U}$ 的程度。

如备注所述，可以进行多种推广。作为参照，表2.1按照度域 Dom($M$) $\subseteq [0, 1]^k$ 的维数 $k$，列出了不确定集族（不确定集）的目录（参见 [20]）。

## 2.8 模糊图

模糊图为每个顶点和边赋予一个属于 $[0, 1]$, 的隶属度，以表示具有不同程度而非二元连接的不确定连接性和关系强度 [143]。此外，相关概念还包括模糊有向图[214],、模糊超图 [143], 和模糊超超图 [215] 。

**定义 2.8.1**（ 模糊图)。 [79] 顶点集 $V$上的一个模糊图 是由一对 $G = (\sigma,\ \mu)$ 组成的 f:

表2.1：按度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ [20]的维数 $k$ 划分的不确定集族（U-Sets）目录。

| $k$ | note | 度域是 $[0,1]^k$ 子集的代表性 U-集模型 |
|---|---|---|
| 1 | | 模糊集 [1,143]；N-模糊集 [144–146] 阴影集 [147–149] |
| 2 | | 直觉模糊集 [2,150]；Vague集 [5,151]；双极模糊集（双分量描述-形式） [152,153]；勾股模糊集 [154,155]；费马模糊集 [156,157]；可变模糊集 [158–160]；容错模糊集 [161,162]；双模糊集 [163,164] |
| 3 | | 单值中智集 [94,96]；图片模糊集 [7,165]；三元模糊集 [166]；犹豫模糊集 [6,167]；球形模糊集 [168,169]；三极模糊集（三分量形式） [170–172]；中智模糊集 [173,174] |
| 4 | | 四分割中智集 [8,175]；双值中智集 [176,177]；对偶犹豫模糊集 [178,179]；模糊集 [180–182]；图里亚姆中智集 [183–186] |
| 5 | | 五分割中智集 [187–189]；三值中智集 [190–193] |
| 6 | | 六分割中智集 [194]；双极中智集 [99,195]；双极图模糊集 [196,197]；四值中智集 [192,198] |
| 7 | | 七分割中智集 [199–201]；五值中智集 [192,202,203] |
| 8 | | 八分割中智集 [194]；双极四分割中智集 [204,205]；双极双值中智集 |
| 9 | | 九分割中智集 [194] |
| $n$ | ($n \geq 1$) | 多值（模糊）集 [206]；多重模糊集 [207]；$n$-细化模糊集 [208,209] |
| $2n$ | ($n \geq 1$) | $n$-细化直觉模糊集 [209]；多重直觉模糊集 [207] |
| $3n$ | ($n \geq 1$) | $n$-细化中智集 [209,210]；多重中智集 [207,211,212] |

**阅读指南**。 在 U-集方案 [142], 中，每个模型 $M$ 由度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ 和隶属映射 $\mu_M$： $X \to$ Dom($M$) 指定。该表按环境维数 $k$ （即每个元素存储的数值分量数量）对代表性类别进行分组。

(a) 一种广受引用的观点认为，中智集提供了一个统一的框架，涵盖了若干较早的多分量模糊模型（及其推广形式）；参见 [16]。(b) 模糊集通常被视为某些四-分量中智集族的子类；参见 [8,175,182]。(c) 据报道，Turiyam 中智集是四分区中智集的子类；参见 [213]。

- 一个顶点隶属函数 $\sigma : V \to [0,1]$，其中 $\sigma(x)$ 表示 $x \in V$ 属于该图的程度。
- 一条边隶属函数 $\mu : V \times V \to [0,1]$，它是 $\sigma$ 上的一个模糊关系，满足 ng

$$\mu(x,y) \;\leq\; \sigma(x) \wedge \sigma(y), \quad \forall\, x,y \in V,$$

其中， $\wedge$表示最小值算子。

相应的 清晰图 $G^* = (\sigma^*, \mu^*)$ 由下式确定

$$\sigma^* = \{\, x \in V \mid \sigma(x) > 0 \,\}, \qquad \mu^* = \{\, (x,y) \in V \times V \mid \mu(x,y) > 0 \,\}.$$

从 $G$ 中选取子集 $X \subseteq V$，并定义如下，即可得到一个 模糊子图 $H = (\sigma', \mu')$

- 一个受限的顶点隶属函数 $\sigma' : X \to [0,1]$,
- 边的隶属度 $\mu' : X \times X \to [0,1]$ 满足

$$\mu'(x,y) \;\leq\; \sigma'(x) \wedge \sigma'(y), \quad \forall\, x,y \in X.$$

人们已研究了模糊图的多种扩展形式 [4, 216, 217]。这些形式可以在不确定图框架中表示；不确定图将不确定集扩展到了图结构。现在我们陈述不确定图论概念。

**定义 2.8.2** （不确定图）。 [218] 设 $G = (V, E)$ 是一个有限无向无环图，且 $M$ 是一个度域为 $\mathrm{Dom}(M)$ 的不确定模型。类型为 不确定图 $M$ 是一个三元组

$$\mathcal{G}_M = (V, E, \mu_M),$$

其中

$$\mu_M : V \cup E \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

将 $\mathrm{Dom}(M)$ 中的一个不确定度分配给每个顶点 $v \in V$ 和每条边 $e \in E$。可选择施加依赖模型的一致性关系，约束顶点度和边度之间的关系（例如，在模糊或直觉模糊设定中，根据 $\mu_M(u)$ 和 $\mu_M(v)$ 限定 $\mu_M(e)$），但此类约束由所选模型 $M$ 决定，并非此一般定义所固定。

为方便起见，表 2.2 按度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的维数 $k$ 列出了具有代表性的不确定图族（参见 [20, 218]）。

表 2.2：按度数域 $\mathrm{Dom}(M)$ 的维数 $k \subseteq [0,1]^k$（参见 [218]）划分的不确定图族（不确定图）目录。

| $k$ | 代表性不确定图类型 $\mathcal{G}_M =$（$V$、$E$、$\mu_M$），其 $\mu_M$ 为：$V \cup E \to \mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ |
|---|---|
| 1 | 模糊图；$N$-图 [219]；阴影图变体 [220] |
| 2 | 直觉模糊图 [221, 222]；模糊图 [223]；双极模糊图 [224, 225]；直觉证据图；变模糊图；次协调模糊图；双模糊图 [226, 227] |
| 3 | 中智图 [4][(a)]；犹豫模糊图 [228, 229]；三极模糊图；三支模糊图；图像模糊图 [230, 231]；球形模糊图 [168, 232]；不一致直觉模糊图；三元模糊／中智模糊图；中智模糊图 |
| 4 | 四分区中智图 [233, 234]；双值中智图 [176]；对偶犹豫模糊图 [235]；模糊图[(b)]；局部中智图；支撑中智图；图里亚姆中智图 [185, 236][(c)] |
| 5 | 五分区中智图 [237]；三值中智图 [191] |
| 6 | 六分区中智图；四值中智图 [191] |
| 7 | 七分区中智图 [238]；五值中智图 [191] |
| 8 | 八分区中智图 |
| 9 | 九分区中智图 |
| $n$ | $n$-精细化模糊图；多值（模糊）图；多重模糊图 [239] |
| $2n$ | $n$-精细化直觉模糊图；多重直觉模糊图 |
| $3n$ | $n$-精细化中智图 [240]；多重中智图 |

(a) 中智图模型通常被视为宽泛的框架，在适当的约束条件下可细化为多种基于度的图形式体系。

(b) 模糊图模型通常被描述为某些四分区及双值中智图模型的子类中智 g图模型。

(c) 据报道，图里亚姆中智图是某些四分区中智图模型的子类。

## 2.9 不确定决策（UDM）

利用不确定集，可以定义不确定决策（UDM）。定义如下。

**定义 2.9.1** （类型为 $M$ 的不确定决策（UDM））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。固定一个不确定模型 $M$，其度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$（参见 [20, 142]）。

一个类型为 $M$ 的不确定决策实例是数据

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, X_M, w_M, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big),$$

其中:

(i) $X_M = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$ 是一个不确定评价矩阵，其中 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 编码了 $A_i$ 在 $C_j$ 下的不确定评估;

(ii) $w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n$ （或者可选地， $w \in [0,1]^n$ 与 $\sum_j w_j = 1$）是一个不确定准则重要性偏好组合;

(iii) $\mathrm{Agg}_M$ 是一个依赖于模型的聚合算子，它为每个备选方案 $A_i$ 赋予一个总体不确定得分

$$s_i := \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) \in \mathrm{Dom}(M);$$

(iv) $\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个排序泛函 （依赖于模型的得分/去模糊化），通过以下方式在 $\mathcal{A}$ 上诱导一个预序

$$A_i \succeq_M A_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j).$$

由 $\mathfrak{D}_M$ 构成的解 是任意一个备选方案

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathrm{Score}_M(s_i),$$

以及由得分$_M$诱导的排序。

**注2.9.2** （特化）。 若 $M$ 是度域为 $\mathrm{Dom}(M) = [0,1]$ 的模糊模型，则定义 2.9.1 可还原为标准的模糊决策情形。若 $M$ 是直觉模糊、中智、多元生成等类型，则通过更改 $\mathrm{Dom}(M)$ 及算子（$\mathrm{Agg}_M$、$\mathrm{Score}_M$），即可得到相应的多分量不确定决策情形。

**定理2.9.3** （类型为 $M$ 的不确定决策的良定义性）。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限集。固定一个度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的不确定模型 $M$。假设:

（A1） 聚合算子是一个全映射

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Dom}(M);$$

（A2） 排序泛函是一个全映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

然后，对于每个不确定决策模型实例

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, X_M, w_M, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big)$$

$$with \quad X_M = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}, \quad w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n,$$

以下对象是良定义的:

（i）聚合不确定得分 $s_i \in \mathrm{Dom}（M）$、 $i = 1$、.....、 $m$;

(ii) 由 $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$ 上给出的诱导偏好关系

$$A_i \succeq_M A_j \iff \mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j);$$

(iii) 解集 最大值点集$_{A_i \in \mathcal{A}}$得分$_M(s_i)$，其非空。

此外， $\succeq_M$ 是 $\mathcal{A}$ 上的全预序 （自反、传递且完全）。

证明。**(i) 聚合不确定得分存在**。 固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$。由于 $X_M \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$，行 $(\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in})$ 属于 $\mathrm{Dom}(M)^n$。此外， $w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n$。根据假设 (A1)，该值

$$s_i := \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big)$$

有定义且属于 $\mathrm{Dom}(M)$。

**(ii) 得分为实数**。 根据 (A2)，对每个 $i$，$\mathrm{Score}_M(s_i) \in \mathbb{R}$ 均有定义。

**(iii) 关系 $\succeq_M$ 是良定义的全预序**。 定义 $A_i \succeq_M A_j$ ，当且仅当 $\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j)$。由于 $\geq$ 是在 $\mathbb{R}$ 上良定义的全预序，因此可立即得出：

- 自反性： 对所有 $i$，$\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_i$。
- 传递性： 若 $A_i \succeq_M A_j$且 $A_j \succeq_M A_\ell$，则 $\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j) \geq \mathrm{Score}_M(s_\ell)$，因此 $A_i \succeq_M A_\ell$。
- 完全性： 对于任意 $i$， $j$，$\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j)$ 或 $\mathrm{Score}_M(s_j) \geq \mathrm{Score}_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_j$ 或$A_j \succeq_M A_i$。

因此， $\succeq_M$ 是 $\mathcal{A}$上的全预序。

**(iv) 存在最大化元**。 集合 $\{$得分$_M(s_i) : i = 1,$ ....., $m\} \subset \mathbb{R}$ 是有限的，因此能够取得其最大值。因此，

$$\arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathrm{Score}_M(s_i) \neq \varnothing,$$

因此，至少存在一个解备选方案 $A^\star$ ，且解集是良定义的。 □

供参考，表2.3列出了不确定性决策族（UDM）目录 .

表2.3：按度域 Dom($M$) 的维数 $k$ 编制的不确定性决策族（不确定决策模型）目录 $\subseteq [0,1]^k$（参见 [20]）。

| $k$ | note | 其评估在 Dom($M$) 中取值的代表性不确定决策模型族 $\subseteq [0,1]^k$ |
|---|---|---|
| 1 | | 模糊决策 [241] /模糊多准则决策与多属性决策（单一隶属度）； $N$-模糊决策（多隶属度经聚合压缩为 $k$=1 ）；阴影决-策变体 |
| 2 | | 直觉模糊决策（隶属度/非隶属度及其约束） [242, 243]；模糊决策 [244, 245]；双极/双分量模糊决策 [246, 247]；相容逻辑/双模糊决策 |
| 3 | | 单值中智决策（真度/不确定度/假度） [248, 249]；犹豫模糊决策-决策 [250, 251]；图像模糊决策 [252]；球形模糊决策 [253,254]；三极模糊决策 [255]；中智-模糊决策-决策 [256] |
| 4 | | 四分区中智决策 [257]；双值中智决策-决策 [258]；双重犹豫决策 [259,260]；模糊决策；图利亚姆-中智决策 [261] |
| 5 | | 五分区中智决策 [262, 263]；三值中智决策 |
| 6 | | 六分区中智决策；四值中智决策-决策 |
| 7 | | 七划分中智决策 [199]；五元值中智决策 |
| 8 | | 八划分中智决策 |
| 9 | | 九划分中智决策 |
| $n$ | ($n \geq 1$) | $n$-细化模糊决策；多值（模糊）决策；多模糊决策-决策 [264] |
| $2n$ | ($n \geq 1$) | $n$-精细化直觉模糊决策；多直觉模糊决策 |
| $3n$ | ($n \geq 1$) | $n$-精细化中智决策 [265–267]；多中智决策 |

**阅读指南**。该表体现了“U-Set目录”的观点：不确定决策族在类型层面由用于编码评估和/或权重的度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ 以及依赖于模型的聚合与排序算子（$\mathrm{Agg}_M$，$\mathrm{Score}_M$）来刻画。因此，改变 $k$ 会改变每项评估中存储的数值分量数量。

# 第3章

# 问题层级框架

本节介绍基本的决策框架。

## 3.1 模糊多准则决策（模糊多准则决策）

多准则决策对多个准则下的备选方案进行评价，分配权重，聚合得分或级别高于关系，并以系统化的方式对选择进行总体排序 [268, 269]。模糊多准则决策模型将评价和权重表示为模糊数或语言术语，通过聚合传递不确定性，随后对排序进行稳健的去模糊化 [270, 271]。

**定义 3.1.1** （模糊多准则决策问题（评价与排序形式））。 [270,271] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ 为有限准则集。设 FN($\mathbb{R}$) 表示在 $\mathbb{R}$ 上选定的一类模糊数（例如三角形或梯形），FN($[0,1]$) 表示支撑集位于 $[0,1]$ 内的模糊数。

一个模糊多准则决策（模糊多准则决策）实例是数据

$$\mathfrak{D} = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \widetilde{X}, \widetilde{w}, \mathrm{Agg}, \mathrm{Score}\big),$$

其中：

(i) $\widetilde{X} = (\tilde{x}_{it}) \in$ 模糊数($\mathbb{R}$)$^{m\times k}$ 是模糊决策矩阵，其中 $\tilde{x}_{it}$ 表示 $A_i$ 在准则 $C_t$下的（可能为语言型）性能；

(ii) $\widetilde{w} =$( $\tilde{w}_1$，……， $\tilde{w}_k$) $\in$模糊数($[0,1]$)$^k$是模糊权重向量，其中 $\tilde{w}_t$描述准则 $C_t$的不确定重要性；

(iii) Agg 是一个聚合算子，它为每个备选方案 $A_i$生成总体模糊得分

$$\tilde{s}_i := \mathrm{Agg}\big((\tilde{x}_{i1}, \ldots, \tilde{x}_{ik}), (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_k)\big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R});$$

一种常见的选择是模糊加权平均

$$\tilde{s}_i = \frac{\sum_{t=1}^{k} \tilde{w}_t \otimes \tilde{x}_{it}}{\sum_{t=1}^{k} \tilde{w}_t},$$

其中， $\otimes$和 / 是 FN($\mathbb{R}$) 中的模糊算术运算；

(iv) 得分：FN($\mathbb{R}$) $\to \mathbb{R}$ 是一个排序泛函（去模糊化/得分），而在 $\mathcal{A}$ 上诱导的预序 is

$$A_i \succeq A_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}(\tilde{s}_i) \geq \mathrm{Score}(\tilde{s}_j).$$

模糊多准则决策实例的一个解是满足以下条件的任一备选方案 $A^\star \in \mathcal{A}$

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathrm{Score}(\tilde{s}_i),$$

以及由 Score($\tilde{s}_i$) 诱导的 $\mathcal{A}$ （全预序）排序。

**注 3.1.2**（正理想解/负理想解（参考距离）模糊多准则决策）。许多模糊多准则决策方法会用参考距离排序取代 Score。给定准则空间中的模糊正理想点和负理想点（或解）$I^+$, $I^-$ 对每个 $A_i$ 定义两个距离 $d_i^+ = d(\tilde{\mathbf{x}}_i,\ I^+)$ 和 $d_i^- = d(\tilde{\mathbf{x}}_i,\ I^-)$（使用选定的模糊距离），并按接近度/近似度指标进行排序，例如：

$$\Gamma_i := \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-} \in [0,1], \qquad A_i \succeq A_j \iff \Gamma_i \geq \Gamma_j.$$

这会得到相对于理想参照点和反理想参照点的折衷排序 s.

**定义 3.1.3**（不确定多准则决策（UMCDM））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限非空的备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限非空的准则集。固定一个不确定模型 $M$。

一个类型为 $M$ 的 UMCDM 实例是以下数据

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, X_M, w, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big),$$

其中：

(i) $X_M = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$ 是不确定评价矩阵，其中 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 表示 $A_i$ 关于准则 $C_j$ 的（不确定）评价；

(ii) $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ 是准则权重向量，其中 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$（也可以通过取 $w \in \mathrm{Dom}(M)^n$ 来允许使用不确定权重）；

(iii) $\mathrm{Agg}_M$ 是一个聚合算子，为每个备选方案生成总体 $M$ 度：

$$s_i := \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), w\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad i = 1, \ldots, m;$$

(iv) 得分$_M$ : $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个排序泛函（得分/去模糊化），并通过以下方式在 $\mathcal{A}$ 上诱导出偏好关系

$$A_i \succeq_M A_k \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_k).$$

任意一个最优备选方案（解）是

$$A^\star \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} \ \mathrm{Score}_M(s_i).$$

**定理 3.1.4**（UMCDM 的不确定集结构与良定义性）。设

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, X_M, w, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big)$$

设其为定义 *3.1.3* 中的一个 *UMCDM* 实例，其中 $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$ 是有限非空的，$M$ 是一个不确定模型。

假设：

**(A1)** 证据推理$_M$：$\mathrm{Dom}(M)^n \times \Delta_n \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射，其中 $\Delta_n := \{w \in [0,1]^n : \sum_{j=1}^n w_j = 1\}$；

**(A2)** 得分$_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个全映射。

那么：

(i) *(*不确定集结构*)* 评价矩阵 $X_M = (\mu_{ij})$ 通过以下方式在乘积论域 $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ 上定义了一个类型为 $M$ 的不确定集

$$\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu(A_i, C_j) := \mu_{ij}.$$

因此，$\big(\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mu\big)$ 是一个类型为 $M$的不确定集。此外，由 $s(A_i) := s_i$ 定义的聚合得分映射 $s$：$\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$也产生一个类型为 $M$的不确定集 $\big(\mathcal{A}, s\big)$。

(ii) *(*良定义排序*)* 由得分$_M \circ s$ 在 $\mathcal{A}$ 上诱导的关系 $\succeq_M$ 是一个全预序（自反、传递且完全）。

**(iii)** *(*存在 一个最优备选方案*)* 解集 最大值点集$_{1 \le i \le m}$ 得分$_M(s_i)$ 非空 .

证明。**(i) 不确定集结构**。由于 $X_M \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$，每个元素 $\mu_{ij}$都属于 $\mathrm{Dom}(M)$。定义$\mu(A_i, C_j) := \mu_{ij}$ 在 $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$上。这是一个良定义函数 $\mu$：$\mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M)$，因此 $\big(\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mu\big)$ 是一个类型为 $M$的不确定集。

接下来，固定 $i \in \{1, \dots, m\}$。由于（$\mu_{i1}$，……，$\mu_{in}$）$\in \mathrm{Dom}(M)^n$ 且 $w \in \Delta_n$，假设（A1）意味着

$$s_i = \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}), w\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

存在。因此，映射 $s$：$\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$，$s(A_i) := s_i$，是良定义的，并且 $\big(\mathcal{A},\ s\big)$ 是一个类型为 $M$ 的不确定集。

**（ii）良定义排序与全预序**。根据（A2），每个 $\mathrm{Score}_M(s_i) \in \mathbb{R}$ 均有定义。定义$A_i \succeq_M A_k$ 当且仅当 $\mathrm{Score}_M(s_i) \ge \mathrm{Score}_M(s_k)$。由于 $\ge$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有自反性、传递性和完全性，诱导关系$\succeq_M$ 也具有这些性质：

- 自反：$\mathrm{Score}_M(s_i) \ge \mathrm{Score}_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_i$。

- 传递性：若 $A_i \succeq_M A_j$ 且 $A_j \succeq_M A_\ell$，则 $\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_j) \geq \mathrm{Score}_M(s_\ell)$，因此 $A_i \succeq_M A_\ell$。

- 完全性：对于任意 $i, k$，要么 $\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_k)$，要么 $\mathrm{Score}_M(s_k) \geq \mathrm{Score}_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_k$ 或 $A_k \succeq_M A_i$。

因此，$\succeq_M$ 是一个全预序。

**(iii) 存在最优备选方案**。集合 $\{\mathrm{Score}_M(s_i) : i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}$ 是有限的，因此可达到最大值。因此，$\arg\max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Score}_M(s_i) \neq \varnothing$，这证明至少存在一个最优备选方案。 □

作为参照，本文按度域的维数 $k$ 整理了不确定性感知多属性决策族目录，见表3.1。

表3.1：按度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的维数 $k$ 划分的不确定性感知多属性决策族目录。

| $k$ | note | 代表性的不确定性感知多准则决策模型，其度域是……的子集 $[0,1]^k$ |
|---|---|---|
| 1 | | 模糊多准则决策。 |
| 2 | | 直觉模糊多属性决策 [272, 273]；双极模糊多属性决策 [274, 275]；勾股模糊多属性决策 [276, 277]；费马模糊多属性决策 [278, 279] |
| 3 | | 犹豫模糊多属性决策 [280, 281]；图形模糊多属性决策 [282, 283]；球形模糊多准则决策 [284, 285]；（单值）中智多准则决策 [286, 287]。 |
| 4 | | 四分中智多准则决策 [288, 289]。 |
| $n$ | $(n \geq 1)$ | 多元生成 MCDM [290, 291]（属性值上的向量值程度：for $\mathrm{Valset}(v) = \{a_1, \ldots, a_n\}$，$\mu(x) = (\mu(x, a_1) \ldots, \mu(x, a_n)) \in [0,1]^n$；增强 with 一个矛盾函数 $c$：$\mathrm{Valset}(v) \times \mathrm{Valset}(v) \to [0,1]$ 作用于值）。 |

**阅读指南**。此处，$k$ 统计每次评价所存储的数值分量数量（即度域的环境维数）。对于犹豫模糊信息，分类 $k = 3$ 可通过标准向量化实现（例如，将犹豫集中的等级映射为 $[0,1]^3$中的三个数值的包络/摘要映射）。多元生成模型会自然地产生可变维数 $k = n$，因为度是针对每个属性–值赋予的，而且 $|\mathrm{Valset}(v)|$ 取决于所选的值集；矛盾映射 $c(\cdot, \cdot)$是值上的一种附加结构。

除了与不确定性相关的扩展外，语言多准则决策 [292, 293]，行为多准则决策 [294]，粗糙多准则决策 [295, 296]，混合多准则决策 [297, 298]，软集多准则决策 [299, 300]，灰色多准则决策[301, 302]，多准则群体决策 [303, 304]，分层多准则决策（SMCDM） [305, 306]，基于Z数的多准则决策 [307, 308]，所有可能备选方案的潜在全配对排序（PAPRIKA） [309,310]，聚合指标随机化方法（AIRM） [311, 312]，多属性质量全局推断（MAGIQ） [313]，UTA方法 [314]，随机多准则可接受性分析（SMAA） [315]，联合价值层次（CVA） [316]，以及大规模群体决策 [317,318] 等方法也得到了研究，未来还可期待进一步的发展与扩展。

## 3.2 模糊多属性决策（模糊多属性决策）

多属性决策对多个属性下的有限备选方案集进行评价，为属性赋予权重，聚合各项表现，并选出最佳选项 [319, 320]。模糊多属性决策将属性评价和权重表示为模糊数或语言术语，进行模糊聚合，再去模糊化以对备选方案进行排序 [321, 322]。

**定义3.2。　　1 (模糊多属性决策问题（离散多属性决策模型）)。**　[322, 323] 令

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$$

为一个有限备选方案集，且

$$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$$

一个有限属性（准则）集。模糊多属性决策实例 由以下内容指定：

（1）一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{R} = (\tilde{r}_{ij}) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R})^{m \times n}, \qquad \tilde{r}_{ij} \text{ is the fuzzy performance rating of } A_i \text{ w.r.t. } C_j;$$

（2）一个模糊权重向量

$$\widetilde{W} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0})^n, \qquad \tilde{w}_j \text{ is the fuzzy importance of } C_j.$$

这里，FN(·) 表示选定的一类模糊数（例如三角形/梯形）。

一个决策程序 由两个阶段组成：

**(P1) (聚合)** 对于每个备选方案 $A_i$，计算其聚合模糊效用

$$\tilde{u}_i := \mathrm{Agg}\big(\tilde{r}_{i1}, \dots, \tilde{r}_{in}; \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n\big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}),$$

其中，Agg 是指定的模糊聚合算子。一种常见的选择是模糊加权平均（FWA）

$$\tilde{u}_i = \frac{\bigoplus_{j=1}^{n} \big(\tilde{w}_j \otimes \tilde{r}_{ij}\big)}{\bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{w}_j},$$

其中 $\oplus$, $\otimes$ 和 / 按照所采用的模糊算术进行解释。

**(P2) (排序)** 依据模糊排序规则对备选方案进行排序

$$A_i \succeq A_k \iff \tilde{u}_i \preceq_F \tilde{u}_k,$$

其中，$\preceq_F$ 是模糊数上的一个固定预序（例如，由去模糊化／评分映射 $\mathsf{Score} : \mathsf{FN}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 通过 $\tilde{u}_i \preceq_F \tilde{u}_k \iff \mathsf{Score}(\tilde{u}_i) \leq \mathsf{Score}(\tilde{u}_k)$ 诱导得到）。

任意满足 $A^\star \succeq A_i$ 对所有 $A_i \in \mathcal{A}$ 均成立的 $A^\star \in \mathcal{A}$，都是一个（最优）解。

接下来，我们考虑不确定多属性决策，它是通过使用不确定集对上述框架进行推广而得到的。

**定义 3.2.2** （不确定多属性决策（UMADM））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 是一个有限非空的备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 是一个有限非空的属性（准则）集。固定一个不确定模型 $M$，其度域为 $\mathsf{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$。

一个类型为 $M$ 的不确定多属性决策实例（UMADM 实例）是指数据

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, R_M, w, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big),$$

其中：

(i) $R_M = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$ 是不确定决策矩阵，其中 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 表示备选方案 $A_i$ 在属性 $C_j$ 下的不确定评价；

(ii) $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ 是一个（清晰的）属性权重向量，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$（也可以允许使用不确定权重 $w \in \mathrm{Dom}(M)^n$）；

(iii) $\mathrm{Agg}_M$ 是一个聚合算子，为每个备选方案生成总体 $M$度 e:

$$s_i := \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), w\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad i = 1, \ldots, m;$$

(iv) $\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个诱导出偏好关系的排序泛函

$$A_i \succeq_M A_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_\ell).$$

任意一个最优备选方案（解）都是

$$A^\star \in \arg\max_{1\leq i\leq m} \ \mathrm{Score}_M(s_i).$$

**定理3.2.3**（不确定集结构与 UMADM 的良定义性）。 设

$$\mathfrak{D}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, R_M, w, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big)$$

是定义 *3.2.2* 意义下的一个 *UMADM* 实例，其中 $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$ 有限非空，且 $M$ 是一个不确定模型。

假设：

（A1）$\mathrm{Agg}_M$： $\mathrm{Dom}(M)^n \times \Delta_n \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射，其中 $\Delta_n := \{w \in [0,1]^n : \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\}$；

（A2）得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个全映射。

那么：

(i) *(*评价域上的不确定集结构*)* 决策矩阵 $R_M = (\mu_{ij})$ 通过以下方式在 $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$ 上诱导出一个类型为 $M$ 的不确定集

$$\mu : \mathcal{A}\times\mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu(A_i, C_j) := \mu_{ij}.$$

因此， $\big(\mathcal{A}\times\mathcal{C}, \mu\big)$ 是一个类型为 $M$ 的不确定集。

(ii) *(*备选方案上的不确定集结构*)* 由 $s(A_i) := s_i$ 定义的聚合得分赋值 $s$： $\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的，并产生一个类型为 $M$ 的不确定集 $\big(\mathcal{A}, s\big)$。

(iii) *(*偏好关系良定义且最优备选方案存在*)* $\succeq_M$ 在$\mathcal{A}$上诱导的关系是一个全预序（自反、传递、完全），且解集 最大值点集$_{1\leq i\leq m}$ 得分$_M(s_i)$ 非空。

证明。 **(i) 上的不确定集结构** $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$。 由于 $R_M \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$，每个元素 $\mu_{ij}$ 都属于 $\mathrm{Dom}(M)$。定义 $\mu(A_i, C_j) := \mu_{ij}$。这是一个良定义映射 $\mu \colon \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M)$，因此 $\big(\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mu\big)$是一个类型为 $M$的不确定集。

**(ii) 聚合不确定得分存在，并在** $\mathcal{A}$ **上构成一个不确定集**。固定 $i \in \{1, \dots, m\}$。由于$(\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}) \in \mathrm{Dom}(M)^n$ 且 $w \in \Delta_n$，假设 (A1) 意味着

$$s_i = \mathrm{Agg}_M\big((\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}), w\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

有定义。因此，映射 $s \colon \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$，$s(A_i) := s_i$ 是良定义的，并且 $\big(\mathcal{A}, s\big)$ 是类型为 $M$ 的不确定集。

**(iii) 诱导偏好** $\succeq_M$ **是良定义的全预序**。 根据 (A2)，每个值 $\mathrm{Score}_M(s_i) \in \mathbb{R}$ 都存在。定义 $A_i \succeq_M A_\ell$ 当且仅当 $\mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_\ell)$。由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，诱导关系 $\succeq_M$ 继承了这些性质：

- 自反：得分$_M(s_i) \geq$ 得分$_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_i$。
- 传递：若 $A_i \succeq_M A_j$ 且 $A_j \succeq_M A_\ell$，则得分$_M(s_i) \geq$ 得分$_M(s_j) \geq$ 得分$_M(s_\ell)$，因此 $A_i \succeq_M A_\ell$。
- 完全性：对任意 $i, \ell$，要么得分$_M(s_i) \geq$得分$_M(s_\ell)$，要么得分$_M(s_\ell) \geq$得分$_M(s_i)$，因此 $A_i \succeq_M A_\ell$或 $A_\ell \succeq_M A_i$。

因此 $\succeq_M$ 是一个全预序。

**(iv) 最优备选方案的存在性**。 集合 $\{$得分$_M(s_i)\colon \ i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}$ 是有限的，因而达到最大值。因此，

$$\arg\max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Score}_M(s_i) \neq \varnothing,$$

因此，至少存在一个最优备选方案，且解集是良定义的。 □

按 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的度域维数 $k$ 分类的不确定性感知型多属性决策家族示例列于表3.2。

作为不确定多属性决策之外的相关概念，粗糙多属性决策 [335], 软多属性决策 [336, 337], 多属性群体决策（MAGDM） [338, 339], 灰色多属性决策 [340], Z数多属性决策 [341, 342], 和语言多属性决策 [343, 344] 也广为人知。

表3.2：按 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ 的度域维度$k$分组的不确定性感知型多属性决策家族（示例）。

| $k$ | note | 具有不确定性感知能力的代表性多属性决策模型 | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 模糊多属性决策。 | | |
| 2 | | 直觉模糊多属性决策 [324, 325]。 | | |
| 3 | | 犹豫模糊 多属性决策 [326, 327]; 属性决策 [328, 329]; 图像模糊多属性决策 [330, 331]; 中智多属性决策 [332, 333]。 | 球形模糊 | 多- |
| $n$ | ($n \geq 1$) | 位形多属性决策 [334] （属性上的向量值程度值，以及定义在这些值上的矛盾函数）。 | | |

**注。** $k = 3$ 犹豫模糊多属性决策中的放置方式遵循与表3.1相同的惯例，即通过 $[0,1]^3$中的三分量嵌入/摘要来表示犹豫信息。位形多属性决策得出 $k = n$ ，其中 $n = |\mathsf{Valset}(v)|$ 取决于所选的属性值集。

## 3.3 模糊群体决策

群体决策将多个决策者的偏好结合起来，协商权衡、度量共识，并选择能够反映集体判断的备选方案 [345, 346]。个人决策 [347, 348] 也为人所知，其概念大致可视为与群体决策相反。模糊群体决策用模糊数或语言术语表示意见，使用模糊算子对其进行聚合，评估共识，然后对备选方案进行排序 [349, 350]。

**定义 3.3.1** （模糊群体决策（共识 + 选择框架））。[351]一个模糊群体决策（FGDM）问题由以下部分组成：

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ (alternatives)}, \qquad E = \{e_1, \ldots, e_m\} \text{ (experts/decision makers)}.$$

专家以模糊形式表达意见（通常借助编码为模糊数的语言术语），其评估经聚合后得到集体决策；在最终选择阶段之前，通常会先应用共识阶段。

**(A) 多属性评价数据（典型的多属性决策型模糊群体决策）**。设 $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ 为准则。固定一类模糊数$\mathsf{FN}(\mathbb{R})$（例如三角模糊数）。每位专家 $e_h$ 给出：

$$\widetilde{R}^{(h)} = \big(\tilde{r}_{ij}^{(h)}\big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R})^{n \times p} \quad \text{(fuzzy ratings)},$$

$$\widetilde{w}^{(h)} = (\tilde{w}_1^{(h)}, \ldots, \tilde{w}_p^{(h)}) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0})^p \quad \text{(fuzzy criterion weights)}.$$

**(B) 群体聚合**。选择聚合算子

$$\mathrm{Agg}_R : \mathsf{FN}(\mathbb{R})^m \to \mathsf{FN}(\mathbb{R}),$$

$$\mathrm{Agg}_w : \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0})^m \to \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0}),$$

并通过下式定义集体模糊评分和权重

$$\tilde{r}_{ij} := \mathrm{Agg}_R\big(\tilde{r}_{ij}^{(1)}, \ldots, \tilde{r}_{ij}^{(m)}\big), \qquad \tilde{w}_j := \mathrm{Agg}_w\big(\tilde{w}_j^{(1)}, \ldots, \tilde{w}_j^{(m)}\big).$$

（对于三角模糊数，常见的选择是逐分量算术平均。）

**（C）选择（集体评分 + 排序）**。在各项准则上固定一个模糊聚合/评分算子 $\mathrm{Agg}_C$ 。一种标准选择是模糊加权平均（FWA）：

$$\tilde{s}_i := \mathrm{Agg}_C\big((\tilde{r}_{i1},\dots,\tilde{r}_{ip}),(\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_p)\big) = \frac{\bigoplus_{j=1}^{p}(\tilde{w}_j \otimes \tilde{r}_{ij})}{\bigoplus_{j=1}^{p}\tilde{w}_j} \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}),$$

其中 $\oplus, \otimes$ and / 是所采用的模糊算术运算。

设 $\mathrm{Score} : \mathsf{FN}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为一个排序泛函（去模糊化/得分）。定义 $X$上的集体预序如下：

$$x_i \succeq x_k \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}(\tilde{s}_i) \geq \mathrm{Score}(\tilde{s}_k),$$

并任选一个

$$x^\star \in \arg\max_{x_i \in X} \mathrm{Score}(\tilde{s}_i).$$

**(D) 共识（在模糊群体决策中可选但为标准步骤）**。固定一个共识度量 Cons（例如，根据专家模糊偏好的两两相似度构建），并设定一个阈值 $\gamma \in [0,1]$。当 Cons $\geq \gamma$ 时，即达到共识状态；否则，可由主持人引导专家迭代修订意见，直至 Cons $\geq \gamma$，随后执行选择步骤 (C)。

作为上述框架的扩展，我们定义不确定群体决策。定义如下。

**定义3.3.2**（类型为 $M$ 的不确定群体决策（UGDM））。设 $\mathcal{A} = \{A_1,\dots,A_m\}$ 为有限非空备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限非空准则集，$\mathcal{E} = \{E_1,\dots,E_r\}$ 为有限非空专家（决策者）集。固定一个不确定模型 $M$，其度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$。

An 类型为 $M$ 的不确定群体决策实例（UGDM 实例）的数据

$$\mathfrak{G}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, X_M, w, \lambda, \mathrm{Agg}_E, \mathrm{Agg}_C, \mathrm{Score}_M, \mathrm{Cons}\big),$$

其中：

(i) $X_M = \big(\mu_{ij}^{(t)}\big) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n\times r}$ 是按专家索引的不确定决策数组，其中 $\mu_{ij}^{(t)} \in \mathrm{Dom}(M)$ 表示专家 $E_t$ 对 $A_i$ 在 $C_j$ 条件下的不确定评价；

(ii) $w = (w_1,\dots,w_n) \in [0,1]^n$ 是准则权重向量，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$；

(iii) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in [0,1]^r$ 是专家权重向量，$\sum_{t=1}^{r}\lambda_t = 1$（可选；若省略，则设为$\lambda_t = 1/r$）；

(iv) $\mathrm{Agg}_E : \mathrm{Dom}(M)^r \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一种专家聚合算子，逐元素使用以获得集体矩阵

$$\bar{\mu}_{ij} := \mathrm{Agg}_E\big(\mu_{ij}^{(1)},\dots,\mu_{ij}^{(r)};\lambda\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n;$$

（我们允许 $\mathrm{Agg}_E$ 参数依赖于 $\lambda$）；

（v）$\mathrm{Agg}_C\colon \mathrm{Dom}(M)^n \times \Delta_n \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一种准则聚合算子（其中 $\Delta_n = \{w \in [0,1]^n : \sum_j w_j = 1\}$），产生一个总体 $M$ 度

$$s_i := \mathrm{Agg}_C\big((\bar{\mu}_{i1}, \ldots, \bar{\mu}_{in}), w\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad i = 1, \ldots, m;$$

(vi) 得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个排序泛函，通过以下方式在 $\mathcal{A}$ 上诱导出预序

$$A_i \succeq_M A_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(s_i) \geq \mathrm{Score}_M(s_\ell);$$

(vii) Cons： $[0,1]$ 是一个（可选的）共识指数，根据专家评估计算得出（例如，通过 $\{\mu_{ij}^{(t)}\}$ 与集体 $\{\bar{\mu}_{ij}\}$ 之间的距离/相似度），并结合选定的阈值$\gamma \in [0,1]$，用于实际接受群体聚合。

一个 *UGDM* 最优备选方案（解）是任意一个

$$A^\star \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} \ \mathrm{Score}_M(s_i).$$

**定理 3.3.3**（不确定集结构与 UGDM 的良定义性）。设 $\mathfrak{G}_M$ 是一个 *UGDM* 实例，其中 $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$均为有限非空集，且 $M$是一个不确定模型。

假设：

(A1) $\mathrm{Agg}_E$: $\mathrm{Dom}(M)^r \times \Delta_r \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射（其中 $\Delta_r = \{\lambda \in [0,1]^r : \ \sum_t \lambda_t = 1\}$ *）;*

(A2) $\mathrm{Agg}_C$： $\mathrm{Dom}(M)^n \times \Delta_n \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射；

(A3) 得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个全映射。

那么：

(i) *(*评价论域上的不确定集结构*)* 专家索引数组 $X_M$ 诱导出一个类型为 $M$ 的不确定集

$$U := \mathcal{A} \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}$$

*via*

$$\mu : U \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu(A_i, C_j, E_t) := \mu_{ij}^{(t)}.$$

因此$(U, \mu)$ 是一个类型为 $M$ 的不确定集。

(ii) *(*集体矩阵是良定义的，并生成一个不确定集*)* 逐项聚合映射

$$\bar{\mu} : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \bar{\mu}(A_i, C_j) := \bar{\mu}_{ij},$$

是良定义的，因此$(\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \bar{\mu})$ 是一个类型为 $M$ 的不确定集。

(iii) *(*聚合后的备选方案评分在 $\mathcal{A}$ 上构成一个不确定集*)* 映射

$$s : \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad s(A_i) := s_i,$$

是良定义的，因此 （$\mathcal{A}$、$s$）是一个 $M$类型的不确定集。

（iv）（偏好关系和解集是良定义的） $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$ 上的诱导关系是一个全预序，并且解集最大值点集 $_{1\le i\le m}$ 得分$_M$（$s_i$）是非空的。

证明。 **(i)** $U=\mathcal{A}\times\mathcal{C}\times\mathcal{E}$**上的不确定集结构**。 由于 $X_M\in\mathrm{Dom}(M)^{m\times n\times r}$，每个元素 $\mu_{ij}^{(t)}$ 都属于 $\mathrm{Dom}(M)$。定义 $\mu(A_i,C_j,E_t):=\mu_{ij}^{(t)}$。这是一个良定义映射 $U\to\mathrm{Dom}(M)$，因此 $(U,\mu)$ 是一个 $M$型不确定集。

**(ii) 存在集体矩阵，并在** $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$**上定义一个不确定集**。 固定 $(i,j)$。专家列表 $(\mu_{ij}^{(1)},\dots,\mu_{ij}^{(r)})$ 属于 $\mathrm{Dom}(M)^r$ 且 $\lambda\in\Delta_r$。根据 (A1)，聚合值

$$\bar{\mu}_{ij}:=\mathrm{Agg}_E\big(\mu_{ij}^{(1)},\dots,\mu_{ij}^{(r)};\lambda\big)\in\mathrm{Dom}(M)$$

存在。因此 $\bar{\mu}\colon\mathcal{A}\times\mathcal{C}\to\mathrm{Dom}(M)$，$\bar{\mu}(A_i,C_j)=\bar{\mu}_{ij}$ 是良定义的，并且 $(\mathcal{A}\times\mathcal{C},\bar{\mu})$ 是一个 $M$型不确定集。

**(iii) 备选方案层级聚合存在，并在** $\mathcal{A}$ **上定义了一个不确定集**。固定 $i$。准则元组 $(\bar{\mu}_{i1},\dots,\bar{\mu}_{in})$ 属于 $\mathrm{Dom}(M)^n$ 且 $w\in\Delta_n$。根据 (A2)，总体得分

$$s_i:=\mathrm{Agg}_C\big((\bar{\mu}_{i1},\dots,\bar{\mu}_{in}),w\big)\in\mathrm{Dom}(M)$$

存在。因此 $s\colon\mathcal{A}\to\mathrm{Dom}(M)$，$s(A_i)=s_i$ 是良定义的，且 $(\mathcal{A},s)$ 是一个 $M$ 类型的不确定集。

**(iv) 良定义的偏好关系及最优备选方案的存在性**。 根据 (A3)，每个 $\mathrm{Score}_M(s_i)\in\mathbb{R}$ 都存在。定义 $A_i\succeq_M A_\ell$ 当且仅当 $\mathrm{Score}_M(s_i)\ge\mathrm{Score}_M(s_\ell)$。由于 $\ge$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，$\succeq_M$ 是一个全预序。

最后，有限集 $\{\mathrm{Score}_M(s_i):\ i=1,\dots,m\}\subset\mathbb{R}$ 可取得最大值，因此

$$\arg\max_{1\le i\le m}\mathrm{Score}_M(s_i)\neq\varnothing,$$

因此至少存在一个最优备选方案，且解集是良定义的。 □

表3.3给出了不确定性感知的群体决策 （群体决策）方法族目录。

不确定群体决策并非唯一视角；相关概念还包括粗糙群体决策 [360, 361], 软群体决策 [362], 灰色群体决策 [363, 364]，多群体决策 [365, 366]，Z 数群体决策 [367, 368]，共识群体决策 [369, 370]，多阶段群体决策 [371, 372], 多准则群体决策（MCGDM）[373, 374], 以及语言群体决策 [375, 376]。

表3.3：按度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$的维度 $k$整理的不确定性感知型群体决策（GDM）类别紧凑目录。

| $k$ | note | 具有如下属性的代表性群体决策方法系列：每项评价的度域是 $[0,1]^k$的子集 |
|---|---|---|
| 1 | | 模糊群体决策：对标量模糊评价进行群体聚合/共识，这些评价取值于 $[0,1]$ （隶属度），通常通过专家权重和模糊聚合算子实现。 |
| 2 | | 直觉模糊群体决策 [352, 353]：群体聚合/共识关于 $[0,1]^2$ （隶属度、非隶属度）的评价。 |
| 3 | | 犹豫模糊群体决策 [354, 355]：群体聚合/共识，其中每项评价均以 $[0,1]^3$ 类型的度域表示（按照所采用的犹豫编码）。 |
| 3 | | 中智群体决策 [356, 357]：对.....进行群体聚合/共识 $[0,1]^3$ 中的评价（真度、不确定度、假度）。 |
| 3 | | 球形模糊群体决策 [358, 359]：对以下内容进行群体聚合/共识 $[0,1]^3$ 中的评价，满足 $\mu^2+\nu^2+\pi^2 \le 1$（隶属度、非隶属度、犹豫度）。 |
| $n^\dagger$ | 非向量<br>附加内容 | 多元矛盾群体决策：属性–值对上的标量度（$n = \lvert\mathsf{Valset}(v)\rvert$），并通过定义在值上的矛盾函数 $c(\cdot,\cdot)$ 将其耦合起来。 |

**阅读指南**。此处 $k$ 表示用于每位专家评价（或偏好陈述）的度域维数。在群体决策中，先收集每位专家的评价，再将其汇总（可选择经过共识达成阶段），形成集体评估。(†) 对于多元生成模型，有效维数取决于所选属性的可接受值数量 $n$，因为度附着于属性–值对，而非存储为固定长度的向量。

## 3.4 模糊动态决策

动态决策会随时间推进行动选择，更新信息与偏好，考虑状态转移，并优化累积结果 [377, 378]。模糊动态决策模型则使用模糊集表示演化状态、奖励或准则，在更新过程中传播不确定性，并选择自适应策略 [379, 380]。

**定义 3.4.1** （模糊动态决策（多阶段模糊多属性决策））。 [379, 380] 设

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$$

为备选方案与准则的有限集。设

$$\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_p\}$$

为决策阶段（时间段）的有限集。

固定一个选定的模糊数类别 FN($\mathbb{R}$)（例如三角形/梯形），并配备与 FN($\mathbb{R}$) 一致的模糊算术（$\oplus, \otimes, \oslash$）。

一个模糊动态决策实例由以下内容指定：

(1) **随机 各阶段模糊决策矩阵：** 对于每个阶段 $t_k \in \mathcal{T}$，一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{R}^{(k)} = \big(\tilde{r}_{ij}^{(k)}\big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R})^{m \times n}, \qquad \tilde{r}_{ij}^{(k)} \text{ rates } A_i \text{ w.r.t. } C_j \text{ at time } t_k.$$

(2) **（可选 nal) 阶段性模糊准则权重：**对于每个阶段 $t_k$，一个模糊权重向量 r

$$\widetilde{W}^{(k)} = (\tilde{w}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{w}_n^{(k)}) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0})^n.$$

（如果权重不随时间变化，则写作 $\widetilde{W}_{(k)} = \widetilde{W}$。）

(3) **阶段权重（时间的重要性动态变化）：**权重向量

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in [0,1]^p, \qquad \sum_{k=1}^{p} \omega_k = 1,$$

其中，$\omega_k$ 量化了阶段 $t_k$ 的重要性（例如，为较近的阶段赋予较大的权重）。

(4) **聚合算子：**

- 一个阶段内（跨准则）的模糊聚合映射

$$\mathrm{Agg}_{\mathcal{C}} : \mathsf{FN}(\mathbb{R})^n \times \mathsf{FN}(\mathbb{R}_{\geq 0})^n \to \mathsf{FN}(\mathbb{R}),$$

- 一个跨阶段（动态型）的模糊聚合映射

$$\mathrm{Agg}_{\mathcal{T}} : \mathsf{FN}(\mathbb{R})^p \times [0,1]^p \to \mathsf{FN}(\mathbb{R}).$$

**(5) 一个排序泛函：** 一个得分/去模糊化映射

$$\mathrm{Score} : \mathsf{FN}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

它通过 $\tilde{x} \preceq_F \tilde{y} \iff \mathsf{Score}(\tilde{x}) \leq \mathsf{Score}(\tilde{y})$ 在模糊数上诱导出一个预序。

一个动态模糊决策程序会为每个备选方案 $A_i$ 计算：

**(P1) 阶段内模糊效用。** 对于每个阶段 $t_k$，定义一个阶段效用

$$\tilde{s}_i^{(k)} := \mathrm{Agg}_{\mathcal{C}}\Big(\tilde{r}_{i1}^{(k)}, \ldots, \tilde{r}_{in}^{(k)};\ \tilde{w}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{w}_n^{(k)}\Big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}).$$

一种标准选择是模糊加权平均（FWA）：

$$\tilde{s}_i^{(k)} = \left( \bigoplus_{j=1}^{n} (\tilde{w}_j^{(k)} \otimes \tilde{r}_{ij}^{(k)}) \right) \oslash \left( \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{w}_j^{(k)} \right),$$

假设在所采用的模糊算术中分母不为零。

**(P2) 跨阶段（动态）聚合。** 将各阶段效用聚合为总体动态效用：

$$\tilde{u}_i := \mathrm{Agg}_{\mathcal{T}}\Big(\tilde{s}_i^{(1)}, \ldots, \tilde{s}_i^{(p)};\ \omega_1, \ldots, \omega_p\Big) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R}).$$

一种标准选择是动态模糊加权平均（DFWA）：

$$\tilde{u}_i = \bigoplus_{k=1}^{p} (\omega_k \otimes \tilde{s}_i^{(k)}),$$

将 $\omega_k \otimes (\cdot)$ 解释为模糊数模型中的数乘。

(P3) Ran **排序和选择**。定义清晰综合得分 $U_i :=$得分$(\tilde{u}_i) \in \mathbb{R}$ 并按以下方式排序

$$A_i \succeq A_\ell \iff U_i \geq U_\ell.$$

A（最佳）解是任意

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \text{Score}(\tilde{u}_i).$$

在不确定集视角下，每个阶段的核心数据都是固定度域 $\mathbf{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 中的度。

**定义3.4.2** （ $M$类型的不确定动态决策（UDDM））。 Le t

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{(alternatives)}, \qquad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad \text{(criteria)},$$

并令

$$\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_p\} \quad \text{(decision stages / time periods)}$$

有限 非空集。固定一个度域为 $\mathbf{Dom}(M) \subseteq [0,1]$ 的不确定模型 $M$ $^k$.

一个类型为 $M$ 的不确定动态决策实例是如下元组

$$\mathfrak{D}_M^{\text{dyn}} = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{T}, (X_M^{(1)}, \ldots, X_M^{(p)}), (w_M^{(1)}, \ldots, w_M^{(p)}), \omega, \text{Agg}_{\mathcal{C},M}, \text{Agg}_{\mathcal{T},M}, \text{Score}_M\Big),$$

其中:

(i) **分阶段不确定评价矩阵：** 对于每个 $k \in \{1, \ldots, p\}$,

$$X_M^{(k)} = (\mu_{ij}^{(k)}) \in \text{Dom}(M)^{m \times n},$$

其中 $\mu_{ij}^{(k)} \in \mathbf{Dom}(M)$ 表示在阶段 $t_k$、准则 $C_j$ 下对 $A_i$ 的不确定评估。

（ii）**分阶段不确定准则权重（可选但通常采用）：** 对于每个 $k$,

$$w_M^{(k)} = (\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_n^{(k)}) \in \text{Dom}(M)^n \quad \text{(or, alternatively, } w^{(k)} \in [0,1]^n \text{ with } \sum_j w_j^{(k)} = 1).$$

（iii）**阶段重要性权重（时间聚合权重）：** 一个向量

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in [0,1]^p, \qquad \sum_{k=1}^{p} \omega_k = 1.$$

（因此 $\omega_k$ 表示阶段 $t_k$的相对重要性，例如近期性加权。）

（iv）**阶段内聚合（跨准则）：** 依赖于模型的完全映射

$$\text{Agg}_{\mathcal{C},M} : \text{Dom}(M)^n \times \text{Dom}(M)^n \longrightarrow \text{Dom}(M),$$

它为阶段 $t_k$ 的每个备选方案 $A_i$ 分配一个聚合的不确定阶段效用 y

$$s_i^{(k)} := \text{Agg}_{\mathcal{C},M}\big((\mu_{i1}^{(k)}, \ldots, \mu_{in}^{(k)}),\, w_M^{(k)}\big) \in \text{Dom}(M).$$

(v) **跨阶段聚合（动态综合）：** 依赖模型的完全 ma p

$$\mathrm{Agg}_{\mathcal{T},M} : \mathrm{Dom}(M)^p \times [0,1]^p \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

它将各阶段效用聚合为总体不确定动态效用

$$u_i := \mathrm{Agg}_{\mathcal{T},M}\big((s_i^{(1)}, \ldots, s_i^{(p)}),\, \omega\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

(vi) **排序泛函：** 一个全映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

它通过以下方式在 $\mathcal{A}$ 上诱导出一个偏好关系：

$$A_i \succeq_M^{\mathrm{dyn}} A_j \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(u_i) \geq \mathrm{Score}_M(u_j).$$

（动态）不确定最佳备选方案集合为

$$\arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathrm{Score}_M(u_i).$$

**定理3.4.3**（不确定集结构与UDDM的良定义性）。 设 $\mathfrak{D}_M^{\mathrm{dyn}}$ 是定义*3.4.2*中的一个不确定动态决策实例。假设：

(A1) $\mathrm{Agg}_{\mathcal{C},\ M}$： $\mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射；

（A2）$\mathrm{Agg}_{\mathcal{T},\ M}$： $\mathrm{Dom}\ （M）^{\ p} \times [0,1]^p \to \mathrm{Dom}\ （M）$ 是一个全映射；

（A3）得分$_M$： $\mathrm{Dom}\ （M）\ \to \mathbb{R}$ 是一个全映射；

（A4） $\omega \in [0,1]^p$ 满足 $\sum_{k=1}^{p} \omega_k = 1$。

那么：

（i）对于所有 $i = 1$、.....、 $m$，整体动态效用 $u_i \in \mathrm{Dom}\ （M）$ 都是良定义的。

(ii) 映射

$$\mu_M^{\mathrm{dyn}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu_M^{\mathrm{dyn}}(A_i) := u_i,$$

是良定义的；因此

$$\mathcal{U}_M^{\mathrm{dyn}} := \big(\mathcal{A}, \mu_M^{\mathrm{dyn}}\big)$$

是一个类型为 $M$ 的不确定集（U-集），定义在论域。

(iii) $\succeq_M^{\mathrm{dyn}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的诱导关系是一个全预序（自反、传递且完全）。

(iv) 解集 最大值点集$_{A_i \in \mathcal{A}}$得分$_M(u_i)$ 非空（因此存在最优备选方案）。

证明。 **(i) 阶段效用存在于** Dom($M$)。 固定 $i \in \{1,\dots,m\}$ 和 $k \in \{1,\dots,p\}$。由于 $X_M^{(k)} \in$Dom($M$)$^{m\times n}$，第 $i$ 行

$$(\mu_{i1}^{(k)},\dots,\mu_{in}^{(k)}) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

此外，根据定义， $w_M^{(k)} \in$ Dom($M$)$^n$ （或者它是一个清晰可接受代理；本定理明确涵盖 Dom($M$)$^n$ 情形）。根据假设 (A1)，该值

$$s_i^{(k)} = \mathrm{Agg}_{\mathcal{C},M}\big((\mu_{i1}^{(k)},\dots,\mu_{in}^{(k)}), w_M^{(k)}\big)$$

良定义且属于 Dom($M$)。

**(ii) 动态效用存在于** Dom($M$)。 对于固定的 $i$，阶段效用向量 ($s_i^{(1)},\dots,s_i^{(p)}$) 根据 (i) 属于 Dom($M$)$^p$，而阶段权重向量 $\omega$ 根据 (A4) 属于 $[0,1]^p$。根据 (A2)，整体动态效用

$$u_i = \mathrm{Agg}_{\mathcal{T},M}\big((s_i^{(1)},\dots,s_i^{(p)}),\omega\big)$$

良定义且属于 Dom($M$)，从而证明了定理陈述中的 (i)。

**(iii) U-集合结构**。 定义 $\mu_M^{\mathrm{dyn}}$ : $\mathcal{A} \to$ Dom($M$) 为 $\mu_M^{\mathrm{dyn}}(A_i) = u_i$。根据 (ii)，这是一个良定义的映射，映入 Dom($M$)，因此 $\mathcal{U}_M^{\mathrm{dyn}} =$($\mathcal{A}, \mu_M^{\mathrm{dyn}}$) 是 $\mathcal{A}$ 上类型为 $M$ 的 U-集，从而证明了 (ii)。

**(iv) 偏好关系是全预序**。 根据 (A3)，每个 Score$_M$($u_i$) $\in \mathbb{R}$ 都是良定义的。定义 $A_i \succeq_M^{\mathrm{dyn}} A_j$ 当且仅当 Score$_M$($u_i$) $\geq$Score$_M$($u_j$)。由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，因此 $\mathcal{A}$上的诱导关系继承了这些性质；由此， $\succeq_M^{\mathrm{dyn}}$ 是全预序，从而证明了 (iii)。

**(v) 最大值存在性**。 集合 $\{$Score$_M$($u_i$) : $i = 1,\dots,m\} \subset \mathbb{R}$ 是有限的，因此能达到其最大值。因此，arg max$_{A_i\in\mathcal{A}}$ Score$_M$($u_i$) $\neq \varnothing$，从而证明了 (iv)。 □

表 3.4 展示了动态模糊决策的相关不确定性模型变体 .

表 3.4：动态模糊决策的相关不确定性模型变体。

| $k$ | **相关动态模糊决策变体** |
|---|---|
| 1 | 动态模糊决策 |
| 2 | 动态直觉模糊决策 |
| 3 | 动态犹豫模糊决策 |
| 3 | 动态球形模糊决策 |
| 3 | 动态中智决策 |
| $n$ | 动态多元决策 |

## 3.5 模糊多目标决策

多目标决策同时优化多个相互冲突的目标，生成帕累托有效解，并根据偏好或权重选择折中解 [381, 382]。模糊多目标决策以模糊方式表示目标、目标值或约束，计算满意度，将其聚合，并选择折中解 [383, 384]。

**定义 3.5.1**（FMODM：具有模糊目标的模糊多目标规划）。 [383,384] 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$为非空可行集，$k \geq 2$ 为目标数量。在模糊多目标决策（FMODM）中，目标仍然明确表示，并且通常带有反映其相对重要性的权重。

固定一个连续的 $t$-范数 $T$：$[0,1]^2 \to [0,1]$及其 $k$元扩展（仍记为 $T$）。令 $F(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上选定的一类模糊数，并假设第 $i$ 个客观是一个模糊数值映射

$$\tilde{f}_i : X \to F(\mathbb{R}), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

假设对于每个客观 $i$，给定两个模糊参考水平：

$$\tilde{m}_i \in F(\mathbb{R}) \ \text{(undesired level)}, \qquad \tilde{M}_i \in F(\mathbb{R}) \ \text{(desired level)},$$

以及一个度量（距离） $D$： $F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。

**（1）按客观划分的满意度（应用）函数**。定义，对于每个 $i$，一个满意度$H_i$： $X \to [0,1]$ 如下

$$H_i(x) := \min\left\{1 - \frac{1}{1 + D\big(\tilde{m}_i, \tilde{f}_i(x)\big)}, \ \frac{1}{1 + D\big(\tilde{M}_i, \tilde{f}_i(x)\big)}\right\},$$

或者更一般地，采用 $t$-范数聚合

$$H_i(x) := T\left(1 - \frac{1}{1 + D\big(\tilde{m}_i, \tilde{f}_i(x)\big)}, \ \frac{1}{1 + D\big(\tilde{M}_i, \tilde{f}_i(x)\big)}\right).$$

直观地说，对于客观 $i$，较大的 $H_i(x)$ 意味着“远离不期望状态”且“接近期望状态”。

**（2）模糊决策（模糊目标的交集）**。令 $w_1$，……，$w_k \in [0,1]$ 为满足 $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ 的（清晰）重要性权重。将总体模糊决策隶属度（模糊目标的交集）定义为

$$\mu_{\mathcal{D}}(x) := T\big(H_1(x)^{w_1}, \ldots, H_k(x)^{w_k}\big), \qquad x \in X.$$

（也可以采用任何其他加权 $t$-范数构造；关键在于， $t$-范数刻画了目标的合取。）

**（3）模糊多目标决策解**。一个模糊多目标决策（折中）解是任意

$$x^\star \in \arg\max_{x \in X} \ \mu_{\mathcal{D}}(x).$$

等价地，模糊多目标问题被化简为单目标标量化

$$\max_{x \in X} \ T\big(H_1(x), \ldots, H_k(x)\big),$$

其中 $H_i$ 根据期望/不期望层级以及模糊数上的度量构造。

在不确定 情境下，目标值和/或目标达成情况以固定的度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$（模糊、直觉模糊、中智、多元生成等）表示，多目标问题通过依赖于模型的聚合和实值评分，转化为可行集上的一个$U$-集 。

**定义 3.5.2** （ $M$类型的不确定多目标决策（UMODM））。 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空可行集，且 $k \geq 2$。固定一个度域为 $\mathbf{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$的不确定模型 $M$。

一个类型为 $M$ 的不确定多目标决策实例是元组

$$\mathfrak{P}_M = \big(X,\ (f_1,\dots,f_k),\ (G_1,\dots,G_k),\ w,\ \mathrm{Agg}_M,\ \mathrm{Score}_M\big),$$

其中:

**(i) 目标：** $f_i : X \to \mathbb{R}$（精确目标），适用于 $i = 1, \dots, k$。（如果目标评价具有不确定性，则~将 $f_i$ 替换为不确定评价映射 $f_i : X \to \mathbf{Dom}(M)$；下面的构造在与 $G_i$复合后保持不变。）

(ii) **目标到满意度（目标/满意度）映射：** 对于每个 $i$，一个映射

$$G_i : \mathbb{R} \to \mathrm{Dom}(M) \quad (\text{or more generally } G_i : X \to \mathrm{Dom}(M))$$

它将目标水平 $f_i(x)$ 转换为不确定度 $\mu_i(x) := G_i(f_i(x)) \in \mathbf{Dom}(M)$。

**(iii) 重要性权重：** 向量 $w = (w_1,\dots,w_k) \in [0,1]^k$ 且满足 $\sum_{i=1}^k w_i = 1$。

(iv) **不确定目标聚合：** 一个全映射

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^k \times [0,1]^k \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

int解释为作用于 $k$ 不确定目标度的合取／折中算子 .

(v) **排序泛函：** 一个全映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}.$$

对于每个可行的 $x \in X$，定义逐目标不确定度向量

$$\mu(x) := \big(\mu_1(x),\dots,\mu_k(x)\big) \in \mathrm{Dom}(M)^k, \qquad \mu_i(x) := G_i(f_i(x)),$$

并定义总体不确定决策度

$$\mu_{\mathcal{D},M}(x) := \mathrm{Agg}_M\big(\mu(x), w\big) = \mathrm{Agg}_M\big((\mu_1(x),\dots,\mu_k(x)), (w_1,\dots,w_k)\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

在 $X$ 上的诱导偏好为

$$x \succeq_M y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{D},M}(x)\big) \geq \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{D},M}(y)\big).$$

一个 不确定多目标决策模型（折中）解 是任一

$$x^\star \in \arg\max_{x \in X}\ \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{D},M}(x)\big).$$

**定理 3.5.3** （不确定集结构与 UMODM 的良定义性）。 设 $\mathfrak{P}_M$ 为定义 *3.5.2* 中的不确定多目标决策模型实例。假设:

**(A1)** $X \neq \varnothing$。

(A2) 对于每个 $i$， $G_i:\ \mathbb{R}\to \mathrm{Dom}(M)$ 是全映射，且 $f_i:\ X\to\mathbb{R}$ 是全映射 .

(A3) 聚合$_M$<style id='4'>: $\mathrm{Dom}(M)^k\times[0,1]^k\to\mathrm{Dom}(M)$ 是一个全映射。

(A4) 得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M)\ \to\mathbb{R}$ 是一个全映射。

(A5) $w\in[0,1]^k$ 满足 $\sum_{i=1}^k w_i=1$。

那么：

(i) 映射 $\mu_{\mathcal{D},\ M}:\ X\to\mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的。因此，

$$\mathcal{U}_M^{\mathrm{modm}}:=(X,\mu_{\mathcal{D},M})$$

是一个类型为 $M$ 的不确定集（U-集），定义在论域 $X$上。

(ii) $\succeq_M$ 上的诱导关系是一个全预序。

(iii) 如果 $X$ $i$有限，则 *UMODM* 解集 最大值点集$_{x\in X}$得分$_M(\mu_{\mathcal{D},M}(x))$ 非空。

证明。(i) 良定义性与 U-集合结构。固定 $x\in X$。对于每个 $i$，由于 $f_i$ 在 $X$上是完全的，$f_i(x)\in\mathbb{R}$ 良定义。根据 (A2)， $G_i$ 是完全的，因此 $\mu_i(x)=G_i(f_i(x))\in\mathrm{Dom}(M)$ 良定义。因此$\mu(x)=(\mu_1(x)\ldots,\mu_k(x))\in\mathrm{Dom}(M)^k$良定义。根据 (A3) 和 (A5)，$\mathrm{Agg}_M(\mu(x)\ w)\in\mathrm{Dom}(M)$ 良定义，因此对于每个 $x\in X$，$\mu_{\mathcal{D},M}(x)\in\mathrm{Dom}(M)$ 都存在。因此 $\mu_{\mathcal{D},M}$: $X\to\mathrm{Dom}(M)$ 是一个良定义的映射，且 $\mathcal{U}_M^{\mathrm{modm}}=(X,\mu_{\mathcal{D},M})$ 是类型为 $M$ 的 U-集。

(ii) $\succeq_M$**是全预序**。由 (A4)，对每个 $x\in X$，得分$_M(\mu_{\mathcal{D},M}(x))\in\mathbb{R}$是良定义的。定义$x\succeq_M y$当且仅当得分$_M(\mu_{\mathcal{D},M}(x))\ \geq$得分$_M(\mu_{\mathcal{D},M}(y))$。由于 $\mathbb{R}$ 上的 $\geq$ 是自反的、传递的且具有完全性，诱导关系 $\succeq_M$ 继承这些性质，因此是全预序。

**(iii) 当 $X$ 有限时的最大值存在性**。若 $X$ 有限，则实数集

$$S:=\{\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{D},M}(x)):\ x\in X\}$$

是有限的，因而取得最大值。因此最大值点集$_{x\in X}$得分$_M(\mu_{\mathcal{D},M}(x))\neq\varnothing$。 □

表3.5呈现 r 相关的多目标决策（MODM）不确定性模型变体 .

表3.5: 多目标决策（MODM）的相关不确定性模型变体 .

| $k$ | **相关多目标决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多目标决策 [385] |
| 2 | 直觉模糊多目标决策 |
| 3 | 犹豫模糊多目标决策 |
| 3 | 球形模糊多目标决策 |
| 3 | 中智多目标决策 |
| $n$ | 综合多目标决策 |

## 3.6 模糊伦理决策

伦理决策通过比较道德原则与后果，权衡权利、义务和利益相关者，从而为选择提供依据 [386,387]。模糊伦理决策为伦理维度分配分级符合度，应用模糊规则和推理，对得分进行去模糊化，并选择行动。

**定义 3.6.1** （模糊伦理决策（基于规则的模糊选择））。设 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 为一个情境（上下文、状态）集合， $\mathcal{A} \neq \varnothing$ 为一个可行动作集合动作。设 $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_k\}$ 为一个有限的伦理维度集合（例如隐私、公平性、透明度），每个维度均按照 $[0,1]$中的分级量表进行评估。

对于每个维数 $d_j$，假设存在一个伦理合规度

$$\mu_j : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow [0,1], \qquad (s,a) \longmapsto \mu_j(s,a),$$

其中，$\mu_j(s,\ a)$ 表示行动 $a$ 在情境 $s$中满足维数 $d_j$ 的程度。

在 $[0,1]$ 上固定一个连续的 $t$-范数 $T$ 和一个 $s$-范数 $S$ （用于模糊推理中的合取/析取），并固定一个有限模糊规则库 $\mathcal{R}$，其规则形式如下：

$$R:\ \text{IF } (\mu_1 \text{ is } L_1) \text{ AND } \cdots \text{ AND } (\mu_k \text{ is } L_k) \text{ THEN } (E \text{ is } L_E),$$

其中，每个 $L_j$ 和 $L_E$ 都是由 $[0,1]$上的隶属函数表示的语言标签（例如低/中/高）。此类条件规则通过综合隐私、公平性和透明度等因素，对伦理行为进行评分，得出伦理决策评分。

对于每个 $(s,\ a)$ $\sim \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$，模糊推理（Mamdani 型）通过以下方式在 $[0,1]$ 上产生模糊产出 $E_{s,\ a}$

$$\mu_{\widetilde{E}_{s,a}}(e) := S_{R\in\mathcal{R}}\Big(T\big(\alpha_R(s,a),\ \mu_{L_E^R}(e)\big)\Big),$$

其中，$\alpha_R(s,\ a) \in [0,1]$ 是通过 $T$根据前件标签计算得到的规则 $R$ 的激活强度，而$\mu_{L_E^R}$是 $R$的后件标签的隶属函数。

设 Defuzz 为去模糊化泛函（例如质心），并定义清晰伦理评分

$$E(s,a) := \mathrm{Defuzz}\big(\widetilde{E}_{s,a}\big) \in [0,1].$$

（当必须将非布尔语言值转换为可执行的数值输出时，需要进行去模糊化。）

情境 $s$ 中的任意行动都是一种模糊伦理决策

$$a^\star \in \arg\max_{a\in\mathcal{A}} E(s,a).$$

在不确定表述中，每个伦理维度都在固定的不确定度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$（所选的不确定模型 $M$）中进行评估，整体伦理可接受性则表示为动作空间上的一个不确定集；随后根据实值评分对动作进行排序。

**定义3.6.2**（类型为 $M$ 的不确定伦理决策（UEDM））。设 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 为情境（上下文）集，$\mathcal{A} \neq \varnothing$ 为可行行动集。设 $\mathcal{D} = \{d_1, \ldots, d_k\}$ 为有限的伦理维度集（$k \geq 1$）。固定一个不确定模型 $M$，其度域 $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\subseteq [0,1]^d$。

一个 类型为 $M$ 的不确定伦理决策实例是一个元组

$$\mathfrak{E}_M = \big(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{D}, (\mu_1, \ldots, \mu_k), w, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Score}_M\big),$$

其中:

(i) $\mathbf{D_i}$ **按维度划分的不确定合规度：**对于每个 $j = 1,\ldots,k$，总计 ma p

$$\mu_j : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

其中，$\mu_j(s,\ a)$ 表示行动 $a$ 在情境$s$中满足伦理维度 $d_j$ 的不确定度。

**(ii) 重要性权重：**一个向量 $w = (w_1,\ \ldots\ldots,\ w_k) \in [0,1]^k$，其中 $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$。

(iii) **不确定伦理聚合算子：**一个全映射

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^k \times [0,1]^k \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

其含义是将 $k$ 各伦理维度的不确定度聚合为单一的总体伦理可接受性度。

(iv) **排序泛函：**一个全映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}.$$

对于每个（$s$、$a$）$\in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$ 定义总体不确定伦理度

$$\mu_{\mathrm{eth},M}(s,a) := \mathrm{Agg}_M\big((\mu_1(s,a), \ldots, \mu_k(s,a)),\ (w_1, \ldots, w_k)\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此，对于每个固定情境 $s$，映射

$$\mu_{\mathrm{eth},M}(s,\cdot) : \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad a \mapsto \mu_{\mathrm{eth},M}(s,a),$$

定义了论域 $\mathcal{A}$上的类型为 $M$ 的不确定集（U-集）。

情境 $s$ 下的*UEDM*偏好是由下式给出的、定义在 $\mathcal{A}$ 上的关系$\succeq_{M,\ s}$

$$a \succeq_{M,s} b \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathrm{eth},M}(s,a)\big) \geq \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathrm{eth},M}(s,b)\big).$$

情境 $s$ 中的一个UEDM伦理决策 是任意行动

$$a^\star(s) \in \arg\max_{a \in \mathcal{A}}\ \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathrm{eth},M}(s,a)\big).$$

**定理3.6.3** （UEDM的不确定集结构与良定义性）。 设 $\mathfrak{E}_M$ 是定义*3.6.2*中的一个*UEDM*实例。假设：

（A1） $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 和 $\mathcal{A} \neq \varnothing$ 和 $\mathcal{D}$ 是有限的。（A2）每个 $\mu_j$ : $\mathcal{S} \times \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 都是全映射。（A3）$\mathrm{Agg}_M$ : $\mathrm{Dom}(M)^k \times [0,1]^k \to \mathrm{Dom}(M)$ 是全映射。（A4）得分$_M$ : $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是全映射。（A5） $w \in [0,1]^k$ 满足 $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$。

那么：

（i）映射 $\mu_{\mathrm{eth},\,M}$ : $\mathcal{S} \times \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的。对于每个 $s \in \mathcal{S}$，（$\mathcal{A}$、$\mu_{\mathrm{eth},\,M}(s$、$\cdot$）是定义在 $\mathcal{A}$ 上、类型为 $M$ 的 *U*-集。

（ii）对于每个 $s \in \mathcal{S}$，关系 $\succeq_{M,\,s}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的全预序。

(iii) 如果 $\mathcal{A}$ 是有限的 那么对于每个 $s \in \mathcal{S}$，极大值集合$\arg\max_{a \in \mathcal{A}}$得分$_M(\mu_{\mathrm{eth},M}(s, a))$ 非空 *ty.*

证明。 **(i) 良定义性与 U-集合结构**。 固定 $(s, a) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}$。根据 (A2)，每个值 $\mu_j(s, a) \in \mathrm{Dom}(M)$ 都存在且唯一确定，因此 $k$-元组 $(\mu_1(s, a) \ldots, \mu_k(s, a)) \in \mathrm{Dom}(M)^k$ 是良定义的。根据 (A3) 和 (A5)，聚合隶属度

$$\mu_{\mathrm{eth},M}(s, a) = \mathrm{Agg}_M\big((\mu_1(s, a), \ldots, \mu_k(s, a)), w\big)$$

是 $\mathrm{Dom}(M)$ 中良定义的元素。因此，$\mu_{\mathrm{eth},M}$ 是 $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ 上良定义的映射。对于固定的 $s$，函数 $\mu_{\mathrm{eth},M}(s, \cdot)$ : $\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是模型 $M$ 中的隶属度赋值，因此 $(\mathcal{A}, \mu_{\mathrm{eth},M}(s, \cdot))$ 是一个类型为 $M$ 的 U- 集。

**(ii)$\succeq_{M,s}$是一个全预序**。 固定 $s \in \mathcal{S}$。根据(A4)，实值评分得分$_M(\mu_{\mathrm{eth},M}(s, a)) \in \mathbb{R}$对每个 $a \in \mathcal{A}$都是良定义的。定义 $a \succeq_{M,s} b$当且仅当得分$_M(\mu_{\mathrm{eth},M}(s, a)) \geq$得分$_M(\mu_{\mathrm{eth},M}(s, b))$。由于 $\geq$在 $\mathbb{R}$上是自反的、传递的且完全的，诱导关系$\succeq_{M,\,s}$ 是一个全预序。

**(iii) 有限 $\mathcal{A}$的最大值存在性**。 如果 $\mathcal{A}$ 是有限的，则有限集

$$S_s := \{\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathrm{eth},M}(s, a)) : \ a \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathbb{R}$$

取得一个最大值。因此极大值集合是非空的。 □

Ta表 3.6 展示了模糊伦理决策相关的不确定性模型变体 g.

表3.6：模糊伦理决策的相关不确定性模型变体。

| $k$ | **相关模糊伦理决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊伦理决策 |
| 2 | 直觉模糊伦理决策 |
| 3 | 犹豫模糊伦理决策 |
| 3 | 球形模糊伦理决策 |
| 3 | 中智伦理决策 |
| $n$ | 多属性伦理决策 |

## 3.7 模糊共识决策

共识决策是一个协作过程，参与者在其中讨论备选方案、调和不同观点，并寻求一个得到整个群体广泛认可的决策 [388, 389]。模糊共识决策是一种群体过程，专家的模糊评价会经过反复调整，形成集体模糊矩阵，直至达到共识阈值，然后对备选方案进行排序 [390, 391]。

**定义3.7。** **1** （模糊共识决策（共识达成 + 选择））。 [390, 391] L et

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \quad \text{(alternatives)},$$

$$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\} \quad \text{(criteria)},$$

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_p\} \quad \text{(experts)}.$$

固定一个模糊数类别 FN（例如三角模糊数 TFN），并令每位专家 $e_k$ 提供一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{R}^{(k)} = \big(\tilde{r}_{ij}^{(k)}\big) \in \mathsf{FN}^{m\times n}, \qquad \tilde{r}_{ij}^{(k)} \text{ is the fuzzy evaluation of } A_i \text{ under } C_j.$$

令 $w =$(**$w_1$、.....、 $w_p$**) 为专家权重，其中 $w_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$。

**(1) 距离、相 似度和共识指数。**假设模糊数上的归一化距离 s

$$d : \mathsf{FN} \times \mathsf{FN} \to [0, 1].$$

将其扩展到决策矩阵，定义为

$$D\big(\widetilde{R}^{(k)}, \widetilde{R}^{(\ell)}\big) := \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d\big(\tilde{r}_{ij}^{(k)}, \tilde{r}_{ij}^{(\ell)}\big) \in [0, 1],$$

并定义相应的相似度

$$S\big(\widetilde{R}^{(k)}, \widetilde{R}^{(\ell)}\big) := 1 - D\big(\widetilde{R}^{(k)}, \widetilde{R}^{(\ell)}\big) \in [0, 1].$$

A（加权）群体共识指数是

$$\mathrm{GCI}(\widetilde{R}^{(1)}, \dots, \widetilde{R}^{(p)}) := \sum_{k=1}^{p} w_k \, S\big(\widetilde{R}^{(k)}, \widetilde{R}^{c}\big) \in [0, 1],$$

~其中， $R^c$ 是通过固定的模糊聚合算子 $\mathsf{Agg}_R$ （例如分量加权平均）得到的集体矩阵：

$$\widetilde{R}^{c} := \mathrm{Agg}_R\big(\widetilde{R}^{(1)}, \dots, \widetilde{R}^{(p)}; w\big) \in \mathsf{FN}^{m\times n}.$$

**（2）共识达成条件**。设定一个共识阈值 $\beta \in [0,1]$。如果专家满足以下条件，则称其达成共识：

$$\mathrm{GCI}(\widetilde{R}^{(1)}, \ldots, \widetilde{R}^{(p)}) \geq \beta.$$

如果未能达到阈值，共识达成过程会迭代修正专家意见（也可能修正其权重），直至达到阈值。这种迭代修正/反馈是群体决策中共识达成的标准观点。

**(3) 通用的模糊反馈（意见调整）步骤**。 在第 $t$ 次迭代中，给定当前矩阵 $\widetilde{R}^{(k)}(t)$，计算集体矩阵 $\widetilde{R}^{c}(t) = \mathrm{Agg}_R(\widetilde{R}^{(1)}(t) \ldots, \widetilde{R}^{(p)}(t);\, w(t))$。对于每位被要求进行调整的专家 $e_k$，选择一个接受度 $\theta_k(t) \in [0,1]$，并按照凸组合规则逐项更新

$$\tilde{r}_{ij}^{(k)}(t+1) := (1-\theta_k(t)) \otimes \tilde{r}_{ij}^{(k)}(t) \;\oplus\; \theta_k(t) \otimes \tilde{r}_{ij}^{c}(t), \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

其中，$\oplus$，$\otimes$ 表示所采用的模糊算术（例如扩张原理加法和标量乘法）。这体现了“朝可信意见/集体意见移动（程度为 $\theta_k$）”，这是共识达成模型中的一种常见机制。

重复（1）–（3），直到 GCI $\geq \beta$。

~ **（4）共识后的选择**。设 $R^c$ 为最终集体矩阵。固定准则权重 $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$（清晰或模糊），以及最终评分/去模糊化映射 $\mathsf{Score} : \mathsf{FN} \to \mathbb{R}$。通过选定的算子 $\mathrm{Agg}_C$ 定义备选方案 $A_i$ 的总体模糊得分，例如模糊加权平均：

$$\tilde{s}_i := \mathrm{Agg}_C\big(\tilde{r}_{i1}^{c}, \ldots, \tilde{r}_{in}^{c}; \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\big) \in \mathsf{FN},$$

$$A^{\star} \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Score}(\tilde{s}_i).$$

任何此类 $A^{\star}$ 都称为模糊共识决策。

不确定共识决策通过允许每项评估取自固定的不确定度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$（一种不确定模型 $M$），推广了共识达成群体决策过程。共识后的集体结果表示为备选方案空间上的不确定集，而实值评分泛函则导出排序与选择。

**定义 3.7.2**（类型为 $M$ 的不确定共识决策（UCDM））。设

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}\ (\text{alternatives}), \qquad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}\ (\text{criteria}), \qquad \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_p\}\ (\text{experts}),$$

其中 $m,\ n,\ p \geq 1$。固定一个度域为 $\mathrm{Dom}(M)$ 的不确定模型 $M$。

一个类型为 $M$ 的不确定共识决策实例是一个元组

$$\mathfrak{C}_M = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, (R^{(k)})_{k=1}^{p}, w, d_M, \mathrm{Agg}_R, \beta, \mathrm{Up}_M, \mathrm{Agg}_C, \mathrm{Score}_M\big),$$

其中：

(i) **不确定 tain 评价矩阵：** 每位专家 $e_k$ 提供一个不确定决策矩阵

$$R^{(k)} = \big(r_i^{(k)}\big) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}, \qquad r_{ij}^{(k)} \in \mathrm{Dom}(M) \text{ 是 } A_i \text{在 } C_j \text{.下的不确定评价}$$

(ii) **专家权重：** $w = (w_1, \ldots\ldots, w_p) \in [0,1]^p$ 其中 $\sum_{k=1}^{p} w_k = 1$。

(iii) **Dom() 上的距离和相似度：** 归一化距离

$$d_M : \mathrm{Dom}(M) \times \mathrm{Dom}(M) \to [0,1],$$

及其对矩阵的逐项扩展

$$D_M(R^{(k)}, R^{(\ell)}) := \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_M\big(r_{ij}^{(k)}, r_{ij}^{(\ell)}\big) \in [0,1],$$

相似度为 $S_M(R^{(k)}, R^{(\ell)}) := 1 - D_M(R^{(k)}, R^{(\ell)})$.

(iv) **专家间的集体聚合：** 完全聚合算子

$$\mathrm{Agg}_R : \mathrm{Dom}(M)^p \times [0,1]^p \to \mathrm{Dom}(M)$$

通过以下方式将其逐元素扩展到矩阵

$$R^c := \mathrm{Agg}_R\big(R^{(1)}, \ldots, R^{(p)}; w\big) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}, \qquad r_{ij}^c := \mathrm{Agg}_R\big(r_{ij}^{(1)}, \ldots, r_{ij}^{(p)}; w\big).$$

(v) **共识指数和阈值：** 群体共识指数

$$\mathrm{GCI}_M\big(R^{(1)}, \ldots, R^{(p)}\big) := \sum_{k=1}^{p} w_k \, S_M\big(R^{(k)}, R^c\big) \in [0,1],$$

以及阈值 $\beta \in [0,1]$。

(vi) **意见更新（反馈）算子：** 完全更新映射

$$\mathrm{Up}_M : \mathrm{Dom}(M) \times \mathrm{Dom}(M) \times [0,1] \to \mathrm{Dom}(M),$$

以接受度 $\theta \in [0,1]$ 将专家的元素更新至集体元素。在第 $t$ 次迭代中，对于每位被要求的专家 $k$ 以及每个 $(i, j)$:

$$r_{ij}^{(k)}(t+1) := \mathrm{Up}_M\big(r_{ij}^{(k)}(t),\, r_{ij}^c(t),\, \theta_k(t)\big), \qquad \theta_k(t) \in [0,1].$$

(vii) **共识后选择：** 一个准则聚合算子

$$\mathrm{Agg}_C : \mathrm{Dom}(M)^n \times [0,1]^n \to \mathrm{Dom}(M),$$

(usi准则权重 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in [0,1]^n$, $\sum_j v_j = 1$)，以及一个评分泛函

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}.$$

**共识达成阶段。** 从 $(R^{(k)}(0))_{k=1}^{p}$ 开始，对于 $t = 0, 1, 2, \ldots\ldots$定义集体矩阵 $R^c(t) = \mathrm{Agg}_R(R^{(1)}(t) \ldots\ldots, R^{(p)}(t); w)$，并计算 $\mathrm{GCI}_M(t) := \mathrm{GCI}_M(R^{(1)}(t) \ldots\ldots, R^{(p)}(t)$。共识达成 于首次满足 $T$ 的时刻，此时 $\mathrm{GCI}_M(T) \geq \beta$。

**决策（不确定集输出）阶段。** 设 $R^c := R^c(T)$ 为最终集体矩阵。对于每个备选方案 $A_i$，定义总体不确定效用度

$$u_i := \mathrm{Agg}_C\big(r^c_{i1}, \dots, r^c_{in}; v_1, \dots, v_n\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

那么映射

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu_{\mathcal{U}}(A_i) := u_i,$$

是 $\mathcal{A}$上的集体不确定效用集（类型为 $M$ 的 U-集）。最终排序由

$$A_i \succeq_M A_\ell \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_M(u_i) \geq \mathrm{Score}_M(u_\ell),$$

以及任意

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \ \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{U}}(A_i)\big)$$

称为不确定共识决策。

**定理 3.7.3**（不确定集结构与不确定共识决策方法的良定义性）。考虑定义 *3.7.2* 中的 *UCDM* 实例 $\mathfrak{C}_M$。假设：

(A1) $m$、$n$、$p \geq 1$ 和 $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$ 均为有限非空。

(A2) 对于所有 $k$，$R^{(k)} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$（因此每个元素 $r^{(k)}_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 均存在）。

(A3) $d_M$是一个全映射 $\mathrm{Dom}(M) \times \mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$。

(A4) $\mathrm{Agg}_R$ 和 $\mathrm{Agg}_C$ 是陪域为 $\mathrm{Dom}(M)$的全映射。

(A5) $\mathrm{Up}_M$是陪域为 $\mathrm{Dom}(M)$的全映射，并且对于所有 $k$、$t$，$\theta_k(t) \in [0,1]$。

**(A6)** 得分$_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是一个全映射；并且 $w$、$v$ 是归一化权重向量。

那么：

(i)对于每个 $t \geq 0$，更新规则生成的矩阵 $R^{(k)}(t)$ 都是$\mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$中的良定义元素，且集体矩阵 $R^c(t)$ 是良定义的。因此，$\mathrm{GCI}_M(t) \in [0,1]$ 是良定义的。

(ii) 如果在某个有限时刻 $T$ 达成共识，那么共识后效用映射 $\mu_{\mathcal{U}}$：$\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是 $\mathcal{A}$ 上类型为 $M$ 的良定义 *U*-集。

(iii) $\mathcal{A}$ 上的诱导关系 $\succeq_M$ 是一个全预序。

(iv) 如果在某个有限时刻 $T$ 达成共识，且 $\mathcal{A}$ 有限，那么定义不确定共识决策的极大值集合非空。

证明。**(i) 迭代过程中的良定义性。** 固定 $t \geq 0$ 并归纳地假设，对于所有 $k$，$R^{(k)}(t) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$（根据 **(A2)**，当 $t = 0$ 时该命题成立）。根据 **(A4)**，对于每个 $(i,\ j)$，其值

$$r^c_{ij}(t) = \mathrm{Agg}_R\big(r^{(1)}_{ij}(t), \dots, r^{(p)}_{ij}(t); w\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

是良定义的，因此 $R^c(t) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$ 是良定义的。根据 (A5)，更新

$$r_{ij}^{(k)}(t+1) = \mathrm{Up}_M\big(r_{ij}^{(k)}(t), r_{ij}^{c}(t), \theta_k(t)\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

对每个 $k$, $i$, $j$ 均为良定义，因此对于所有 $k$, $R^{(k)}(t+1) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$。由归纳法可知，对于每个 $t$, 所有 $R^{(k)}(t)$ 和 $R^c(t)$ 均为良定义。

接下来，根据 (A3)，逐元素距离 $d_M(r_{ij}^{(k)}(t)\ r_{ij}^{c}(t)) \in [0,1]$ 为良定义，因此平均值 $D_M(R^{(k)}(t)\ R^c(t)) \in [0,1]$ 和相似度 $S_M(R^{(k)}(t)\ R^c(t)) \in [0,1]$ 均为良定义。最后，$\mathrm{GCI}_M(t)$ 是 $[0,1]$ 中各值的凸组合，权重为 $w$，因此 $\mathrm{GCI}_M(t) \in [0,1]$ 为良定义。

**(ii) 共识后的 U-集合结构**。假设在时刻 $T$ 达成共识。根据 (i)，$R^c = R^c(T) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$ 为良定义。对于每个备选方案 $A_i$，根据 (A4)，聚合

$$u_i = \mathrm{Agg}_C(r_{i1}^{c}, \ldots, r_{in}^{c}; v) \in \mathrm{Dom}(M)$$

是良定义的。因此，$\mu_{\mathcal{U}}(A_i) := u_i$ 定义了一个良定义映射 $\mu_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$，即 $\mathcal{A}$ 上的 $M$ 型 U-集。

**(iii) $\succeq_M$ 是一个全预序**。根据 (A6)，每个得分 $\mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R}$ 都是良定义的。由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，诱导关系 $A_i \succeq_M A_\ell \iff \mathrm{Score}_M(u_i) \geq \mathrm{Score}_M(u_\ell)$ 是一个全预序。

**(iv) 有限的最大化元存在性**。如果 $\mathcal{A}$ 是有限的且已达成共识，那么有限实数得分集合 $\{\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(A_i)) : A_i \in \mathcal{A}\}$ 能够取得最大值。因此，极大值集合非空。 □

表 3.7 介绍了模糊共识决策的相关不确定性模型变体。

表 3.7：模糊共识决策的相关不确定性模型变体 .

| $k$ | **相关模糊共识决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊共识决策 |
| 2 | 直觉模糊共识决策 |
| 3 | 犹豫模糊共识决策 |
| 3 | 球形模糊共识决策 |
| 3 | 中智共识决策 |
| $n$ | 多元生成共识决策 |

## 3.8 模糊战略决策

战略决策是在资源约束下选择长期举措，使行动与组织目标、风险和竞争优先事项保持一致 [392, 393]。模糊战略决策根据模糊目标达成度和成本满意度为战略计划评分，通过三角模聚合，并选出最佳方案 [394,395]。

**定义 3.8.1**（基于战略地图的模糊战略决策）。 设 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_p\}$ 为战略举措（项目）的有限集。战略计划 （决策）是一个向量

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{D} \subseteq \{0,1\}^p,$$

其中， $x_\ell = 1$ 表示措施 $M_\ell$ 已被选中， $\mathcal{D}$ 对可行性约束（例如资源预算、优先顺序约束）进行编码。

设 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ 为战略目标（来自形式化战略地图）。对于每个目标 $g_i$，确定其一组（结果）指标 $\mathcal{I}_i = \{I_{i1}, \ldots, I_{im_i}\}$，以及每个指标 $I_{ij}$的初始值/目标值（$v_{ij}^0$， $v_{ij}^\star$）。

**(1) 战略准则（目标达成度）**。对于每个 $i$，假设战略地图形式化提供了一种映射，为每个方案 $x \in \mathcal{D}$ 分配一个达成度

$$S_i(x) \in [0,1],$$

其含义是在 $x$条件下，目标 $g_i$ 达成的（分级）层级。

**(2) 经济准则（资源成本与效率）**。设 $\mathcal{R} = \{1, \ldots, r\}$ 为资源类型。定义成本/消耗准则

$$C_u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad (u \in \mathcal{R}),$$

以及（可选的）其他经济效率准则

$$E_v : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \qquad (v = 1, \ldots, q).$$

因此，准则被划分为一个战略群体 $\{S_i\}_{i=1}^s$ 和一个经济群体 $\{C_u\}_{u=1}^r$ （也可能包含 $\{E_v\}_{v=1}^q$）。

**（3）模糊评价与模糊选择**。 假设每项准则均通过一个满意度（隶属度）进行模糊评估：

$$\mu_i^S : \mathcal{D} \to [0,1] \quad (i = 1, \ldots, s),$$
$$\mu_u^C : \mathcal{D} \to [0,1] \quad (u = 1, \ldots, r),$$
$$\mu_v^E : \mathcal{D} \to [0,1] \quad (v = 1, \ldots, q).$$

令 $T$为一个 $k$元 $t$范数（合取算子），并令 $w = (w_1, \ldots, w_{s+r+q})$为非负重要性权重，且满足 $\sum w_j = 1$。定义计划 $x$ 的总体模糊决策隶属度 为

$$\mu_{\mathcal{D}}(x) := T\Big((\mu_1^S(x))^{w_1}, \ldots, (\mu_s^S(x))^{w_s}, (\mu_1^C(x))^{w_{s+1}}, \ldots, (\mu_r^C(x))^{w_{s+r}},$$

$$(\mu_1^E(x))^{w_{s+r+1}}, \ldots, (\mu_q^E(x))^{w_{s+r+q}}\Big) \in [0,1].$$

模糊战略决策 （最优战略计划）是任意一个

$$x^\star \in \arg\max_{x \in \mathcal{D}} \ \mu_{\mathcal{D}}(x).$$

现在，我们将不确定战略决策（USDM）定义为：通过使用不确定集扩展该框架而得到的决策方法。

**定义3.8.2** （ $M$类型的不确定战略决策（USDM））。 设 $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_p\}$ 是战略举措（项目）的有限集，并且

$$\mathcal{D} \subseteq \{0,1\}^p$$

为非空的战略计划可行集，其中 $x = (x_1$、.....、 $x_p) \in \mathcal{D}$ 表示选定的度量指标。

固定一个不确定模型 $M$，其度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$。

设 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ 为战略目标， $\mathcal{R} = \{1, \ldots, r\}$ 为资源类型。假设每个计划$x \in \mathcal{D}$ 都会产生以下不确定评价（度）：

$$\varphi_i : \mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \ldots, s) \quad \text{(goal-achievement degrees)},$$

$\psi_u$： $\mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M)$（$u = 1$、.....、 $r$）（资源可行性／成本满足度），

以及可选的其他不确定准则

$$\eta_v : \mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M) \qquad (v = 1, \ldots, q).$$

令 $k := s + r + q$，并将这些准则列为一个单独的族

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_k : \mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M),$$

其中 $(\zeta_1, \ldots, \zeta_s) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$， $(\zeta_{s+1}, \ldots, \zeta_{s+r}) = (\psi_1, \ldots, \psi_r)$， 以及 $(\zeta_{s+r+1}, \ldots, \zeta_k) = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$ (如果$q = 0$, 则省略最后一个分块)。

**(1) 不确定度域中的聚合**。选择一个完全聚合算子

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^k \times \Delta_k \longrightarrow \mathrm{Dom}(M), \qquad \Delta_k := \Big\{ w \in [0,1]^k : \sum_{j=1}^{k} w_j = 1 \Big\},$$

并固定一个权重向量 $w \in \Delta_k$。

**(2) 评分与选择**。固定一个总评分泛函

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}.$$

定义计划 $x \in \mathcal{D}$ 的整体不确定战略效用为

$$U_M(x) := \mathrm{Agg}_M\big(\zeta_1(x), \ldots, \zeta_k(x); w\big) \in \mathrm{Dom}(M),$$

以及由 $\mathrm{Score}(x) := \mathrm{Score}_M(U_M(x)) \in \mathbb{R}$ 得到的诱导实得分。不确定战略决策是任何计划

$$x^\star \in \arg\max_{x \in \mathcal{D}} \ \mathrm{Score}_M\big(U_M(x)\big).$$

**(3) 不确定集输出（战略效用集）**。定义映射

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu_{\mathcal{U}}(x) := U_M(x).$$

那么 $\mathcal{U} = (\mathcal{D}, \ \mu_{\mathcal{U}})$ 是 c 由该实例诱导的战略不确定效用集（类型为 $M$的 U-集） .

**定理3.8.3**（USDM 的不确定集结构与良定义性）。 设有一个如定义*3.8.2*所述的类型为 $M$的 *USDM*实例。假设：

(A1) $p \geq 1$ 和 $\mathcal{D} \subseteq \{0,1\}^p$ 是有限且非空的。

(A2) $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^d$是非空的，且每个准则映射 $\zeta_j$： $\mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M)$ 都是完全的。

(A3) $\mathrm{Agg}_M$： $\mathrm{Dom}(M)^k \times \Delta_k \to \mathrm{Dom}(M)$ 是完全的，且 $w \in \Delta_k$。

(A4) 得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是完全的。

则：

(i) 由 $\mu_{\mathcal{U}}(x) = \mathrm{Agg}_M(\zeta_1(x)\ldots,\zeta_k(x); w)$ 定义的映射 $\mu_{\mathcal{U}}$: $\mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的；因此，$\mathcal{U} = (\mathcal{D}, \mu_{\mathcal{U}})$ 是 $\mathcal{D}$ 上类型为 $M$ 的良定义不确定集（*U*-集）。

(ii) 由以下内容定义的 $\succeq_M$ $\mathcal{D}$ 上的二元关系

$$x \succeq_M y \iff \mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(x)) \geq \mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(y))$$

是全预序。

(iii) 集合 最大值点集$_{x\in\mathcal{D}}$得分$_M(\mu_{\mathcal{U}}(x))$ 非空；因此存在一个不确定战略决策。

证明。 **(i) 不确定集结构**。 固定 $x \in \mathcal{D}$。根据（A2），每个 $\zeta_j(x) \in \mathrm{Dom}(M)$都良定义。根据（A3），将全映射Agg$_M(\cdot; w)$应用于 $k$-元组$(\zeta_1(x)\ldots,\zeta_k(x))$，得到唯一的值

$$\mu_{\mathcal{U}}(x) = \mathrm{Agg}_M\big(\zeta_1(x),\ldots,\zeta_k(x); w\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此 $\mu_{\mathcal{U}}: \mathcal{D} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的映射，因此 $\mathcal{U} = (\mathcal{D}, \mu_{\mathcal{U}})$ 是一个类型为 $M$ 的 U-集 .

**(ii) 全预序**。 根据 (A4)，对于所有 $x \in \mathcal{D}$，$\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(x)) \in \mathbb{R}$ 都是良定义的。由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反的、传递的且完全的，诱导关系 $\succeq_M$ 继承了这些性质，因此是一个全预序。

**(iii) 优化器的存在性**。 根据 (A1)， $\mathcal{D}$ 是有限且非空的，因此有限实数集 $\{\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(x)) : x \in \mathcal{D}\}$ 可取得最大值。因此 $\arg\max_{x\in\mathcal{D}} \mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(x)) \neq \varnothing$。 □

表格 3.8 展示了模糊战略决策的相关不确定性模型变体 .

表 3.8：模糊战略决策的相关不确定性模型变体。

| $k$ | **相关模糊战略决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊战略决策 |
| 2 | 直觉模糊战略决策 |
| 3 | 犹豫模糊战略决策 |
| 3 | 球形模糊战略决策 |
| 3 | 中智战略决策 |
| $n$ | 多因子战略决策 |

## 3.9 模糊多专家决策

多专家决策聚合多位专家的评价或成对偏好，为专家分配权重，度量共识，并生成集体排序或选择 [396, 397]。模糊多专家决策将专家的判断表示为模糊数或语言术语，通过模糊算子对其进行聚合，促成共识，并稳健地对备选方案进行排序 [398]。

**定义 3.9.1**（模糊多专家决策（FMEDM））。（参见 [399,400]）设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$为一个有限备选方案集， $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_p\}$ 为一个有限准则集， $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ 为一个有限专家集。

**(1) 专家贡献因子**。 为每位专家 $E_i$ 分配一个贡献因子（权重） $c_i \in [0, 1]$ ， 使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1.$$

**（2）模糊评价**。令 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上选定的一类模糊数。每位专家 $E_i$ 提供一个模糊评价

$$\tilde{x}_{rj}^{(i)} \in \mathbb{F} \qquad (r = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p),$$

该评价被解释为备选方案 $A_r$ 在准则 $K_j$ 下的性能（不确定／模糊）。

**（3）多专家聚合（群体评价）**。固定模糊数运算 $\oplus$ （加法）和 $\otimes$（乘以 $c_i$ 的数乘）。聚合后的（群体）模糊评价按元素由加权模糊平均算子定义

$$\tilde{x}_{rj} := \bigoplus_{i=1}^{n} \Big( c_i \otimes \tilde{x}_{rj}^{(i)} \Big), \qquad (r = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p).$$

**（4）跨准则聚合与决策规则**。设 $w_1$，**.....**， $w_p \geq 0$ 为准则权重$\sum_{j=1}^{p} w_j = 1$ （清晰权重；也可类似地使用模糊权重）。将 $A_r$ 的模糊综合得分定义为

$$\tilde{s}_r := \bigoplus_{j=1}^{p} \Big( w_j \otimes \tilde{x}_{rj} \Big) \in \mathbb{F}.$$

设 $\Phi\colon\ \mathbb{F}\to\mathbb{R}$ 为排序泛函（例如去模糊化映射）。推荐的群体决策可以是任意

$$A^\star \in \arg\max_{1\le r\le m} \Phi(\tilde{s}_r).$$

**（常见实例：梯形模糊数）**。标准化梯形模糊数（STFN）是一个四元组 $\tilde{x}=(a^l,\ a^m,\ a^n,\ a^u)$，其 $a^l\le a^m\le a^n\le a^u$ 及隶属函数

$$\mu_{\tilde{x}}(t)=\begin{cases}\dfrac{t-a^l}{a^m-a^l}, & a^l\le t\le a^m,\\ 1, & a^m\le t\le a^n,\\ \dfrac{a^u-t}{a^u-a^n}, & a^n\le t\le a^u,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $c\ge 0$，定义 $c\otimes(a^l,\ a^m,\ a^n,\ a^u):=(ca^l,\ ca^m,\ ca^n,\ ca^u)$ 以及

$$(a^l,a^m,a^n,a^u)\oplus(b^l,b^m,b^n,b^u):=(a^l+b^l,\ a^m+b^m,\ a^n+b^n,\ a^u+b^u),$$

因此，式（3）中的多专家聚合变为分量加权平均。

**De定义 3.9.2**（类型为 $M$ 的不确定多专家决策（UMEDM））。Le t

$$\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}\neq\varnothing\quad\text{(alternatives)},\qquad \mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}\neq\varnothing\quad\text{(criteria)},$$

and

$$\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_p\}\neq\varnothing\quad\text{(experts)}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其度域 $\mathrm{Dom}(M)\subseteq[0,1]^d$（对于某个 $d\ge 1$ ）.

**(1) 专家和准则权重**。设

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\Delta_p,\qquad \Delta_p:=\Big\{\alpha\in[0,1]^p:\ \sum_{h=1}^{p}\alpha_h=1\Big\},$$

为专家权重，并设

$$w=(w_1,\dots,w_n)\in\Delta_n$$

为准则权重。

**(2) 专家级不确定评价**。每位专家 $e_h$ 提供一个不确定决策矩阵

$$R^{(h)}=\big(r_{ij}^{(h)}\big)\in\mathrm{Dom}(M)^{m\times n},\qquad r_{ij}^{(h)}\in\mathrm{Dom}(M)\text{ evaluates }A_i\text{ w.r.t. }C_j\text{ by expert }e_h.$$

**（3）$M$中的聚合算子**。选择完全聚合算子

$$\mathrm{Agg}_{\mathcal{E}}:\mathrm{Dom}(M)^p\times\Delta_p\to\mathrm{Dom}(M)\quad\text{(across experts)},$$

$$\mathrm{Agg}_{\mathcal{C}}:\mathrm{Dom}(M)^n\times\Delta_n\to\mathrm{Dom}(M)\quad\text{(across criteria)},$$

和总评分泛函

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}.$$

**（4）集体评价、效用与选择**。将集体不确定决策矩阵$R^c = (r_{ij}^c) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$逐元素定义为

$$r_{ij}^c := \mathrm{Agg}_{\mathcal{E}}\big(r_{ij}^{(1)}, \ldots, r_{ij}^{(p)}; _a lpha\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

对于每个备选方案 $A_i$，将其总体不确定效用度定义为

$$u_i := \mathrm{Agg}_{\mathcal{C}}\big(r_{i1}^c, \ldots, r_{in}^c; w\big) \in \mathrm{Dom}(M),$$

其诱导实得分定义为

$$U_i := \mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R}.$$

一个（推荐的）不确定多专家决策是任意一个

$$A^\star \in \arg\max_{1\le i\le m} U_i = \arg\max_{A_i\in\mathcal{A}} \mathrm{Score}_M(u_i).$$

**（5）不确定集输出（多专家效用集）**。定义

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad \mu_{\mathcal{U}}(A_i) := u_i.$$

则 $\mathcal{U}$:=($\mathcal{A}$, $\mu_{\mathcal{U}}$) 称为由该实例导出的多专家不确定效用集（类型为 $M$ 的 U-集）。

**定理3.9.3**（UMEDM 的不确定集结构与良定义性）。设有一个类型为 $M$ 的 *UMEDM* 实例，如定义*3.9.2* 所述。假设：

（A1） $\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{E}$均有限且非空。

（A2）Dom（$M$） $\subseteq [0,1]^d$ 非空。

（A3）对于每个专家 $e_h$ 以及每个（$i$， $j$），均指定了评价项 $r_{ij}^{(h)} \in$Dom（$M$）（即，每个 $R^{(h)}$ 都是定义在 Dom（$M$） 上的完全矩阵）。

（A4） $\alpha \in \Delta_p$ 和 $w \in \Delta_n$。

(A5) 聚合$\mathcal{E}$ 和聚合$\mathcal{C}$ 是陪域为$\mathrm{Dom}(M)$的全函数，而得分$_M$ 是陪域为 $\mathbb{R}$的全函数。

于是：

(i) $\mu_{\mathcal{U}}$: $\mathcal{A} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的；因此， $\mathcal{U} = (\mathcal{A}, \mu_{\mathcal{U}})$ 是 $\mathcal{A}$上类型为$M$ 的良定义不确定集（*U*-集）。

*(ii)* </style> $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$上的二元关系定义如下

$$A_i \succeq_M A_\ell \iff \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{U}}(A_i)\big) \ge \mathrm{Score}_M\big(\mu_{\mathcal{U}}(A_\ell)\big)$$

是一个全预序。

(iii) 最大化元集 最大值点集$_{A_i\in\mathcal{A}}$得分$_M(\mu_{\mathcal{U}}(A_i))$ 非空；特别地，存在一个 *UMEDM* 解 $A^\star$。

证明。 **(i)** 固定 $A_i \in \mathcal{A}$和 $C_j \in \mathcal{C}$。根据 **(A3)**， $p$-元组 $(r_{ij}^{(1)},\dots,r_{ij}^{(p)}) \in \mathrm{Dom}(M)^p$是良定义的。根据 **(A4)–(A5)**，应用全映射 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{E}}(\cdot;\alpha)$ 可得唯一的值

$$r_{ij}^{c} = \mathrm{Agg}_{\mathcal{E}}\big(r_{ij}^{(1)},\dots,r_{ij}^{(p)};\alpha\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此 $R^c \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$是良定义的。同样根据 **(A4)–(A5)**， $n$-元组 $(r_{i1}^{c},\dots,r_{in}^{c}) \in \mathrm{Dom}(M)^n$是良定义的，并且

$$u_i = \mathrm{Agg}_{\mathcal{C}}\big(r_{i1}^{c},\dots,r_{in}^{c};w\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

是唯一确定的。因此，对每个 $A_i$， $\mu_{\mathcal{U}}(A_i) := u_i$是良定义的，进而 $\mu_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{A}\to\mathrm{Dom}(M)$ 是良定义的映射，且 $\mathcal{U}=(\mathcal{A},\mu_{\mathcal{U}})$ 是类型为 $M$ 的 U-集。

**(ii)** 根据 **(A5)**，每个得分 $\mathrm{Score}_M(\mu_{\mathcal{U}}(A_i)) \in \mathbb{R}$都是良定义的。由于 $\geq$在 $\mathbb{R}$上是自反的、传递的且完全的，诱导关系 $\succeq_M$ 也是自反的、传递的且完全的；因此它是一个全预序。

**(iii)** 由于根据 **(A1)**， $\mathcal{A}$是有限且非空的，因此有限实数集 $\{$得分$_M(\mu_{\mathcal{U}}(A_i))\colon\ A_i\in\mathcal{A}\}$可以取得最大值。因此，极大值集合非空，故至少存在一个最大化元 $A^\star$ 。 □

表 3.9 展示了模糊多专家决策的相关不确定性模型变体。

表 3.9：模糊多专家决策的相关不确定性模型变体。

| $k$ | **相关模糊多专家决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多专家决策 |
| 2 | 直觉模糊多专家决策 |
| 3 | 犹豫模糊多专家决策 |
| 3 | 球形模糊多专家决策 |
| 3 | 中智多专家决策 [401, 402] |
| $n$ | 矛盾生成多专家决策 |

## 3.10 模糊多阶段决策

多阶段决策是在顺序阶段中选择行动的过程，早期选择会影响后续的可行集、成本和结果，并以优化完全性为目标 [403,404]。模糊多阶段决策使用模糊集对依赖阶段的评价、约束或转移进行建模，在各阶段传递不确定性，从而选择适应性计划 [405, 406]。

**定义 3.10.1 (模糊多阶段决策（FMSDM）).** [405,406] 固定一个有限时域 $m\in\mathbb{N}$。对于每个阶段 $i\in\{1,\dots,m\}$，设 $S_i$为一个（有限）状态集，并且对于每个 $s\in S_i$，设 $D_i(s)$为一个非空（有限）可行决策集。设（清晰）转移映射为

$$\tau_i : S_i \times D_i(s) \to S_{i+1} \qquad (i=1,\dots,m-1).$$

假设每个阶段成本均由一个模糊数表示：

$$\beta_i : S_i \times D_i(s) \to \mathcal{FN}(\mathbb{R}),$$

其中， $\mathcal{FN}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上模糊数的类别。

（确定性）策略是一个序列 $\pi = (\pi_1, \ldots\ldots, \pi_m)$，其中 $\pi_i(s) \in D_i(s)$。给定初始状态 $s_1 \in S_1$，诱导轨迹为

$$s_{i+1} = \tau_i\big(s_i, \pi_i(s_i)\big) \quad (i = 1, \ldots, m-1),$$

诱导的复合模糊成本 是模糊数

$$\boldsymbol{\beta}^{\pi}(s_1) := \beta_1\big(s_1, \pi_1(s_1)\big) \ \oplus \ \beta_2\big(s_2, \pi_2(s_2)\big) \ \oplus \ \cdots \ \oplus \ \beta_m\big(s_m, \pi_m(s_m)\big),$$

其中 $\oplus$ 是由 $\alpha$-截集定义的扩展（模糊）和： 对于模糊数 $X$， $Y$和 $\alpha \in (0, 1]$,

$$[X \oplus Y]_\alpha = [X]_\alpha + [Y]_\alpha \quad \text{(Minkowski sum of intervals)}.$$

为在最小化目标下比较模糊成本，固定 $\alpha$-截优势度预序 $\preceq$于 $\mathcal{FN}(\mathbb{R})$ 上：对于模糊数 $X$， $Y$，

$$X \preceq Y \iff \forall \alpha \in (0, 1] : \ \inf[X]_\alpha \le \inf[Y]_\alpha \ \text{ and } \ \sup[X]_\alpha \le \sup[Y]_\alpha.$$

若 $X \preceq Y$ 且非 $Y \preceq X$，则记作 $X \prec Y$。

若不存在策略 $\pi$ 使得 $\boldsymbol{\beta}^{\pi}(s_1) \prec \boldsymbol{\beta}^{\pi^\star}(s_1)$ 成立，则称策略 $\pi^\star$ 在 $s_1$ 处为（优势度）最优。等价地，（可能为集合值的）解集是 $\preceq$-极小复合成本的集合:

$$\Pi^\star(s_1) := \Big\{\pi : \ \nexists \pi' \text{ with } \boldsymbol{\beta}^{\pi'}(s_1) \prec \boldsymbol{\beta}^{\pi}(s_1)\Big\}.$$

**定义 3.10.2** （扩展最小成本与最佳策略模糊集）。假设 $\Pi$ 是可容许策略的有限集（例如，在有限 $S_i$ 和 $D_i(\cdot)$ 上的所有确定性策略）。根据扎德扩张原理，定义模糊数 $(X_k)_{k=1}^N$ 的扩展最小值:

$$\mu_{\widetilde{\min}(X_1,\ldots,X_N)}(u) := \sup_{u=\min(u_1,\ldots,u_N)} \ \min_{1\le k\le N} \ \mu_{X_k}(u_k), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

则在 $s_1$ 处的最小（扩展）模糊成本为

$$\boldsymbol{\beta}^\star(s_1) := \widetilde{\min}\big\{\boldsymbol{\beta}^{\pi}(s_1) : \ \pi \in \Pi\big\}.$$

为将最佳策略模糊集与 $\boldsymbol{\beta}^\star(s_1)$ 关联起来，固定任意良定义的匹配（相似度）指标 $\mathrm{Match} : \mathcal{FN}(\mathbb{R}) \times \mathcal{FN}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$。一种常见的选择是交集高度:

$$\mathrm{Match}(X, Y) := \sup_{u\in\mathbb{R}} \min\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\}.$$

~在 $\Pi$ 上定义模糊集 $\Pi^\star(s_1)$，如下:

$$\mu_{\widetilde{\Pi}^\star(s_1)}(\pi) := \mathrm{Match}\big(\boldsymbol{\beta}^{\pi}(s_1), \boldsymbol{\beta}^\star(s_1)\big).$$

~特别是，如果某一策略 $\pi^\star$ 在 $\prec$下严格支配其他所有策略，那么 $\Pi^\star(s_1)$ 就会退化为清晰单元素集 $\{\pi^\star\}$。

现在，我们通过将逐阶段评估从模糊量扩展到具有度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$的一般不确定模型 $M$，来定义不确定多阶段决策（UMSDM）。

**定义 3.10.3**（类型为 $M$ 的不确定多阶段决策（UMSDM））。设 $M$ 为度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

的某个不确定模型，其中 $k \geq 1$ 为整数。固定一个有限时域 $m \in \mathbb{N}$。

对于每个阶段 $i \in \{1, \ldots, m\}$，设 $S_i$ 为有限非空状态集；对于每个 $s \in S_i$，设 $D_i(s)$ 为阶段 $i$ 上可接受决策的有限非空集。定义可行状态-决策集

$$\mathcal{D}_i := \{(s,d) : s \in S_i,\ d \in D_i(s)\}.$$

对于每个 $i = 1$、.....、$m-1$，设

$$\tau_i : \mathcal{D}_i \longrightarrow S_{i+1}$$

对于每个 $i = 1$、.....、$m$，设其为一个（清晰）转移映射；对于每个

$$\beta_i : \mathcal{D}_i \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

是不确定阶段评估映射，其中 $\beta_i(s,\ d)$ 表示在阶段 $i$处于状态 $s$ 时采取决策 $d$ 所对应的不确定成本、效用、奖励或性能度。

进一步假设，模型依赖型阶段组合算子

$$\mathrm{Comp}_M : \mathrm{Dom}(M)^m \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

以及模型依赖型排序泛函

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

是固定的。

一个 确定性策略是一个序列

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m),$$

其中每个

$$\pi_i : S_i \longrightarrow \bigcup_{s \in S_i} D_i(s)$$

对所有 $s \in S_i$，满足 $\pi_i(s) \in D_i(s)$。令 $\Pi_i$ 表示所有此类阶段-$i$ 决策规则的集合，并令

$$\Pi := \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m$$

为所有确定性策略的集合。

给定初始状态 $s_1 \in S_1$ 和策略 $\pi \in \Pi$，所诱导的状态轨迹

$$s_1^\pi, s_2^\pi, \ldots, s_m^\pi$$

递归定义为

$$s_1^\pi := s_1, \qquad s_{i+1}^\pi := \tau_i\big(s_i^\pi, \pi_i(s_i^\pi)\big) \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

诱导的逐阶段不确定评价为

$$b_i^{\pi}(s_1) := \beta_i\big(s_i^{\pi}, \pi_i(s_i^{\pi})\big) \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \dots, m).$$

$\pi$ 的复合不确定性能在 $s_1$ 为

$$B_M^{\pi}(s_1) := \mathrm{Comp}_M\big(b_1^{\pi}(s_1), \dots, b_m^{\pi}(s_1)\big) \in \mathrm{Dom}(M),$$

且相应的标量化性能值为

$$J_M^{\pi}(s_1) := \mathrm{Score}_M\big(B_M^{\pi}(s_1)\big) \in \mathbb{R}.$$

在最小化目标下，将诱导的策略预序定义为

$$\pi \preceq_M \rho \quad \Longleftrightarrow \quad J_M^{\pi}(s_1) \le J_M^{\rho}(s_1).$$

称策略 $\pi^\star \in \Pi$ 在 $s_1$ 处为最优，如果

$$J_M^{\pi^\star}(s_1) = \min_{\pi \in \Pi} J_M^{\pi}(s_1).$$

等价地，最优策略集为

$$\Pi_M^\star(s_1) := \arg\min_{\pi \in \Pi} J_M^{\pi}(s_1).$$

若改为采用最大化目标，则将最小值点集替换为最大值点集，或等价地在诱导预序中将$\le$替换为 $\ge$。

**定理 3.10.4**（类型 $M$ 的 UMSDM 的良定义性）。设 $M$ 为度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的不确定模型，并设

$$\mathfrak{U}_M = \big((S_i)_{i=1}^m,\, (D_i)_{i=1}^m,\, (\tau_i)_{i=1}^{m-1},\, (\beta_i)_{i=1}^m,\, \mathrm{Comp}_M,\, \mathrm{Score}_M\big)$$

为定义 *3.10.3* 中的 *UMSDM* 实例。假设：

（*A1*）每个 $S_i$ 有限且非空；

（*A2*）对每一个 $i \in \{1, \dots, m\}$ 和 $s \in S_i$，每个 $D_i(s)$ 有限且非空；

（*A3*）每个转移映射

$$\tau_i : \mathcal{D}_i \to S_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

是一个全函数；

（*A4*）每个阶段评估映射

$$\beta_i : \mathcal{D}_i \to \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1, \dots, m)$$

是一个全函数；

（*A5*）复合算子

$$\mathrm{Comp}_M : \mathrm{Dom}(M)^m \to \mathrm{Dom}(M)$$

是一个全函数；

*(A6)* 排序泛函

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$$

是一个全函数。

那么，对于每个初始状态 $s_1 \in S_1$，以下陈述均成立：

*(i)* 策略集 $\Pi$有限且非空；

*(ii)* 对于每个策略 $\pi \in \Pi$，诱导轨迹

$$s_1^\pi, s_2^\pi, \ldots, s_m^\pi$$

是唯一确定的；

*(iii)* 对于每个策略 $\pi \in \Pi$，逐阶段不确定评价

$$b_i^\pi(s_1) \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

以及复合不确定性能

$$B_M^\pi(s_1) \in \mathrm{Dom}(M)$$

均为良定义；

*(iv)* 对于每个策略 $\pi \in \Pi$，标量值

$$J_M^\pi(s_1) = \mathrm{Score}_M\big(B_M^\pi(s_1)\big) \in \mathbb{R}$$

是良定义的；

*(v)* 在 $\Pi$ 上由下式定义的关系 $\preceq_M$

$$\pi \preceq_M \rho \iff J_M^\pi(s_1) \le J_M^\rho(s_1),$$

是一个全预序；

*(vi)* 最优策略集

$$\Pi_M^\star(s_1) = \arg\min_{\pi \in \Pi} J_M^\pi(s_1)$$

是非空的。

因此，类型 $M$ 的不确定多阶段决策是良定义的。

证明。 首先，对每个阶段 $i$，定义

$$\Pi_i := \{\pi_i : S_i \to \textstyle\bigcup_{s \in S_i} D_i(s) \ : \ \pi_i(s) \in D_i(s) \text{ for all } s \in S_i\}.$$

Since $S_i$ 是有限的，且每个 $D_i(s)$ 都有限且非空，此类函数的数量 i s

$$|\Pi_i| = \prod_{s \in S_i} |D_i(s)|,$$

which 是正有限整数。因此，每个 $\Pi_i$ 都有限且非空，因此

$$\Pi = \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m$$

也有限且非空。这证明了（$i$）。

接下来，固定一个初始状态 $s_1 \in S_1$ 和一个策略 $\pi \in \Pi$。我们证明诱导轨迹是唯一确定的。令 $s_1^\pi := s_1$。假设根据归纳法，对于某个 $i \in \{1, \ldots, m-1\}$，$s_i^\pi \in S_i$ 已被唯一确定。由于 $\pi_i(s_i^\pi) \in D_i(s_i^\pi)$，这对

$$\big(s_i^\pi, \pi_i(s_i^\pi)\big) \in \mathcal{D}_i.$$

根据假设（$A3$），转移映射 $\tau_i$ 是完全的，因此

$$s_{i+1}^\pi := \tau_i\big(s_i^\pi, \pi_i(s_i^\pi)\big) \in S_{i+1}$$

存在且唯一。根据归纳法，整个轨迹

$$s_1^\pi, s_2^\pi, \ldots, s_m^\pi$$

存在且唯一。因此（$ii$）成立。

对于每个阶段 $i$，由于

$$\big(s_i^\pi, \pi_i(s_i^\pi)\big) \in \mathcal{D}_i$$

且 $\beta_i : \mathcal{D}_i \to \mathrm{Dom}(M)$ 根据（$A4$）是全映射，因此该值

$$b_i^\pi(s_1) := \beta_i\big(s_i^\pi, \pi_i(s_i^\pi)\big)$$

是良定义的，并且属于 $\mathrm{Dom}(M)$。因此，这个 $m$ 元组

$$\big(b_1^\pi(s_1), \ldots, b_m^\pi(s_1)\big) \in \mathrm{Dom}(M)^m$$

是良定义的。根据（$A5$），复合算子 $\mathrm{Comp}_M$ 是全映射，因此

$$B_M^\pi(s_1) = \mathrm{Comp}_M\big(b_1^\pi(s_1), \ldots, b_m^\pi(s_1)\big) \in \mathrm{Dom}(M)$$

是良定义的。这证明了（$iii$）。

根据（$A6$），$\mathrm{Score}_M$ 是一个从 $\mathrm{Dom}(M)$ 到 $\mathbb{R}$ 的全映射。因此

$$J_M^\pi(s_1) := \mathrm{Score}_M\big(B_M^\pi(s_1)\big) \in \mathbb{R}$$

对每个 $\pi \in \Pi$ 都是良定义的。因此，$(iv)$ 成立。

现在定义，对于 $\pi$，$\rho \in \Pi$，

$$\pi \preceq_M \rho \iff J_M^\pi(s_1) \le J_M^\rho(s_1).$$

由于 $\le$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，$\preceq_M$ 在 $\Pi$ 上的诱导关系也同样是自反、传递且完全的。因此，$\preceq_M$ 是一个全预序。这证明了 $(v)$。

最后，由于根据（$i$），$\Pi$ 有限且非空，因此集合

$$\{J_M^\pi(s_1) : \pi \in \Pi\} \subseteq \mathbb{R}$$

是一个有限非空实数集。 $\mathbb{R}$ 的每个有限非空子集都能取到其最小值。因此，至少存在一个策略 $\pi^\star \in \Pi$ ，使得

$$J_M^{\pi^\star}(s_1) = \min_{\pi\in\Pi} J_M^{\pi}(s_1).$$

等价地，

$$\Pi_M^\star(s_1) = \arg\min_{\pi\in\Pi} J_M^{\pi}(s_1) \neq \varnothing.$$

因此，$(vi)$成立。

因此，所有必需的对象都存在且定义明确。因此，类型为 $M$ 的UMSDM定义良好。

□

表3.10列出了模糊多阶段决策的相关不确定性模型变体。

T表3.10：模糊多阶段决策的相关不确定性模型变体 g.

| $k$ | **相关的模糊多阶段决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多阶段决策 |
| 2 | 直觉模糊多阶段决策 |
| 3 | 犹豫模糊多阶段决策 |
| 3 | 球形模糊多阶段决策 |
| 3 | 中智多阶段决策 |
| $n$ | 多元生成多阶段决策 |

## 3.11 模糊多层决策

多层决策对层级领导者和跟随者进行建模，其中上层决策约束下层响应，并作为双层或层级优化问题求解 [407–409]。模糊多层决策在层级结构的不同层级引入模糊目标、约束或偏好，从而在不精确的领导者–跟随者信息下得到折中解。

**定义 3.11.1**（模糊 $L$层决策）。 设 $L \geq 2$ 为决策层级的数量。对于每个层级 $\ell \in \{1,\dots,L\}$，设 $x_\ell \in X_\ell \subseteq \mathbb{R}^{n_\ell}$ 为由第 $\ell$层控制的决策向量，并令

$$x := (x_1,\dots,x_L) \in X := \prod_{\ell=1}^{L} X_\ell.$$

˜假设不确定性/不精确性由模糊数建模。设 $\mathbb{R}$ 表示 $\mathbb{R}$上选定的一类模糊数。对于每个层级 $\ell$，设（模糊值）目标为

$$\tilde{f}_\ell : X \to \tilde{\mathbb{R}}.$$

设系统约束由模糊值映射给出

$$\tilde{g}_r : X \to \tilde{\mathbb{R}}, \qquad r = 1,\dots,p.$$

Fix:

- 一个诱导排序的排序泛函 $\mathcal{R}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ （例如，去模糊化/排序算子），用于比较模糊目标；
- a 可行性满足水平 $\eta\in(0,1]$.

˜对于模糊数 $\tilde{z}\in\mathbb{R}$ 及其隶属函数 $\mu_{\tilde{z}}:\mathbb{R}\to[0,1]$，定义 $\tilde{z}\le 0$ 的可能性 为

$$\mathrm{Pos}(\tilde{z}\le 0)\ :=\ \sup_{t\le 0}\ \mu_{\tilde{z}}(t)\ \in[0,1].$$

定义 $\eta$-可行集

$$F_\eta\ :=\ \Big\{x\in X:\ \mathrm{Pos}(\tilde{g}_r(x)\le 0)\ge\eta\ \text{for all } r=1,\dots,p\Big\}.$$

递归定义理性响应对应 $\mathcal{S}_\ell$ （逆向归纳）：

$$\mathcal{S}_L(x_{1:L-1})\ :=\ \arg\min_{x_L\in X_L}\Big\{\mathcal{R}\big(\tilde{f}_L(x_{1:L-1},x_L)\big):(x_{1:L-1},x_L)\in F_\eta\Big\},$$

$$\mathcal{S}_\ell(x_{1:\ell-1})\ :=\ \arg\min_{x_\ell\in X_\ell}\Big\{\mathcal{R}\big(\tilde{f}_\ell(x_{1:\ell-1},x_\ell,x_{\ell+1:L})\big):\exists\, x_{\ell+1:L}\in\mathcal{S}_{\ell+1}(x_{1:\ell}),\ (x_{1:L})\in F_\eta\Big\},$$

对于 $\ell=L-1,L-2,\dots,1$，其中 $x_{i:j}:=(x_i,\dots,x_j)$.

一个向量 $x^\star=(x_1^\star,\dots,x_L^\star)\in F_\eta$称为模糊 $L$层级（斯塔克尔伯格）解如果

$$x_{2:L}^\star\in\mathcal{S}_2(x_1^\star)\quad\text{and}\quad x_1^\star\in\mathcal{S}_1(\varnothing),$$

等价地，如果 $x^\star$ 由上述逆向归纳最优反应生成。

˜**注3.11.2** （经典多层规划的还原）。 若所有数据均为清晰（从而 $f_\ell$ 与 $\tilde{g}_r$ 在 $\mathbb{R}$中取值），$\mathrm{Pos}(\tilde{g}_r(x)\le 0)\in\{0,1\}$，且取 $\eta=1$ 使 $\mathcal{R}$ 等于恒等映射，则定义3.11.1退化为标准（清晰） $L$层级斯塔克尔伯格决策／优化模型。

**定理3.11.3** （良定义性／紧性条件下的存在性）。 假设：

*1.* 每个 $X_\ell$ 非空且紧；

*2.* $F_\eta$ 在 $X$ 中非空且闭（因而紧）；

˜*3.* 对于每个 $\ell$，标量化目标 $x\mapsto\mathcal{R}(f_\ell(x))$ 在 $X$上连续。

那么，对于每个 $\ell$，对应 $\mathcal{S}_\ell$ 取非空值，并且至少存在一个模糊 $L$-层级解 $x^\star\in F_\eta$。

证明。 我们通过逆向归纳法进行论证。

层级 $L$. 固定 $x_{1:L-1}$，使可行切片 $\{x_L \in X_L : (x_{1:L-1}, x_L) \in F_\eta\}$ 非空。由于 $F_\eta$ 是˜闭集，且 $X_L$ 是紧集，该切片是紧集。由 $x_L \mapsto \mathcal{R}(f_L(x_{1:L-1}, x_L))$ 的连续性可知，最小值能够取到（魏尔斯特拉斯定理），因此 $\mathcal{S}_L(x_{1:L-1}) \neq \varnothing$。

归纳步骤。 假设 $\mathcal{S}_{\ell+1}$ 取非空值。固定 $x_{1:\ell-1}$，并考虑满足存在 $x_{\ell+1:L} \in \mathcal{S}_{\ell+1}(x_{1:\ell})$ 使得 $(x_{1:L}) \in F_\eta$ 的可容许 $x_\ell \in X_\ell$ 所构成的集合。根据归纳假设以及 $F_\eta \neq \varnothing$，该集合非空。由 $X$ 的紧致性和 $F_\eta$ 的闭性可知该集合紧致（将˜投影到相关坐标后）。由于 $x \mapsto \mathcal{R}(f_\ell(x))$ 在 $X$上连续，因此在这个紧致非空集上进行的相应最小化能够取到最小值，所以 $\mathcal{S}_\ell(x_{1:\ell-1}) \neq \varnothing$。

将其应用于 $\ell = 1$ 会得到一个非空的 $\mathcal{S}_1(\varnothing)$，从而形成一条向后归纳链，至少产生一个 $x^\star \in F_\eta$。

□

现在，我们通过将多层决策中各层的清晰/模糊目标替换为 [20, 142]意义下的不确定集值目标，来定义不确定多层决策 (UMLDM)。

**定义 3.11.4**（类型为 $M$ 的不确定 $L$ 层决策（UMLDM））。 设 $L \geq 2$ 为分层决策的层级数，设 $M$ 为一个度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

的某个不确定模型，其中 $k \geq 1$为整数。

对于每个层级 $\ell \in \{1, \ldots, L\}$，设 $X_\ell$为第 $\ell$ 个决策者的非空决策集，并令

$$X := \prod_{\ell=1}^{L} X_\ell.$$

$X$ 的一个元素记作

$$x = (x_1, \ldots, x_L), \qquad x_\ell \in X_\ell.$$

记作

$$x_{i:j} := (x_i, \ldots, x_j) \qquad (1 \leq i \leq j \leq L).$$

假设全局可行决策集是一个非空子集

$$F_M \subseteq X.$$

对于每个层级 $\ell \in \{1, \ldots, L\}$，令

$$f_{\ell,M} : X \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

为层级 $\ell$的 不确定目标映射，并令

$$\mathrm{Score}_{\ell,M} : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

是一个完全的排序／标量化映射，用于比较层级 $\ell$ 下的不确定目标值。因此，每一对 $(X, f_{\ell,M})$ 都是公共决策全集 $X$ 上类型为 $M$ 的不确定集（U-集）。

对于 e 对于每个 $\ell \in \{1,\dots,L\}$ 和每个可行前缀 $x_{1:\ell-1}$，定义可行延续集 $t$

$$F_M^{(\ell)}(x_{1:\ell-1}) := \big\{x_{\ell:L} \in X_\ell \times \cdots \times X_L : (x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L}) \in F_M\big\}.$$

为方便起见，当 $\ell = 1$ 时，我们将 $x_{1:0}$ 解释为空前缀 $\varnothing$，这样

$$F_M^{(1)}(\varnothing) = F_M.$$

理性响应对应由最低层级向上递归定义。

层级 $L$：对于每个可行前缀 $x_{1:L-1}$，令

$$\mathcal{R}_{L,M}(x_{1:L-1}) := \arg\min_{x_L \in F_M^{(L)}(x_{1:L-1})} \mathrm{Score}_{L,M}\big(f_{L,M}(x_{1:L-1}, x_L)\big).$$

层级 $\ell = L-1$、$L-2$、.....、1：对于每个可行前缀 $x_{1:\ell-1}$，定义可容许理性延续集

$$\mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}) := \Big\{x_{\ell:L} \in F_M^{(\ell)}(x_{1:\ell-1}) : x_{\ell+1:L} \in \mathcal{R}_{\ell+1,M}(x_{1:\ell})\Big\},$$

然后定义

$$\mathcal{R}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}) = \arg\min_{x_{\ell:L} \in \mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})} \mathrm{Score}_{\ell,M}\big(f_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L})\big).$$

一个元素

$$x^\star = (x_1^\star, \dots, x_L^\star) \in F_M$$

称为一个不确定 $L$ 层解（或不确定斯塔克尔伯格解），类型为 $M$，如果

$$x^\star \in \mathcal{R}_{1,M}(\varnothing).$$

等价地，$x^\star$ 通过逆向归纳得到，其中每一层级 $\ell$ 在假设所有较低层级 $\ell+1$、.....、$L$ 均理性响应的条件下，选择使其标量化不确定目标最小化的延续策略。

**备注 3.11.5**（特化）。如果 $M$ 是度域 Dom($M$) 为 $= [0,1]$ 的模糊模型，那么定义 3.11.4 就简化为模糊多层决策模型。如果 $M$ 选用直觉模糊、中智、多元生成或其他不确定性模型，那么通过改变度域 Dom($M$) 以及依赖于模型的排序映射 Score$_{\ell,\,M}$，即可得到相应的不确定性感知多层决策框架。

**定理 3.11.6**（UMLDM 的定义良好性）。设

$$\mathfrak{M} = \big(L,\, M,\, (X_\ell)_{\ell=1}^L,\, F_M,\, (f_{\ell,M})_{\ell=1}^L,\, (\mathrm{Score}_{\ell,M})_{\ell=1}^L\big)$$

是定义 *3.11.4* 中的一个 *UMLDM* 实例。假设：

1. 每个 $X_\ell$ 均有限且非空；
2. $F_M \subseteq X = \prod_{\ell=1}^L X_\ell$ 是非空的；

*3.* 对每个 $\ell \in \{1, \dots, L\}$，映射

$$f_{\ell,M} : \ X \to \mathrm{Dom}(M)$$

是完全的；

*4.* 对于每个 $\ell \in \{1, \dots, L\}$，映射

$$\text{得分}_{\ell,\ M} : \ \mathrm{Dom}(M) \ \to \mathbb{R}$$

是完全的。

于是有以下结论。

*1.* 对每个 $\ell \in \{1, \dots, L\}$，以及 $F_M$ 中某个可行向量所产生的每个可行前缀 $x_{1:\ell-1}$，可行延续集 $F_M^{(\ell)}(x_{1:\ell-1})$ 都是有限非空集。

*2.* 对每个 $\ell \in \{1, \dots, L\}$ 以及每个这样的可行前缀 $x_{1:\ell-1}$，响应集 $\mathcal{R}_{\ell,\ M}(x_{1:\ell-1})$ 是良定义且非空的。

*3.* 特别地，$\mathcal{R}_{1,\ M}(\varnothing) \neq \varnothing$，因此不确定 $L$ 层解集非空。由此，类型为 $M$ 的不确定多层决策是良定义的。

证明。 对每个 $\ell \in \{1, \dots, L\}$，定义长度为 $\ell - 1$ 的可行前缀集如下：

$$P_{\ell-1} := \Big\{ x_{1:\ell-1} \in X_1 \times \cdots \times X_{\ell-1} : \exists\, x_{\ell:L} \text{ with } (x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L}) \in F_M \Big\}.$$

按照惯例，

$$P_0 = \{\varnothing\}.$$

由于 $F_M \neq \varnothing$，我们有 $P_0 \neq \varnothing$。

我们通过对 $\ell$ 进行逆向归纳来证明，对于每一个 $x_{1:\ell-1} \in P_{\ell-1}$，

$$F_M^{(\ell)}(x_{1:\ell-1})$$

是有限且非空的，并且

$$\mathcal{R}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})$$

是良定义且非空的。

**步骤 1：最后一层级 $\ell = L$。**

固定 $x_{1:L-1} \in P_{L-1}$。根据 $P_{L-1}$ 的定义，至少存在一个 $x_L \in X_L$，使得 at

$$(x_{1:L-1}, x_L) \in F_M.$$

因此

$$F_M^{(L)}(x_{1:L-1}) = \{x_L \in X_L : (x_{1:L-1}, x_L) \in F_M\}$$

是非空的。由于 $X_L$ 是有限的，因此 $F_M^{(L)}(x_{1:L-1})$ 也是有限的。

因为 $f_{L,\ M}$ 是完全的，对于每个 $x_L \in F_M^{(L)}(x_{1:L-1})$，

$$f_{L,M}(x_{1:L-1}, x_L) \in \mathrm{Dom}(M)$$

已定义。由于得分$_{L,\ M}$ 是完全的，

$$\mathrm{Score}_{L,M}\big(f_{L,M}(x_{1:L-1}, x_L)\big) \in \mathbb{R}$$

对每个 $x_L \in F_M^{(L)}(x_{1:L-1})$ 均有定义。

因此，我们是在有限非空集上最小化一个实值函数。于是，最小值可以取到，所以

$$\mathcal{R}_{L,M}(x_{1:L-1}) = \arg\min_{x_L \in F_M^{(L)}(x_{1:L-1})} \mathrm{Score}_{L,M}\big(f_{L,M}(x_{1:L-1}, x_L)\big)$$

是良定义且非空的。

**步骤 2：归纳步骤**。

假设对于某个 $\ell \in \{1, \ldots, L-1\}$，该陈述在层级 $\ell+1$ 上已经得到证明；也就是说，对于每个可行前缀 $x_{1:\ell} \in P_\ell$，

$$F_M^{(\ell+1)}(x_{1:\ell})$$

都是有限且非空的，并且

$$\mathcal{R}_{\ell+1,M}(x_{1:\ell})$$

是良定义且非空的。

现在固定 $x_{1:\ell-1} \in P_{\ell-1}$。根据 $P_{\ell-1}$ 的定义，存在某个

$$\bar{x}_{\ell:L} \in X_\ell \times \cdots \times X_L$$

使得

$$(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_{\ell:L}) \in F_M.$$

因此

$$F_M^{(\ell)}(x_{1:\ell-1})$$

非空；由于 $X_\ell \times \cdots \times X_L$ 是有限的，因此它也是有限的。

令 $\bar{x}_\ell$ 表示 $\bar{x}_{\ell:L}$的第 $\ell$个分量。则

$$(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell, \bar{x}_{\ell+1:L}) \in F_M,$$

因此，前缀

$$(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell) \in P_\ell.$$

根据归纳假设，

$$\mathcal{R}_{\ell+1,M}(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell) \neq \varnothing.$$

任选一个

$$y_{\ell+1:L} \in \mathcal{R}_{\ell+1,M}(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell).$$

根据归纳假设，

$$y_{\ell+1:L} \in F_M^{(\ell+1)}(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell),$$

这意味着

$$(x_{1:\ell-1}, \bar{x}_\ell, y_{\ell+1:L}) \in F_M.$$

因此

$$(\bar{x}_\ell, y_{\ell+1:L}) \in \mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}).$$

所以，可容许理性延续集

$$\mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})$$

是非空的。由于它是有限集 $F_M^{(\ell)}$ $(x_{1:\ell-1})$ 的子集，因此它是有限的。

现在，对于每一个

$$x_{\ell:L} \in \mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}),$$

点 $(x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L}) \in X$ 已定义，因此由 $f_{\ell,M}$ 的全定义性，

$$f_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L}) \in \mathrm{Dom}(M)$$

已定义；并且由得分$_{\ell,M}$的全定义性，

$$\mathrm{Score}_{\ell,M}\big(f_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L})\big) \in \mathbb{R}$$

已定义。

因此，$\mathcal{R}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})$ 是实值函数在有限非空集上的最小值点：

$$\mathcal{R}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}) = \arg\min_{x_{\ell:L} \in \mathcal{A}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})} \mathrm{Score}_{\ell,M}\big(f_{\ell,M}(x_{1:\ell-1}, x_{\ell:L})\big).$$

因此，$\mathcal{R}_{\ell,M}(x_{1:\ell-1})$ 是良定义且非空的。

至此完成逆向归纳。

将该结果应用于 $\ell = 1$，我们得到：

$$\mathcal{R}_{1,M}(\varnothing) \neq \varnothing.$$

$\mathcal{R}_{1,M}(\varnothing)$ 的每个元素都是一个不确定的 $L$-层级解。因此，解集非空，且 UMLDM 是良定义的。

□

表 3。 11介绍了模糊多层级决策的相关不确定性模型变体 g.

T表3.11：模糊多层决策的相关不确定性模型变体 g.

| $k$ | **相关模糊多层决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多层决策 |
| 2 | 直觉模糊多层决策 |
| 3 | 犹豫模糊多层决策 |
| 3 | 球形模糊多层决策 |
| 3 | 中智多层决策 |
| $n$ | 熵生成多层决策 |

## 3.12 模糊多智能体决策

多智能体决策对可能具有冲突效用的多个自主智能体进行协调或分析，并在交互规则 [410–412] 下寻求联合策略、均衡或协商协议。模糊多智能体决策用模糊集表示智能体的效用、信念或策略，从而能够在偏好模糊且感知不确定的情况下进行谈判与协调。

**定义 3.12.1**（模糊数域）。令 $\mathbb{F}$ 表示（真实）模糊数的类别，即定义在 $\mathbb{R}$ 上、具有隶属函数 $\mu_{\tilde{a}}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 的模糊集$\tilde{a}$，并且满足：**(i)** 正规；**(ii)** 凸；**(iii)** 上半连续；**(iv)** 具有紧支撑。对于 $\alpha \in (0,1]$, 其 $\alpha$-截集是（非空的）紧区间

$$\tilde{a}^{\alpha} := \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\} = [\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)].$$

˜通过 $\alpha$-截集定义（扎德扩张）和 $\tilde{a} \oplus b \in \mathbb{F}$ 以及正标量乘积 $\gamma \odot \tilde{a} \in \mathbb{F}$ （$\gamma \geq 0$）：

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b})^{\alpha} = \tilde{a}^{\alpha} + \tilde{b}^{\alpha} = [\underline{a}(\alpha) + \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) + \overline{b}(\alpha)], \qquad (\gamma \odot \tilde{a})^{\alpha} = \gamma\, \tilde{a}^{\alpha}.$$

**定义 3.12.2**（模糊多智能体决策）。设

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{(alternatives)},$$
$$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad \text{(criteria)},$$
$$\mathcal{D} = \{1, \ldots, K\} \quad \text{(agents)}.$$

一个模糊多智能体决策（FMADM）实例是一个元组

$$\mathsf{FMADM} = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, (\tilde{X}^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, (w^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, \lambda, \mathrm{Agg}, \mathrm{Score}, \Pi\Big),$$

其中：

1. 对于每个智能体 $k \in \mathcal{D}$,

$$\tilde{X}^{(k)} = (\tilde{x}_{ij}^{(k)})_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

是模糊评价矩阵，其中 $\tilde{x}_{ij}^{(k)} \in \mathbb{F}$ 描述了智能体 $k$ 对 $C_j$ 上的 $A_i$ 的（感知）性能。

2. 对于每个智能体 $k \in \mathcal{D}$,

$$w^{(k)} = (w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}) \in [0,1]^n, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j^{(k)} = 1,$$

是智能体 $k$ 的准则权重向量（清晰权重；将 $w_j^{(k)}$ 替换为 $\tilde{w}_j^{(k)} \in \mathbb{F}$，即可类似地处理模糊权重）。

3. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_K) \in [0,1]^K$ 是智能体重要性向量，其中 $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$。

4. 聚合： $\mathbb{F}^K \to \mathbb{F}$ 是智能体聚合算子。一个典型选择是加权模糊均值

$$\mathrm{Agg}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_K) := \bigoplus_{k=1}^{K} \lambda_k \odot \tilde{a}_k.$$

5. 得分： $\mathbb{F} \to \mathbb{R}$ 是一个评分（去模糊化）泛函。一个标准示例是质心得分

$$\mathrm{Score}(\tilde{a}) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x\, \mu_{\tilde{a}}(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_{\tilde{a}}(x)\, dx}, \quad \text{assuming } \int_{\mathbb{R}} \mu_{\tilde{a}}(x)\, dx > 0.$$

6. $\Pi$ 是一个决策规则，可生成 $\mathcal{A}$ 上的排序 $\preceq$ 或选择集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$。

集体模糊评价矩阵按元素定义为

$$\tilde{x}_{ij} := \mathrm{Agg}\big(\tilde{x}_{ij}^{(1)}, \ldots, \tilde{x}_{ij}^{(K)}\big) \in \mathbb{F}, \qquad \tilde{X} := (\tilde{x}_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

$A_i$ 的一种常见诱导（集体）模糊效用为

$$\tilde{u}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} w_j \odot \tilde{x}_{ij} \in \mathbb{F}, \qquad \text{with some } w \in [0,1]^n,\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \ \ (\text{e.g., } w = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, w^{(k)}).$$

则 $\Pi$可以返回基于评分的预序

$$A_i \preceq A_\ell \iff \mathrm{Score}(\tilde{u}_i) \le \mathrm{Score}(\tilde{u}_\ell),$$

或极大（选择）集 $\mathcal{S} = \{A_i \in \mathcal{A} : \text{得分}(\tilde{u}_i) = \max_r \text{得分}(\tilde{u}_r)\}$。

**定理3.12.3** （规范FMADM聚合的良定义性）。 假设 $\mathbb{F}$ 如定义*3.12.1*所述。设$\mathrm{Agg}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_K) = \bigoplus_{k=1}^{K} \lambda_k \odot \tilde{a}_k$，其中 $\lambda_k \ge 0$与 $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$。则对每一个$(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_K) \in \mathbb{F}^K$，有$\mathrm{Agg}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_K) \in \mathbb{F}$。因此，定义*3.12.2*中的集体矩阵 $\tilde{X}$在 $\mathbb{F}^{m \times n}$中是良定义的。

证明。 固定 $\alpha \in (0,1]$。每个 $\tilde{a}_k^{\alpha}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的紧区间。根据 $\alpha$-截集的定义 s,

$$\Big(\bigoplus_{k=1}^{K} \lambda_k \odot \tilde{a}_k\Big)^{\alpha} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\, \tilde{a}_k^{\alpha},$$

由于闵可夫斯基和与非负数乘保持紧区间的性质，它是一个（非空）紧区间。模糊数的标准闭包性质表明，所得模糊集仍然是正规、凸、上半连续且具有紧支撑；因此它属于 $\mathbb{F}$。逐元素应用此性质˜可得 $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$。

□

现在，我们将模糊多智能体决策从模糊数值评价扩展到具有度域 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$ 的一般不确定模型 $M$，并据此定义不确定多智能体决策 (UMADM)。

**Definition 3.12.4 (类型为 $M$ 的不确定多智能体决策 (UMADM)). Le** t

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{(alternatives)}, \qquad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad \text{(criteria)}, \qquad \mathcal{D} = \{1, \ldots, K\} \quad \text{(agents)},$$

其中 $m,\ n,\ K \in \mathbb{N}$和 $m,\ n,\ K \geq 1$。

固定一个度域为.....的不确定模型 $M$

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

对于某个整数 $k \geq 1$。

一个类型为 $M$ 的不确定多智能体决策实例是一个元组

$$\mathsf{UMADM}_M = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, (X_M^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, (w_M^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, \lambda, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Util}_M, \mathrm{Score}_M\Big),$$

其中:

1. 对于每个智能体 $k \in \mathcal{D}$,
$$X_M^{(k)} = (\mu_{ij}^{(k)})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$$
是智能体 $k$ 的不确定评价矩阵，其中 $\mu_{ij}^{(k)} \in \mathbf{Dom}(M)$ 表示智能体 $k$针对准则 $C_j$ 给出的备选方案 $A_i$ 的不确定评估。

2. 对于每个智能体 $k \in \mathcal{D}$,
$$w_M^{(k)} = (\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_n^{(k)}) \in \mathrm{Dom}(M)^n$$
是智能体 $k$ 的不确定准则重要性剖面 。（如有需要，也可以使用清晰权重$w^{(k)} \in [0,1]^n$，但这里采用一般的不确定形式。）

3.
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_K) \in [0,1]^K, \qquad \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1,$$
是 智能体重要性向量。

4.
$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^K \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$
是一个依赖于模型的智能体聚合算子，用于将同一元素的 $K$ 个智能体特定评估合并为集体不确定评估。

5.
$$\mathrm{Util}_M : \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$
是一种模型依赖型效用聚合算子，用于将某一备选方案的集体准则评估与集体准则权重概况相结合。

6.
$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
是一个排序泛函（得分/标量化映射）。

该群体不确定评价矩阵按元素定义如下

$$\mu_{ij} := \mathrm{Agg}_M\big(\mu_{ij}^{(1)}, \ldots, \mu_{ij}^{(K)}\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad X_M := (\mu_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}.$$

类似地，群体不确定准则权重剖面按分量定义为 y

$$\omega_j := \mathrm{Agg}_M\big(\omega_j^{(1)}, \ldots, \omega_j^{(K)}\big) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad w_M := (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

对每个备选方案 $A_i \in \mathcal{A}$，定义其集体不确定效用为

$$u_i := \mathrm{Util}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

$A_i$ 的诱导得分为

$$s_i := \mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R}.$$

集体偏好关系 $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$上定义为

$$A_i \succeq_M A_j \quad \Longleftrightarrow \quad s_i \geq s_j.$$

UMADM$_M$ 的解是任意一个备选方案

$$A^\star \in \arg\max_{A_i\in\mathcal{A}} s_i.$$

相应的最优备选方案集合记为

$$\mathcal{A}_M^\star := \arg\max_{A_i\in\mathcal{A}} s_i.$$

**注3.12.5** （解释）。定义 3.12.4 将多智能体决策过程分为三个层次:

1. 智能体层面的不确定评估 $X_M^{(k)}$ 和权重剖面 $w_M^{(k)}$ ；
2. 通过 Agg$_M$ 进行智能体间聚合;
3. a通过 Util$_M$ 构建备选方案层面的效用，然后通过 Score$_M$ 进行排序 .

因此，UMADM 是一个与模型无关的框架：一旦指定 $M$、Agg$_M$、Util$_M$ 和 Score$_M$，即可得到一种具体的不确定性感知多智能体决策方法。

**注释 3.12.6** （特化）。 若 $M$是定义域为 $= [0, 1]$的模糊模型，则定义 3.12.4 可简化为模糊多智能体决策框架。若 $M$ 选为直觉模糊、中智、犹豫模糊、球形模糊、多元生成或其他不确定性模型，则通过相应地替换 Dom($M$)、Agg$_M$、Util$_M$和 Score$_M$ ，即可得到相应的不确定性感知多智能体决策场景。

**定理 3.12.7**（类型为 $M$ 的 UMADM 的良定义性）。 设

$$\mathsf{UMADM}_M = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, (X_M^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, (w_M^{(k)})_{k\in\mathcal{D}}, \lambda, \mathrm{Agg}_M, \mathrm{Util}_M, \mathrm{Score}_M\Big)$$

是定义 *3.12.4* 中的一个不确定多属性决策实例。假设：

*(A1)* $\mathcal{A}$、 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是有限非空集；

*(A2)* 对每个 $k \in \mathcal{D}$,

$$X_M^{(k)} = (\mu_{ij}^{(k)}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n} \qquad and \qquad w_M^{(k)} = (\omega_1^{(k)}, \ldots, \omega_n^{(k)}) \in \mathrm{Dom}(M)^n;$$

*(A3)*

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^K \to \mathrm{Dom}(M)$$

是一个全映射；

*(A4)*

$$\mathrm{Util}_M : \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \to \mathrm{Dom}(M)$$

是一个全映射；

*(A5)*

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$$

是一个全映射。

那么，以下对象均为良定义：

*(i)* 群体不确定评价矩阵

$$X_M = (\mu_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n};$$

*(ii)* 群体不确定准则权重剖面

$$w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n;$$

*(iii)* 群体不确定效用

$$u_i \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

*(iv)* 实值评分

$$s_i = \mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R} \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

*(v)* $\mathcal{A}$上的偏好关系 $\succeq_M$，定义如下

$$A_i \succeq_M A_j \iff s_i \geq s_j,$$

这是一个全预序；

（*vi*）最优集

$$\mathcal{A}_M^\star = \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} s_i,$$

它是非空的。

因此，类型为 $M$ 的不确定多智能体决策是良定义的。

证明。根据 (A1)，集合 s $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$、$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 和 $\mathcal{D} = \{1, \ldots, K\}$ 是有限且非空的 y.

**步骤 1：集体矩阵 $X_M$ 的良定义性。**

固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$。根据（A2），对于每个 $k \in \mathcal{D}$,

$$\mu_{ij}^{(k)} \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此，$K$ 元组

$$(\mu_{ij}^{(1)}, \ldots, \mu_{ij}^{(K)}) \in \mathrm{Dom}(M)^K.$$

由于根据（A3），$\mathrm{Agg}_M$ 是完全的，因此该值

$$\mu_{ij} := \mathrm{Agg}_M(\mu_{ij}^{(1)}, \ldots, \mu_{ij}^{(K)})$$

已定义且属于 Dom($M$)。由于这对每一对（$i$，$j$）都成立，矩阵

$$X_M = (\mu_{ij})_{m \times n}$$

属于 Dom($M$)$^{m \times n}$。因此，（i）得证。

**步骤 2：集体权重概况 $w_M$ 的良定义性。**

固定 $j \in \{1, \ldots, n\}$。根据 (A2)，对于每个 $k \in \mathcal{D}$,

$$\omega_j^{(k)} \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此

$$(\omega_j^{(1)}, \ldots, \omega_j^{(K)}) \in \mathrm{Dom}(M)^K.$$

再次根据 Agg$_M$ 的全定义性,

$$\omega_j := \mathrm{Agg}_M(\omega_j^{(1)}, \ldots, \omega_j^{(K)})$$

有定义且属于 Dom($M$)。因此

$$w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

所以 (ii) 成立。

**步骤 3：群体不确定效用的良定义性 $u_i$。**

固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$。根据步骤 1,

$$(\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}) \in \mathrm{Dom}(M)^n,$$

并且由第2步,

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

因此

$$\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) \in \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n.$$

由(A4)中$\mathrm{Util}_M$ in的全定义性，该值

$$u_i = \mathrm{Util}_M\big((\mu_{i1}, \ldots, \mu_{in}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big)$$

有定义且属于Dom($M$)。因此(iii)成立。

**第4步：得分 $s_i$的良定义性。**

根据步骤 3，对于每个 $i$， $u_i \in$ Dom($M$)。由 (A5) 可知，$\mathrm{Score}_M$ 具有完全性,

$$s_i := \mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R}$$

对每个 $i = 1, \ldots, m$ 都是良定义的。因此 (iv) 成立。

**步骤 5：诱导偏好关系是一个全预序。**

定义

$$A_i \succeq_M A_j \iff s_i \geq s_j.$$

由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且具有完全性的，因此 $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$ 上的诱导关系也具有自反性、传递性和完全性。因此， $\succeq_M$ 是 $\mathcal{A}$ 上的全预序。这证明了 (v)。

**步骤 6：最优备选项的存在性。**

得分集

$$\{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$$

由于 $\mathcal{A}$ 有限且非空，因此该集合有限且非空。 $\mathbb{R}$ 的每个有限非空子集都有最大值。因此，至少存在一个索引 $i^\star \in \{1, \ldots, m\}$ 使得

$$s_{i^\star} = \max_{1 \leq i \leq m} s_i.$$

因此

$$\mathcal{A}_M^\star = \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} s_i \neq \varnothing.$$

所以（vi）成立。

因此，所有所需对象均为良定义，且最优集非空。因此，类型为 $M$ 的 UMADM 是良定义的。

□

表3.12　介绍了模糊多智能体决策的相关不确定性模型变体。

T表3.12：模糊多智能体决策的相关不确定性模型变体 g.

| $k$ | **相关模糊多智能体决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多智能体决策 |
| 2 | 直觉模糊多智能体决策 |
| 3 | 犹豫模糊多智能体决策 |
| 3 | 球形模糊多智能体决策 |
| 3 | 中智多智能体决策 |
| $n$ | 多因子生成多智能体决策 |

## 3.13 模糊多情景决策

多情景决策在多个情景下评估备选方案，使用概率或权重聚合情景结果，并选择稳健或期望最优备选方案 [413, 414]。模糊多情景决策将情景表现或情景权重视为模糊的，并采用模糊期望、最坏情况或后悔值准则进行聚合，以稳健地选择备选方案。

**定义 3.13.1**（模糊多情景决策模型）。 一个模糊多情景决策问题是一个元组

$$\mathfrak{D} = \big(X,\ K,\ (K_j)_{j=1}^{m},\ (Y_{jt})_{j,t},\ \Sigma,\ \mu,\ w,\ \pi,\ \mathrm{Agg}_C,\ \mathrm{Agg}_S,\ \preceq\big),$$

其中:

1. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是有限备选方案集。
2. $K = \{K_1, \dots, K_m\}$ 是有限集（顶层）准则。
3. 对于每个 $j \in \{1, \dots, m\}$， $K_j = \{k_{j1}, \dots, k_{jT_j}\}$ 是定义准则 $K_j$ 的有限指标集（子准则集）。
4. 对于每个指标 $k_{jt}$， $Y_{jt}$ 是其值域（数值型、序数、语言型等）。
5. $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ 是有限情景集（不同的需求概况／评价策略）。
6. $\mu$ 是依赖情景的隶属映射族（在定义 3.13.2 中给出精确定义）。
7. $w = (w_1, \dots, w_m) \in [0,1]^m$ 是一个准则权重向量，满足 $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$。
8. $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s) \in [0,1]^s$ 是一个情景权重向量，满足 $\sum_{r=1}^{s} \pi_r = 1$。
9. $\mathrm{Agg}_C$ 是一个准则聚合算子（在单个情景内）。
10. $\mathrm{Agg}_S$ 是一个情景聚合算子（跨情景）。
11. $\preceq$ 是所选分数空间上的一个全预序（例如，在 $[0,1]$ 或某一类模糊数上），用于排序。

**定义 3.13.2**（情景依赖的隶属结构）。 固定 $x \in X$、 $j \in \{1, \dots, m\}$ 和一个情景$\sigma \in \Sigma$。令 $x$ 的指示观测为

$$y_{jt}(x) \in Y_{jt} \qquad (t = 1, \dots, T_j).$$

一种情景依赖的指示隶属关系 是一种映射

$$\mu_{jt}^{\sigma} : Y_{jt} \longrightarrow [0,1], \qquad y \longmapsto \mu_{jt}^{\sigma}(y),$$

以及所诱导的　依赖场景的准则满足度 由指标聚合器 $\Phi_j^\sigma$ a定义　　s

$$\mu_j^\sigma(x) := \Phi_j^\sigma\Big(\mu_{j1}^\sigma(y_{j1}(x)), \dots, \mu_{jT_j}^\sigma(y_{jT_j}(x))\Big) \in [0,1].$$

典型选择包括:

$$\Phi_j^\sigma = \min \quad \text{(conjunctive / “all indicators must be good”)},$$

$$\Phi_j^\sigma = \max \quad \text{(disjunctive / “any indicator may suffice”)},$$

或 $[0,1]$, 上的加权平均，或t-范数/t-余范数复合。场景语义（例如，强制的，期望的，非必需的）由如何选取 $\mu_{jt}^\sigma$ 与 $\Phi_j^\sigma$ 来编码。

**定义 3.13.3**（场景内总分）。 假设分数空间为 $[0,1]$。对每个情景$\sigma \in \Sigma$，定义场景内总分

$$U^\sigma(x) := \mathrm{Agg}_C\big((\mu_j^\sigma(x))_{j=1}^m;\ w\big) \in [0,1].$$

一个典范的（补偿性）选择是凸组合

$$U^\sigma(x) = \sum_{j=1}^m w_j\, \mu_j^\sigma(x).$$

一种典型的非补偿性替代方案是加权最小值

$$U^\sigma(x) = \min_{1\le j\le m}\Big(\mu_j^\sigma(x)\Big)^{\lambda_j}, \qquad \lambda_j > 0,$$

或任何与预期决策逻辑相容的单调聚合 $[0,1]^m$ .

**定义 3.13.4**（跨场景聚合与排序）。 定义$x \in X$ 的多场景总分 为

$$U(x) := \mathrm{Agg}_S\big((U^{\sigma_r}(x))_{r=1}^s;\ \pi\big).$$

一种标准选择仍然是凸组合

$$U(x) = \sum_{r=1}^s \pi_r\, U^{\sigma_r}(x) \in [0,1].$$

诱导排序为

$$x_a \preceq x_b \quad\Longleftrightarrow\quad U(x_a) \le U(x_b),$$

最优备选方案集合为

$$\arg\max_{x\in X} U(x) = \{x \in X :\ U(x) \ge U(z)\ \forall z \in X\}.$$

**命题 3.13.5**（良定义性）。假设:

1. 对任意 $\sigma \in \Sigma$、 $j$和 $t$， $\mu_{jt}^\sigma$： $Y_{jt} \to [0,1]$ 是良定义的。
2. 对任意 $\sigma$ 和 $j$， $\Phi_j^\sigma$： $[0,1]^{T_j} \to [0,1]$ 是良定义的。
3. $w \in [0,1]^m$ 和 $\sum_{j=1}^m w_j = 1$，以及 $\pi \in [0,1]^s$ 和 $\sum_{r=1}^s \pi_r = 1$。
4. $\mathrm{Agg}C$： $[0,1]^m \times \Delta_m \to [0,1]$ 与$\mathrm{Agg}S$： $[0,1]^s \times \Delta_s \to [0,1]$ （其中 $\Delta_m$、 $\Delta_s$ 为权重单纯形）是返回$[0,1]$中值的聚合算子。

于是，对每一个 $x \in X$，量 $\mu_j^\sigma(x)$、 $U^\sigma(x)$与 $U(x)$ 均为良定义且属于 $[0,1]$。因此，定义*3.13.4*给出一个良定义排序。

证明。固定 $x \in X$。根据 (1)，每个 $\mu_{jt}^\sigma(y_{jt}(x)) \in [0,1]$ 均有定义。根据 (2)，对于每个 $j$， $\mu_j^\sigma(x) = \Phi_j^\sigma(\cdots) \in [0,1]$ 均有定义。因此 $(\mu_j^\sigma(x))_{j=1}^m \in [0,1]^m$，由 (4) 可得 $U^\sigma(x) = \mathsf{Agg}_C((\mu_j^\sigma(x))_j;\, w) \in [0,1]$。同理，$(U^{\sigma_r}(x))_{r=1}^s \in [0,1]^s$，再次根据 (4)， $U(x) = \mathsf{Agg}_S((U^{\sigma_r}(x))_r;\, \pi) \in [0,1]$。因此 $U\colon\ X \to [0,1]$ 是良定义的，而由 $\leq$ 在 $[0,1]$ 上诱导的预序在 $X$上定义了一个良定义排序。 □

现在，我们将不确定多情景决策(UMScDM)定义为：将模糊多情景决策从模糊评估扩展到一般的不确定模型 $M$，其度域为 $\mathsf{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$。

**定义 3.13.6** （ $M$类型的**不确定多情景决策(UMScDM)**）。 设

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{(alternatives)}, \qquad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\} \quad \text{(criteria)}, \qquad \Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\} \quad \text{(scenarios)},$$

其中 $m,\ n,\ s \in \mathbb{N}$和 $m,\ n,\ s \geq 1$。

固定一个不确定模型 $M$，其度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

对于某个整数 $k \geq 1$。

一个 $M$ 类型的不确定多情景决策实例是一个元组

$$\mathsf{UMScDM}_M = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \Sigma, (X_M^{(r)})_{r=1}^s, w_M, \pi, \mathrm{Agg}_{C,M}, \mathrm{Agg}_{S,M}, \mathrm{Score}_M\Big),$$

其中:

1. 对于每种情景 $r \in \{1, \ldots, s\}$,

   $$X_M^{(r)} = (\mu_{ij}^{(r)})_{m \times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$$

   是情景依赖不确定评价矩阵，其中 $\mu_{ij}^{(r)} \in \mathsf{Dom}(M)$ 表示情景 $\sigma_r$ 下备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$ 下的不确定评估。

2. $$w_M = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n$$

   是不确定准则重要性剖面。

3. $$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s) \in [0,1]^s, \qquad \sum_{r=1}^{s} \pi_r = 1,$$

   是情景权重向量。

4.
$$\mathrm{Agg}_{C,M} : \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$
是一个情景内准则聚合算子。对于每个情景 $r$ 和每个备选方案 $A_i$，它都会生成一个不确定情景特定效用

$$u_i^{(r)} := \mathrm{Agg}_{C,M}\big((\mu_{i1}^{(r)}, \ldots, \mu_{in}^{(r)}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

5.
$$\mathrm{Agg}_{S,M} : \mathrm{Dom}(M)^s \times [0,1]^s \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$
是一个跨情景聚合算子。它将备选方案在各个情景下的效用组合为其总体不确定效用

$$u_i := \mathrm{Agg}_{S,M}\big((u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(s)}), \pi\big) \in \mathrm{Dom}(M).$$

6.
$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
是一个排序泛函（得分／标量化映射）， $A_i$ 对应的实值评分为
$$s_i := \mathrm{Score}_M(u_i) \in \mathbb{R}.$$

在 $\mathcal{A}$上的诱导偏好关系 $\succeq_M$ 定义为

$$A_i \succeq_M A_j \quad \Longleftrightarrow \quad s_i \geq s_j.$$

UMScDM$_M$ 的解是任意一个备选方案

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} s_i,$$

所有最优备选方案的集合记为

$$\mathcal{A}_M^\star := \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} s_i.$$

**注记 3.13.7 (解释).** 定义 3.13.6 将决策过程分为两个聚合层:

1. 情景内聚合，其中分准则不确定评估被合并为特定情景的不确定效用 $u_i^{(r)}$ ；

2. 跨情景聚合，其中族（$u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(s)}$）被合并为总体不确定效用 $u_i$。

因此，不确定多情景决策对如下决策进行建模：每个备选方案的性能取决于若干可能情景，而所有评价仍编码在一般不确定模型 $M$ 中。

**注 3.13.8** （特化）。 若 $M$是定义域（$M$）为 $= [0,1]$的模糊模型，则定义 3.13.6 可简化为模糊多情景决策框架。若选择 $M$ 作为直觉模糊、中智、犹豫模糊、球形模糊、多元生成或其他不确定性模型，则相应地替换定义域（$M$）、Agg$_{C,\ M}$、Agg$_{S,\ M}$和得分$_M$ ，即可得到相应的不确定性感知多情景决策框架。

**定理 3.13.9**（类型为 $M$ 的不确定多情景决策的良定义性）。 设

$$\mathsf{UMScDM}_M = \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \Sigma, (X_M^{(r)})_{r=1}^{s}, w_M, \pi, \mathrm{Agg}_{C,M}, \mathrm{Agg}_{S,M}, \mathrm{Score}_M\Big)$$

是定义 *3.13.6* 中的一个 *UMScDM* 实例。假设：

*(A1)* $\mathcal{A}$、 $\mathcal{C}$ 和 $\Sigma$ 是有限非空集合；

*(A2)* 对于每个 $r \in \{1, \dots, s\}$,

$$X_M^{(r)} = (\mu_{ij}^{(r)}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n};$$

*(A3)*

$$w_M = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n;$$

*(A4)*

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s) \in [0,1]^s \qquad with \qquad \sum_{r=1}^{s} \pi_r = 1;$$

*(A5)*

$$\mathrm{Agg}_{C,M} : \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n \to \mathrm{Dom}(M)$$

是一个全映射；

*(A6)*

$$\mathrm{Agg}_{S,M} : \mathrm{Dom}(M)^s \times [0,1]^s \to \mathrm{Dom}(M)$$

是一个全映射；

*(A7)*

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$$

是一个全映射。

那么，以下对象均为良定义：

*(i)* 对于每个备选方案 $A_i$ 和每种情景 $\sigma_r$，情景特定不确定效用

$$u_i^{(r)} = \mathrm{Agg}_{C,M}\big((\mu_{i1}^{(r)}, \dots, \mu_{in}^{(r)}), (\omega_1, \dots, \omega_n)\big)$$

属于 $\mathrm{Dom}(M)$；

*(ii)* 对于每个备选方案 $A_i$，总体不确定效用

$$u_i = \mathrm{Agg}_{S,M}\big((u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(s)}), \pi\big)$$

属于 $\mathrm{Dom}(M)$；

（*iii*）对于每个备选方案 $A_i$，实值评分

$$s_i = \mathrm{Score}_M(u_i)$$

是良定义的；

（*iv*）定义在 $\mathcal{A}$上的诱导偏好关系 $\succeq_M$，定义为

$$A_i \succeq_M A_j \iff s_i \geq s_j,$$

是全预序；

*(v)* 最优集

$$\mathcal{A}_M^\star = \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} s_i$$

非空。

因此，类型为 $M$ 的不确定多情景决策是良定义的。

证明。 根据（A1），集合

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}, \qquad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}, \qquad \Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$$

是有限且非空的。

**步骤 1：情景特定不确定效用 $u_i^{(r)}$ 的良定义性。**

固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $r \in \{1, \ldots, s\}$。根据 (A2)，情景依赖矩阵 $X_M^{(r)}$ i 的第 $i$ 行 s

$$(\mu_{i1}^{(r)}, \ldots, \mu_{in}^{(r)}) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

根据 (A3),

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathrm{Dom}(M)^n.$$

因此

$$\big((\mu_{i1}^{(r)}, \ldots, \mu_{in}^{(r)}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big) \in \mathrm{Dom}(M)^n \times \mathrm{Dom}(M)^n.$$

由于根据 (A5)，$\mathrm{Agg}_{C,\ M}$ 是完全的，值

$$u_i^{(r)} = \mathrm{Agg}_{C,M}\big((\mu_{i1}^{(r)}, \ldots, \mu_{in}^{(r)}), (\omega_1, \ldots, \omega_n)\big)$$

有定义，且属于 Dom($M$)。这证明了 (i)。

**步骤 2：总体不确定效用 $u_i$ 的良定义性。**

固定 $i \in \{1, \ldots, m\}$。根据步骤 1，对于每个 $r = 1,$ ....., $s,$

$$u_i^{(r)} \in \mathrm{Dom}(M).$$

因此

$$(u_i^{(1)}, \ldots, u_i^{(s)}) \in \mathrm{Dom}(M)^s.$$

由（A4），

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_s) \in [0, 1]^s.$$

因此

$$\big((u_i^{(1)},\dots,u_i^{(s)}),\pi\big)\in \mathrm{Dom}(M)^s\times[0,1]^s.$$

由于根据 (A6)，$\mathrm{Agg}_{S,M}$ 具有完全性，因此该值

$$u_i=\mathrm{Agg}_{S,M}\big((u_i^{(1)},\dots,u_i^{(s)}),\pi\big)$$

有定义且属于 Dom($M$)。因此 (ii) 成立。

**步骤 3：得分 $s_i$ 的良定义性。**

根据步骤 2，对于每个 $i$，$u_i\in$ Dom($M$)。由于根据 (A7)，$\mathrm{Score}_M$ 具有完全性，

$$s_i:=\mathrm{Score}_M(u_i)\in\mathbb{R}$$

对于每个 $i=1,..,m$，其均为良定义。因此 (iii) 成立。

**第4步：诱导偏好关系是全预序。**

定义

$$A_i\succeq_M A_j\iff s_i\geq s_j.$$

由于 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反、传递且完全的，诱导关系 $\succeq_M$ 在 $\mathcal{A}$ 上也具有自反性、传递性和完全性。因此，$\succeq_M$ 是 $\mathcal{A}$上的全预序。这证明了 (iv)。

**第5步：最优备选项的存在性。**

得分集合

$$\{s_1,\dots,s_m\}\subset\mathbb{R}$$

是有限且非空的，因为 $\mathcal{A}$ 是有限且非空的。$\mathbb{R}$ 的每个有限非空子集都有最大值。因此，至少存在一个指标 $i^\star\in\{1,\dots,m\}$ 使得

$$s_{i^\star}=\max_{1\leq i\leq m}s_i.$$

因此

$$\mathcal{A}_M^\star=\arg\max_{A_i\in\mathcal{A}}s_i\neq\varnothing.$$

因此 (v) 成立。

因此，所有所需对象均被无歧义地定义，且解集非空。故类型为 $M$ 的不确定多情景决策是良定义的。

□

表3.13　给出了模糊多情景决策的相关不确定性模型变体　g.

表 3.13：模糊多情景决策的相关不确定性模型变体 .

| $k$ | **相关模糊多情景决策变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊多情景决策 |
| 2 | 直觉模糊多情景决策 |
| 3 | 犹豫模糊多情景决策 |
| 3 | 球形模糊多情景决策 |
| 3 | 中智多情景决策 |
| $n$ | 多源生成多情景决策 |

# 第4章

# 权重获取决策方法

权重 elicitation 通过调查、两两比较、权衡查询、熵/优化或学习来估计决策中的准则重要性，从而生成用于聚合和排序的归一化权重。作为参照，表4.1呈现了一个比较表。

表4.1：模糊权重提取方法的简要比较。

| 方法 | Type | 典型投入 | 主要思想 / 优势 | 主要局限性 / note |
|---|---|---|---|---|
| 模糊层次分析法 | 主观 | 模糊两两比-较矩阵 | 经典层次加权，并进行一致性检验；直观透明，且广泛应用于实践。 | 需要进行大量两两比较，当准则数量变得很大。 |
| 模糊 LOP-COW | 客观 | 模糊决策方trix | 数据驱动赋权基于准则变化能力或区分能力。 | 不会直接纳入决策者的主观偏好参考文献。 |
| F-SIWEC | 主观 | 专家重要性评估 | 一种简单的专家导向型赋权程序与相对较低的偏好诱导负担的赋权程序。 | 精确的数学表述应明确说明，因为不同变体可能因研究而异。 |
| 模糊判断矩阵 | 基础工具 | 模糊成对判断ments | 用于表示多种赋权方法的基本结构和模糊偏好信息。赋权方法。 | 并非独立的权重-方法，除非耦-合特定推导规则。 |
| 模糊网络分析法 | 主观 | 模糊成对比较，基于网work | 将层次分析法扩展至具有相互依赖的准则和反馈关系的设定。 | 模型构建与计算通常更为复杂比.....更复杂在层次分析法中。 |

续见下页。

*表4.1*（续）。

| 方法 | Type | 典型输入 | 主要思想 / 优势 | 主要局限 / note |
|---|---|---|---|---|
| 模糊 OPA | 主观 | 序数排名或优先级顺序 | 所需信息较少比完整的两两比较比较，且在偏好诱导方面效率高。 | 使用较少的详细偏好信息，而非基于基数比较的方法。 |
| 模糊 PI-PRECIA | 主观 | 序贯相对重要性判断-结果 | 逐步赋权方法，负担较低相比完整的两两比较法。 | 最终权重可能取决于排序顺序准则。 |
| 模糊 SWARA | 主观 | 有序准则和比较重要性度系数 | 便于专家使用且易于实施的逐步赋权方法。 | 对准则排序或可靠性敏感专家判断。 |
| 模糊 CILOS | 客观 | 模糊决策 matrix | 确定权重通过准则影响损失概念，无需直接偏好投入。 | 尽管无偏好，它可能不太直观，对于实践者而言。 |
| 模糊 IDOCRIW | 综合的客观 | 模糊决策方-trix | 集成多个客观-tive加权思路，往往结合CILOS型与熵型信息-tion。 | 在计算上更加复杂，超过单-单一客观赋权方案。 |
| 模糊 BWM | 主观 | 最优对其他及其他对最差比比较 | 所需的比较次数较少，比层次分析法少，并提供一个基于一致性的框架。 | 需要明确且可靠的识别最佳与最差准则。 |
| 模糊 CRITIC | 客观 | 模糊决策方-trix | 同时使用对比强-sity与准则间冲突来推导权重。 | 不能反映直接的专家偏好，除非与主观-性方法相结合。 |
| 模糊 MEREC | 客观 | 模糊决策方法-trix | 评估移除每个准则对.....的影响整体绩效结构。 | 可能对所选的归一化程序和绩效聚合敏感。模型。 |
| 模糊 FUCOM | 主观 | 排序准则和比较先验-ties | 实现加权，比较次数很少同时强调一致性。 | 需要预先获得可靠的标准排序，然后进行权重推导。 |

## 4.1 模糊层次分析法（模糊层次分析法）

层次分析法将决策构建为层级结构，通过两两比较推导权重，并综合全局优先级，以对 [415–417] 进行排序。模糊层次分析法用模糊数替代精确比较，计算模糊权重和去模糊化优先级，以便在不确定性下对备选方案进行排序 [418–420]。

**定义4.1.1**（三角模糊数和模糊层次分析法）。（参见 [421, 422]）**（0）正三角模糊数、算术运算和去模糊化**。一个正三角模糊数（三角模糊数）是 $\tilde{x} = (l,\ m,\ u) \in \mathbb{R}^3_{>0}$ 其中 $0 < l \le m \le u$。对于正三角模糊数 $\tilde{x} = (l_x,\ m_x,\ u_x)$ 和 $\tilde{y} = (l_y,\ m_y,\ u_y)$，定义分量式

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y,\ m_x + m_y,\ u_x + u_y), \quad \tilde{x} \otimes \tilde{y} := (l_x l_y,\ m_x m_y,\ u_x u_y),$$

$$\tilde{x}^{\alpha} := (l_x^{\alpha},\ m_x^{\alpha},\ u_x^{\alpha})\ (\alpha > 0), \quad \tilde{x}^{-1} := (1/u_x,\ 1/m_x,\ 1/l_x), \quad \tilde{x} \oslash \tilde{y} := \tilde{x} \otimes \tilde{y}^{-1}.$$

标准的清晰代表（重心法/面积中心法）为

$$\mathrm{COA}(\tilde{x}) := \frac{l + m + u}{3}.$$

**（1）决策层次结构**。一个决策层次结构 是一个有根树 $\mathcal{H} = (V,\ 根,\ \mathsf{ch})$，其中每个内部节点$p \in V$都有子节点 $\mathsf{ch}(p) = \{e_1, \ldots, e_n\}$，表示准则/子准则，而叶节点表示备选方案。

**（2）节点处的模糊两两比较**。固定一个模糊互反两两比较矩阵，其内部节点为 $p$，子节点为 $\mathsf{ch}(p) = \{e_1, \ldots, e_n\}$。在 $p$ 处的模糊互反两两比较矩阵 为

$$\tilde{A}^{(p)} = (\tilde{a}_{ij}^{(p)}) \in (\mathsf{TFN}_{>0})^{n \times n}, \qquad \tilde{a}_{ii}^{(p)} = (1,1,1), \quad \tilde{a}_{ji}^{(p)} = \big(\tilde{a}_{ij}^{(p)}\big)^{-1}.$$

**(3) 局部权　重采用模糊几何平均数**。对于每一行 $i$，定义模糊几何平均数 n

$$\tilde{g}_i^{(p)} := \left( \bigotimes_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{(p)} \right)^{1/n},$$

以及归一化局部模糊权重

$$\tilde{w}_i^{(p)} := \tilde{g}_i^{(p)} \oslash \left( \bigoplus_{k=1}^{n} \tilde{g}_k^{(p)} \right).$$

可选地，通过 $w_i^{(p)} := \mathsf{COA}(\tilde{w}_i^{(p)})$ 获得清晰局部权重，并将其归一化（$w_1^{(p)}, \ldots, w_n^{(p)}$），使其总和为 1。

**(4) 层次综合（全局优先级）**。设置 $W(\text{根节点}) = 1$ 并沿树向下传递优先级：

$$W(e_i) := W(p)\, w_i^{(p)} \qquad \text{for each edge } p \to e_i.$$

对于叶节点（备选方案） $a$，$W(a)$ 是其最终优先级，备选方案按 $W(a)$ 递减排序。（全模糊末端变体以乘积替代乘积，并且仅在最后进行去模糊化。）

**注4.1.2**（化简为经典层次分析法）。若对所有 $i$，$j$，$p$，均有 $\tilde{a}_{ij}^{(p)} = (a_{ij}^{(p)},\ a_{ij}^{(p)},\ a_{ij}^{(p)})$，则上述方法可化简为相应的清晰层次分析法几何平均赋权与综合。

通过使用不确定集扩展层次分析法，我们得到如下表述。

**定义 4.1.3**（类型为 $M$ 的不确定层次分析法 (UAHP)）。设 $\mathcal{H}$ =(V、根节点、ch) 为一棵有限有根树（决策层次结构），其中每个内部节点 $p \in V$ 都有一个有限非空的子节点集

$$\mathrm{ch}(p) = \{e_1, \ldots, e_{n_p}\},$$

表示准则／子准则，叶节点 Alt $\subseteq V$ 表示备选方案。固定一个不确定性模型$M$，其度域为 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^d$( $d \geq 1$)。

**（1）局部不确定成对比较**。对于每个内部节点 $p \in V$，令 $n_p := |\mathsf{ch}(p)|$，并假设存在一个局部不确定成对比较矩阵

$$A^{(p)} = \big(a_{ij}^{(p)}\big) \in \mathrm{Dom}(M)^{n_p \times n_p},$$

满足 Dom($M$) 中的基本层次分析法归一化约束:

$$a_{ii}^{(p)} = \mathbf{1}_M \quad (i = 1, \ldots, n_p), \qquad a_{ji}^{(p)} = \mathrm{Inv}_M\big(a_{ij}^{(p)}\big) \quad (i \neq j),$$

其中， $\mathbf{1}_M$ ∈Dom($M$) 是模型的“单位比较”元素，$\mathrm{Inv}_M$: Dom($M$) →Dom($M$) 是 Dom($M$) 中的一个（完全）互反／求逆算子。

**（2）局部优先级提取**。固定一个（完全的）优先级提取算子

$$\mathrm{Pri}_M : \mathrm{Dom}(M)^{n \times n} \longrightarrow \Delta_n, \qquad \Delta_n := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Big\},$$

给定局部矩阵 $A^{(p)}$后返回一个清晰局部优先向量

$$w^{(p)} = \mathrm{Pri}_M\big(A^{(p)}\big) \in \Delta_{n_p}.$$

（因此， $w_i^{(p)}$ 是子节点 $e_i$ ∈ch($p$)相对于节点 $p$的重要性。）

**（3）层次结构　　综合（全局优先级）**。递归定义全局优先级 $W$： $V \to [0,1]$　　y

$$W(\mathrm{root}) = 1, \qquad W(e_i) = W(p)\, w_i^{(p)} \quad \text{for each edge } p \to e_i.$$

对于每个备选方案　$a \in$ 备选项集合，其最终优先级为 $W$($a$)，备选方案按 $W$($a$)降序排序。

**(4) 不确定层次分析法产出作为备选方案上的不确定集**。令 备选项集合 $= \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为叶节点集合。定义一个隶属映射

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathsf{Alt} \to [0,1], \qquad \mu_{\mathcal{U}}(A_i) := W(A_i).$$

则称 $\mathcal{U}$:=(备选项集合 $\mu_{\mathcal{U}}$) 为由层级结构和不确定比较所诱导的不确定层次分析法优先级不确定集 。

**定理 4.1.4**（不确定层次分析法的不确定集结构与良定义性）. 考虑定义 *4.1.3* 中类型 $M$ 的不确定层次分析法实例。假设:

(A1) 该 $h$　层级 $\mathcal{H}$ 是一棵有限根树，且每个内部节点都有有限多个子节点　　.

(A2) $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0\,1]^d$是非空的， $\mathbf{1}_M \in \mathrm{Dom}(M)$是固定的，且$\mathrm{Inv}_M{:}\mathrm{Dom}(M) \to \mathrm{Dom}(M)$是完全的 .

(A3) 对于每个内部节点 $p$，矩阵 $A^{(p)} \in \mathrm{Dom}(M)^{n_p \times n_p}$ 均已完全指定，且满足 $a_{ii}^{(p)} = \mathbf{1}_M$和 $a_{ji}^{(p)} = \mathrm{Inv}_M(a_{ij}^{(p)})$。

(A4) $\mathrm{Pri}_M$具有完全性，且对于每个 $A \in \mathrm{Dom}(M)^{n \times n}$，满足 $\mathrm{Pri}_M(A) \in \Delta_n$。

那么：

(i) 全局优先级映射 $W\colon V \to [0,1]$ 是良定义的，且满足 $\sum_{a\in\text{备选项集合}} W(a) = 1$.

(ii) 诱导映射 $\mu_{\mathcal{U}}$：备选项集合 $\to [0,1]$ 是良定义的；因此 $\mathcal{U} = (\text{备选项集合}\ \mu_{\mathcal{U}})$ 是备选项集合上的一个良定义不确定集。

(iii) 不确定层次分析法解集

$$\arg\max_{A\in\mathsf{Alt}}\ \mu_{\mathcal{U}}(A)$$

是非空的；因此至少存在一个最优备选方案。

证明。 **(i) 局部权重的良定义性**。 固定一个具有 $n_p$ 个子节点的内部节点 $p$。由(A3)， $A^{(p)}$ 是$\mathrm{Dom}(M)^{n_p\times n_p}$的一个良定义元素。由(A4)，应用全映射$\mathrm{Pri}_M$ 可得到一个唯一确定的向量

$$w^{(p)} = \mathrm{Pri}_M(A^{(p)}) \in \Delta_{n_p}.$$

特别地， $w_i^{(p)} \geq 0$ 与 $\sum_{i=1}^{n_p} w_i^{(p)} = 1$。

**(ii) 良定义性： $W$ 以及叶节点上的归一化**。 定义 $W(\text{根节点}) = 1$。对于任意节点 $v \neq$ 根节点，在有根树中存在唯一有向路径根节点 $= v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_\ell = v$。递归定义$W(v_t) = W(v_{t-1})\ w^{(v_{t-1})_{\iota_t}}$，其中 $v_t$ 是 $v_{t-1}$的第 $\iota_t$个子节点。由此得到唯一实数值 $W(v) \geq 0$，因此$W$ 在所有节点上是良定义的。

要证明 $\sum_{a\in\text{备选项集合}} W(a) = 1$，可对树进行归纳。对于每个内部节点 $p$，分配给其子节点的权重总和为

$$\sum_{e\in\mathrm{ch}(p)} W(e) = \sum_{i=1}^{n_p} W(p)\, w_i^{(p)} = W(p) \sum_{i=1}^{n_p} w_i^{(p)} = W(p).$$

因此，将质量 $W(p)$ 从 $p$传播到其子节点时，质量保持不变。从 $W$（根节点） $= 1$开始，将这一守恒性质逐层应用至叶节点，可知叶节点权重之和等于 1。

**(iii) 不确定集输出与最优解的存在性**。根据 (ii)，对于每个备选方案 $a \in \mathsf{Alt}$， $W(a) \in [0,1]$ 都有良定义，因此 $\mu_{\mathcal{U}}(a) = W(a)$ 定义了一个良定义的映射 $\mu_{\mathcal{U}}\colon \mathsf{Alt} \to [0,1]$，进而$\mathcal{U} = (\mathsf{Alt}\ \mu_{\mathcal{U}})$ 是一个不确定集。

由于备选项集合有限且非空，实值函数 $\mu_{\mathcal{U}}$ 在备选项集合上取得最大值，因此最大值点集 $_{A\in\mathsf{Alt}}\,\mu_{\mathcal{U}}(A) \neq \varnothing$。 □

表4.2：相关 d 种 AHP 不确定性模型变体（按度域维度 $k$ 分类） .

| $k$ | **相关层次分析法变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊层次分析法 [423, 424] |
| 2 | 直觉模糊层次分析法 [425, 426] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊层次分析法 [427, 428] |
| 3 | 犹豫模糊层次分析法 [429, 430] |
| 3 | 球形模糊层次分析法 [431, 432] |
| 3 | 中智层次分析法 [433, 434] |
| $n$ | 多元生成层次分析法 [435, 436] |

按度域维度 $k$分类的层次分析法相关不确定性模型变体，列于表 4.2。

除不确定层次分析法外，粗糙层次分析法 [437,438], 软层次分析法 [439,440], 修正层次分析法 [441,442], TOPSIS-AHP [443,444], 区间层次分析法 [445,446], 灰色层次分析法 [447,448],层次分析法-收益、机会、成本与风险 [449, 450], 连环销层次分析法 [451], 层次分析排序法 [452, 453], 随机层次分析法 [454, 455], AHP- K [456, 457], 不完全层次分析法 [458, 459], 蒙特卡洛层次分析法（MCAHP） [460, 461],熵权层次分析法 [462, 463], 和语言层次分析法 [464, 465] 等相关概念也得到了研究。

## 4.2 模糊LOPCOW（用于综合权重的模糊线性优化）

LOPCOW 利用离散度对数百分比变化，根据归一化数据计算客观准则权重，突出信息性准则 [466,467]。模糊LOPCOW 对模糊评分进行去模糊化，归一化性能，计算均方根与方差对数系数，并在不确定性下得出客观权重[468, 469]。

**定义 4.2.1** （模糊LOPCOW 客观赋权（基于得分的良定义形式））。[468, 469] 设$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。设 FN(ℝ) 为选定的模糊数类别（例如，三角模糊数）。假设有一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij}) \in \mathsf{FN}(\mathbb{R})^{m\times n}.$$

设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-$ 为由效益型（↑）和成本型（↓）准则组成的划分。

**(0) 得分/去模糊化映射**。 固定一个映射（排序/去模糊化）

$$S : \mathsf{FN}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

并定义诱导的清晰矩阵 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为

$$x_{ij} := S(\tilde{x}_{ij}).$$

（对于三角模糊数 $\tilde{x} = (l,\ m,\ u)$，常用的选择是 $S(\tilde{x}) = (l + m + u)/3$。）

**（1）线性归一化**。对于每个准则 $j$，令

$$x_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} x_{ij}, \qquad x_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

归一化矩阵 $R=(r_{ij})\in[0,1]^{m\times n}$ 定义如下

$$r_{ij}:=\begin{cases}\dfrac{x_j^{\max}-x_{ij}}{x_j^{\max}-x_j^{\min}}, & C_j\in\mathcal{C}^- \quad \text{(cost)},\\[2mm] \dfrac{x_{ij}-x_j^{\min}}{x_j^{\max}-x_j^{\min}}, & C_j\in\mathcal{C}^+ \quad \text{(benefit)},\end{cases}$$

约定：若 $x_j^{\max}=x_j^{\min}$，则对所有 $i$，$r_{ij}:=0$（零变异准则）。

**(2) 各准则的离散度统计量。** 对每个 $j$，定义均方根（RMS）和标准差：

$$\mathrm{RMS}_j:=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_{ij}^2},\qquad \bar r_j:=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}r_{ij},\qquad \sigma_j:=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_{ij}-\bar r_j)^2}.$$

（因此 $\sigma_j\ge 0$，且 $\mathrm{RMS}_j\ge 0$。）

**(3) 对数百分比变化系数。** 准则 $j$ 的 LOPCOW百分比值定义为

$$PV_j:=\begin{cases}\left|\ln\left(\dfrac{\mathrm{RMS}_j}{\sigma_j}\right)\right|\cdot 100, & \sigma_j>0,\\[2mm] 0, & \sigma_j=0,\end{cases}$$

其中 ln 表示自然对数。

**（4）客观准则权重。** 若 $\sum_{\ell=1}^{n}PV_\ell>0$，定义

$$w_j:=\frac{PV_j}{\sum_{\ell=1}^{n}PV_\ell}\in[0,1],\qquad j=1,\dots,n,$$

使得 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。 若 $\sum_{\ell=1}^{n}PV_\ell=0$（归一化后所有准则的变异均为零），则令 $w_j:=1/n$ .

所得向量 $w=(w_1,\dots,w_n)$ 称为与 $\widetilde{\ }$（$X,S,\mathcal{C}^+,\mathcal{C}^-$）相关联的模糊*LOPCOW*（客观）权重向量。

不确定LOPCOW（ULOPCOW）的定义如下。

**定义 4.2.2**（不确定 LOPCOW（ULOPCOW）客观加权）。 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集。固定一个不确定性模型 $M$，其度域为 $\mathrm{Dom}(M)\subseteq[0,1]^d$（$d\ge 1$）。假设一个不确定决策矩阵

$$\widetilde{X}=(\tilde x_{ij})\in\mathrm{Dom}(M)^{m\times n},$$

其中 $\tilde x_{ij}$ 是 $A_i$ 在 $C_j$下的不确定评价。设 $\mathcal{C}=\mathcal{C}^+\cup\mathcal{C}^-$ 为效益型准则与成本型准则的划分。

**(0) 得分（清晰代表值）映射。**固定一个全映射

$$S_M:\mathrm{Dom}(M)\to\mathbb{R},$$

并定义诱导的清晰矩阵 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为

$$x_{ij} := S_M(\tilde{x}_{ij}).$$

（例如：对于三角模糊数 $\tilde{x} = (l,\ m,\ u)$，可取 $S_M(\tilde{x}) = (l + m + u)/3$；对于区间值 $\tilde{x} = [\ell, u]$，可取 $S_M(\tilde{x}) = (\ell + u)/2$。）

**（1）线性归一化（效益/成本型）**。对于每个准则 $j$，设

$$x_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} x_{ij}, \qquad x_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

将归一化矩阵 $R = (r_{ij}) \in [0,1]^{m\times n}$ 定义为

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^- \quad \text{(cost)},\\[2ex] \dfrac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^+ \quad \text{(benefit)}, \end{cases}$$

约定：若 $x_j^{\max} = x_j^{\min}$，则对所有 $i$，$r_{ij} := 0$。

**（2）各准则的离散度统计量**。对于每个 $j$，定义

$$\mathrm{RMS}_j := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}^2}, \qquad \bar{r}_j := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}, \qquad \sigma_j := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_{ij} - \bar{r}_j)^2}.$$

**(3) LOPCOW百分比值**。定义

$$PV_j := \begin{cases} \left|\ln\!\left(\dfrac{\mathrm{RMS}_j}{\sigma_j}\right)\right| \cdot 100, & \sigma_j > 0,\\[2ex] 0, & \sigma_j = 0, \end{cases} \qquad j = 1,\dots,n,$$

其中，ln 表示自然对数。

**(4) 客观权重向量**。若 $\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell > 0$，定义

$$w_j := \frac{PV_j}{\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell} \in [0,1], \qquad j = 1,\dots,n,$$

使得 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。若 $\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell = 0$，则设 $w_j := 1/n$。

向量 $w = (w_1,\dots,w_n)$ 称为与 不确定*LOPCOW (ULOPCOW)* 客观权重向量，与 ~相关联 $(X, S_M, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-)$。

~**定理4.2.3**（ULOPCOW的不确定集输出与良定义性）。设 $X \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$ 按定义*4.2.2*给出，其中 $m,\ n \ge 1$。假设：

(A1) 评分映射 $S_M$：Dom（$M$） $\to \mathbb{R}$ 是完全的（对Dom（$M$）的每个元素均有定义） .

(A2) 效益/成本划分 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-$ 是固定的。

于是:

(i) 在 (4.2.2) 中定义的归一化矩阵 $R = (r_{ij})$ 是良定义的，并且对所有 $i$、$j$，均满足 $0 \le r_{ij} \le 1$ 。

**(ii)** 对 于每个 $j$，均方根$_j$ 和 $\sigma_j$ 都是良定义的实数，并且满足 均方根$_j \ge 0$、 $\sigma_j \ge 0$。

(iii) 每个 $PV_j$都是良定义的，并且满足 $PV_j \ge 0$。

**(iv)** 该 权重向量 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 是良定义的，并且属于概率单纯形

$$\Delta_n = \Big\{ w \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} : \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Big\}.$$

(v) 该映射

$$\mu_w : \mathcal{C} \to [0,1], \qquad \mu_w(C_j) := w_j,$$

定义了一个不确定集 $\mathcal{W} := (\mathcal{C}, \mu_w)$（即ULOPCOW权重不确定集）。

证明。**(i) 归一化是良定义的且有界**。 固定 $j \in \{1, \ldots, n\}$。由(A1)，每个$x_{ij}$ $=S_M(\tilde{x}_{ij})$都是实数，因此 $x_j^{\max}, x_j^{\min} \in \mathbb{R}$ 是良定义的。若 $x_j^{\max} = x_j^{\min}$，我们按约定令 $r_{ij} = 0$，从而$r_{ij}$ 有定义。

假设 $x_j^{\max} > x_j^{\min}$。对于效益型准则,

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}},$$

并且由于 $x_j^{\min} \le x_{ij} \le x_j^{\max}$，可得 $0 \le r_{ij} \le 1$。对于成本型准则,

$$r_{ij} = \frac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}},$$

并且根据相同的界限再次有 $0 \le r_{ij} \le 1$ 。

**(ii) 离散度统计量存在且非负**。 对于每个固定的 $j$，值 $\{r_{ij}\}_{i=1}^m$ 均为实数，且根据 (i) 有界。因此，RMS$_j$ 是实数平方的平均值的平方根，且良定义，RMS$_j \ge 0$。同样， $\bar{r}_j$ 是有限个值的平均值，而 $\sigma_j$ 是偏差平方平均值的平方根，因此良定义，且 $\sigma_j \ge 0$。

**（iii）对数百分比值是良定义的**。 如果 $\sigma_j = 0$，则将 $PV_j$ 定义为 0。如果 $\sigma_j > 0$，则 RMS$_j \ge 0$。此外，如果 $\sigma_j > 0$ ，则列 $\{r_{ij}\}$ 不是常数列，因此至少有一个 $r_{ij} \ne 0$ ，从而 RMS$_j > 0$。因此 RMS$_j/\sigma_j > 0$ ，且 ln(RMS$_j/\sigma_j$) 有定义。取绝对值并乘以 100，得到 $PV_j \ge 0$。

**（iv）权重构成一个单纯形向量**。 如果 $\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell > 0$，则每个 $w_j$ 都是非负比率，因此 $w_j \geq 0$，并且

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{PV_j}{\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell} = \frac{\sum_{j=1}^{n} PV_j}{\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell} = 1.$$

如果 $\sum_{\ell=1}^{n} PV_\ell = 0$，那么 $w_j = 1/n \geq 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

**(v) 准则上的不确定集结构**。 根据 (iv)，对于所有 $j$， $w_j \in [0,1]$ 。因此， $\mu_w(C_j) := w_j$ 定义了一个良定义的隶属映射 $\mu_w \colon \mathcal{C} \to [0,1]$，所以 $\mathcal{W} = (\mathcal{C},\ \mu_w)$ 是一个不确定集。 □

不确定性感知模型下 LOPCOW 的相关概念列于表 4.3。

表 4.3：不确定性感知模型下 LOPCOW 的相关概念。

| $k$ | **相关的 LOPCOW 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊LOPCOW |
| 2 | $q$阶模糊LOPCOW [470, 471] |
| 3 | 犹豫模糊LOPCOW [472] |
| 3 | 球形模糊LOPCOW [473] |
| 3 | 中智LOPCOW [474] |

## 4.3 模糊 SIWEC（准则模糊简易权重计算）

SIWEC 根据专家直接评分计算准则权重，对得分进行归一化，跨专家聚合，并输出权重向量 [475, 476]。模糊 SIWEC 将语言评价映射为模糊数，进行归一化，按离散度缩放并加以聚合，随后对模糊权重去模糊化或排序 [47, 477]。

**定义 4.3.1**（模糊 SIWEC（F-SIWEC）：模糊标准简单权重计算法）。 [477, 478] 令$E = \{1, \ldots, e\}$ 为专家决策者（EDM）的集合， $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则集合。

**步骤 1（语言评价 $\to$ 三角模糊数）**。 每位 EDM $i \in E$ 使用语言术语对每个准则$C_j$ 进行评价，并将其映射为三角模糊数（TFN）

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u) \in \mathbb{R}_+^3, \qquad x_{ij}^l \leq x_{ij}^m \leq x_{ij}^u.$$

将这些评价汇总为模糊决策矩阵

$$\tilde{X} = [\tilde{x}_{ij}]_{e \times n}.$$

**步骤 2（归一化）**。对于每个准则 $j$，令

$$M_j := \max_{i \in E} x_{ij}^u,$$

并定义归一化三角模糊数

$$\tilde{n}_{ij} = \Big( \frac{x_{ij}^l}{M_j},\ \frac{x_{ij}^m}{M_j},\ \frac{x_{ij}^u}{M_j} \Big).$$

**步骤 3（标准差缩放）**。通过以下方式对每个归一化三角模糊数进行去模糊化

$$n_{ij}^{\mathrm{def}} := \frac{n_{ij}^{l} + 4n_{ij}^{m} + n_{ij}^{u}}{6},$$

并计算各准则 $j$ 跨专家决策者的（样本）标准差:

$$\mathrm{stdev}_j := \sqrt{\frac{1}{e-1}\sum_{i=1}^{e}\left(n_{ij}^{\mathrm{def}} - \bar{n}_j^{\mathrm{def}}\right)^2}, \qquad \bar{n}_j^{\mathrm{def}} := \frac{1}{e}\sum_{i=1}^{e} n_{ij}^{\mathrm{def}}.$$

用该离散度缩放归一化三角模糊数:

$$\tilde{v}_{ij} := \mathrm{stdev}_j \odot \tilde{n}_{ij} = (\mathrm{stdev}_j n_{ij}^{l}, \mathrm{stdev}_j n_{ij}^{m}, \mathrm{stdev}_j n_{ij}^{u}).$$

**第4步（跨专家决策者聚合）**。针对每个准则 $j$，对跨专家决策者的缩放后三角模糊数进行聚合:

$$\tilde{s}_j := \bigoplus_{i=1}^{e} \tilde{v}_{ij} = (s_j^{l}, s_j^{m}, s_j^{u}),$$

其中 $\oplus$ 表示三角模糊数的分量加法。

**第5步（模糊权重向量）**。将准则 $C_j$ 的模糊权重定义为三角模糊数

$$\tilde{w}_j := (w_j^{l}, w_j^{m}, w_j^{u}) = \left(\frac{s_j^{l}}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{u}}, \frac{s_j^{m}}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{m}}, \frac{s_j^{u}}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{l}}\right), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

**步骤 6（可选的去模糊化和归一化）**。可通过以下方式获得清晰权重

$$w_j^{\mathrm{def}} := \frac{w_j^{l} + 4w_j^{m} + w_j^{u}}{6} \in \mathbb{R}_+.$$

如有需要，重新归一化:

$$w_j^{*} := \frac{w_j^{\mathrm{def}}}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{\mathrm{def}}}.$$

产出 $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$（或 $w^*$）称为模糊 *SIWEC* 准则权重向量。

模糊 SIWEC 通过使用不确定集进行扩展。

**定义 4.3.2**（不确定集和不确定数）。设 $U$ 为一个非空论域。$U$ 上的一个不确定集是一个映射

$$\mu : U \to [0, 1],$$

其中，$\mu(u)$被解释为 $u$的不确定隶属度。

不确定数是 $\mathbb{R}$ 上的一个不确定集 $\tilde{x}$，其 $\alpha$-截集

$$[\tilde{x}]_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{x}}(t) \geq \alpha\} \qquad (\alpha \in (0,1])$$

是非空紧区间。记

$$[\tilde{x}]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+] \quad (\alpha \in (0,1]).$$

定义 为一个在下述运算下封闭的不确定数选定类别 UN，并且 d

$$\mathsf{UN}_{>0} := \{\tilde{x} \in \mathsf{UN} : \operatorname{supp}(\tilde{x}) \subseteq (0,\infty)\}, \quad \operatorname{supp}(\tilde{x}) := \overline{\{t : \mu_{\tilde{x}}(t) > 0\}}.$$

定义上支撑端点（一个正标量代表）为

$$\operatorname{up}(\tilde{x}) := \sup \operatorname{supp}(\tilde{x}) \in (0,\infty) \qquad (\tilde{x} \in \mathsf{UN}_{>0}).$$

**定义 4.3.3**（（回顾）通过 $\alpha$-截集进行不确定数算术运算）。设 $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathsf{UN}$ 和 $c \geq 0$。定义：

$$[\tilde{x} \oplus \tilde{y}]_\alpha := [x_\alpha^- + y_\alpha^-,\ x_\alpha^+ + y_\alpha^+], \qquad [c \odot \tilde{x}]_\alpha := [c\,x_\alpha^-,\ c\,x_\alpha^+],$$

对所有 $\alpha \in (0,1]$。（这些是区间 $\alpha$-截集的闵可夫斯基和与数乘。）

令 $\mathsf{Score} : \mathsf{UN} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个固定的得分（清晰代表）映射，满足：

(S1)（正性）对所有 $\tilde{x} \in \mathsf{UN}$，$\mathsf{Score}(\tilde{x}) \geq 0$；且对所有 $\tilde{x} \in \mathsf{UN}_{>0}$，$\mathsf{Score}(\tilde{x}) > 0$；

(S2)（正齐次性）对所有 $c \geq 0$，$\mathsf{Score}(c \odot \tilde{x}) = c\,\mathsf{Score}(\tilde{x})$；

(S3)（可加性）$\mathsf{Score}(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) = \mathsf{Score}(\tilde{x}) + \mathsf{Score}(\tilde{y})$。

（例如，当其为有限时，可以取 $\mathsf{Score}(\tilde{x}) = \int_0^1 \frac{x_\alpha^- + x_\alpha^+}{2}\, d\alpha$。）

在此，我们定义 不确定SIWEC（U-SIWEC），即通过使用不确定集扩展SIWEC而得到的方法 .

**定义 4.3.4**（不确定 SIWEC（U-SIWEC）：准则的不确定简单综合权重估计）。设 $E = \{1, \ldots, e\}$ 为有限专家集，$C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。不确定SIWEC实例 是一个不确定评价矩阵

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij}) \in (\mathsf{UN}_{>0})^{e \times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} \text{ is expert } i\text{'s uncertain rating of criterion } C_j.$$

按照定义 4.3.2–4.3.3 的方法处理并计算得分。*U-SIWEC* 过程 按如下方式构造准则权重。

**步骤 1（按上支撑归一化）**。对于每个准则 $j$，设定

$$M_j := \max_{i \in E} \operatorname{up}(\tilde{x}_{ij}) \in (0,\infty),$$

并定义归一化不确定评级

$$\tilde{n}_{ij} := \frac{1}{M_j} \odot \tilde{x}_{ij} \in \mathsf{UN}_{>0}.$$

**第2步（清晰代表值）**。定义

$$n_{ij}^{\mathrm{cr}} := \mathrm{Score}(\tilde{n}_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}.$$

**第3步（专家间离散度）**。对于每个准则 $j$，计算均值和（总体）标准差

$$\bar{n}_j^{\mathrm{cr}} := \frac{1}{e}\sum_{i=1}^{e} n_{ij}^{\mathrm{cr}}, \qquad \sigma_j := \sqrt{\frac{1}{e}\sum_{i=1}^{e}\left(n_{ij}^{\mathrm{cr}} - \bar{n}_j^{\mathrm{cr}}\right)^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

**第4步（不确定域中的离散度缩放）**。将每个归一化的不确定评分乘以$\sigma_j$:

$$\tilde{v}_{ij} := \sigma_j \odot \tilde{n}_{ij} \in \mathsf{UN}.$$

**第5步（专家聚合）**。按以下方式聚合每个准则的专家信息

$$\tilde{s}_j := \bigoplus_{i=1}^{e} \tilde{v}_{ij} \in \mathsf{UN}.$$

**第6步（客观权重）**。设

$$S_j := \mathrm{Score}(\tilde{s}_j) \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad T := \sum_{k=1}^{n} S_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

定义清晰权重向量 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 为

$$w_j := \begin{cases} \dfrac{S_j}{T}, & T > 0, \\ \dfrac{1}{n}, & T = 0. \end{cases}$$

可选地，定义不确定权重向量 $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$ 为

$$\tilde{w}_j := \begin{cases} \dfrac{1}{T} \odot \tilde{s}_j, & T > 0, \\ \dfrac{1}{n} \odot \tilde{u}, & T = 0, \end{cases}$$

其中，$\tilde{u} \in \mathsf{UN}_{>0}$ 是任意固定的参考不确定数（例如，$\tilde{u}$ 且 $\mathrm{Score}(\tilde{u}) = 1$）。

**定理4.3.5**（U-SIWEC的不确定集结构与良定义性）。假设 $X \in (\mathrm{UN}_{>0})^{e\times n}$，且 UN 在 $\oplus$ 和 $c\odot(\cdot)$ 下对 $c \geq 0$ 封闭。假设 Score 满足定义*4.3.3*中的（S1）–（S3）。则定义*4.3.4*中的 *U-SIWEC* 过程是良定义的，并且满足：

(i) 每个 $\tilde{n}_{ij}$、$\tilde{v}_{ij}$ 和 $\tilde{s}_j$ 都是不确定数；因此，每个都是 $\mathbb{R}$ 上的不确定集 .

(ii) 清晰输出 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 是有效的准则权重向量：

$$w_j \geq 0 \text{ for all } j, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

(iii) 如果 $T > 0$，则不确定输出满足 $\tilde{w}_j \in$UN 且

$$\mathrm{Score}(\tilde{w}_j) = w_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Score}(\tilde{w}_j) = 1.$$

证明。**(i) 闭包/不确定集结构**。固定 $j$。由于每个 $\tilde{x}_{ij} \in \mathrm{UN}_{>0}$，上端点 $\mathrm{up}(\tilde{x}_{ij})$ 有限且为正，因此存在 $M_j = \max_i \mathrm{up}(\tilde{x}_{ij}) \in (0, \infty)$。由 UN 对数乘封闭可知，$\tilde{n}_{ij} = (1/M_j) \odot \tilde{x}_{ij} \in \mathrm{UN}_{>0}$ 有定义。接下来，$\sigma_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 由实数 $n_{ij}^{\mathrm{cr}} = \mathrm{Score}(\tilde{n}_{ij})$ 的有限和定义。根据封闭性，$\tilde{v}_{ij} = \sigma_j \odot \tilde{n}_{ij} \in \mathrm{UN}$，继而由对 $\oplus$ 封闭可得 $\tilde{s}_j = \bigoplus_{i=1}^{e} \tilde{v}_{ij} \in \mathrm{UN}$。这些对象中的每一个按定义都是不确定数，因此也是 $\mathbb{R}$ 上的不确定集。

**（ii）得分和权重的非负性**。根据（S1），对于所有 $j$，$S_j = \mathrm{Score}(\tilde{s}_j) \geq 0$，因此在两个分支（$T > 0$ 和 $T = 0$）中，$T = \sum_k S_k \geq 0$和 $w_j \geq 0$。

**（iii）归一化** $\sum_j w_j = 1$。若 $T > 0$，则

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{T} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{T}{T} = 1.$$

若 $T = 0$，则 $w_j = 1/n$ 得到 $\sum_j w_j = 1$。

**（iv）当 $T > 0$时，不确定权重的一致性**。假设 $T > 0$，并定义 $\tilde{w}_j = (1/T) \odot \tilde{s}_j$。则根据闭包，$\tilde{w}_j \in$ UN。利用（S2），

$$\mathrm{Score}(\tilde{w}_j) = \mathrm{Score}\left(\frac{1}{T} \odot \tilde{s}_j\right) = \frac{1}{T}\,\mathrm{Score}(\tilde{s}_j) = \frac{S_j}{T} = w_j.$$

求和得到 $\sum_j \mathrm{Score}(\tilde{w}_j) = \sum_j w_j = 1$。

□

作为参照， 不确定性感知模型下SIWEC的相关概念列于表4.4。

表4.4：不确定性感知模型下 SIWEC 的相关概念。

| $k$ | **SIWEC 相关概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 SIWEC |
| 2 | 直觉模糊 SIWEC |
| 3 | 中智 SIWEC |
| $n$ | 可裂 SIWEC |

## 4.4 模糊判断矩阵

判断矩阵是一个两两比较矩阵，其中每个元素$a_{ij}$ 表示备选方案 $X_i$ 相对于备选方案 $X_j$的相对偏好（或重要性）；通常假定其元素互为倒数，并用于推导优先权重以及评估一致性 [479–481]。模糊判断矩阵是一个两两比较矩阵，其元素位于 $[0,1]$ 中并量化分级偏好度，从而 $a_{ij} > 0.5$ 偏好 $X_i$ 胜过$X_j$， $a_{ij} = 0.5$ 表示无差异，并且（在互补情形下） $a_{ij} + a_{ji} = 1$ [482, 483]。

**定义 4.4.1**（模糊判断矩阵）。 [482,483] 设 $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ 为一个有限备选方案集。一个矩阵

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

称为模糊判断矩阵，如果

$$0 \le a_{ij} \le 1 \qquad (\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}),$$

其中$a_{ij}$ 解释为两两比较中 $X_i$ 相对于 $X_j$ 的（分级）偏好度。

一种常见的语义约定是：

$$a_{ij} > 0.5 \Rightarrow X_i \text{ is preferred to } X_j,$$

$$a_{ij} = 0.5 \Rightarrow X_i \text{ and } X_j \text{ are indifferent},$$

$$a_{ij} < 0.5 \Rightarrow X_j \text{ is preferred to } X_i.$$

**定义 4.4.2**（模糊互补判断矩阵）。 若模糊判断矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足以下条件，则称其为模糊互补

$$a_{ij} + a_{ji} = 1 \qquad (\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}),$$

（这意味着对所有 $i$均有 $a_{ii} = 0.5$ ）。

**定义 4.4.3**（不确定偏好数与算术运算）。 设

$$\mathsf{UN}_{[0,1]} := \{\tilde{x} \in \mathsf{UN} : \operatorname{supp}(\tilde{x}) \subseteq [0,1]\}.$$

对于 $\tilde{x}$， $\tilde{y} \in \mathsf{UN}_{[0,1]}$，通过 $\alpha$-截集定义（截断）和与补集：

$$[\tilde{x} \oplus_T \tilde{y}]_\alpha := \big[\min\{1, x_\alpha^- + y_\alpha^-\},\ \min\{1, x_\alpha^+ + y_\alpha^+\}\big],$$

$$[\,\mathbf{1} \ominus \tilde{x}\,]_\alpha := \big[\,1 - x_\alpha^+,\ 1 - x_\alpha^-\,\big], \qquad \alpha \in (0,1],$$

其中 $[\tilde{x}]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ 且 $[\tilde{y}]_\alpha = [y_\alpha^-, y_\alpha^+]$。 （因此， $\mathbf{1} \ominus \tilde{x}$ 是 $\tilde{x}$ 在 $[0,1]$上的逐点补集。）

接下来, 我们使用不确定集扩展判断矩阵。定义如下 .

**定义 4.4.4**（不确定判断矩阵）。设 $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ 为有限备选方案集。$X$ 上的不确定判断矩阵（UJM）是一个矩阵

$$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \left(\mathsf{UN}_{[0,1]}\right)^{n\times n},$$

其中，$\tilde{a}_{ij}$ 表示 $X_i$ 相对于 $X_j$的不确定（分级）偏好。由得分诱导出如下语义约定：

$$\mathrm{Score}(\tilde{a}_{ij}) > 0.5 \Rightarrow X_i \text{ is preferred to } X_j, \qquad \mathrm{Score}(\tilde{a}_{ij}) = 0.5 \Rightarrow X_i \text{ and } X_j \text{ are indifferent.}$$

该 UJM 称为：

（i）不确定互补，如果

$$\tilde{a}_{ij} = \mathbf{1} \ominus \tilde{a}_{ji} \qquad (\forall\, i, j),$$

（这意味着 $\tilde{a}_{ii}$ 是围绕 0.5 的“不确定无差异”）；

（ii）不确定互反，如果所有元素均属于 $(0, 1]$，且存在一个固定的不确定数乘积 $\otimes$，使得

$$\tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{a}_{ji} = \tilde{\mathbf{1}} \qquad (\forall\, i, j),$$

˜对于集中在 1 处的单位不确定数 1。

˜**定理 4.4.5**（不确定集结构与良定义性）。设 $A = (\tilde{a}_{ij}) \in (\mathsf{UN}_{[0,1]})^{n\times n}$。则：

(i) 每个元素 $\tilde{a}_{ij}$ 都是定义在 $[0, 1]$ 上的不确定集，因此也是定义在 $\mathbb{R}$上的不确定集。因此，不确定判断矩阵是一个其元素具有不确定集结构的矩阵。

(ii) 定义 *4.4.3* 中的补算子 $\mathbf{1} \ominus(\cdot)$ 在 $\mathsf{UN}_{[0,1]}$ 上良定义，并将 $\mathsf{UN}_{[0,1]}$ 映射到其自身。

˜(iii) 若 $A$ 是不确定互补的，则补关系是一致的：对于所有 $i$、$j$ 以及所有 $\alpha \in (0, 1]$，

$$[\tilde{a}_{ij}]_\alpha = [1 - a^+_{ji,\alpha},\, 1 - a^-_{ji,\alpha}] \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Score}(\tilde{a}_{ij}) = 1 - \mathrm{Score}(\tilde{a}_{ji})$$

*wh*每当 得分 相对于补集是仿射的，即 得分$(\mathbf{1} \ominus \tilde{x}) = 1 -$得分$(\tilde{x})$。

证明。**(i)** 根据定义，$\tilde{a}_{ij} \in \mathsf{UN}_{[0,1]} \subseteq \mathsf{UN}$ 是一个不确定数，因此是 $\mathbb{R}$ 上的不确定集。因此，每个矩阵元素都具有不确定集结构。

**(ii)** 固定 $\tilde{x} \in \mathsf{UN}_{[0,1]}$，并令 $[\tilde{x}]_\alpha = [x^-_\alpha, x^+_\alpha]$ 满足 $0 \le x^-_\alpha \le x^+_\alpha \le 1$。那么，定义 4.4.3 给出

$$[\mathbf{1} \ominus \tilde{x}\,]_\alpha = [1 - x^+_\alpha,\ 1 - x^-_\alpha].$$

由于 $0 \le 1 - x^+_\alpha \le 1 - x^-_\alpha \le 1$，每个 $\alpha$-截集都是 $[0, 1]$ 中的非空紧区间。因此 $\mathbf{1} \ominus \tilde{x} \in \mathsf{UN}_{[0,1]}$，所以该运算是良定义的，且是闭的。

˜**(iii)** 若 $A$ 是不确定互补的，则根据定义有 $\tilde{a}_{ij} = \mathbf{1} \ominus \tilde{a}_{ji}$。假设 $\mathrm{Score}(\mathbf{1} \ominus \tilde{x}) = 1 - \mathrm{Score}(\tilde{x})$，我们得到

$$\mathrm{Score}(\tilde{a}_{ij}) = \mathrm{Score}(\mathbf{1} \ominus \tilde{a}_{ji}) = 1 - \mathrm{Score}(\tilde{a}_{ji}),$$

这恰好体现了得分层级上互补语义的一致性。 □

相关结论　不确定性感知模型下判断矩阵的概念列于表4.5。

表4.5：不确定性感知模型下判断矩阵的相关概念 .

| $k$ | **相关判断矩阵概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊判断矩阵 |
| 2 | 直觉模糊判断矩阵 [426, 484] |
| 3 | 犹豫模糊判断矩阵 [485–487] |
| 3 | 球形模糊判断矩阵 [488, 489] |
| 3 | 中智判断矩阵 [490, 491] |

## 4.5 模糊网络分析法（网络分析法）

网络分析法通过两两比较评估相互依赖准则和备选方案，构建超矩阵，并经由极限超矩阵 [492–494]得出全局优先级。模糊网络分析法以模糊成对判断扩展网络分析法，形成模糊超矩阵和去模糊化极限优先级，以处理不确定性 [39, 495, 496]。

**定义 4.5.1**（模糊网络分析法（FANP）：超矩阵表述）。[497, 498] 设$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$为簇，其中 $C_i = \{e_{i1}, \dots, e_{in_i}\}$且 $n_i \geq 1$，并设

$$E := \bigsqcup_{i=1}^{m} C_i$$

为所有元素的集合。设 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$为有向依赖关系，其中（$C_i$， $C_j$） $\in \mathcal{D}$表示“$C_i$ 影响 $C_j$”（允许内部依赖 $i = j$ 和外部依赖 $i \neq j$）。

取定正模糊数的一个类别 $\mathcal{FN}_{>0}$，其在下文所用运算下为闭，并取定一个排序（去模糊化）映射

$$\mathrm{Score} : \mathcal{FN}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

**(0) 模糊两两比较与局部优先级**。一个正互反模糊成对比较矩阵 为

$$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{rs}) \in \mathcal{FN}_{>0}^{n \times n},$$

满足

$$\tilde{a}_{rr} = 1, \qquad \tilde{a}_{sr} = \tilde{a}_{rs}^{-1} \qquad (1 \leq r, s \leq n).$$

其局部模糊优先向量

$$\widetilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \in \mathcal{FN}_{>0}^{n}$$

例如，可通过模糊几何平均法获得:

$$\tilde{g}_r := \Big(\prod_{s=1}^{n} \tilde{a}_{rs}\Big)^{1/n}, \qquad \tilde{w}_r := \tilde{g}_r \Big/ \Big(\sum_{t=1}^{n} \tilde{g}_t\Big), \qquad r = 1, \dots, n,$$

其中，乘积、幂、和与除法均按模糊数的含义理解（例如通过扩展原理或等效的可容许模糊算术运算）。相应的清晰归一化优先向量 定义为

$$w_r^{\sharp} := \frac{\mathrm{Score}(\tilde{w}_r)}{\sum_{t=1}^{n} \mathrm{Score}(\tilde{w}_t)}, \qquad r = 1, \dots, n.$$

那么 $w^{\sharp} = (w_1^{\sharp}, \ \dots\dots, \ w_n^{\sharp}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n}$和

$$\sum_{r=1}^{n} w_r^{\sharp} = 1.$$

**（1）元素对元素的影响向量和未加权超矩阵**。固定 $(C_i,\ C_j) \in \mathcal{D}$ 和一个目标元素 $e_{jk} \in C_j$。使用正互反模糊比较矩阵，针对 $C_i$ 对 $e_{jk}$ 的影响，对 $C_i$ 中的元素进行两两比较

$$\widetilde{A}^{(i\to j\,|\,k)} \in \mathcal{FN}_{>0}^{n_i\times n_i}.$$

Let

$$w^{\sharp(i\to j\,|\,k)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_i}$$

为通过上述过程得到的相应清晰归一化局部优先向量。定义分块 $W_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ 如下

$$(W_{ij})_{\bullet k} := w^{\sharp(i\to j\,|\,k)} \qquad (k=1,\dots,n_j),$$

并在 $(C_i, C_j) \not\in \mathcal{D}$ 时，令 $W_{ij} := 0$。所得分块矩阵

$$W := \big(W_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq m} \in \mathbb{R}^{(\sum_i n_i)\times(\sum_j n_j)}$$

称为未加权超矩阵。

**(2) 簇权重与加权（列随机）超矩阵**。对于每个簇 $C_j$，令

$$\Gamma(j) := \{\, i : (C_i, C_j) \in \mathcal{D} \,\}.$$

对相互影响的簇 $\{C_i :\ i \in \Gamma(j)\}$ 进行模糊簇比较判断，计算相应的模糊簇优先向量，然后对其去模糊化/归一化，得到

$$\alpha^{(j),\sharp} = (\alpha_i^{(j),\sharp})_{i\in\Gamma(j)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{|\Gamma(j)|}, \qquad \sum_{i\in\Gamma(j)} \alpha_i^{(j),\sharp} = 1.$$

定义加权块

$$\bar{W}_{ij} := \begin{cases} \alpha_i^{(j),\sharp}\, W_{ij}, & i \in \Gamma(j), \\ 0, & i \notin \Gamma(j), \end{cases} \qquad \bar{W} := \big(\bar{W}_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq m}.$$

¯那么， $W$ 是列随机的，即每列的和为 1。

**(3) 极限超矩阵和全局优先级**。如果极限存在，则定义极限超矩阵如下

$$W^{\infty} := \lim_{t\to\infty} \bar{W}^{\,t}.$$

如果 $\bar{W}^{\,t}$ 是周期为 $N$ 的，则使用周期平均值

$$W^{\infty} := \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1} \bar{W}^{\,t}.$$

令 $A \subseteq E$ 为指定的备选方案集合（通常是某个簇中元素的子集）。备选方案的全局优先级可从 $W^{\infty}$ 的对应行中读取（等价地，也可从稳定化后的列中读取），然后按照全局优先级递减的顺序对备选方案进行排序。

我们不再使用不确定集扩展模糊网络分析法。相关定义如下 .

**定义 4.5.2**（不确定集与不确定数）。设 $U$ 为非空论域。在 $U$ 上的一个不确定集是一个映射 $\mu : U \to [0,1]$。

一个不确定数是在 $\mathbb{R}$ 上的不确定集 $\tilde{x}$，其 $\alpha$-截集

$$[\tilde{x}]_\alpha := \{t \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{x}}(t) \geq \alpha\} \qquad (\alpha \in (0,1])$$

are 为非空紧区间。设 UN 为不确定数的一个固定类别，并令

$$\mathsf{UN}_{>0} := \{\tilde{x} \in \mathsf{UN} : \operatorname{supp}(\tilde{x}) \subseteq (0,\infty)\}.$$

假设 $\mathsf{UN}_{>0}$ 在不确定逆元运算下是闭的：若 $[\tilde{x}]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ 且 $0 < x_\alpha^- \leq x_\alpha^+$，定义

$$[\tilde{x}^{-1}]_\alpha := \Big[\frac{1}{x_\alpha^+}, \frac{1}{x_\alpha^-}\Big] \qquad (\alpha \in (0,1]).$$

固定一个得分（清晰代表）映射

$$\mathrm{Score} : \mathsf{UN}_{>0} \to (0,\infty),$$

并假设其满足互反相容：

$$\mathrm{Score}(\tilde{x}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Score}(\tilde{x})} \quad (\forall\, \tilde{x} \in \mathsf{UN}_{>0}), \qquad \mathrm{Score}(\tilde{\mathbf{1}}) = 1,$$

˜其中 1 是集中于 1 的不确定数。

**定义 4.5.3**（不确定互反判断矩阵）. 设 $n \geq 2$。一个不确定互反判断矩阵 是

$$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{rs}) \in (\mathsf{UN}_{>0})^{n\times n}$$

使得

$$\tilde{a}_{rr} = \tilde{\mathbf{1}} \quad (\forall r), \qquad \tilde{a}_{sr} = \tilde{a}_{rs}^{-1} \quad (\forall r \neq s).$$

其诱导的清晰互反矩阵为

$$A := (a_{rs}) \in (0,\infty)^{n\times n}, \qquad a_{rs} := \mathrm{Score}(\tilde{a}_{rs}).$$

**定义 4.5.4**（不确定网络分析法（UANP）：评分诱导的超矩阵表述）. 设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$为簇，其中

$$C_i = \{e_{i1}, \ldots, e_{in_i}\} \quad (n_i \geq 1), \qquad E := \bigsqcup_{i=1}^{m} C_i$$

是所有元素的集合。设 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}\times\mathcal{C}$为一个有向依赖关系；$(C_i, C_j) \in \mathcal{D}$ 表示“$C_i$影响$C_j$”（允许 $i = j$）。

**(0) 根据不确定成对判断得出的局部优先级**。固定 $(C_i, C_j) \in \mathcal{D}$ 和一个目标元素$e_{jk} \in C_j$。决策者提供一个不确定互反判断矩阵

$$\widetilde{A}^{(i\to j\,|\,k)} \in (\mathsf{UN}_{>0})^{n_i\times n_i}$$

比较 $C_i$ 中的元素对$e_{jk}$的影响。令

$$A^{(i\to j\,|\,k)} := \big(\mathrm{Score}(\tilde{a}_{rs}^{(i\to j\,|\,k)})\big) \in (0,\infty)^{n_i\times n_i}$$

为诱导出的清晰倒数矩阵。将局部优先向量 $w^{(i\to j\,|\,k)}\in\mathbb{R}^{n_i}_{>0}$ 定义为 $A^{(i\to j\,|\,k)}$的归一化佩龙向量：

$$A^{(i\to j\,|\,k)}\,w^{(i\to j\,|\,k)}=\lambda_{\max}\,w^{(i\to j\,|\,k)},\qquad \sum_{r=1}^{n_i} w_r^{(i\to j\,|\,k)}=1.$$

**(1) 未加权超矩阵**。 对于每个 $(i,j)$，定义分块矩阵 $W_{ij}\in\mathbb{R}^{n_i\times n_j}_{\geq 0}$，将其第 $k$ 列设为

$$(W_{ij})_{\bullet k}:=w^{(i\to j\,|\,k)}\quad (k=1,\dots,n_j),$$

并在 $(C_i,C_j)\notin\mathcal{D}$ 时令 $W_{ij}:=0$。未加权超矩阵是分块矩阵

$$W:=\big(W_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq m}\in\mathbb{R}^{N\times N}_{\geq 0},\qquad N:=\sum_{i=1}^{m} n_i.$$

**(2) 簇权重与加权超矩阵**。 对于每个目标簇 $C_j$，令 $\Gamma(j):=\{i:(C_i,C_j)\in\mathcal{D}\}$。簇权重通过对 $\Gamma(j)$ 中的簇进行不确定成对比较而获得（应用得分和佩龙归一化后），得到向量

$$\alpha^{(j)}=(\alpha_i^{(j)})_{i\in\Gamma(j)}\in\mathbb{R}^{|\Gamma(j)|}_{\geq 0},\qquad \sum_{i\in\Gamma(j)}\alpha_i^{(j)}=1.$$

定义加权块

$$\bar{W}_{ij}:=\begin{cases}\alpha_i^{(j)}\,W_{ij}, & i\in\Gamma(j),\\ 0, & i\notin\Gamma(j),\end{cases}\qquad \bar{W}:=\big(\bar{W}_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq m}\in\mathbb{R}^{N\times N}_{\geq 0}.$$

**(3) 极限超矩阵与全局优先级**。 如果 $W$ 是本原的（某个次幂的所有元素均严格为正），则定义

$$W^{\infty}:=\lim_{t\to\infty}\bar{W}^{\,t}.$$

一般情况下（即使在周期性情况下），定义切萨罗极限（实际应用中，当出现循环时总是使用该极限）：

$$W^{\infty}:=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\bar{W}^{\,t},\quad \text{whenever the limit exists.}$$

令 $A\subseteq E$ 为指定的备选方案集合（表示备选方案的元素）。$a\in A$ 的全局优先级从 $W^{\infty}$ 的相应行中读取（等价地，也可从稳定列中读取），然后按全局优先级从高到低对备选方案进行排序。

**定理 4.5.5**（UANP 的不确定集结构与良定义性）。 在定义 *4.5.2–4.5.4* 的假设下，*UANP* 的构造在以下意义上是良定义的。

(i) *(不确定集结构)* 每个元素 $\tilde{a}^{(i\to j\,|\,k)}_{rs}\in\mathsf{UN}_{>0}$ 都是 $(0,\infty)$ 上的不确定集（因此也是 $\mathbb{R}$ 上的不确定集）。因此，每个局部比较矩阵 $\widetilde{A}^{(i\to j\,|\,k)}$ 都是由不确定集构成的矩阵。

(ii) *(局部优先级是良定义的)* 对于每个局部不确定互反判断矩阵 $\widetilde{A}^{(i\to j\,|\,k)}$，其诱导的清晰矩阵 $A^{(i\to j\,|\,k)} = (\text{得分}(\tilde{a}^{(i\to j\,|\,k)}_{rs}))$ 是一个正互反矩阵。因此，其佩龙特征向量存在，且除尺度变换外唯一；归一化向量 $w^{(i\to j\,|\,k)}$ 在单纯形 $\Delta_{n_i} := \{x \in \mathbb{R}^{n_i}_{\geq 0} : \sum_r x_r = 1\}$ 中唯一确定。

¯(iii) *(加权超矩阵是列随机)* 的每一列 $W$ 和为**1**，即

$$\mathbf{1}^\top \bar{W} = \mathbf{1}^\top,$$

其中**1** 是 $\mathbb{R}^N$中的全*1*向量。

(iv) *(极限优先级是良定义的)* 若 $\bar{W}$是本原的，则极限 $W^\infty = \lim_{t\to\infty} \bar{W}^t$存在。因此，由 $W^\infty$ 读出的全局优先级是良定义的（当 $t$充分大时，与迭代指标无关）。更一般地，只要定义*4.5.4*中的切萨罗极限存在，即使在循环情形下，它也能给出良定义的稳态优先级提取。

证明。 **(i)** 每个 $\tilde{a}_{rs} \in \mathsf{UN}_{>0}$都是 $\mathbb{R}$上的不确定集。因此，每个局部矩阵 $\widetilde{A}^{(i\to j\,|\,k)}$的每个元素都是不确定集。

~ ~ ˜**(ii)** 设 $A = (\tilde{a}_{rs})$ 为不确定互反判断矩阵。则 $\tilde{a}_{rr} = \mathbf{1}$ 蕴含 $a_{rr} = \text{得分}(\mathbf{1}) = 1$。此外， $\tilde{a}_{sr} = \tilde{a}_{rs}^{-1}$与互反相容性给出

$$a_{sr} = \mathrm{Score}(\tilde{a}_{sr}) = \mathrm{Score}(\tilde{a}_{rs}^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Score}(\tilde{a}_{rs})} = \frac{1}{a_{rs}}.$$

因此， $A = (a_{rs})$是一个正互反矩阵。根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理， $A$ 具有一个（严格）正的主特征向量，且除正标量倍数外唯一；将其归一化至元素和为 1，即得到唯一的 $w \in \Delta_n$。

**(iii)** 固定一个目标簇 $C_j$和一个元素 $e_{jk} \in C_j$。对于每个 $i \in \Gamma(j)$，块 $W_{ij}$的第 $k$列等于 $w^{(i\to j\,|\,k)}$，因此

$$\sum_{r=1}^{n_i} (W_{ij})_{rk} = \sum_{r=1}^{n_i} w_r^{(i\to j\,|\,k)} = 1.$$

在加权 超矩阵中，同一列乘以 $\alpha_i^{(j)}$ 后，再对 $i \in \Gamma(j)$求和，得到

$$\sum_{i\in\Gamma(j)} \sum_{r=1}^{n_i} (\bar{W}_{ij})_{rk} = \sum_{i\in\Gamma(j)} \alpha_i^{(j)} \sum_{r=1}^{n_i} (W_{ij})_{rk} = \sum_{i\in\Gamma(j)} \alpha_i^{(j)} = 1.$$

因此， $\bar{W}$ 的每一列之和都为 1，即 $\mathbf{1}^\top \bar{W} = \mathbf{1}^\top$。

**(iv)** 如果 $\bar{W}$ 是本原列随机矩阵，那么 $\bar{W}^\top$ 就是本原行随机矩阵。根据标准马尔可夫链（佩龙-弗罗贝尼乌斯）收敛性，$(\bar{W}^\top)^t$在 $t \to \infty$时收敛，因此 $\bar{W}^t$也收敛，且 $W^\infty := \lim_{t\to\infty} \bar{W}^t$存在。因此，从 $W^\infty$提取的优先级是良定义的。如果 $\bar{W}$不是本原矩阵，切萨罗平均是标准的补救方法；只要切萨罗极限存在，它就会为优先级提取产生唯一的稳态投影。 □

不确定性感知模型下网络分析法的相关概念列于表4.6。

除不确定性分析网络过程外，DEMATEL-ANP [507, 508], 基于BOCR的分析网络过程 [509], 群体分析网络过程 [510, 511], ANP-TOPSIS [510, 512], 和粗糙分析网络过程 [513, 514] 等概念也广为人知。

表4.6：不确定性感知模型下网络分析法的相关概念。

| $k$ | **相关网络分析法概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊网络分析法 [499, 500] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊网络分析法 [501, 502] |
| 3 | 犹豫模糊网络分析法 [503] |
| 3 | 球形模糊 ANP [504] |
| 3 | 中智 ANP [505, 506] |

## 4.6 模糊序数优先法（OPA）

序数优先方法（OPA）是一种最大–最小优化方法，可将专家的序数排名转换为一致的准则权重，无需进行两两比较，并得出备选方案优先排序[515, 516]。模糊序数优先方法（OPA）通过将语言重要性表示为三角模糊数，对OPA进行扩展，并通过求解模糊最大–最小模型来获得模糊权重和排序 [517–519]。

**定义 4.6.1**（模糊序数优先法（OPA-F）：基于三角模糊数的表述）。[517–519] 设 $I$为有限专家集， $J$ 为有限准则集， $K$ 为有限备选方案集。令 $n := |J|$。令

$$\mathsf{TFN} := \{(l, m, u) \in \mathbb{R}^3 : \ l \le m \le u\}$$

为三角模糊数（TFN）的集合。我们采用 TFN 上的逐分量偏序：

$$(l_1, m_1, u_1) \succeq (l_2, m_2, u_2) \iff l_1 \ge l_2, \ m_1 \ge m_2, \ u_1 \ge u_2.$$

（任何固定的三角模糊数排序／去模糊化规则都可用于后续生成清晰排序 .）

**模糊语言输入**。设 $\mathcal{L}$ 为语言标度， $\varphi : \mathcal{L} \to$ 将每个术语映射为三角模糊数。每位专家 $i \in I$ 提供准则的序数排序，并以排列表示

$$\pi_i : \{1, \dots, n\} \to J,$$

其中， $\pi_i(1)$ 是专家 $i$ 认为最重要的准则，而 $\pi_i(n)$ 是最不重要的准则。此外，专家 $i$ 为每个已排序的准则提供语言重要性评估，并将其编码为三角模糊数

$$\tilde{a}_{i,r} := \varphi\big(\ell_{i,r}\big) \in \mathsf{TFN}, \qquad r = 1, \dots, n,$$

其中， $\ell_{i,\ r} \in \mathcal{L}$ 是附属于第 $r$ 个排序准则 $\pi_i(r)$ 的语言术语。

**决策变量（模糊权重）**。引入三角模糊数决策变量

$$\tilde{W}_{i,r} \in \mathsf{TFN}_{\ge 0} \quad (i \in I, \ r = 1, \dots, n), \qquad \tilde{Z} \in \mathsf{TFN},$$

~ ~其中，$W_{i,r}$ 是专家 $i$ 赋予第 $r$ 位排序准则 $\pi_i$（$r$）的（模糊）权重，而 $Z$ 是最大 — 最小（瓶颈）客观变量。

**三角模糊数算术约定**。对于 $\tilde{x} = (l_x, \ m_x, \ u_x)$ 和 $\tilde{y} = (l_y, \ m_y, \ u_y)$ 以及 $\lambda \ge 0$，使用

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y, \ m_x + m_y, \ u_x + u_y), \qquad \lambda \odot \tilde{x} := (\lambda l_x, \ \lambda m_x, \ \lambda u_x),$$

以及常见的三角模糊数减法近似

$$\tilde{x} \ominus \tilde{y} := (l_x - u_y,\ m_x - m_y,\ u_x - l_y).$$

（如有需要，也可以替换为任何其他一致的三角模糊数运算。）

**OPA-F 核心模型（模糊极大极小规划）**。确定一个（可能为模糊的）归一化常数 $\tilde{1} \in$ 三角模糊数，通常为 $\tilde{1} =$（**1**，**1**，**1**）（或采用容差形式，例如（$1-\varepsilon$，**1**，$1+\varepsilon$））。模糊序数优先法（*OPA-F*）通过求解以下问题确定模糊准则权重：

$$\tilde{\text{最大化}}\ \tilde{Z} \tag{4.1}$$

$$\text{s.t. } \tilde{a}_{i,r} \odot \left(\tilde{W}_{i,r} \ominus \tilde{W}_{i,r+1}\right) \succeq \tilde{Z}, \qquad \forall i \in I,\ \forall r = 1, \ldots, n-1, \tag{4.2}$$

$$\tilde{a}_{i,n} \odot \tilde{W}_{i,n} \succeq \tilde{Z}, \qquad \forall i \in I, \tag{4.3}$$

$$\bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{r=1}^{n} \tilde{W}_{i,r} = \tilde{1}, \tag{4.4}$$

$$\tilde{W}_{i,r} = (l_{i,r}^{w}, m_{i,r}^{w}, u_{i,r}^{w}), \quad 0 \le l_{i,r}^{w} \le m_{i,r}^{w} \le u_{i,r}^{w}, \qquad \forall i \in I,\ \forall r. \tag{4.5}$$

**聚合准则权重和排序**。通过收集 $j$ 出现的排名，定义准则 $j \in J$ 的聚合模糊权重：

$$\tilde{W}_j := \bigoplus_{i \in I} \tilde{W}_{i,r(i,j)}, \quad \text{where } r(i,j) \text{ is the unique rank with } \pi_i(r(i,j)) = j.$$

清晰权重向量可通过任意去模糊化/排序映射去模糊化：三角模糊数 $\to \mathbb{R}_{\ge 0}$获得，例如去模糊化$(l,m,u) = (l+m+u)/3$，随后进行归一化：

$$w_j := \frac{\text{Defuzz}(\tilde{W}_j)}{\sum_{t \in J} \text{Defuzz}(\tilde{W}_t)}.$$

**化简为清晰 OPA**。若所有输入均为退化三角模糊数 $(l,m,u) = (p,p,p)$，且取 $\tilde{1} = (1,1,1)$，则 (4.1)–(4.5) 化简为清晰 OPA 型最大–最小线性规划。

通过使用不确定集对其进行扩展，我们得到如下表述。

**定义 4.6.2**（不确定性空间、不确定集、隶属度、期望值）. 不确定性空间 是一个三元组（$\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}$），其中 $\Gamma$ 是一个非空集，$\mathcal{L}$ 是 $\Gamma$上的一个 $\sigma$-代数，且 $\mathcal{M}\colon \mathcal{L} \to [0,1]$ 是一个不确定测度（满足例如正规性、对偶性和次可加性）。

不确定集 是一个可测映射

$$\xi : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

使得对于每个博雷尔集 $B \subseteq \mathbb{R}$，这些事件

$$\{\gamma \in \Gamma :\ \xi(\gamma) \subseteq B\} \in \mathcal{L}, \qquad \{\gamma \in \Gamma :\ B \subseteq \xi(\gamma)\} \in \mathcal{L}.$$

如果不确定集 $\xi$ 以标准方式表示不确定集隶属语义（等价地，$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mu_\xi(x) = 1$），则称其具有 隶属函数 $\mu_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ 。

若 $\xi$ 是一个非空不确定集，其期望值定义为

$$\mathbb{E}[\xi] := \int_0^\infty \mathcal{M}\{\xi \geq r\}\, dr - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq r\}\, dr,$$

前提是这两个积分中至少有一个有限。

**定义 4.6.3**（不确定序数优先法（UOPA））。 设 $I$ 为专家有限集， $J$ 为准则有限集，其中 $n := |J| \geq 2$。每位专家 $i \in I$ 提供:

1. 准则的序数排序，表示为排列 $\pi_i : \{1,\dots,n\} \to J$（排序 $1$ =最重要）；

2. 按排名给出的不确定重要性剖面：对于每个排名 $r \in \{1,\dots,n\}$，给出一个不确定集（不确定数）

$$\xi_{i,r} : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

具有有限期望值 $a_{i,\ r} := \mathbb{E}[\xi_{i,r}] \in \mathbb{R}$。

**(1) 化简为　　通过期望值获得确定性 OPA 核心**。定义确定性系数

$$a_{i,r} := \mathbb{E}[\xi_{i,r}], \qquad i \in I,\ r = 1,\dots,n.$$

引入决策变量 $w_{i,\ r} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $z \in \mathbb{R}$，并求解线性规划

$$\begin{aligned}
&\text{最大化 } z && && (4.6)\\
&\text{s.t. } a_{i,r}\big(w_{i,r} - w_{i,r+1}\big) \ \geq\ z, && \forall i \in I,\ \forall r = 1,\dots,n-1, && (4.7)\\
&\quad a_{i,n} w_{i,n} \ \geq\ z, && \forall i \in I, && (4.8)\\
&\quad \sum_{i\in I}\sum_{r=1}^{n} w_{i,r} = 1, && && (4.9)\\
&\quad w_{i,r} \geq 0, && \forall i \in I,\ \forall r. && (4.10)
\end{aligned}$$

**(2) 聚合系　　准则权重**。对于每个准则 $j \in J$，将其聚合（清晰）权重定义为

$$W_j := \sum_{i\in I} w_{i,r(i,j)}, \quad \text{where } r(i,j) \text{ is the unique rank with } \pi_i(r(i,j)) = j.$$

则 $W_j \geq 0$ 且 $\sum_{j\in J} W_j = 1$。

**(3) 产出为不确定集（退化不确定数）**。对于每个 $j \in J$，定义一个退化不确定集（单值映射）

$$\Xi_j : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \Xi_j(\gamma) := \{W_j\}.$$

该族 $\{\Xi_j\}_{j\in J}$ 称为*UOPA*不确定权重向量。

**定理 4.6.4**（UOPA的不确定集结构与良定义性）。假设在定义 *4.6.3* 中，对所有 $i \in I$ 与 $r \in \{1, \dots, n\}$，不确定集 $\xi_{i,\,r}$ 具有有限期望值 $a_{i,\,r} = \mathbb{E}[\xi_{i,r}]$ 并且 $a_{i,\,r} \geq 0$。

那么：

*1.* 式 *(4.6)–(4.10)* 中的系数 $a_{i,\,r}$ 是良定义的实数，因此该优化模型是适定的有限维线性规划；*2.* 式 $(4.6)$–$(4.10)$ 的可行域非空且紧，且目标函数有上界，因此存在最优解；*3.* 定义 *4.6.3(3)* 中定义的 *UOPA* 产出 $\{\Xi_j\}_{j \in J}$ 构成一族不确定集（定义在同一不确定性空间上），即该方法得到一个不确定集结构化的权重向量。

证明。 **（1）良定义的系数**。 根据假设，每个 $\xi_{i,\,r}$ 按照定义 4.6.2 的含义都具有有限期望值。因此，$a_{i,\,r} \in \mathbb{R}$ 是唯一确定的，而 (4.6)–(4.10) 是一个具有有限个变量和线性约束的确定性线性规划。

**(2) 非空性（可行性）**。令 $N := |I|\, n$。设 $w_{i,\,r} := 1/N$，对所有 $i,\ r$均成立，并设 $z := 0$。则（4.9）和（4.10）成立。此外，由于 $a_{i,\,r} \geq 0$ 且 $w_{i,\,r} - w_{i,\,r+1} = 0$，（4.7）的左侧等于 0，而（4.8）的左侧等于 $a_{i,\,n}/N \geq 0$。因此，取 $z = 0$ 时所有约束均成立。所以可行集非空。

**(3) 紧致性与有界性**。由（4.9）和（4.10）可知，向量（$w_{i,\,r}$）属于一个标准单纯形，因此投影到 $w$ 后的可行集是闭且有界的。完整的可行集（位于（$w,\ z$）中）也为闭集：它是若干闭半空间的交集。

此外，对于任意可行的（$w,\ z$）以及任意 $i \in I$，（4.8）蕴含 $z \leq a_{i,\,n} w_{i,\,n} \leq a_{i,\,n} \cdot 1 = a_{i,\,n}$，因为在（4.9）–（4.10）条件下 $0 \leq w_{i,\,n} \leq 1$。因此，$z$ 的上界为 $\max_{i \in I} a_{i,\,n} < \infty$。所以，线性目标函数 $\max z$ 在可行域上有上界。

**（4）优化器的存在性**。 有界线性泛函在非空紧致多面体上取得其最大值。因此，（4.6）–（4.10）至少有一个最优解。

**（5）不确定集结构化输出**。 对于每个 $j \in J$，映射 $\Xi_j(\gamma) = \{W_j\}$ 是一个常值（单值）集值函数，因此关于 $\mathcal{L}$可测，从而在定义 4.6.2 的意义上是一个不确定集。因此，$\{\Xi_j\}_{j \in J}$ 是表示 UOPA 权重向量的一族不确定集。

□

不确定性感知模型下序数优先方法（OPA）的相关概念列于表 4.7。

不确定 OPA 之外的相关概念包括区间序数优先法 $[516, 522]$, 、灰色序优先法 $[523, 524]$, 和粗糙序数优先法 $[525, 526]$。

表 4.7: 实数集 不确定性感知模式下序数优先方法（OPA）的相关概念 ls.

| $k$ | **相关 OPA 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊序数优先方法（OPA） |
| 2 | 直觉模糊序数优先方法（OPA） |
| 3 | 中智序数优先方法（OPA） [520, 521] |

## 4.7 模糊 PI　　PRECIA（枢轴成对相对准则重要性评估）

PIPRECIA 是一种多准则决策赋权方法，通过枢轴准则和序贯两两比较，高效地推导准则重要性系数 [527, 528]。模糊 PIPRECIA 通过用模糊数表示判断，在计算稳健的准则权重时处理模糊性和不确定性，从而扩展了 PIPRECIA [44, 529]。

**定义 4.7.1**（基于三角模糊数的模糊 PIPRECIA（普通 $+$逆向））。 [44, 529] 设 $C_1$、.....、$C_n$ 为按固定顺序排列的准则（无需按重要性排序）。设 $R \geq 1$ 决策者（DMs）使用两个基于三角模糊数的标度提供语言判断，并将判断编码为正三角模糊数（TFNs）：“$>1$”标度（通常称为 1–2 标度）和“$<1$”标度（通常称为 0–1 标度）。（文献中通常会给出这两个标度具体的三角模糊数表。）

假设三角模糊数运算（$\otimes$, $\oslash$）和三角模糊数幂均可用（例如，按照标准模糊层次分析法的惯例进行分量运算）。

**步骤 1（普通连续比较）**。对于每个 $j = 2,\ldots,n$ 以及每位决策者 $r \in \{1,\ldots,R\}$，令$\tilde{s}_j^{(r)} \in$三角模糊数$_{>0}$ 表示 $C_j$ 相对于 $C_{j-1}$的重要性：

$$\tilde{s}_j^{(r)} \begin{cases} > \tilde{1} & \text{if } C_j \text{ is judged more important than } C_{j-1}, \\ = \tilde{1} & \text{if } C_j \text{ is judged equally important as } C_{j-1}, \\ < \tilde{1} & \text{if } C_j \text{ is judged less important than } C_{j-1}, \end{cases} \qquad \tilde{1} := (1,1,1),$$

其中，$>$/$<$在语言尺度层面上进行解释。

**步骤 2（几何平均聚合）**。通过（三角模糊数）几何平均数聚合各决策者的三角模糊数：

$$\tilde{s}_j := \mathrm{GM}\big(\tilde{s}_j^{(1)},\ldots,\tilde{s}_j^{(R)}\big) := \left( \bigotimes_{r=1}^{R} \tilde{s}_j^{(r)} \right)^{1/R}, \qquad j = 2,\ldots,n,$$

这通常是模糊 PIPRECIA 实现中的要求。

˜**步骤 3（系数）**。将三角模糊数系数 $k_j$ 定义为

$$\tilde{k}_1 := \tilde{1}, \qquad \tilde{k}_j := \tilde{2} \ominus \tilde{s}_j \ \ (j = 2,\ldots,n), \qquad \tilde{2} := (2,2,2),$$

˜即，如果 $\tilde{s}_j = (l_j, m_j, u_j)$，则 $k_j := (2-u_j,\ \ 2-m_j,\ \ 2-l_j)$（以保持三角模糊数序）。这对应于模糊 PIPRECIA 中的“从 2 中减去”规则。

**第4步（递归模糊权重）**。定义 $\tilde{q}_j$ 为

$$\tilde{q}_1 := \tilde{1}, \qquad \tilde{q}_j := \tilde{q}_{j-1} \oslash \tilde{k}_j \quad (j = 2, \ldots, n).$$

**步骤 5（正向过程得到的相对权重）**。定义（常规遍历）模糊相对权重如下

$$\tilde{w}_j := \tilde{q}_j \oslash \left( \bigoplus_{t=1}^{n} \tilde{q}_t \right), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

**步骤 6–9（反向过程）**。通过比较 $C_j$ 与 $C_{j+1}$，按相反方向重复步骤 1–5 （从倒数第二个准则开始），以获得反向过程三角模糊数 $\tilde{w}'_1, \ldots, \tilde{w}'_n$。

**步骤 10（去模糊化和最终准则权重）**。设 Defuzz : 三角模糊数$_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 为一个固定的去模糊化映射。一种广泛使用的选择（通常记作 DFV）是加权平均

$$\mathrm{Defuzz}(l, m, u) := \frac{l + 4m + u}{6}.$$

对正向权重和反向权重进行去模糊化并取平均值:

$$w_j := \mathrm{Defuzz}(\tilde{w}_j), \qquad w'_j := \mathrm{Defuzz}(\tilde{w}'_j), \qquad w_j^{\mathrm{final}} := \frac{w_j + w'_j}{2}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

这种“先去模糊化再取平均值”的规则是模糊 PIPRECIA 的标准最终化步骤。

最后，进行归一化

$$w_j^{\mathrm{final}} \leftarrow \frac{w_j^{\mathrm{final}}}{\sum_{t=1}^{n} w_t^{\mathrm{final}}} \quad \text{so that} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j^{\mathrm{final}} = 1,$$

并将 $\left(w_1^{\mathrm{final}}, \ldots, w_n^{\mathrm{final}}\right)$ 用作准则权重向量。

作为基于不确定集的扩展，不确定 PIPRECIA（U-PIPRECIA）的定义如下。

**定义 4.7.2** （不确定 PIPRECIA（U-PIPRECIA）：期望值实现）**.** 设 $C_1, \ldots, C_n$ 为按固定顺序（$n \geq 2$）列出的准则，并设 $\mathcal{D} = \{1, \ldots, R\}$ 为决策者（DMs）的有限集。在固定的不确定性空间 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 上工作。

对于每个 $j = 2, \ldots, n$ 以及每位决策者 $r \in \mathcal{D}$，假设该决策者给出一个不确定相对重要性评估

$$\Xi_j^{(r)} : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

解释为 $C_j$ 相对于 $C_{j-1}$的（不确定）重要性比率。假设:

$$\Xi_j^{(r)}(\gamma) \subseteq \mathbb{R}_{>0} \quad (\forall \gamma \in \Gamma), \qquad \mathbb{E}[\Xi_j^{(r)}] < \infty.$$

通过期望值定义相应的确定性系数:

$$s_j^{(r)} := \mathbb{E}[\Xi_j^{(r)}] \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad j = 2, \dots, n,\ r \in \mathcal{D}.$$

**步骤 1（决策者 聚合）**。通过几何平均数聚合决策者（正标量聚合 ）:

$$s_j := \Big(\prod_{r=1}^{R} s_j^{(r)}\Big)^{1/R} \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad j = 2, \dots, n,$$

并设置 $s_1 := 1$。

**步骤 2（PIPRECIA 系数）**。定义

$$k_1 := 1, \qquad k_j := 2 - s_j, \quad j = 2, \dots, n.$$

（这些是标准“从 2 中减去”规则的清晰对应形式。）

**步骤 3（递归重要性序列）**。定义

$$q_1 := 1, \qquad q_j := \frac{q_{j-1}}{k_j} \quad (j = 2, \dots, n),$$

当且仅当 $k_j > 0$。

**St骤 4（归一化准则权重）**。令 $Q := \sum_{t=1}^{n} q_t$ （假设 $Q > 0$）。定义

$$w_j := \frac{q_j}{Q}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

向量 $w = (w_1, \dots, w_n)$ 称为 *U-PIPRECIA*（常规遍历）权重向量。

**步骤 5（可选的反向过程和最终化）**。按相反顺序重复步骤 1–4，通过比较 $C_j$和 $C_{j+1}$ 以获得 $w_1', \dots, w_n'$，并设

$$w_j^{\text{final}} := \frac{w_j + w_j'}{2}, \qquad w_j^{\text{final}} \leftarrow \frac{w_j^{\text{final}}}{\sum_{t=1}^{n} w_t^{\text{final}}}.$$

**定义 4.7.3**（U-PIPRECIA 的不确定集输出）。令 $w = (w_1, \dots, w_n)$ 为根据定义 4.7.2 得到的（常规遍历或最终）权重向量。对每个 $j = 1, \dots, n$，定义一个退化不确定集（单值映射）

$$W_j : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad W_j(\gamma) := \{w_j\}.$$

则 $W = (W_1, \dots, W_n)$ 称为 *U-PIPRECIA* 不确定权重向量。

**定理 4.7.4**（U-PIPRECIA 的不确定集结构与良定义性）。 假设定义 *4.7.2* 中的设定，并满足:

**(A1)** *(*有限 p 正期望）对所有 $j = 2$，……， $n$ 和 $r \in \{1, \dots, R\}$， $s_j^{(r)} = \mathbb{E}[\Xi_j^{(r)}] \in (0,\ 2)$ .

则：

(i) $s_j \in (0,\ 2)$ 因此 $k_j = 2 - s_j \in (0,\ 2)$ 对所有 $j \geq 2$ 均成立；

(ii) 递推 $q_1 = 1$, $q_j = q_{j-1}/k_j$ 是良定义的，并且对所有 $j$ 均得到 $q_j > 0$；

(iii) $Q = \sum_{t=1}^{n} q_t$ 满足 $Q \in (0,\ \infty)$，因此 $w_j = q_j/Q$ 是良定义的，其中 $w_j > 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$；

(iv) 定义 *4.7.3* 中的产出族 $(W_j)_{j=1}^{n}$ 是 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$(= 不确定集结构)上的不确定集族。只要逆向比较也满足 ***(A1)***，同样的结论也适用于逆向过程和最终的平均权重。

证明。 **(i)** 固定 $j \in \{2, \ldots, n\}$。根据 (A1)，每个 $s_j^{(r)} \in (0, 2)$，因此 $\prod_{r=1}^{R} s_j^{(r)} \in (0, 2^R)$，于是

$$s_j = \Big(\prod_{r=1}^{R} s_j^{(r)}\Big)^{1/R} \in (0, 2).$$

因此 $k_j = 2 - s_j \in (0,2)$。此外， $k_1 = 1$ 根据定义。

**(ii)** 由于对所有 $j \geq 2$均有 $k_j > 0$ ，除以 $k_j$ 是有效的。归纳地， $q_1 = 1 > 0$ ，且若 $q_{j-1} > 0$ 则 $q_j = q_{j-1}/k_j > 0$。因此所有$q_j$ 均为良定义且为正。

**(iii)** 由于每个 $q_t > 0$ 与 $n < \infty$，和 $Q = \sum_{t=1}^{n} q_t$ 是有限且严格为正的。因此每个$w_j = q_j/Q$ 是良定义且为正的。此外，

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{Q} = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{Q}{Q} = 1.$$

**(iv)** 对每个固定的 $j$，映射 $W_j(\gamma) = \{w_j\}$ 是常数（单值），因此关于 $\mathcal{L}$ 可测，从而符合不确定集的条件。因此$(W_j)_{j=1}^{n}$ 是不确定集结构化输出。反向过程是将同一构造应用于逆序，故同一论证适用，而最终的平均/重新归一化是普通的代数后处理，只要两个过程均为良定义，它便保持良定义性。

□

供参考，rel ated概念：PIPRECIA在不确定性感知模型下的相关内容列于表 4.8 .

除不确定 PIPRECIA 外，其他相关的基于 PIPRECIA 的方法还包括 PIPRECIA-S [536, 537]，灰色 PIPRECIA [538,539],和粗糙 PIPRECIA [540,541]。

表 4.8：不确定性感知模型下 PIPRECIA 的相关概念。

| $k$ | **相关 PIPRECIA 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 PIPRECIA [530] |
| 2 | 费马模糊 PIPRECIA [531] |
| 3 | 图片模糊 PIPRECIA [532] |
| 3 | 犹豫模糊 PIPRECIA [533] |
| 3 | 中智模糊 PIPRECIA [534, 535] |

## 4.8 模糊 SWARA（模糊逐步权重评估比率分析法）

SWARA 根据重要性对准则进行排序，逐步确定相邻准则之间的比较系数，依次计算重新调整后的权重，并对其进行归一化，以便之后用于评分模型 [542, 543]。模糊 SWARA 使用语言术语表示逐步重要性比率，将其转换为模糊数，在权重计算过程中传递模糊性，并对最终权重进行去模糊化，以进行排序 [544–546]。

**定义 4.8.1**（模糊 SWARA（基于三角模糊数的逐步赋权））。[544–546] 设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为一个有限的准则集。假设决策者（DMs）提供了一个共识排序

$$C_1 \succ C_2 \succ \cdots \succ C_n$$

（从最重要的准则到最不重要的准则）。

**（0）三角模糊数和算术运算**。设

$$\mathsf{TFN}_{>0} := \{(l, m, u) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < l \le m \le u\}$$

为正三角模糊数（TFNs）的集合。对于 $\mathsf{TFN}_{>0}$ 中的 $\tilde{x} = (l_x, m_x, u_x)$ 和 $\tilde{y} = (l_y, m_y, u_y)$，定义

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y,\ m_x + m_y,\ u_x + u_y), \qquad \tilde{y}^{-1} := \Big(\frac{1}{u_y}, \frac{1}{m_y}, \frac{1}{l_y}\Big),$$

$$\tilde{x} \oslash \tilde{y} := \tilde{x} \otimes \tilde{y}^{-1} = \Big(\frac{l_x}{u_y},\ \frac{m_x}{m_y},\ \frac{u_x}{l_y}\Big), \qquad \tilde{1} := (1, 1, 1).$$

（因此，$\oslash$ 在 $\mathsf{TFN}_{>0}$ 上是良定义的。）

**（1）模糊逐步比较重要性**。对于每个 $j = 2, \ldots, n$，令

$$\tilde{b}_j = (l_j, m_j, u_j) \in \mathsf{TFN}_{>0}$$

为 $C_{j-1}$ 相对于 $C_j$ 的模糊比较重要性（根据编码为 ˜ 个 TFN 的语言判断得出）。无需 $b_1$。

**（2）模糊系数**。定义三角模糊数系数 $\tilde{e}_j$ 为

$$\tilde{e}_1 := \tilde{1}, \qquad \tilde{e}_j := \tilde{b}_j \oplus \tilde{1} \quad (j = 2, \ldots, n).$$

˜**(3) 重新计算的模糊权重（未归一化）**。定义 $f_j \in$三角模糊数$_{>0}$ 的递归方式如下：

$$\tilde{f}_1 := \tilde{1}, \qquad \tilde{f}_j := \tilde{f}_{j-1} \oslash \tilde{e}_j \quad (j = 2, \ldots, n).$$

**(4)** ˜ ˜**归一化模糊权重**。令 $F: = \bigoplus_{t=1}^{n} f_t$。 模糊 *SWARA* 权重 $C_j$ 为

$$\tilde{w}_j := \tilde{f}_j \oslash \tilde{F} = (w_j^{\ell}, w_j^{m}, w_j^{u}) \in \mathsf{TFN}_{>0}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

**（5）去模糊化（清晰权重）**。一种常用的清晰权重是通过质心（面积中心）去模糊化得到的:

$$w_j := \frac{w_j^{\ell} + w_j^{m} + w_j^{u}}{3}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

可选地，再通过 $w_j \leftarrow w_j / \sum_{t=1}^{n} w_t$ 对 $w$ 进行归一化，使得 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

所得向量 $(w_1, \ldots, w_n)$ 称为模糊 *SWARA*（去模糊化）准则权重向量。

使用不确定集，我们将不确定 SWARA（U-SWARA）定义如下。

**定义 4.8.2**（不确定 SWARA（U-SWARA）: 期望值实现）。设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则的有限集， $n \geq 2$。假设存在一个固定的共识重要性顺序

$$C_1 \succ C_2 \succ \cdots \succ C_n$$

（从最重要到最不重要）。在固定的不确定性空间 $(\Gamma, \ \mathcal{L}, \ \mathcal{M})$ 上进行分析。

对于每一步 $j = 2$，……， $n$，决策者给出一个不确定逐步比较重要性系数（即“ $C_{j-1}$ 相对于 $C_j$的相对重要性”）

$$\Xi_j : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

假设其满足

$$\Xi_j(\gamma) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\forall \gamma \in \Gamma), \qquad s_j := \mathbb{E}[\Xi_j] < \infty.$$

（因此， $s_j$ 是通过不确定性的期望值约化得到的清晰逐步系数。）

将 *SWARA* 重计算因子定义为

$$k_1 := 1, \qquad k_j := 1 + s_j \quad (j = 2, \ldots, n).$$

将 未归一化序贯权重递归定义为

$$q_1 := 1, \qquad q_j := \frac{q_{j-1}}{k_j} \quad (j = 2, \ldots, n),$$

每当 $k_j > 0$。

设 $Q := \sum_{t=1}^{n} q_t$ （假设 $Q > 0$），并定义归一化 *SWARA* 权重为

$$w_j := \frac{q_j}{Q}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

向量 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 称为 *U-SWARA* 准则权重向量。

**定义 4.8.3** （U-SWARA 的不确定集输出）。 设 $w = (w_1, \dots, w_n)$ 是根据定义 4.8.2 得到的。定义退化不确定集（单值映射）

$$W_j : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad W_j(\gamma) := \{w_j\}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

则 $W = (W_1, \dots, W_n)$ 称为 *U-SWARA* 不确定权重向量。

**定理 4.8.4** (不确定集结构与 U-SWARA 的良定义性)。 假设定义 *4.8.2* 的设定成立，并设：

**(A1)** *(*非负有限期望*)* $s_j = \mathbb{E}[\Xi_j] \in [0, \infty)$ 对所有 $j = 2, \dots, n$。

则：

(i) $k_j = 1 + s_j \in [1, \infty)$ 对所有 $j = 2, \dots, n$，从而 $k_j > 0$；

(ii) 递推 $q_1 = 1$, $q_j = q_{j-1}/k_j$ 是良定义的，并且对所有 $j$均得到 $q_j > 0$；

(iii) $Q = \sum_{t=1}^{n} q_t$ 满足 $Q \in (0, \infty)$，因此 $w_j = q_j/Q$ 是良定义的，且有 $w_j > 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$；(iv) 定义 *4.8.3* 中的族 $(W_j)_{j=1}^{n}$ 在 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$上构成不确定集结构化输出。

证明。 **(i)** 根据 **(A1)**，对每个 $j \geq 2$，都有 $s_j \geq 0$，因此 $k_j = 1 + s_j \geq 1 > 0$。

**(ii)** 由于 $k_j > 0$，除以 $k_j$ 是有效的。由归纳法可得 $q_1 = 1 > 0$；若 $q_{j-1} > 0$，则 $q_j = q_{j-1}/k_j > 0$。因此，所有 $q_j$ 均存在且为正。

**(iii)** 因为 $n < \infty$ 且每个 $q_t > 0$，所以和 $Q = \sum_{t=1}^{n} q_t$ 有限且严格为正。因此，$w_j = q_j/Q$良定义且为正。此外，

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{Q} = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{Q}{Q} = 1.$$

**(iv)** 对于每个 $j$，映射 $W_j(\gamma) = \{w_j\}$ 为常数（单值），因而可测；因此它是一个不确定集。因此，$(W_j)_{j=1}^{n}$ 是不确定集结构化输出。 □

按度域维度 $k$ 分类的 SWARA 相关不确定性模型变体列于表 4.9。

作为不确定 SWARA 之外的相关概念，粗糙 SWARA [561], 软 SWARA [562], SWARA-TOPSIS [563, 564], SWARA-AHP [565, 566], 以及灰色 SWARA [567, 568] 也已为人所知。

表 4.9：相关不　　确定性模型变体的 SWARA（按度域维度 $k$ 分类）。

| $k$ | **相关 SWARA 变体** |
|---|---|
| 1 | 模糊 SWARA |
| 2 | 直觉模糊SWARA [547, 548] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊SWARA [549, 550] |
| 2 | 费马模糊SWARA [551, 552] |
| 3 | 犹豫模糊SWARA [553, 554] |
| 3 | 球形模糊SWARA [555, 556] |
| 3 | 中智SWARA [557, 558] |
| n | Plithogenic SWARA [559, 560] |

## 4.9 模糊 CILOS（模糊准则影响损失）

CILOS 通过量化各准则恶化时的信息或影响损失来推导客观准则权重，从而强调对总体表现影响最大的准则 [569, 570]。模糊 CILOS 使用模糊数扩展 CILOS 以表示性能，计算每个准则的模糊影响损失度量，并生成在不精确性条件下仍稳健的客观权重 [571]。

**定义 4.9.1**（模糊 CILOS（准则影响损失）加权）。 [571]令

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

分别表示备选方案集合和准则集合。假设每个准则 $C_j$ 均属于效益型或成本型。

令 $\mathcal{FN}_{>0}$ 为一个固定的正模糊数类别，并令

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{FN}_{>0}^{m\times n}$$

模糊决策　　矩阵，其中 $\tilde{x}_{ij}$ 表示备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$下的模糊表现　　.

固定一个完全排序／去模糊化映射

$$\text{Score} : \mathcal{FN}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}.$$

定义相应的正清晰得分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n}, \qquad s_{ij} := \text{Score}(\tilde{x}_{ij}) > 0.$$

**步骤 1：效益型变换**。定义变换后的矩阵 $X =(x_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$为

$$x_{ij} := \begin{cases} s_{ij}, & \text{if } C_j \text{ is a benefit criterion,} \\ \dfrac{\min_{1\le r\le m} s_{rj}}{s_{ij}}, & \text{if } C_j \text{ is a cost criterion.} \end{cases}$$

因此，经过变换后，每个准则都被视为效益型准则。

**步骤 2：逐准则最优**。对于每个准则 $j \in \{1, \ldots, n\}$，定义

$$x_j^\star := \max_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

选择一个索引

$$\iota_j \in \arg\max_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

**第3步：准则最优方案方阵**。定义矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 如下

$$a_{ij} := x_{\iota_i j}, \qquad i,j=1,\dots,n.$$

因此， $A$ 的第 $i$ 行是一个在准则 $C_i$ 下最优备选方案的转换后性能向量。特别地，

$$a_{ii} = x_i^\star.$$

**第4步：相对损失矩阵**。定义矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 如下

$$p_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_j^\star - a_{ij}}{x_j^\star}, & i\neq j, \\ 0, & i=j. \end{cases}$$

因此， $p_{ij}\in[0,1]$ 表示选择准则 $C_i$ 下最优的备选方案时，准则 $C_j$ 的相对损失。

**第5步：CILOS 平衡矩阵**。定义 $F=(f_{ij})_{n\times n}$ 如下

$$f_{ij} := \begin{cases} p_{ij}, & i\neq j, \\ -\displaystyle\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} p_{rj}, & i=j. \end{cases}$$

等价地，

$$F = \begin{pmatrix} -\sum_{r\neq 1} p_{r1} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & -\sum_{r\neq 2} p_{r2} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & -\sum_{r\neq n} p_{rn} \end{pmatrix}.$$

**步骤 6：准则重要性向量和权重**。非零向量

$$q=(q_1,\dots,q_n)^\top \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}\setminus\{0\}$$

满足

$$Fq=0$$

称为模糊 CILOS 模型的准则重要性向量。相应的模糊 *CILOS* 权重向量为

$$w=(w_1,\dots,w_n)^\top, \qquad w_j := \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^n q_\ell}, \quad j=1,\dots,n.$$

Then

$$w_j\ge 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

现在，我们将准则影响损失思想扩展到一般不确定模型 $M$，以此定义不确定 *CILOS*（UCILOS）。

**定义 4.9.2** （ $M$ 类型的不确定 CILOS（UCILOS））。设

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

分别为备选方案集和准则集，其中 $m,\ n \in \mathbb{N}$ 和 $m,\ n \geq 1$。

固定一个度域为.....的不确定模型 $M$

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

对于某个整数 $k \geq 1$。

假设 e 每个准则 $C_j$ 均被指定为效益型准则或成本型准则。Le t

$$X_M = (\mu_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$$

设其为不确定决策矩阵，其中 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 表示备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$下的不确定性能。

进一步假设总分映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

是固定的。定义相应的正向评分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}, \qquad s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij}).$$

**步骤 1：效益型变换**。定义 $B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$为

$$b_{ij} := \begin{cases} s_{ij}, & \text{if } C_j \text{ is a benefit criterion,} \\ \dfrac{\min_{1\leq r\leq m} s_{rj}}{s_{ij}}, & \text{if } C_j \text{ is a cost criterion.} \end{cases}$$

因此，每个准则都被转换为效益型。

**步骤 2：列归一化**。对于每个准则 $j$，令

$$\beta_j := \sum_{r=1}^{m} b_{rj}.$$

定义归一化矩阵

$$Z = (z_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$$

by

$$z_{ij} := \frac{b_{ij}}{\beta_j}.$$

**步骤3：逐准则最优**。对于每个 $j \in \{1, \dots, n\}$，定义

$$z_j^\star := \max_{1 \le i \le m} z_{ij},$$

并选择任意一个索引

$$\iota_j \in \arg\max_{1 \le i \le m} z_{ij}.$$

**第4步：准则最优方案的方阵**。定义方阵

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

by

$$a_{ij} := z_{\iota_i j}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

因此， $A$ 的第 $i$行是准则 $C_i$的最优备选方案的归一化准则剖面。特别地,

$$a_{ii} = z_i^\star.$$

**第5步：相对损失矩阵**。定义 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 为

$$p_{ij} := \begin{cases} 0, & i = j, \\ \dfrac{z_j^\star - a_{ij}}{z_j^\star}, & i \neq j. \end{cases}$$

因此， $p_{ij}$ 是选取准则 $C_i$ 的最优备选方案时准则 $C_j$ 的相对损失。

**步骤 6：总损失与准则显著性**。对于每个准则 $j$，定义其总影响损失为

$$L_j := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ij}.$$

定义相应的准则显著性得分为

$$q_j := \frac{1}{1 + L_j}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

**步骤 7：UCILOS 权重向量**。该不确定*CILOS*权重向量为

$$w = (w_1, \dots, w_n)^\top \in [0, 1]^n, \qquad w_j := \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell}, \quad j = 1, \dots, n.$$

**注 4.9.3**。定义 4.10.2 是一种客观赋权构造。它将每个不确定项 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 转换为正代表得分，再对诱导得分矩阵应用基于损失的准则赋权机制，从而推广了准则影响损失的思想。

**定理 4.9.4** （UCILOS 的良定义性）。设

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{CILOS}} = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, M, X_M, \mathrm{Score}_M\big)$$

是定义 *4.10.2* 中的一个 *UCILOS* 实例。假设：

*(A1)* $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 是有限非空集合；

*(A2)*

$$X_M = (\mu_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n};$$

*(A3)* 每个准则 $C_j$ 被指定为效益型或成本型；

*(A4)*

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}_{>0}$$

是一个全映射。

则定义 *4.10.2* 中出现的所有量都是良定义的。更确切地说：

*(i)* 得分矩阵 $S =(^{s_{ij}}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的；

*(ii)* 效益型矩阵 $B =(b_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的；

*(iii)* 归一化矩阵 $Z =(z_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的，并且对于每个 $j$,

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1;$$

*(iv)* 对于每个 $j$，最优值 $z_j^\star$和至少一个最大化元 $\iota_j \in$ 最大值点集$_i\, z_{ij}$ 存在；

*(v)* 方阵 $A =(a_{ij})$ 和相对损失矩阵 $P =(p_{ij})$ 是良定义的，其中

$$0 \le p_{ij} \le 1 \qquad (1 \le i, j \le n);$$

*(vi)* 总损失 $L_j$ 和显著性得分$q_j$ 是良定义的，并满足

$$L_j \in [0, n-1], \qquad q_j \in \left[\frac{1}{n}, 1\right];$$

*(vii)* 权重向量 $w = (w_1, \ldots, w_n)^\top$ 是良定义的，并满足

$$w_j > 0 \qquad \textit{for all } j, \qquad \textit{and} \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

因此，类型为 $M$ 的不确定 *CILOS* 是良定义的。

证明。 根据（A2），对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M).$$

由于根据 (A4)，$\mathrm{Score}_M$ 具有完全性，因此每个值

$$s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij})$$

都有良定义且属于 $\mathbb{R}_{>0}$。因此，得分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$$

是良定义的。这证明了 (i)。

接下来，按照定义 4.10.2 定义 $B = (b_{ij})$。如果 $C_j$ 是效益型准则，那么

$$b_{ij} = s_{ij} > 0.$$

如果 $C_j$ 是成本型准则，那么

$$b_{ij} = \frac{\min_{1\le r\le m} s_{rj}}{s_{ij}}.$$

由于有限集 $\{s_{1j}, \ldots, s_{mj}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 有正最小值，且 $s_{ij} > 0$，因此该商是良定义且严格为正的。因此，每个 $b_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$，所以 $B \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$。这证明了 (ii)。

对于每个 $j$，定义

$$\beta_j := \sum_{r=1}^{m} b_{rj}.$$

由于每个 $b_{rj} > 0$ 和 $m \ge 1$，我们有 $\beta_j > 0$。因此

$$z_{ij} := \frac{b_{ij}}{\beta_j}$$

是良定义且为正的。因此， $Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的。此外，

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_{ij}}{\beta_j} = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} = 1.$$

这证明了 (iii)。

固定 $j \in \{1, \ldots, n\}$。由于有限非空集 $\{z_{1j}, \ldots, z_{mj}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 存在最大值，数

$$z_j^\star := \max_{1\le i\le m} z_{ij}$$

存在，且极大值集合

$$\arg\max_{1\le i\le m} z_{ij}$$

非空。因此可以选择至少一个指标$\iota_j$ 。这证明了 (iv)。

现在定义

$$a_{ij} := z_{\iota_i j}.$$

由于每个 $\iota_i \in \{1, \ldots, m\}$，每个 $a_{ij}$ 都是良定义的，并且属于 $\mathbb{R}_{>0}$。因此， $A = (a_{ij})$ 是良定义的。

对于相对损失矩阵，首先注意到 $z_j^\star > 0$。另外，由于 $z_j^\star$ 是第 $j$ 列中的最大值，

$$0 < a_{ij} \le z_j^\star.$$

因此，对于 $i \neq j$,

$$p_{ij} = \frac{z_j^\star - a_{ij}}{z_j^\star}$$

是良定义的，并满足 $0 \leq p_{ij} \leq 1$。根据定义， $p_{jj} = 0$。因此， $P =(p_{ij})$ 是良定义的，且其所有元素都属于 $[0,1]$。这证明了 (v)。

对于每个 $j$,

$$L_j := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ij}$$

是由 $[0,1]$ 中的 $n-1$ 个数构成的有限和。因此

$$0 \leq L_j \leq n-1.$$

因此,

$$q_j := \frac{1}{1+L_j}$$

是良定义的，并满足

$$\frac{1}{n} \leq q_j \leq 1.$$

这证明了 (vi)。

最后，由于每个 $q_j > 0$，分母

$$\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell$$

都严格为正。因此

$$w_j := \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell}$$

对每个 $j$ 和 $w_j > 0$ 都是良定义的。此外,

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell} = 1.$$

因此， $w$ 是一个良定义的归一化权重向量。这证明了 (vii)。

因此，UCILOS 构造的每一步在数学上都是良定义的 . □

不确定性感知模型下 CILOS 的相关概念列于表 4.10 .

表 4.10：不确定性感知模型下 CILOS 的相关概念。

| $k$ | **相关 CILOS 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 CILOS |
| 2 | 直觉模糊 CILOS |
| 3 | 中智 CILOS |

## 4.10 模糊　　IDOCRIW（模糊熵-CILOS集成客观赋权法）

IDOCRIW 仅通过归一化决策矩阵数据，整合熵离散度和 CILOS影响损失指标，客观地推导准则权重 [572,573]。模糊 IDOCRIW 使用性能的模糊数扩展了 IDOCRIW，以模糊方式计算熵和损失度量，随后对权重进行整体稳健的去模糊化处理 [48,574]。

**定义 4.10.1**（模糊 IDOCRIW 权重（熵–CILOS集成客观赋权））. [48,574]设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $\sim X = (\widetilde{x}_{ij}) \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 为模糊决策矩阵，其中 $\mathbb{F}$ 表示所选的模糊评价类别（例如三角模糊数、区间值直觉模糊数、图像模糊数等）。

假设存在一个得分/去模糊化 映射

$$s : \mathbb{F} \to \mathbb{R}_{>0}$$

该映射可用于进行比较，并得出严格为正的标量

$$d_{ij} := s(\widetilde{x}_{ij}) \quad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n).$$

将准则划分为效益型和成本型：$\mathcal{C} = B \sqcup C$，其中 $B$ 为效益型准则，$C$ 为非效益型准则$\widehat{\quad}$　　$\widehat{\quad}$。通过以下方式构造效益导向（正向）矩阵 $D = (d_{ij})$：

$$\widehat{d}_{ij} := \begin{cases} d_{ij}, & j \in B, \\ \dfrac{\min_{1\le i\le m} d_{ij}}{d_{ij}}, & j \in C, \end{cases} \qquad \text{for all } i, j.$$

（因此，所有准则都转换为“数值越大越好”的方向。）

**(1) 熵客观权重**。定义列归一化比例

$$p_{ij} := \frac{\widehat{d}_{ij}}{\sum_{r=1}^{m} \widehat{d}_{rj}}, \qquad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

并采用约定 $0 \ln 0 := 0$。令 $k := 1/\ln(m)$。准则 $j$ 的熵为

$$E_j := -k \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \ln(p_{ij}),$$

其差异度为 $\Delta_j := 1 - E_j$，熵权重向量为

$$w_j^{(E)} := \frac{\Delta_j}{\sum_{\ell=1}^{n} \Delta_\ell}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

**(2) CILOS客观权重**。对于每个准则 $j$，选取一个索引

$$s_j \in \arg\max_{1\le i\le m} \widehat{d}_{ij}$$

（在准则 $j$ 下表现最佳的备选方案之一）。构造方阵 $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{n\times n}$，方法是

$$b_{ij} := \widehat{d}_{s_i\, j} \qquad (i, j = 1, \dots, n),$$

因此 $\widehat{\ }$在 $b_{ii} = \max_{1 \le r \le m} d_{ri}$ 处。定义相对影响损失矩阵 $R = (r_{ij}) \in [0,1]^{n \times n}$ b y

$$r_{ij} := \frac{b_{jj} - b_{ij}}{b_{jj}}, \qquad r_{jj} := 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

构造（列拉普拉斯）权重系统矩阵 $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$f_{ij} := \begin{cases} r_{ij}, & i \neq j, \\ -\sum_{r=1}^{n} r_{rj}, & i = j. \end{cases}$$

任意满足以下条件的向量 $w^{(C)} \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} \setminus \{0\}$ 均为 *CILOS* 权重向量

$$F\, w^{(C)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j^{(C)} = 1.$$

（在 $R$ 满足标准的不可约性/非退化条件时，这种归一化的非负零向量是唯一的。）

**（3）IDOCRIW 聚合（综合目标权重）**。该模糊 *IDOCRIW* 权重向量通过乘法融合定义

$$w_j^{(\mathrm{IDOCRIW})} := \frac{w_j^{(E)}\, w_j^{(C)}}{\sum_{\ell=1}^{n} w_\ell^{(E)}\, w_\ell^{(C)}}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

然后 $w^{(\mathrm{IDOCRIW})} \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j^{(\mathrm{IDOCRIW})} = 1$。

现在，我们通过将准则影响损失思想扩展到一般不确定模型 $M$，来定义不确定 *CILOS* (UCILOS)。

**定义 4.10.2**（类型为 $M$ 的**不确定 CILOS** (UCILOS)）。令

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

分别表示备选方案集和准则集，其中 $m, n \in \mathbb{N}$ 和 $m, n \ge 1$ .

固定一个具有度域的不确定模型 $M$

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

其中某个整数 $k \ge 1$。

假设每个准则 $C_j$ 均被指定为效益型准则或成本型准则。令

$$X_M = (\mu_{ij})_{m \times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m \times n}$$

是一个不确定决策矩阵，其中 $\mu_{ij} \in$ Dom($M$)是备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$下的不确定性能。

进一步假设一个总分映射

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

固定不变。定义相应的正向评分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}, \qquad s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij}).$$

**步骤 1：效益型变换**。定义 $B = (b_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$为

$$b_{ij} := \begin{cases} s_{ij}, & \text{if } C_j \text{ is a benefit criterion,} \\ \dfrac{\min_{1\le r\le m} s_{rj}}{s_{ij}}, & \text{if } C_j \text{ is a cost criterion.} \end{cases}$$

因此，每个准则都被转换为效益型。

**步骤 2：列归一化**。对于每个准则 $j$，令

$$\beta_j := \sum_{r=1}^{m} b_{rj}.$$

定义归一化矩阵

$$Z = (z_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$$

by

$$z_{ij} := \frac{b_{ij}}{\beta_j}.$$

**步骤 3：逐准则最优**。对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，定义

$$z_j^\star := \max_{1\le i\le m} z_{ij},$$

并任意选择一个索引

$$\iota_j \in \arg\max_{1\le i\le m} z_{ij}.$$

**Step 4：准则最优方案的方阵**。定义方阵

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$

by

$$a_{ij} := z_{\iota_i j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

因此， $A$ 的第 $i$ 行是准则 $C_i$ 下最优备选方案的归一化准则剖面。特别地，

$$a_{ii} = z_i^\star.$$

**步骤 5：相对损失矩阵**。定义 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 如下

$$p_{ij} := \begin{cases} 0, & i=j, \\ \dfrac{z_j^\star - a_{ij}}{z_j^\star}, & i\neq j. \end{cases}$$

因此，$p_{ij}$ 是相对 当选择准则 $C_i$ 的最优备选方案时，准则 $C_j$ 的损失 d.

**步骤 6：总损失与准则显著性**。对于每个准则 $j$，将其总影响损失定义为

$$L_j := \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} p_{ij}.$$

将相应的准则显著性得分定义为

$$q_j := \frac{1}{1+L_j}, \qquad j=1,\dots,n.$$

**步骤 7：UCILOS 权重向量**。该不确定*CILOS*权重向量为

$$w=(w_1,\dots,w_n)^\top \in [0,1]^n, \qquad w_j := \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell}, \quad j=1,\dots,n.$$

**注 4.10.3.** 定义 4.10.2 是一种客观赋权构造。它推广了准则影响损失思想：先将每个不确定项 $\mu_{ij}\in \mathrm{Dom}(M)$ 转换为正代表得分，再对诱导得分矩阵应用基于损失的准则加权机制。

**定理 4.10.4** （UCILOS的良定义性）。 设

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{CILOS}} = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, M, X_M, \mathrm{Score}_M\big)$$

为定义 *4.10.2* 中的一个 *UCILOS* 实例。假设：

*(A1)* $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{C}$ 为有限非空集合；

*(A2)*

$$X_M=(\mu_{ij})_{m\times n}\in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n};$$

*(A3)* 每个准则 $C_j$ 被指定为效益型或成本型；

*(A4)*

$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M)\to \mathbb{R}_{>0}$$

是一个全映射。

$T$因此，定义 *4.10.2* 中出现的所有量都是良定义的。更准确地说：

*(i)* 得分矩阵 $S=(s_{ij})\in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的；

*(ii)* 效益型矩阵 $B=(b_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的；

*(iii)* 归一化矩阵 $Z=(z_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$是良定义的，并且对于每个 $j$，

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = 1;$$

*(iv)* 对于每个 $j$，最优值 $z_j^\star$和至少一个最大化元 $\iota_j \in$ 最大值点集$_i\, z_{ij}$ 存在；

*(v)* 方阵 $A=(a_{ij})$ 和相对损失矩阵 $P=(p_{ij})$ 是良定义的，其中

$$0 \le p_{ij} \le 1 \qquad (1 \le i,j \le n);$$

*(vi)* 总损失 $L_j$ 和显著性得分 $q_j$ 是良定义的，并满足

$$L_j \in [0, n-1], \qquad q_j \in \left[\frac{1}{n}, 1\right];$$

*(vii)* 权重向量 $w=(w_1,\ldots,w_n)^\top$ 是良定义的，并满足

$$w_j > 0 \qquad \textit{for all } j, \qquad \textit{and} \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

因此，类型为 $M$ 的不确定 *CILOS* 是良定义的。

证明。 根据 (A2)，对于每个 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 和 $j \in \{1,\ldots,n\}$，

$$\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M).$$

由于根据 (A4)，$\mathrm{Score}_M$ 具有完全性，因此每个值

$$s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij})$$

都是良定义的，且属于 $\mathbb{R}_{>0}$。因此，得分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$$

是良定义的。这就证明了 (i)。

接下来，按照定义 4.10.2 定义 $B=(b_{ij})$。若 $C_j$ 是效益型准则，则

$$b_{ij} = s_{ij} > 0.$$

如果 $C_j$ 是成本型准则，那么

$$b_{ij} = \frac{\min_{1\le r\le m} s_{rj}}{s_{ij}}.$$

由于有限集 $\{s_{1j},\ldots,s_{mj}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 有正最小值，且 $s_{ij} > 0$，因此该商是良定义且严格为正的。因此，每个 $b_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}$，所以 $B \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$。这就证明了 (ii)。

对每个 $j$，定义

$$\beta_j := \sum_{r=1}^{m} b_{rj}.$$

由于每个 $b_{rj} > 0$ 和 $m \geq 1$，我们有 $\beta_j > 0$。因此

$$z_{ij} := \frac{b_{ij}}{\beta_j}$$

是良定义且为正的。因此 $Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m \times n}$是良定义的。此外，

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_{ij}}{\beta_j} = \frac{1}{\beta_j} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} = 1.$$

这证明了 (iii)。

固定 $j \in \{1, \ldots, n\}$。由于有限非空集 $\{z_{1j}, \ldots, z_{mj}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 有最大值，数值

$$z_j^\star := \max_{1 \leq i \leq m} z_{ij}$$

存在，且极大值集合

$$\arg\max_{1 \leq i \leq m} z_{ij}$$

非空。因此，可以选择至少一个指标$\iota_j$ 。这证明了 (iv)。

现在定义

$$a_{ij} := z_{\iota_i j}.$$

由于每个 $\iota_i \in \{1, \ldots, m\}$，每个 $a_{ij}$ 都是良定义的，且属于 $\mathbb{R}_{>0}$。因此， $A = (a_{ij})$ 是良定义的。

对于相对损失矩阵，首先注意到 $z_j^\star > 0$。此外，由于 $z_j^\star$ 是第 $j$ 列中的最大值，

$$0 < a_{ij} \leq z_j^\star.$$

因此，对于 $i \neq j$，

$$p_{ij} = \frac{z_j^\star - a_{ij}}{z_j^\star}$$

是良定义的，且满足 $0 \leq p_{ij} \leq 1$。根据定义， $p_{jj} = 0$。因此， $P = (p_{ij})$ 是良定义的，且其所有元素均属于 $[0, 1]$。这证明了 (v)。

对于每个 $j$，

$$L_j := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ij}$$

是来自 $[0, 1]$的 $n - 1$ 个数的有限和。因此

$$0 \leq L_j \leq n - 1.$$

因此，

$$q_j := \frac{1}{1 + L_j}$$

是良定义的，并满足

$$\frac{1}{n} \le q_j \le 1.$$

这证明了 (vi)。

最后，由于每个 $q_j > 0$，分母

$$\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell$$

都严格为正。因此

$$w_j := \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell}$$

对每个 $j$ 和 $w_j > 0$ 都是良定义的。此外，

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_j}{\sum_{\ell=1}^{n} q_\ell} = 1.$$

因此， $w$ 是一个良定义的归一化权重向量。这证明了 (vii)。

因此，UCILOS 构造的每一步在数学上都是良定义的。 □

## 4.11 模糊 BWM（模糊最佳-最差法）

BWM 选出最佳与最差准则，比较最优对其他以及其他对最劣，然后求解一个受约束的优化问题，以获得用于多准则决策分析排序任务的、一致的准则权重 [575, 576]。模糊 BWM 用模糊数替代成对比较比率，在一致性约束下求解模糊权重，并通过去模糊化或按可能性排序来确定准则优先级 [577–579]。

**定义 4.11.1** （基于三角模糊数的模糊最佳-最差法（FBWM））。[577–579] 设 $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 为决策准则集（$n \ge 2$）。三角模糊数（TFN）表示为 $\tilde{a} = (a^l,\ a^m,\ a^u)$，其中$0 < a^l \le a^m \le a^u$。

**步骤 1（最佳与最差准则）**。决策者选择：

$$c_B \in \mathcal{C} \ (\text{best/most important}), \qquad c_W \in \mathcal{C} \ (\text{worst/least important}).$$

**步骤 2（模糊成对比较向量）**。决策者使用映射到三角模糊数的语言标度，给出：

- 最优对其他模糊向量

$$\tilde{\mathbf{A}}_B = \big(\tilde{a}_{B1}, \tilde{a}_{B2}, \ldots, \tilde{a}_{Bn}\big), \qquad \tilde{a}_{Bj} = (a^l_{Bj}, a^m_{Bj}, a^u_{Bj}),$$

  其中， $\tilde{a}_{Bj}$ 表示 $c_B$ 优于$c_j$的程度；

- 的模糊 *Others-to-Worst* 向量

$$\tilde{\mathbf{A}}_W = \big(\tilde{a}_{1W}, \tilde{a}_{2W}, \ldots, \tilde{a}_{nW}\big), \qquad \tilde{a}_{jW} = (a^l_{jW}, a^m_{jW}, a^u_{jW}),$$

其中， $\tilde{a}_{jW}$ 表示$c_j$ 优于 $c_W$的程度。

作为中性自比较，令 $\tilde{a}_{BB} = \tilde{a}_{WW} =$(1，1，1)。

**步骤 3（通过线性规划推导模糊权重）**。FBWM 的产出是每个准则对应的三角模糊数权重

$$\tilde{w}_j = (w^l_j, w^m_j, w^u_j) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

以及满意度 $\beta \in [0,1]$。令 $t \in \{l, m, u\}$ 表示三角模糊数分量（下/中/上）。引入容差参数 $d^t_j > 0$ 和 $q^t_j > 0$。

定义如下线性规划:

$$\begin{aligned}
&\max \ \ \beta \\
&\text{s.t.} \ \ 0 \le w^t_B - a^t_{Bj} w^t_j \le d^t_j, && \beta \le 1 - \frac{w^t_B - a^t_{Bj} w^t_j}{d^t_j}, \quad \forall j,\ \forall t \in \{l,m,u\}, \\
&\qquad -q^t_j \le w^t_j - a^t_{jW} w^t_W \le 0, && \beta \le 1 + \frac{w^t_j - a^t_{jW} w^t_W}{q^t_j}, \quad \forall j,\ \forall t \in \{l,m,u\}, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} w^m_i = 1, \\
&\qquad w^u_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} w^l_i \le 1, \qquad w^l_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} w^u_i \ge 1, \qquad \forall j, \\
&\qquad 0 \le w^l_j \le w^m_j \le w^u_j, \qquad \forall j, \\
&\qquad 0 \le \beta \le 1.
\end{aligned}$$

˜ ˜任意最优解 $\{\tilde{w}_j\}_{j=1}^n$ 称为与 ($\mathrm{A}_B$，$\mathrm{A}_W$) 相关联的*FBWM*模糊权重向量。

类型为 ($M$) 的不确定 BWM 定义如下。

**定义 4.11.2** （不确定模型的可容许比较标度）。设 $M$ 为一个度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$（非空）的不确定模型。$M$的一个可容许（比率）比较标度是一个映射

$$\kappa_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [1, \Lambda]$$

其中某个固定常数为 $\Lambda \ge 1$。值 $\kappa_M$($d$)解释为由不确定程度元组 $d \in$ Dom($M$)诱导的清晰偏好强度。

**备注**。 $\kappa_M$ 的选择取决于模型（例如，得分/去模糊化加重新缩放），应由决策分析师明确指定。

**定义 4.11.3**（类型为 $M$ 的不确定 BWM（U-BWM））。设 $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 为满足$n \geq 2$的一组准则。固定一个不确定模型 $M$，其中 Dom($M$) $\neq \emptyset$，并采用定义 4.11.2 中的可容许标度 $\kappa_M$。

**步骤 1（最佳与最差准则）**。选择

$$c_B \in \mathcal{C} \quad (\text{best / most important}), \qquad c_W \in \mathcal{C} \quad (\text{worst / least important}).$$

**步骤 2（不确定比较向量）**。提供以下两个类型为$M$的不确定集（不确定向量）：

- 最优对其他 不确定偏好

$$\mathbf{A}_B^{(M)} : \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad c_j \mapsto a_{Bj}^{(M)},$$

  其中，$a_{Bj}^{(M)}$ 表示 $c_B$ 相对于$c_j$的偏好程度;

- 其他对最差 不确定偏好

$$\mathbf{A}_W^{(M)} : \mathcal{C} \to \mathrm{Dom}(M), \qquad c_j \mapsto a_{jW}^{(M)},$$

  其中，$a_{jW}^{(M)}$ 表示$c_j$ 相对于 $c_W$受偏好的程度。

设中性自比较 $a_{BB}^{(M)} = a_{WW}^{(M)}$，使得

$$\kappa_M\big(a_{BB}^{(M)}\big) = \kappa_M\big(a_{WW}^{(M)}\big) = 1.$$

**第3步（由 $M$诱导的精确强度）**。定义诱导的（清晰）比率强度 es

$$\hat{a}_{Bj} := \kappa_M\big(a_{Bj}^{(M)}\big) \in [1, \Lambda], \qquad \hat{a}_{jW} := \kappa_M\big(a_{jW}^{(M)}\big) \in [1, \Lambda] \quad (j = 1, \ldots, n).$$

**第4步（通过极小极大线性规划推导权重）**。 不确定最佳-最差法权重向量是该线性规划的任一最优解 $w = (w_1, \ldots, w_n)$：

$$\begin{aligned} \min \quad & \xi \\ \text{s.t.} \quad & -\xi \leq w_B - \hat{a}_{Bj} w_j \leq \xi, \qquad j = 1, \ldots, n, \\ & -\xi \leq w_j - \hat{a}_{jW} w_W \leq \xi, \qquad j = 1, \ldots, n, \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \qquad w_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n), \qquad \xi \geq 0. \end{aligned}$$

最优值 $\xi^\star$ 被解释为（模型诱导的）一致性偏差。

**定理 4.11.4 (**U-BWM 的良定义性)。 在定义 *4.11.3* 的假设下（特别是，$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$和 $\kappa_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to [1, \Lambda]$存在），*U-BWM* 优化问题是良定义的：

*(i)* 可行域非空；

*(ii)* 存在一个最优解 $(w^\star, \xi^\star)$ ；

*(iii)* 每个最优权重向量都满足 $w^\star \in \Delta^{n-1} := \{w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \sum_{j=1}^n w_j = 1\}$。

证明。 (i) 由于 Dom($M$) $\neq \emptyset$，不确定比较向量 $\mathrm{A}_B^{(M)}, \mathrm{A}_W^{(M)}$ 可以选取（且已给定），其值属于 Dom($M$)，因此诱导强度 $\hat{a}_{Bj}, \hat{a}_{jW}$ 是 $[1, \Lambda]$ 中良定义的实数。考虑对所有 $j$ 取均匀权重 $w_j := 1/n$ ；此时 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 和 $w_j \geq 0$ 成立。

定义

$$\xi_0 := \max\Big\{ \max_{1\leq j\leq n} \big|w_B - \hat{a}_{Bj} w_j\big|,\ \max_{1\leq j\leq n} \big|w_j - \hat{a}_{jW} w_W\big| \Big\} \ \geq 0.$$

取 $(w, \xi) = (\frac{1}{n}\mathbf{1}, \xi_0)$ 时，定义 4.11.3 中的所有线性不等式均得到满足，因此可行域非空。

(ii) 可行集由有限个线性等式/不等式描述，因此是一个闭多面体。此外，约束 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 和 $w_j \geq 0$ 意味着，对于所有 $j$，都有 $0 \leq w_j \leq 1$ 。对于任意可行的 $w$，选择

$$\xi = \max\Big\{ \max_{j} |w_B - \hat{a}_{Bj} w_j|,\ \max_{j} |w_j - \hat{a}_{jW} w_W| \Big\}$$

总能得到一个可行对 $(w,\ \xi)$，因此目标函数 $\xi$ 的下界为 0。由于单纯形约束使 $w$坐标有界，且不等式迫使 $\xi$ 至少达到有限个连续表达式中的最大值，因此线性目标函数在这个非空闭可行集上能够取到最小值。等价地（这也是线性规划中的标准结论），目标函数有下界的可行线性规划存在最优解。

(iii) 根据构造，每个可行解（因此也包括每个最优解）都满足单纯形约束 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 和 $w_j \geq 0$，即 $w \in \Delta^{n-1}$。 □

不确定性感知模型下 BWM 的相关概念列于表 4.11。

表 4.11：不确定性感知模型下 BWM 的相关概念。

| $k$ | **相关最佳-最差法概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 BWM [580, 581] |
| 2 | 双极模糊 BWM [582] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 BWM [40] |
| 3 | 球形模糊 BWM [583, 584] |
| 3 | 犹豫模糊 BWM [585, 586] |
| 3 | 图片模糊 BWM（参见 [587]） |
| 3 | 中智 BWM [588–590] |
| $n$ | 多因子 BWM |

除了不确定 BWM 之外，其他扩展或相关概念还包括 BWAHP [581], 贝叶斯 BWM [591], 粗糙 BWM [592,593], BWM-TOPSIS [594,595], Z 数 BWM [596], 区间 BWM [597], 稳健 BWM [598],基于信念的 BWM [599], 和灰色 BWM [600, 601] 。

## 4.12 模糊 CRITIC

CRITIC 是一种客观赋权方法，它根据数据离散度和准则间冲突来确定准则权重，侧重于信息丰富、具有区分度且非冗余的准则 [602, 603]。模糊 CRITIC 根据模糊评分的离散度和准则间相关性计算客观准则权重，在评分中侧重于信息丰富且非冗余的准则 [604–606]。

**定义 4.12.1**（模糊 CRITIC 加权）。[604–606] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案集合，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则集合。假设存在一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{X} = \big(\widetilde{x}_{ij}\big)_{m\times n}, \qquad \widetilde{x}_{ij} \in \mathbb{F},$$

其中 $\mathbb{F}$ 是选定的一类模糊评价（例如三角模糊数、梯形模糊数、区间值模糊数等）。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \,\dot\cup\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个去模糊化/得分映射

$$S : \mathbb{F} \to \mathbb{R},$$

该映射将模糊评价转换为实数（例如，对于三角模糊数 $\widetilde{x} = (\ell, m, u)$，可取 $S(\widetilde{x}) = (\ell + m + u)/3$）。定义清晰矩阵 $X = (x_{ij})$ 如下

$$x_{ij} := S(\widetilde{x}_{ij}) \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

**(1) 最小—最大归一化**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$x_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} x_{ij}, \qquad x_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} x_{ij},$$

并且 假设 $x_j^{\max} \neq x_j^{\min}$至少有一个 $j$。归一化矩阵 $R = (r_{ij})$ 定义为

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\[2ex] \dfrac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases}$$

则 $r_{ij} \in [0, 1]$。

**(2) 每个准则的离散度**。设

$$\bar r_j := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}, \qquad \sigma_j := \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(r_{ij} - \bar r_j)^2}.$$

**（3）准则间相关性**。对于 $j,\ k \in \{1, \dots, n\}$ 定义皮尔逊相关系数

$$\rho_{jk} := \frac{\sum_{i=1}^{m}(r_{ij} - \bar r_j)(r_{ik} - \bar r_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(r_{ij} - \bar r_j)^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(r_{ik} - \bar r_k)^2}},$$

当分母非零时（否则设为 $\rho_{jk} := 0$）。

**(4) 信息含量与权重**。定义准则 $C_j$ 的CRITIC信息量为

$$\Gamma_j \;:=\; \sigma_j \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \rho_{jk}\big),$$

并且（当 $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j > 0$时）将模糊CRITIC客观权重定义为

$$w_j \;:=\; \frac{\Gamma_j}{\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_\ell}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

所得向量 $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ 称为与（$\widetilde{X}, S$）相关联的模糊 ***CRITIC*** 权重向量。

**命题4.12.2** （良定义性与单纯形性质）。 在定义*4.12.1*中，假设 $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j > 0$。则对所有 $j$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, $w_j \geq 0$ 。

证明。 对每个 $j$，由定义有 $\sigma_j \geq 0$。此外， $\rho_{jk} \leq 1$，故 $1 - \rho_{jk} \geq 0$，从而 $\sum_{k=1}^{n} (1 - \rho_{jk}) \geq 0$，因此$\Gamma_j \geq 0$。结合 $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j > 0$，公式 $w_j = \Gamma_j / \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_\ell$ 立即得出 $w_j \geq 0$ 与 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ 。 □

利用不确定集，我们将类型 $M$ 的不确定CRITIC赋权定义如下。

**定义4.12.3** （不确定模型的可容许评分映射）. 设 $M$ 为一个不确定模型，其非空度域为Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$。 $M$ 的可容许评分是一个映射

$$S_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

使得对每一个 $d \in$ Dom($M$)， $S_M$($d$)均为有限。（示例包括模糊度的去模糊化/评分函数，或多分量度的标量化映射，例如直觉/中智/多元生成元组。）

**定义4.12.4** （类型 $M$的不确定CRITIC赋权）. 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则，且满足 $m \geq 2$ 与 $n \geq 1$。将准则划分为效益集与成本集:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \,\dot\cup\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定 模型 $M$ ，其Dom($M$) $\neq \emptyset$ ，以及如定义4.12.3所述的可容许评分 $S_M$ .

假设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

其中， $x_{ij}^{(M)}$ 表示备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$下的不确定度评价。

**St步骤 0（通过评分进行清晰投影）**。定义实值矩阵 $X = (x_{ij})$ 如下

$$x_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in \mathbb{R}.$$

**步骤 1（最小—最大归一化）**。对于每个准则 $C_j$，设

$$x_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} x_{ij}, \qquad x_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

定义归一化矩阵 $R=(r_{ij})$ 如下

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij}-x_j^{\min}}{x_j^{\max}-x_j^{\min}}, & \text{if } C_j\in\mathcal{C}^{\text{ben}} \text{ and } x_j^{\max}>x_j^{\min},\\[2mm] \dfrac{x_j^{\max}-x_{ij}}{x_j^{\max}-x_j^{\min}}, & \text{if } C_j\in\mathcal{C}^{\text{cost}} \text{ and } x_j^{\max}>x_j^{\min},\\[2mm] 0, & \text{if } x_j^{\max}=x_j^{\min}. \end{cases}$$

（因此，范围为零的退化准则由 $r_{ij}=0$ 处理。）

**第2步（离散度）**。设

$$\bar r_j := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}, \qquad \sigma_j := \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(r_{ij}-\bar r_j)^2} \quad (j=1,\dots,n).$$

**第3步（准则间相关性）**。对于 $j$，$k\in\{1,\dots,n\}$ 定义

$$\rho_{jk} := \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(r_{ij}-\bar r_j)(r_{ik}-\bar r_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(r_{ij}-\bar r_j)^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(r_{ik}-\bar r_k)^2}}, & \text{if } \sigma_j>0 \text{ and } \sigma_k>0,\\[2mm] 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**第4步（CRITIC信息和客观权重）**。定义 $C_j$ 的信息含量如下

$$\Gamma_j := \sigma_j \sum_{k=1}^{n}\bigl(1-\rho_{jk}\bigr), \qquad j=1,\dots,n.$$

若 $\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j>0$，则将 不确定 *CRITIC* 权重定义为

$$w_j := \frac{\Gamma_j}{\sum_{\ell=1}^{n}\Gamma_\ell}, \qquad j=1,\dots,n.$$

向量 $w=(w_1,\dots,w_n)^\top$ 称为与 $(X^{(M)},S_M)$ 相关联的类型 $M$ 不确定 *CRITIC* 权重向量。

**定理4.12.5** (不确定CRITIC的良定义性)。 在定义*4.12.4*中，假设 $m\ge 2$，$\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset$，且 $S_M$ 是可容许的。那么：

- 矩阵 $X$ 和 $R$ 良定义（所有元素均为有限实数）；
- 对于每个 $j$，$k$，$\rho_{jk}$ 都是良定义的，并满足 $-1\le\rho_{jk}\le 1$；

- $\Gamma_j \geq 0$ 对于所有 $j$;
- 若 $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j > 0$，则所得的权重向量满足

$$w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$$

即， $w \in \Delta^{n-1} : = \{w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\}$。

证明。 由于 $S_M$: Dom($M$) $\to \mathbb{R}$ 可容许，因此每个 $x_{ij} = S_M(x_{ij}^{(M)})$ 都是有限实数，故 $X$是良定义的。对于每个固定的 $j$， $x_j^{\min}$和 $x_j^{\max}$都存在，因为指标集 $\{1, \ldots, m\}$ 是有限的。归一化规则通过与分母 $x_j^{\max} - x_j^{\min} > 0$ 的比率，或在 $x_j^{\max} = x_j^{\min}$时取常数值 0，来定义 $r_{ij}$ 。因此， $R$ 是良定义的，并且其各项均为有限实数。

接下来，根据非负量平方根的定义， $\sigma_j \geq 0$ 成立。若 $\sigma_j = 0$ 或 $\sigma_k = 0$，定义4.12.4令 $\rho_{jk} = 0$，因此它是良定义的。假设 $\sigma_j > 0$ 且 $\sigma_k > 0$。令

$$u_i := r_{ij} - \bar{r}_j, \qquad v_i := r_{ik} - \bar{r}_k \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

那么，$\rho_{jk}$ 的分子等于 $\sum_{i=1}^{m} u_i v_i$，分母等于 $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2}$，在 $\sigma_j > 0$ 和 $\sigma_k > 0$的条件下为正。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\left|\sum_{i=1}^{m} u_i v_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} v_i^2},$$

因此 $|\rho_{jk}| \leq 1$，所以 $-1 \leq \rho_{jk} \leq 1$。

对于每个 $j$， $\sigma_j \geq 0$ 和 $1 - \rho_{jk} \geq 0$ ，因为 $\rho_{jk} \leq 1$。因此 $\sum_{k=1}^{n}(1 - \rho_{jk}) \geq 0$ ，进而 $\Gamma_j = \sigma_j \sum_{k=1}^{n}(1 - \rho_{jk}) \geq 0$。

F最后，如果 $\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j > 0$，那么 $w_j = \Gamma_j / \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_\ell$ 良定义，满足 $w_j \geq 0$，并且

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j}{\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_\ell} = 1.$$

因此 $w \in \Delta^{n-1}$。 □

不确定性感知模型下 CRITIC 的相关概念列于表4.1中 2.

作为不确定 CRITIC 之外的 CRITIC 扩展，若干相关概念也已为人所知，其中包括粗糙 CRITIC [623], 、改进 CRITIC [624, 625], 以及 CRITID [626]。

表4.12：不确定性感知模型下 CRITIC 的相关概念。

| $k$ | **相关 CRITIC 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 CRITIC [607, 608] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 CRITIC [609, 610] |
| 2 | 费马模糊 CRITIC [611, 612] |
| 3 | 图片模糊 CRITIC [613, 614] |
| 3 | 球形模糊 CRITIC [615–617] |
| 3 | 中智 CRITIC [618–620] |
| $n$ | 多元生成 CRITIC [621, 622] |

## 4.13 模糊 MEREC（模糊基于标准移除效应的方法）

基于准则移除效应的方法（MEREC）是一种客观赋权方法，通过衡量移除各准则时总体表现如何变化来确定准则重要性 [627]。作为相关方法，诸如 ITARA 等方法也已为人所知 [628, 629]。模糊 MEREC 通过评估移除各准则所引起的模糊总体表现变化来得出客观权重，并为影响更大的准则赋予更大的权重 [630, 631]。

**定义 4.13.1** （基于三角模糊数的模糊 MEREC（MEREC-F））。 [630,631] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ 分别表示效益型准则集和成本型准则集，其中 $\mathcal{B} \cup \mathcal{K} = \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B} \cap \mathcal{K} = \varnothing$。

假设正三角模糊决策矩阵

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}), \quad 0 < l_{ij} \le m_{ij} \le u_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

**步骤 1（模糊归一化）**。定义归一化三角模糊数 $\tilde{r}_{ij} = (r_{ij}^{l},\ r_{ij}^{m},\ r_{ij}^{u})$ 如下

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \left(l_{ij}/u_j^{\star},\ m_{ij}/u_j^{\star},\ u_{ij}/u_j^{\star}\right), & C_j \in \mathcal{B}, \\ \left(l_j^{-}/u_{ij},\ l_j^{-}/m_{ij},\ l_j^{-}/l_{ij}\right), & C_j \in \mathcal{K}, \end{cases}$$

其中

$$u_j^{\star} := \max_{1\le i\le m} u_{ij} > 0, \qquad l_j^{-} := \min_{1\le i\le m} l_{ij} > 0.$$

那么 $\tilde{r}_{ij}$ 是正三角模糊数，且（按分量）属于 $(0, 1]$。

**步骤 2（标量化／去模糊化）**。通过固定的去模糊化映射 $\delta$，将 $\tilde{r}_{ij}$ 转换为标量 $\eta_{ij} \in (0, 1]$：$\mathrm{TFN}_{>0} \to (0,\ \infty)$。一种标准选择（广泛用于三角模糊数）是

$$\eta_{ij} := \delta(\tilde{r}_{ij}) = \frac{r_{ij}^{l} + 4r_{ij}^{m} + r_{ij}^{u}}{6}.$$

（如果实际中可能出现数值零，可以将 $\eta_{ij}$ 替换为 $\max\{\eta_{ij}, \varepsilon\}$，并使用固定的极小值 $\varepsilon > 0$，以确保 $\ln(\eta_{ij})$ 是良定义的。）

**步骤 3（所有准则下的总体表现）**。为每个备选方案 $A_i$定义，

$$S_i := \ln\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\ln(\eta_{ij})\right|\right).$$

**第4步（留一　　准则下的表现）**。对于每个准则 $C_j$ 和每个备选方案 $A_i$，定义

$$S_i^{(-j)} := \ln\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|\ln(\eta_{ik})\right|\right).$$

**第5步（移除效应）**。对于每个准则 $C_j$，将其移除效应（影响）定义为

$$V_j := \sum_{i=1}^{m}\left|S_i^{(-j)} - S_i\right|.$$

**第6步（客　观准则权重）**。若 $\sum_{j=1}^{n} V_j > 0$，则定义（清晰）MEREC-F 权重 b　　y

$$w_j := \frac{V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

**定理 4.13.2**（MEREC-F 权重的良定义性）。在定义（*MEREC-F*）的假设下，若 $\sum_{j=1}^{n} V_j > 0$，则

$$w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad and \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

此外，当且仅当对于所有 $i$ 均有 $\sum_{j=1}^{n} V_j = 0$ 成立，即移除任一准则都不会改变总体性能值。

证明。根据构造，每个 $V_j$ 都是绝对值的有限和，因此 $V_j \geq 0$。如果 $\sum_{j=1}^{n} V_j > 0$，则$w_j$ 是良定义且非负的，并且

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k} = 1.$$

最后，当且仅当每个 $V_j = 0$均有 $\sum_{j=1}^{n} V_j = 0$ 成立，等价地，对于所有 $i$，$j$均有 $|S_i^{(-j)} - S_i| = 0$，即，对于所有 $i$，$j$均有 $S_i^{(-j)} = S_i$。 □

不确定 MEREC 定义如下。

**定义 4.13.3**（类型 $M$ 的不确定 MEREC 加权）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集，其中 $m \geq 1$ 且 $n \geq 2$。设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$和 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$分别表示效益型准则集和成本型准则集，其中 $\mathcal{B} \cup \mathcal{K} = \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{B} \cap \mathcal{K} = \varnothing$。

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) $\neq \emptyset$，以及一个可容许正评分 $S_M$。设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $X=(x_{ij})$ 如下：

$$x_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in (0,\infty).$$

**步骤 1（正向归一化）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$x_j^{\star} := \max_{1\le i\le m} x_{ij} \;>\; 0, \qquad x_j^{-} := \min_{1\le i\le m} x_{ij} \;>\; 0.$$

定义归一化标量 $\eta_{ij}\in(0,1]$ 通过

$$\eta_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{x_j^{\star}}, & C_j \in \mathcal{B}, \\[2mm] \dfrac{x_j^{-}}{x_{ij}}, & C_j \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

**(O可选的数值稳定化）**。取一个极小常数 $\varepsilon\in(0,\ 1)$ 并替换 $\eta_{ij}$ b y

$$\eta_{ij}^{\varepsilon} := \max\{\eta_{ij},\varepsilon\} \in [\varepsilon,1].$$

为简化符号，以下用$\eta_{ij}$ 表示稳定化后的值。

**步骤 2（所有准则下的总体表现）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义

$$S_i := \ln\left(1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big|\ln(\eta_{ij})\big|\right).$$

**第3步（留一准则性能）**。对于每个 $j\in\{1,\dots,n\}$ 以及每个 $i\in\{1,\dots,m\}$，定义

$$S_i^{(-j)} := \ln\left(1+\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\big|\ln(\eta_{ik})\big|\right).$$

**第4步（移除效应）**。对于每个准则 $C_j$，定义其移除效应如下

$$V_j := \sum_{i=1}^{m}\big|S_i^{(-j)} - S_i\big|.$$

**第5步（客观权重）**。若 $\sum_{j=1}^{n} V_j>0$，则定义不确定 *MEREC* 权重如下

$$w_j := \frac{V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k}, \qquad j=1,\dots,n.$$

向量 $w=(w_1,\dots,w_n)^{\top}$ 称为与 $(X^{(M)},S_M)$ 相关联的类型为 $M$ 的不确定 *MEREC* 权重向量。

**定理 4.13.4**(W　　不确定 MEREC 的定义良好性)。 在定义 *4.13.3* 的假设下：

*1.* 所有量 $\eta_{ij}$、 $S_i$、 $S_i^{(-j)}$ 和 $V_j$ 均良定义且为有限实数，其中 $\eta_{ij} \in (0,1]$ 和$V_j \geq 0$。

*2.* 若 $\sum_{j=1}^{n} V_j > 0$，则这些权重良定义且满足

$$w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$$

*i.e.*, $w \in \Delta^{n-1} := \{w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\}$.

*3.* 此外， $\sum_{j=1}^{n} V_j = 0$ 成立，当且仅当对于所有 $i$ 和 $j$， $S_i^{(-j)} = S_i$ 成立；也就是说，移除任何单个准则都不会改变性能值。

证明。 (1) 根据 $S_M$ 的可容许性，每个 $x_{ij} = S_M(x_{ij}^{(M)})$ 都严格为正且有限。因此，对于每个 $j$，极值 $x_j^\star$ 和 $x_j^-$均存在（指标集有限）且为正。若 $C_j \in \mathcal{B}$，则 $\eta_{ij} = x_{ij}/x_j^\star \in (0,1]$；若 $C_j \in \mathcal{K}$，则 $\eta_{ij} = x_j^-/x_{ij} \in (0,1]$。经过可选的稳定化后， $\eta_{ij} \in [\varepsilon, 1]$。因此 $\ln(\eta_{ij})$ 有定义且有限，所以 $|\ln(\eta_{ij})|$ 为有限值。由此， $S_i$ 和 $S_i^{(-j)}$ 中的和均有限，其参数均为 $> 1$，因此$S_i$ 和 $S_i^{(-j)}$ 均为有限实数。最后，每个 $V_j$ 都是绝对值的有限和，因此 $V_j \geq 0$ 且有限。

(2) 若 $\sum_{j=1}^{n} V_j > 0$，则每个 $w_j = V_j/\sum_{k=1}^{n} V_k$ 都是良定义且非负的。此外，

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k} = \frac{\sum_{j=1}^{n} V_j}{\sum_{k=1}^{n} V_k} = 1,$$

因此 $w \in \Delta^{n-1}$。

(3) 由于对所有 $j$均有 $V_j \geq 0$，当且仅当对所有 $j$有 $V_j = 0$ 时，才有 $\sum_{j=1}^{n} V_j = 0$。但 $V_j = \sum_{i=1}^{m} |S_i^{(-j)} - S_i| = 0$成立当且仅当对所有 $i$有 $|S_i^{(-j)} - S_i| = 0$，等价地对所有 $i$有 $S_i^{(-j)} = S_i$。 □

不确定性感知模型下 MEREC 的相关概念列于表 4.13。

表 4.13：不确定性感知模型下MEREC的相关概念。

| $k$ | **相关MEREC概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊MEREC [632] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊MEREC [633, 634] |
| 3 | 球形模糊MEREC [630, 635] |
| 3 | 中智MEREC [636, 637] |

## 4.14 模糊 FUCOM

FUCOM 对准则进行排序，提取相邻准则之间的比较优先级，并通过最小化与这些比率之间的偏差，同时在实践中满足完全一致性条件来求得权重 [638–640]。模糊 FUCOM 将比较优先级表示为模糊比率，在一致性约束下求解模糊权重，并运用去模糊化／可能性测度，得出稳定的排序结果 [641, 642]。

**定义 4.14.1**（具有三角模糊数的模糊 FUCOM（FUCOM-F））。[641, 642] 设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。假设决策者（DMs）提供了一个重要性排序

$$C_{j(1)} \succcurlyeq C_{j(2)} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq C_{j(n)},$$

其中 $j(\cdot)$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个排列，且允许并列。

**（0）三角模糊数（TFNs）和基本运算**。设

$$\mathsf{TFN}_{>0} := \{(l, m, u) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < l \le m \le u\}.$$

对于 $\mathsf{TFN}_{>0}$ 中的 $\tilde{x} = (l_x, m_x, u_x)$ 和 $\tilde{y} = (l_y, m_y, u_y)$，定义

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y,\ m_x + m_y,\ u_x + u_y), \qquad \tilde{x} \otimes \tilde{y} := (l_x l_y,\ m_x m_y,\ u_x u_y),$$

$$\tilde{y}^{-1} := \Big(\frac{1}{u_y}, \frac{1}{m_y}, \frac{1}{l_y}\Big), \qquad \tilde{x} \oslash \tilde{y} := \tilde{x} \otimes \tilde{y}^{-1} = \Big(\frac{l_x}{u_y},\ \frac{m_x}{m_y},\ \frac{u_x}{l_y}\Big), \qquad \tilde{1} := (1, 1, 1).$$

我们采用三角模糊数上的逐分量预序：

$$\tilde{a} \preceq \tilde{b} \iff a^\ell \le b^\ell,\ a^m \le b^m,\ a^u \le b^u \quad \text{for } \tilde{a} = (a^\ell, a^m, a^u),\ \tilde{b} = (b^\ell, b^m, b^u),$$

以及逐分量绝对值 $|\tilde{a}| := (|a^\ell|, |a^m|, |a^u|)$.

**(1) 连续等级之间的模糊比较优先级**。对于每个等级 $k = 1, \ldots, n-1$，决策者给出一个三角模糊数

$$\tilde{\varphi}_{k/(k+1)} \in \mathsf{TFN}_{>0},$$

其含义是 $C_{j(k)}$ 相对于 $C_{j(k+1)}$ 的比较优先级。

**(2) 未知的模糊权重 模糊权重**。 FUCOM-F 的目标是确定模糊准则权重

$$\tilde{w}_{j(k)} = (w^\ell_{j(k)}, w^m_{j(k)}, w^u_{j(k)}) \in \mathsf{TFN}_{\ge 0} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

具有通常的三角模糊数可行性 $0 \le w^\ell_{j(k)} \le w^m_{j(k)} \le w^u_{j(k)}$。

**(3) FUCOM-F 一致性条件（理想等式）**。FUCOM 一致性要求有两个：

（C1）**（比率一致性）**对于每个 $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{\tilde{w}_{j(k)}}{\tilde{w}_{j(k+1)}} = \tilde{\varphi}_{k/(k+1)} \qquad \text{equivalently} \qquad \tilde{w}_{j(k)} = \tilde{w}_{j(k+1)} \otimes \tilde{\varphi}_{k/(k+1)}.$$

（C2）**（传递性）**对于每个 $k = 1, \ldots, n-2$,

$$\frac{\tilde{w}_{j(k)}}{\tilde{w}_{j(k+2)}} = \tilde{\varphi}_{k/(k+1)} \otimes \tilde{\varphi}_{(k+1)/(k+2)} \qquad \text{equivalently} \qquad \tilde{w}_{j(k)} = \tilde{w}_{j(k+2)} \otimes \tilde{\varphi}_{k/(k+1)} \otimes \tilde{\varphi}_{(k+1)/(k+2)}.$$

在实践中，精确等式 可能并不成立；因此，FUCOM-F 将偏离完全一致性的程度降至最小 .

**（4）FUCOM-F 优化模型（最小化偏离最大一致性）**。令$\xi \geq 0$ 为一个（清晰的）偏差变量（DMC）。FUCOM-F 通过求解以下问题确定模糊权重:

$$\text{最小化 } \xi \tag{4.11}$$

$$\text{s.t. } \left|\tilde{w}_{j(k)} - \tilde{w}_{j(k+1)} \otimes \tilde{\varphi}_{k/(k+1)}\right| \preceq {}^{(\xi,\ \xi,\ \xi)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4.12}$$

$$\left|\tilde{w}_{j(k)} - \tilde{w}_{j(k+2)} \otimes \tilde{\varphi}_{k/(k+1)} \otimes \tilde{\varphi}_{(k+1)/(k+2)}\right| \preceq (\xi, \xi, \xi), \qquad k = 1, \ldots, n-2, \tag{4.13}$$

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \tilde{w}_{j(k)} = 1, \tag{4.14}$$

$$0 \leq w_{j(k)}^{\ell} \leq w_{j(k)}^{m} \leq w_{j(k)}^{u}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4.15}$$

若 $\xi = 0$ 可实现，则所得权重满足完全（模糊）一致性。

**(5) 去模糊化（可选；清晰权重）**。对于 $\tilde{w} = (w^{\ell},\ w^{m},\ w^{u})$，一种常见的去模糊化方法是分级均值积分表示法（GMIR）:

$$\mathrm{GMIR}(\tilde{w}) := \frac{w^{\ell} + 4w^{m} + w^{u}}{6}.$$

定义清晰权重并（可选）重新归一化:

$$w_i := \mathrm{GMIR}(\tilde{w}_i), \qquad w_i \leftarrow \frac{w_i}{\sum_{t=1}^{n} w_t} \quad \text{so that} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Th所得结果$(w_1, \ldots, w_n)$ 称为*FUCOM-F*（去模糊化）准则权重向量 .

利用不确定集，我们将不确定 FUCOM（U-FUCOM）定义如下。

**定义 4.14.2** （不确定 FUCOM（U-FUCOM）：期望值实现）。设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 是一个有限准则集，$n \geq 2$。假设决策者提供一个重要性顺序

$$C_{j(1)} \succcurlyeq C_{j(2)} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq C_{j(n)},$$

其中，$j(\cdot)$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个排列（允许并列）。在固定的不确定性空间（$\Gamma$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$）上进行研究。

**（1）不确定比较优先级**。对于每个连续排序 $k = 1, \ldots, n-1$，令

$$\Phi_k : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

是表示 $C_{j(k)}$ 相对于 $C_{j(k+1)}$ 的不确定比较优先级系数。假设:

$$\Phi_k(\gamma) \subseteq \mathbb{R}_{>0} \quad (\forall \gamma \in \Gamma), \qquad \varphi_k := \mathbb{E}[\Phi_k] \in (0, \infty).$$

另定义 $\varphi_{k,\ k+2} := \varphi_k\varphi_{k+1}$ 对于 $k = 1, \ldots, n-2$。

**(2) 决策变量（清晰权重）和偏差。** 设 $w_{j(1)}, \ldots, w_{j(n)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为未知准则权重，并设 $\xi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为完全一致性偏差变量。

**(3) U-FUCOM 优化模型。** U-FUCOM 通过求解线性规划确定 $(w,\ \xi)$。 :

$$\text{最小值 } \xi \tag{4.16}$$

$$\text{s.t. } -\xi \leq w_{j(k)} - \varphi_k\, w_{j(k+1)} \leq \xi, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4.17}$$

$$-\xi \leq w_{j(k)} - \varphi_{k,k+2}\, w_{j(k+2)} \leq \xi, \qquad k = 1, \ldots, n-2, \tag{4.18}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_{j(k)} = 1, \tag{4.19}$$

$$w_{j(k)} \geq 0\ (k = 1, \ldots, n), \qquad \xi \geq 0. \tag{4.20}$$

任一最优解 $w^\star = (w_1^\star, \ldots, w_n^\star)$（其指标由 $j(\cdot)$ 置换还原）称为 *U-FUCOM* 权重向量。若最优值满足 $\xi^\star = 0$，则所得权重与期望比率 $\varphi_k$ 及传递性乘积 $\varphi_k\varphi_{k+1}$（完全）一致。

**定义 4.14.3**（U-FUCOM 的不确定集输出）。 令 $w^\star$ 为定义 4.14.2 中的任意一个 U-FUCOM 最优权重向量。定义单值不确定集

$$W_i : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad W_i(\gamma) := \{w_i^\star\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

则 $W = (W_1, \ldots, W_n)$ 称为 *U-FUCOM* 不确定权重向量。

**定理 4.14.4**（U-FUCOM 的不确定集结构与良定义性）。 假设定义 *4.14.2* 的设定，并满足：

（A1）（正有限期望比率） $\varphi_k = \mathbb{E}[\Phi_k] \in (0,\ \infty)$ 对所有 $k = 1, \ldots, n-1$均成立。

则：

（i）（*4.16*）–（4.20）的可行集非空；

(ii) 存在最优解$(w^\star, \xi^\star)$ ；

(iii) 每个最优权重向量都满足 $w_i^\star \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^n w_i^\star = 1$；

(iv) 产出 $W = (W_1, \ldots, W_n)$ 在定义 *4.14.3* 中是关于$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$的不确定集结构化输出 .

证明。**(i) 可行性。** 考虑由 $\bar{w}_i := 1/n$ 定义的均匀权重向量 $\bar{w}$，适用于所有 $i$。Let

$$B := \max\Big\{1,\ \max_{1\leq k\leq n-1} \varphi_k,\ \max_{1\leq k\leq n-2} \varphi_k\varphi_{k+1}\Big\} \in (0, \infty).$$

对于任意 $k$,

$$\left|\bar{w}_{j(k)} - \varphi_k\, \bar{w}_{j(k+1)}\right| \le \bar{w}_{j(k)} + \varphi_k\, \bar{w}_{j(k+1)} \le \frac{1}{n} + \frac{\varphi_k}{n} \le \frac{1+B}{n},$$

并且类似地

$$\left|\bar{w}_{j(k)} - (\varphi_k\varphi_{k+1})\, \bar{w}_{j(k+2)}\right| \le \frac{1}{n} + \frac{\varphi_k\varphi_{k+1}}{n} \le \frac{1+B}{n}.$$

He ¯ ¯nce（$\bar{w}, \xi$），其中 $\xi := (1+B)/n$ 满足所有约束，因此可行集非空 ty.

**(ii) 优化器的存在性**。所有可行的 $w$ 都位于标准单纯形中

$$\Delta := \{w \in \mathbb{R}^n :\ w_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\},$$

¯该集合是紧的。此外，(i) 部分表明存在一个可行点满足 $\xi = \xi$，因此最优值¯满足 $0 \le \xi^\star \le \xi$。所以，只需在紧集上最小化连续函数（$w, \xi$） $\mapsto \xi$

$$\mathcal{F} \cap \left(\Delta \times [0, \bar{\xi}]\right),$$

其中 $\mathcal{F}$ 是可行集；由于 (4.17)–(4.20) 中的所有约束都是闭线性不等式/等式，因此该集合是紧的。根据魏尔斯特拉斯定理，存在一个优化器（$w^\star, \xi^\star$）。

**（iii）归一化和非负性**。这些条件由（4.19）–（4.20）直接保证。

**(iv) 不确定集结构**。对于每个 $i$，映射 $W_i(\gamma) = \{w_i^\star\}$ 均为常数（单值），因此可测，故为一个不确定集。因此，$W = (W_1, \ldots\ldots, W_n)$ 是 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 上的不确定集结构化输出。

□

# 第5章

# 结构／因果决策建模（准则间影响）

结构／因果建模方法（例如 DEMATEL、ISM、MICMAC、模糊认知图）可获取准则间影响矩阵、推导因果图、识别驱动／依赖因素，并据此确定准则的优先级。

为方便起见，表5.1列出了本章所考虑的四种结构/因果决策建模框架的简要比较。

表5.1：四种结构/因果决策建模框架的简要比较。

| 方法 | 主要目的 | 典型投入 / 核心机制<br>nism | 典型产出 / 在<br>分析 |
|---|---|---|---|
| DEMATEL | 分析强度和方向<br>准则间因果关<br>系的识别。 | 直接影响矩阵；正规<br>化与总关系矩阵计算；<br>因果分析——<br>通过显著度和关系进行分析<br>指标。 | 原因/结果分组、影响<br>强度和总体中心度<br>准则。 |
| ISM | 从成对影响推导层次结构模<br>通过成对影响关系建立结构模型-<br>性或可达性判断。 | 基于可达性的关系矩阵；<br>传递闭包；层级划分；<br>因素。 | A 分层的 有向的 层级结构<br>展示哪些因素属于基础<br>层、中间层或顶层 |
| MICMAC | 根据因素进行分类<br>驱动力和依赖度<br>力。 | 可达矩阵（通常由解释结构模型得出）；行列聚合和<br>基于象限的<br>分类。<br>分类。 | 。<br>将因素划分为自<br>主型、 依赖型、联动型<br>和驱动类。 |
| FCM | 对反馈丰富的因果<br>系统建模并模拟其动态<br>随时间变化的动态行为。 | 有符号加权因果图（或<br>权重矩阵），以及一条<br>激活／更新规则。 | 动态轨迹， 均衡态<br>rium状态、循环和情景-<br>基于的系统 行为在<br>反馈。 |

## 5.1 模糊 DEMATEL（模糊决策试验与评价实验室）

DEMATEL 使用直接影响矩阵分析准则之间的因果关系，计算总影响，并将因素划分为原因组和结果组 [643–645]。模糊 DEMATEL 使用模糊直接关系矩阵对准则之间的不确定因果影响进行建模，推导总关系，并通过显著度（D+R）和关系（D−R）识别因果组 [154, 646, 647]。

**定义 5.1.1**（基于三角模糊数的模糊 DEMATEL 数据和输出）。[154, 646, 647] 设 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$为准则集。设 $\mathsf{TFN} := \{(l,\ m,\ u) \in \mathbb{R}^3 \colon\ l \le m \le u\}$。

**(1) 语言术语到模糊数的编码与专家聚合**。设 $\mathcal{L}$ 为语言标度，且 $\varphi \colon \mathcal{L} \to [0,1]^3$ 将每个语言术语 $\ell$ 映射为一个三角模糊数 $\varphi(\ell) = (l_\ell,\ m_\ell,\ u_\ell)$（例如，5级标度）。假设 $P \ge 1$ 位专家给出关于影响 $C_i \to C_j$ 的判断 $\ell_{ij}^{(p)} \in \mathcal{L}$。定义各个模糊直接关系矩阵

$$\tilde{X}^{(p)} = \big(\tilde{x}_{ij}^{(p)}\big)_{n\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij}^{(p)} := \varphi(\ell_{ij}^{(p)}), \qquad \tilde{x}_{ii}^{(p)} = (0,0,0),$$

及其分量均值（聚合）

$$\tilde{X} = \big(\tilde{x}_{ij}\big)_{n\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} := \frac{1}{P}\sum_{p=1}^{P} \tilde{x}_{ij}^{(p)}.$$

**(2) 去模糊化、归一化和总关系**。对于三角模糊数 $\tilde{x} = (l,\ m,\ u)$，将最佳非模糊性能去模糊化定义为

$$\mathrm{BNP}(\tilde{x}) := \frac{l + m + u}{3}.$$

˜对各个元素进行去模糊化，以得到清晰直接关系矩阵

$$X = (x_{ij}), \qquad x_{ij} := \mathrm{BNP}(\tilde{x}_{ij}).$$

Let

$$s := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad N := \frac{1}{s}\,X.$$

假设 $\rho(N) < 1$。总关系矩阵为

$$T := N(I - N)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} N^k.$$

**(3) 发出/接收及因果指标**。令 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ 为全1向量，并定义

$$D := T\mathbf{1}, \qquad R := T^{\mathsf{T}}\mathbf{1}.$$

对于每个准则 $C_i$，定义

$$\mathrm{Prominence}_i := D_i + R_i, \qquad \mathrm{Relation}_i := D_i - R_i.$$

那么，显著度$_i$ 度量总体中心度，而关系$_i > 0$ （分别为 $< 0$）表示净原因（分别为净结果）。

**定义 5.1.2**（不确定DEMATEL（U-DEMATEL）：期望值实现）。令 $C = \{C_1, \dots, C_n\}$为具有 $n \ge 2$的有限准则集，并固定一个不确定性空间（$\Gamma,\ \mathcal{L},\ \mathcal{M}$）。

**(1) 不确定直接关系矩阵**。一个不确定直接影响评估是一个 $n \times n$ 矩阵

$$\widetilde{X} = \big(\widetilde{X}_{ij}\big) \in \mathsf{US}(\mathbb{R}_{\ge 0})^{n\times n}, \qquad \widetilde{X}_{ii} \equiv 0,$$

~其中，每个元素 $X_{ij} : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 是对（非负）直接影响$C_i \to C_j$进行编码的不确定数。假设期望值存在，并定义清晰期望直接关系矩阵

$$X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}, \qquad x_{ij} := \mathbb{E}[\widetilde{X}_{ij}] < \infty.$$

**（2）归一化**。令

$$s := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.$$

假设 $s > 0$，并定义归一化矩阵

$$N := \frac{1}{s} X.$$

**（3）总关系矩阵**。 利用诺伊曼级数定义总关系矩阵

$$T := \sum_{k=1}^{\infty} N^k,$$

当级数收敛时。（等价地，级数收敛时，可写为 $T = N(I - N)^{-1}$。）

**（4）显著度与关系指标**。令 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ 为全1向量，并设

$$D := T\mathbf{1}, \qquad R := T^{\mathsf{T}}\mathbf{1}.$$

对于每个准则 $C_i$，定义

$$\text{Prominence}_i := D_i + R_i, \qquad \text{Relation}_i := D_i - R_i.$$

然后，$\text{Relation}_i > 0$ 表示净原因，$\text{Relation}_i < 0$ 表示净结果（相对于期望影响网络）。

使用不确定集，我们定义 U-DEMATEL 如下。

**定义 5.1.3**（U-DEMATEL 的不确定集输出）。 设 $(\text{显著度}_i,\ \text{关系}_i)_{i=1}^{n}$ 为由定义 5.1.2 产生的指标。定义单值不确定集

$$\Pi_i : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \Pi_i(\gamma) := \{\text{Prominence}_i\}, \qquad \mathcal{R}_i : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \mathcal{R}_i(\gamma) := \{\text{Relation}_i\}.$$

集合 $\big((\Pi_i, \mathcal{R}_i)\big)_{i=1}^{n}$ 称为*U-DEMATEL* 不确定指标族。

**定理 5.1.4**（U-DEMATEL 的不确定集结构和良定义性）。 在定义 *5.1.2* 的设定下，假设：

~**(A1)** *(*有限期望*)* $x_{ij} = \mathbb{E}[X_{ij}] < \infty$ 对于所有 $i$，$j$以及 $X \neq 0$*(*因此 $s > 0$*)*。

(A2)*(* 谱半径条件*)* $\rho(N) < 1$，其中 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径 $s.$

则：

(i) 级数 $T = \sum_{k=1}^{\infty} N^k$ 收敛（逐元素且在任意矩阵范数下）；

(ii) $(I - N)$ 可逆，且 $T = N(I - N)^{-1}$；

(iii) 向量 $D = T\mathbf{1}$ 和 $R = T^{\mathsf{T}}\mathbf{1}$ 均为良定义且有限；

(iv) 指标 显著度$_i$ 和 关系$_i$ 均为良定义的实数；

(v) $t$ 定义 *5.1.3* 中的输出在 （$\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ ）.

证明。 **(i)** 根据 (A2)，矩阵 $N$ 满足 $\rho(N) < 1$。线性代数中的一个标准结果表明，对于任意诱导矩阵范数 $\|\cdot\|$，都存在 $k_0$ 使得 $\|N^{k_0}\| < 1$；因此， $\sum_{k\geq 1} N^k$ 在该范数下绝对收敛。因此，诺伊曼级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} N^k$$

收敛， $T = \sum_{k=1}^{\infty} N^k$ 也收敛。

**(ii)** 由于 $\sum_{k=0}^{\infty} N^k$ 收敛，诺伊曼级数恒等式成立：

$$(I - N)\left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k\right) = I = \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^k\right)(I - N),$$

因此 $(I - N)$ 可逆，且

$$(I - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} N^k.$$

两边乘以 $N$ 得

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} N^k = N \sum_{k=0}^{\infty} N^k = N(I - N)^{-1}.$$

**(iii)** 根据(i)， $T$具有有限实数项，因此 $D = T\mathbf{1}$ 和 $R = T\intercal\mathbf{1}$是 $\mathbb{R}^n$中的有限向量。

**(iv)** 每个显著度$_i = D_i + R_i$ 和关系$_i = D_i - R_i$ 因此都是有限实数。

**(v)** 对于每个 $i$， $\Pi_i(\gamma) = \{\text{显著度}_i\}$ 和 $\mathcal{R}_i(\gamma) = \{\text{关系}_i\}$ 都是常值单值映射，因此可测，进而是不确定集。这便在$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$上产生了不确定集结构化输出。 □

不确定性感知模型下DEMATEL的相关概念列于表5.2。

不确定DEMATEL也已向其他方向扩展；例如，粗糙 DEMATEL [666,AHP-DEMATEL 667], TOPSIS-DEMATEL [668,669], 区间 DEMATEL [670,671], 语言 DEMATEL [672,673], 和灰色 DEMATEL [674,675],也被视为相关变体。

表5.2：不确定性感知模型下 DEMATEL 的相关概念。

| $k$ | 相关 DEMATEL 概念 | 代表性参照点 |
|---|---|---|
| 1 | 模糊 DEMATEL | [648, 649] |
| 2 | 直觉模糊决策试验与评价实验室法 | [650–652] |
| 2 | 双极模糊决策试验与评价实验室法 | [653, 654] |
| 2 | 勾股模糊决策试验与评价实验室法 | [655, 656] |
| 2 | 费马提模糊决策试验与评价实验室法 | [657–659] |
| 3 | 图像模糊决策试验与评价实验室法 | [660] |
| 3 | 犹豫模糊决策试验与评价实验室法 | [661] |
| 3 | 球形模糊DEMATEL | [662, 663] |
| 3 | 中智DEMATEL | [664, 665] |

## 5.2 模糊解释结构模型（模糊解释结构模型）

解释结构模型根据专家对成对可达性的判断对复杂因素进行结构化，构建传递可达矩阵，并推导出分层有向图 [678–680]。模糊解释结构模型以语言判断得出的分级隶属度取代二元可达性，通过传递闭包传播模糊性，并生成分层影响图 [681, 682]。作为一种扩展，模糊总体解释结构模型等概念也已得到研究 [683, 684]。

**定义 5.2.1**（模糊解释结构模型（模糊解释结构模型））。[681, 682] 设 $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$为一个因素（系统变量）的有限集，其中 $n \geq 2$。

**步骤 1（方向判断：SSIM符号）**。对于每个无序对 $\{i, j\}$（其中 $i \neq j$），专家使用以下方式指定影响方向

$$s_{ij} \in \{V, A, X, O\},$$

解释如下：

$V$：$f_i$ 影响 $f_j$，$A$：$f_j$ 影响 $f_i$，$X$：$f_i$ 和 $f_j$ 相互影响，$O$：$f_i$ 和 $f_j$ 互不相关。

（等价地，也可以将这些符号存储在自结构交互矩阵（SSIM）中。）

**步骤 2（模糊影响强度）**。确定一组表示影响强度的 $\mathbb{F}$ 模糊度，并建立从语言术语到 $\mathbb{F}$的映射。常见的选择包括：

- $\mathbb{F} = [0, 1]$（直接模糊度），或
- $\mathbb{F} = \mathrm{TFN}^{[0,1]}$（$[0, 1]$内的三角模糊数）。

对于每一对 $\{i, j\}$ 与 $i \neq j$，赋予一个模糊影响强度

$$\tilde{a}_{ij} \in \mathbb{F}$$

该强度对应于专家对影响程度的语言评价。

~**第3步（模糊邻接／AFSSIM）**。定义（可能已聚合的）模糊邻接矩阵 $A = (\tilde{a}_{ij}^{\rightarrow})_{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$，方法是设定 $\tilde{a}_{ii}^{\rightarrow} := 1_{\mathbb{F}}$（完全自可达性），并且对于 $i \neq j$,

$$(\tilde{a}_{ij}^{\rightarrow}, \tilde{a}_{ji}^{\rightarrow}) := \begin{cases} (\tilde{a}_{ij},\, 0_{\mathbb{F}}), & s_{ij} = V, \\ (0_{\mathbb{F}},\, \tilde{a}_{ij}), & s_{ij} = A, \\ (\tilde{a}_{ij},\, \tilde{a}_{ij}), & s_{ij} = X, \\ (0_{\mathbb{F}},\, 0_{\mathbb{F}}), & s_{ij} = O, \end{cases}$$

其中 $0_{\mathbb{F}}$ 和 $1_{\mathbb{F}}$ 表示 $\mathbb{F}$中的零元与单位元。若多位专家提供矩阵 $\widetilde{A}^{(1)}$，……，$\widetilde{A}^{(p)}$，则其聚合（AFSSIM）由固定聚合算子Agg：$\mathbb{F}^p \to \mathbb{F}$ 逐元素应用而得到：

$$\widetilde{A}_{ij} := \mathrm{Agg}\big(\widetilde{A}_{ij}^{(1)}, \ldots, \widetilde{A}_{ij}^{(p)}\big).$$

**第4步（通过模糊传递闭包得到模糊可达矩阵）**。假设 $\mathbb{F}$ 支撑模糊合取 $\wedge$ 与析取 $\vee$（例如，$[0,1]$上的最小值／最大值）。对于 $\mathbb{F}$上的矩阵，定义最大–最小乘积
$\circ$ by

$$(\widetilde{P} \circ \widetilde{Q})_{ik} := \bigvee_{j=1}^{n} \big(\widetilde{P}_{ij} \wedge \widetilde{Q}_{jk}\big).$$

设 $\widetilde{A}^{(1)} := \widetilde{A}$ 且 $\widetilde{A}^{(t+1)} := \widetilde{A}^{(t)} \circ \widetilde{A}$。模糊可达矩阵（模糊可达矩阵）定义为模糊传递闭包

$$\widetilde{R} := \widetilde{A}^{(1)} \;\vee\; \widetilde{A}^{(2)} \;\vee\; \cdots \;\vee\; \widetilde{A}^{(n)}.$$

**步骤5（去模糊化与阈值化：去模糊化二元可达矩阵）**。固定一个清晰得分/去模糊化映射得分：$\mathbb{F} \to [0,1]$ 以及阈值 $\theta \in (0,1]$。将去模糊化（二元）可达矩阵 $D = (d_{ij}) \in \{0,1\}^{n\times n}$ 定义为

$$d_{ij} := \begin{cases} 1, & \mathrm{Score}(\widetilde{R}_{ij}) \geq \theta, \\ 0, & \mathrm{Score}(\widetilde{R}_{ij}) < \theta. \end{cases}$$

**步骤6（层级划分与ISM层级结构）**。对于每个 $i$，定义可达集、先行集和交集：

$$\mathrm{Reach}(i) := \{\, f_j \in \mathcal{F} \mid d_{ij} = 1 \,\}, \qquad \mathrm{Ante}(i) := \{\, f_j \in \mathcal{F} \mid d_{ji} = 1 \,\}, \qquad \mathrm{Inter}(i) := \mathrm{Reach}(i) \cap \mathrm{Ante}(i).$$

顶层由所有满足Reach($i$) = Inter($i$)的 $f_i$ 组成。移除这些因素，并在剩余集合上重复同样的构造，直到所有因素都被分配到各层级。所得分层有向图（当 $d_{ij} = 1$时含边 $f_i \to f_j$）称为由专家判断及所选模糊/去模糊化设定导出的模糊*ISM*模型。

**命题5.2.2**（基本适定性与终止）。假设 $\mathcal{F}$ 是有限的，且 $\mathbb{F}$ 容许 $\wedge$、$\vee$，从而最大–最小合成有定义。则：

- 定义 *5.2.1* 中的模糊传递闭包 $\widetilde{R}$ 是良定义的；

- $f$或任意评分映射 得分 和阈值 $\theta \in (0,1]$, 二值矩阵 $D$ 是良定义的 *ed;*
- 层级划分程序至多经过 $n$ 次迭代后终止，并将每个因素恰好分配到一个层级。

证明。 $\widetilde{A}$ 的所有元素均属于 $\mathbb{F}$，而 $\widetilde{A}^{(t)}$ 由有限次 $\wedge$, $\vee$ 运算得到，因此是良定义的； $R$ 作为有限并也同样良定义。应用得分计算和阈值化后，每一对（$i$, $j$）都得到一个二元元素，因此 $D$是良定义的。在每次层级划分迭代中，至少有一个因素会被选入当前顶层（这是有限集上基于可达性／前件的划分的一项标准性质），因此剩余集合会严格缩小。所以，该程序至多经过 $n$ 步后终止；由于被移除集合之间互不相交，每个因素都恰好被分配到一个层级。 □

现在，我们通过允许成对影响取任意不确定模型 $M$中的值，来推广这一框架。

**定义5.2.3** （类型 $M$的不确定解释结构模型）**.** 设

$$\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

是因素的有限非空集，其中 $n \geq 1$。固定一个不确定模型 $M$，其度域

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

为某个整数 $k \geq 1$。

假设直接影响结构由一个不确定影响关系表示

$$R_M : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

其中 $R_M(f_i, f_j)$表示因素 $f_i$ 直接影响因素 $f_j$的不确定度。

进一步固定:

- 一个总分映射
$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [0,1],$$
它将不确定的影响值转换为标量影响强度;
- 一个阈值
$$\theta \in (0,1].$$

**步骤 1（评分邻接矩阵）**。定义评分邻接矩阵

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \in [0,1]^{n\times n}$$

by

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ \mathrm{Score}_M\big(R_M(f_i, f_j)\big), & i \neq j. \end{cases}$$

因此自可达　　能力固定为 1，而非对角元素则由不确定关系导出　　.

**步骤2（最大–最小可达闭包）**。 对于矩阵 $P$， $Q \in [0,1]^{n\times n}$，将其最大–最小乘积$P \circ Q$ 定义为

$$(P \circ Q)_{ik} := \max_{1\le j\le n} \min\{P_{ij}, Q_{jk}\}.$$

递归地定义

$$A^{[1]} := A, \qquad A^{[t+1]} := A^{[t]} \circ A \qquad (t \ge 1).$$

该不确定可达矩阵定义为

$$\widetilde{R} := A^{[1]} \vee A^{[2]} \vee \cdots \vee A^{[n]},$$

其中 $\vee$ 表示逐元素最大值。记

$$\widetilde{R} = (r_{ij})_{n\times n},$$

each $r_{ij} \in [0,1]$ 表示从 $f_i$ 到 $f_j$的聚合不确定可达强度　　.

**第3步（二元可达矩阵）**。定义二元可达矩阵

$$D = (d_{ij})_{n\times n} \in \{0,1\}^{n\times n}$$

通过阈值化：

$$d_{ij} := \begin{cases} 1, & r_{ij} \ge \theta, \\ 0, & r_{ij} < \theta. \end{cases}$$

**第4步（层级划分）**。设

$$U_1 := \mathcal{F}.$$

对于每次迭代 $t \ge 1$，在给定 $U_t \ne \varnothing$的条件下，对每个 $f_i \in U_t$定义：

$$\mathrm{Reach}_t(i) := \{\, f_j \in U_t : \; d_{ij} = 1 \,\},$$

$$\mathrm{Ante}_t(i) := \{\, f_j \in U_t : \; d_{ji} = 1 \,\},$$

$$\mathrm{Inter}_t(i) := \mathrm{Reach}_t(i) \cap \mathrm{Ante}_t(i).$$

第 $t$层级为

$$L_t := \{\, f_i \in U_t : \; \mathrm{Reach}_t(i) = \mathrm{Inter}_t(i) \,\}.$$

如果 $U_t \ne \varnothing$，移除已识别的层级，并定义

$$U_{t+1} := U_t \setminus L_t.$$

重复此过程，直到剩余集合变为空集。

层级的有序族

$$(L_1, L_2, \ldots, L_T)$$

以及 $\mathcal{F}$ 上的有向图，其边由下式给出

$$f_i \to f_j \quad \Longleftrightarrow \quad d_{ij} = 1$$

称为由类型为 $M$ 的不确定*ISM*模型诱导

$$(\mathcal{F}, R_M, \mathrm{Score}_M, \theta).$$

**定理 5。** **2.4** (不确定ISM的定义良好性)。 假设定义*5.2.3*中的数据满足 $y$:

*(A1)* $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ 有限且非空；*(A2)* $R_M$ :
$\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathrm{Dom}(M)$ 是全映射；*(A3)* 得分 $_M$ :
$\mathrm{Dom}(M)\ \to [0,1]$ 是全映射；*(A4)* $\theta \in (0,1]$。

那么：

*(i)* 评分邻接矩阵 $A$、所有幂 $A^{[t]}(t = 1$、. . . 、 $n)$以及不确定可达矩阵 $\widetilde{R}$均为良定义；

*(ii)* 二元可达矩阵 $D$ 为良定义、自反且传递；

*(iii)* 对于每次迭代 $t$ *with* $U_t \neq \varnothing$，层级 $L_t$ 均良定义且非空；

*(iv)* 层级划分过程至多经过 $n$ 次迭代后终止；

*(v)* 所得层级 $L_1$,. . . , $L_T$ 两两不相交，且满足

$$\mathcal{F} = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_T.$$

因此，类型为 $M$ 的不确定解释结构模型是良定义的。

证明。 **(i)** $A$、 $A^{[t]}$**和** $\widetilde{R}$**的良定义性**。 对于每一对 $(i, j)$，值 $R_M(f_i, f_j) \in \mathrm{Dom}(M)$ 根据 (A2) 有定义，且

$$\mathrm{Score}_M\big(R_M(f_i, f_j)\big) \in [0,1]$$

根据 (A3) 有定义。因此， $A$ 的每个元素 $a_{ij}$ 都是良定义的，所以

$$A \in [0,1]^{n\times n}.$$

现在令 $P$， $Q \in [0,1]^{n\times n}$。由于对于每个 $j$，$\min\{P_{ij}, Q_{jk}\} \in [0,1]$，且 $[0,1]$ 中有限多个数的最大值仍属于 $[0,1],$，因此该元素

$$(P \circ Q)_{ik} = \max_{1\le j\le n} \min\{P_{ij}, Q_{jk}\}$$

是良定义的，并且属于 $[0,1]$。因此 $P \circ Q \in [0,1]^{n\times n}$。

根据归纳法，对于 $t = 1$、...、 $n$，每个 $A^{[t]} \in [0,1]^{n\times n}$ 都良定义。由于 $\widetilde{R}$ 是有限个矩阵 $A^{[1]}$、...、 $A^{[n]}$ 的逐元素最大值，因此它也良定义，且属于 $[0,1]^{n\times n}$。

**（ii） 的良定义性、自反性和传递性**。由于每个 $r_{ij} \in [0,1]$ 都良定义，且$\theta \in (0,1]$, 每个元素 $d_{ij} \in \{0,1\}$ 均通过阈值化而良定义。因此 $D \in \{0,1\}^{n\times n}$。

由于对于每个 $i$， $a_{ii}=1$ ，我们也有 $r_{ii} \geq 1$，因此 $r_{ii}=1$。因为 $\theta \leq 1$，所以对于所有 $i$， $d_{ii}=1$ 。因此， $D$ 是自反的。

接下来我们证明传递性。对于一条有向路径

$$\pi = (i = i_0, i_1, \ldots, i_m = j)$$

在 $\{1,\ldots,n\}$ 中，将其强度定义为

$$\mathrm{str}(\pi) := \min_{0\leq q<m} a_{i_q i_{q+1}}.$$

根据 $\widetilde{R} = A^{[1]} \vee \cdots \vee A^{[n]}$ 的构造，元素 $r_{ij}$ 是从 $i$ 到 $j$ 的所有简单有向路径中的最大强度；只需考虑简单路径，因为移除一个环不会降低路径上边值的最小值，且任何简单路径的长度至多为 $n-1$。

现在假设 $d_{ij}=1$ 和 $d_{jk}=1$。那么

$$r_{ij} \geq \theta, \qquad r_{jk} \geq \theta.$$

选择从 $i$ 到 $j$ 的简单路径 $\pi_{ij}$ 以及从 $j$ 到 $k$ 的简单路径 $\pi_{jk}$ ，其优势分别为 $r_{ij}$ 和 $r_{jk}$。将它们连接起来，得到一条从 $i$ 到 $k$的路径；去除重复的环后，可得到一条从 $i$ 到 $k$ 的简单路径，其优势至少为

$$\min\{r_{ij}, r_{jk}\} \geq \theta.$$

因此

$$r_{ik} \geq \min\{r_{ij}, r_{jk}\} \geq \theta,$$

所以 $d_{ik}=1$。因此， $D$ 是传递的。

**(iii) 每个层级的非空性** $L_t$。 固定一个满足 $U_t \neq \varnothing$的迭代 $t$ 。将 $D$ 所表示的关系限制在 $U_t$上。由于 $D$ 具有自反性和传递性，因此限制后的关系也具有自反性和传递性。

在 $U_t$ 上定义等价关系 $\sim_t$ 如下:

$$f_i \sim_t f_j \quad \Longleftrightarrow \quad d_{ij}=1 \ \text{ and } \ d_{ji}=1.$$

Let 令$U_t/\!\sim_t$ 为等价类的集合，并在这些等价类上定义关系 $\preceq_t$ 如下:

$$[f_i] \preceq_t [f_j] \quad \Longleftrightarrow \quad d_{ij}=1.$$

由于 $D$ 是自反且传递的， $\preceq_t$ 是有限集 $U_t/\!\sim_t$上的偏序。因此它至少有一个极大类；选取其中一个并将其记为 $[f_{i^\star}]$。

任取 $f_j \in \mathrm{Reach}_t(i^\star)$。则 $d_{i^\star j}=1$，因此

$$[f_{i^\star}] \preceq_t [f_j].$$

根据 $[f_{i^\star}]$的极大性，这意味着 $[f_j]=[f_{i^\star}]$。因此 $d_{ji^\star}=1$，即，

$$f_j \in \mathrm{Ante}_t(i^\star).$$

Thus

$$\mathrm{Reach}_t(i^\star) \subseteq \mathrm{Ante}_t(i^\star).$$

因此，

$$\mathrm{Reach}_t(i^\star) = \mathrm{Reach}_t(i^\star) \cap \mathrm{Ante}_t(i^\star) = \mathrm{Inter}_t(i^\star).$$

因此 $f_{i^\star} \in L_t$，所以 $L_t \neq \varnothing$。

**（iv）终止**。每当 $U_t \neq \varnothing$ 时，(iii) 部分表明 $L_t \neq \varnothing$。因此

$$U_{t+1} = U_t \setminus L_t$$

是 $U_t$ 的真子集。由于 $|U_1| = n$，至多经过 $n$ 次迭代后，剩余集合将变为空集。因此该过程终止。

**（v）不相交性和覆盖性质**。根据构造，

$$L_t \subseteq U_t \quad \text{and} \quad U_{t+1} = U_t \setminus L_t.$$

因此，集合 $L_1$、$L_2$、.....、$L_T$ 两两不相交。由于该过程恰好在不再有因素剩余时停止，每个因素都会在某一步被移除，因此

$$\mathcal{F} = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_T.$$

因此，所有必需的对象都 是良定义的，且层次分解存在并会终止。 □

作为参照点，表 5.3 列出了不确定性感知模型下解释结构模型的相关概念。

表 5.3：不确定性感知模型下解释结构模型的相关概念。

| $k$ | **相关解释结构模型概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊解释结构模型 |
| 2 | 直觉模糊解释结构模型 |
| 3 | 中智解释结构模型 [685–687] |

## 5.3 模糊 MICMAC（交叉影响/驱动–依赖驱动力-依赖性分析法）

MICMAC 分析二元可达矩阵，以计算驱动力和依赖度，并将因素划分为自主型、依赖型、联动型和驱动集群 [688, 689]。模糊 MICMAC 根据模糊可达值计算驱动力和依赖度，通过分级影响对准则进行分类，并支持在存在模糊判断时进行稳健聚类 [690–692]。

**定义 5.3.1**（模糊 MICMAC（驱动力-依赖性分析法））。[693–695] 设 $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ 为系统因素的有限集（$n \geq 2$）。假设已获得一个模糊可达矩阵 （FRM）（通常是在模糊解释结构模型中进行模糊传递闭包后获得），

$$\widetilde{R} = \big(\tilde{r}_{ij}\big)_{n\times n}, \qquad \tilde{r}_{ij} \in \mathbb{F},$$

其中， $\mathbb{F}$ 是一种选定的模糊评价族（例如， $[0,1]$中的三角模糊数），用于处理专家判断中的不确定性。

**步骤 1（去模糊化／评分）**。固定一个评分映射 Score : $\mathbb{F} \to [0,1]$ ，并定义清晰可达矩阵

$$R = \big(r_{ij}\big)_{n\times n}, \qquad r_{ij} := \mathrm{Score}(\tilde{r}_{ij}) \in [0,1].$$

**步骤 2（阈值化：去模糊化二元可达矩阵）**。固定一个阈值 $\theta \in (0,1]$ 并定义去模糊化（二元）可达矩阵（去模糊化二元可达矩阵）

$$D = \big(d_{ij}\big)_{n\times n} \in \{0,1\}^{n\times n}, \qquad d_{ij} := \mathbf{1}[\, r_{ij} \geq \theta \,].$$

（阈值化在值大于或等于截断值时赋值为 1，否则赋值为 0。）

**步骤 3（驱动力和依赖力）**。定义每个因素的驱动力和依赖力， $f_i$ 为

$$\mathrm{DRP}(i) := \sum_{j=1}^{n} d_{ij}, \qquad \mathrm{DEP}(i) := \sum_{j=1}^{n} d_{ji}.$$

行和衡量可达的因素数量（直接或间接），而列和衡量某个因素受其他因素影响的程度。

**第4步（基于象限的 MICMAC 分类）**。选择“高/低”驱动型和依赖度的阈值（$\tau_D, \tau_P$）；一种常见的选择是

$$\tau_D := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{DRP}(i), \qquad \tau_P := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{DEP}(i).$$

根据因素 $f_i$ 的位置（DRP($i$),DEP($i$)），将其归入四个 MICMAC 簇（自主型、依赖型、联动型、独立型）之一。形式化地,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{aut}} &:= \{f_i :\ \mathrm{DRP}(i) < \tau_D \text{ and } \mathrm{DEP}(i) < \tau_P\},\\
\mathcal{F}_{\text{dep}} &:= \{f_i :\ \mathrm{DRP}(i) < \tau_D \text{ and } \mathrm{DEP}(i) \geq \tau_P\},\\
\mathcal{F}_{\text{lin}} &:= \{f_i :\ \mathrm{DRP}(i) \geq \tau_D \text{ and } \mathrm{DEP}(i) \geq \tau_P\},\\
\mathcal{F}_{\text{ind}} &:= \{f_i :\ \mathrm{DRP}(i) \geq \tau_D \text{ and } \mathrm{DEP}(i) < \tau_P\}.
\end{aligned}$$

~由（$R$, 得分 $\theta, \tau_D, \tau_P$）诱导得到的划分称为 模糊 *MICMAC* 分类。（基于驱动型/依赖度的分组是模糊 MICMAC 在基于解释结构模型的研究中的标准用途。）

**定理 5.3.2**（模糊 MICMAC 的良定义性）。 根据定义 *5.3.1*，假设:

- $\mathcal{F}$ 与 $n \geq 2$是有限的;

- 得分 : $\mathbb{F} \to [0,1]$ 在 $\mathbb{F}$上是良定义的;
- $\theta \in (0,1]$ 和 $(\tau_D, \tau_P) \in \mathbb{R}^2$ 均为固定值。

则:

*1.* 矩阵 $R$ 和 $D$ 是良定义的，其中 $R \in [0,1]^{n\times n}$ 和 $D \in \{0,1\}^{n\times n}$ .

*2.* 对于每个 $i$，$\mathrm{DRP}(i)$ 和 $\mathrm{DEP}(i)$ 都是良定义的整数，满足

$$0 \le \mathrm{DRP}(i) \le n, \qquad 0 \le \mathrm{DEP}(i) \le n.$$

*3.* 四个集合 $\mathcal{F}_{\mathrm{aut}}, \mathcal{F}_{\mathrm{dep}}, \mathcal{F}_{\mathrm{lin}}, \mathcal{F}_{\mathrm{ind}}$ 构成 $\mathcal{F}$的一个划分，即它们两两不相交，且其并集等于 $\mathcal{F}$。

证明。 **(1)** 由于得分映射将每个 $\tilde{r}_{ij} \in \mathbb{F}$ 映射到 $[0,1],$，因此每个元素 $r_{ij}$ 都是 $[0,1]$中的良定义实数。对于 $\theta \in (0,1]$, 指示函数 $d_{ij} = \mathbf{1}[r_{ij} \ge \theta]$ 是良定义的，并且对每个（$i$, $j$）都属于 $\{0,1\}$。因此， $R$和$D$ 是所述类型的良定义矩阵。

**(2)** 由于每个 $d_{ij} \in \{0,1\}$，且每个和中恰有$\sum_{j=1}^{n} d_{ji}$ $0 \le \quad i \le n \quad 0 \le \quad i \le n$ 项,

因此 DRP($i$) $= \sum_{j=1}^{n} d_{ij}$ 和 DEP($i$) 都是有界的良定义整数，其界为 DRP( ) 和 DEP( )。

**(3)** 固定任意 $f_i \in \mathcal{F}$。两个不等式 DRP($i$) $< \tau_D$ 和 DRP($i$) $\ge \tau_D$ 中恰有一个成立，且 DEP($i$) $< \tau_P$ 和 DEP($i$) $\ge \tau_P$ 中也恰有一个成立。因此， $f_i$ 恰好属于第4步中定义的四个集合之一。这表明 $\mathcal{F}_{\mathrm{aut}} \cup \mathcal{F}_{\mathrm{dep}} \cup \mathcal{F}_{\mathrm{lin}} \cup \mathcal{F}_{\mathrm{ind}} = \mathcal{F}$。此外，没有任何 $f_i$ 能同时满足两组互不相容的不等式，因此这四个集合两两不相交。故它们构成 $\mathcal{F}$的一个划分。

□

现在，我们将这一思想扩展到一般的不确定模型 $M$。

**定义5.3.3** （ $M$类型的不确定 MICMAC）。 设

$$\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

是一个有限非空因素集，其中 $n \ge 1$。固定一个度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

的整数 $k \ge 1$ 对应的不确定模型。

假设给定一个 $M$ 类型的不确定可达矩阵：

$$\widetilde{R}_M = (\rho_{ij})_{n\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{n\times n},$$

其中 $\rho_{ij} \in$ Dom($M$) 表示从因素 $f_i$ 到因素 $f_j$的不确定可达度。通常，$\sim R_M$ 由不确定解释结构模型程序得出。

进一步固定:

- 一个总分映射
$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [0,1],$$
- 一个阈值
$$\theta \in (0,1].$$

**步骤 1（加权可达矩阵）**。定义加权可达矩阵
$$R = (r_{ij})_{n\times n} \in [0,1]^{n\times n}$$
by
$$r_{ij} := \mathrm{Score}_M(\rho_{ij}), \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

**步骤 2（二元可达矩阵）**。定义二元可达矩阵
$$D = (d_{ij})_{n\times n} \in \{0,1\}^{n\times n}$$
通过阈值化：
$$d_{ij} := \begin{cases} 1, & r_{ij} \geq \theta, \\ 0, & r_{ij} < \theta. \end{cases}$$

**步骤 3（驱动力和依赖力）**。对于每个因素 $f_i \in \mathcal{F}$，定义其 驱动力 和依赖力 为
$$\mathrm{Drv}_M(i) := \sum_{j=1}^{n} d_{ij}, \qquad \mathrm{Dep}_M(i) := \sum_{j=1}^{n} d_{ji}.$$
因此，$\mathrm{Drv}_M(i)$ 是 $D$ 的行和，而 $\mathrm{Dep}_M(i)$ 是 $D$ 的列和。

**第4步（MIC　MAC 阈值）**。定义平均驱动能力和依赖能力的阈值 by
$$\tau_{\mathrm{drv}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Drv}_M(i), \qquad \tau_{\mathrm{dep}} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Dep}_M(i).$$

**第5步（基于象限的分类）**。定义四种 MICMAC 类别：
$$\mathcal{F}_{\mathrm{aut}} := \big\{ f_i \in \mathcal{F} :\ \mathrm{Drv}_M(i) < \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) < \tau_{\mathrm{dep}} \big\},$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{dep}} := \big\{ f_i \in \mathcal{F} :\ \mathrm{Drv}_M(i) < \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) \geq \tau_{\mathrm{dep}} \big\},$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{lin}} := \big\{ f_i \in \mathcal{F} :\ \mathrm{Drv}_M(i) \geq \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) \geq \tau_{\mathrm{dep}} \big\},$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{drv}} := \big\{ f_i \in \mathcal{F} :\ \mathrm{Drv}_M(i) \geq \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) < \tau_{\mathrm{dep}} \big\}.$$
Th它们分别称为自主型、依赖型、联动型和驱动型类别。

四元组
$$\big(\mathcal{F}_{\mathrm{aut}}, \mathcal{F}_{\mathrm{dep}}, \mathcal{F}_{\mathrm{lin}}, \mathcal{F}_{\mathrm{drv}}\big)$$
称为由不确定 *MICMAC* 类型 $M$ 诱导的分类
$$(\widetilde{R}_M, \mathrm{Score}_M, \theta).$$

**注释5.3.4.** 定义5.3.3 与模型无关。不确定模型 $M$ 仅通过度域 Dom($M$) 和评分映射 Score$_M$发挥作用，后者将不确定可达值转换为 $[0,1]$ 中的标量强度。

**定理 5.3.5**（不确定MICMAC的良定义性）。 根据定义*5.3.3*，假设 *e:*

（*A1*） $\mathcal{F}=\{f_1,\dots,f_n\}$ 有限且非空；$\sim$（
*A2*） $R_M=(\rho_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{Dom}(M)^{n\times n}$；（*A3*）
得分$_M$： $\mathrm{Dom}(M)\to[0,1]$ 是全映射；（*A4*）
$\theta\in(0,1]$。

则：

（*i*） 评分矩阵 $R=(r_{ij})\in[0,1]^{n\times n}$ 和二值矩阵 $D=(d_{ij})\in\{0,1\}^{n\times n}$ 均良定义；

*(ii)* 对于每个 $i\in\{1,\dots,n\}$，量 驱动力$_M(i)$ 和 依赖度$_M(i)$ 都是良定义的整数，并满足

$$0\le \mathrm{Drv}_M(i)\le n,\qquad 0\le \mathrm{Dep}_M(i)\le n;$$

*(iii)* 阈值 $\tau_{\mathrm{drv}}$ 和$\tau_{\mathrm{dep}}$ 是良定义的实数；

*(iv)* 这四个类别

$$\mathcal{F}_{\mathrm{aut}},\quad \mathcal{F}_{\mathrm{dep}},\quad \mathcal{F}_{\mathrm{lin}},\quad \mathcal{F}_{\mathrm{drv}}$$

是良定义的 ，并构成 $\mathcal{F}$ 的一个划分，也就是说，它们两两不相交，且其并集为 $\mathcal{F}$.

因此，类型为 $M$ 的不确定 *MICMAC* 是良定义的。

证明。 **(i)** $R$ **和** $D$**的良定义性**。 根据（A2），每个元素 $\rho_{ij}$ 都属于 Dom($M$)。由于 Score$_M$ 根据（A3）具有完全性，该值

$$r_{ij}:=\mathrm{Score}_M(\rho_{ij})$$

是良定义的，并且对于每个 $i$， $j$都属于 $[0,1]$。因此

$$R=(r_{ij})_{n\times n}\in[0,1]^{n\times n}$$

是良定义的。

由于对于每个 $r_{ij}\in[0,1]$， $\theta\in(0,1]$, 恰好满足以下不等式之一

$$r_{ij}\ge\theta\qquad\text{or}\qquad r_{ij}<\theta$$

成立。因此，每个 $d_{ij}$ 都是良定义的，且属于 $\{0,1\}$。因此

$$D=(d_{ij})_{n\times n}\in\{0,1\}^{n\times n}$$

是良定义的。

**(ii) 驱动力和依赖力的良定义性**。对于每个固定的 $i$，总和 s

$$\mathrm{Drv}_M(i) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}, \qquad \mathrm{Dep}_M(i) = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}$$

恰好包含 $n$ 项，每项均为 0 或 1。因此二者都是良定义的整数，显然

$$0 \le \mathrm{Drv}_M(i) \le n, \qquad 0 \le \mathrm{Dep}_M(i) \le n.$$

**（iii）良定义 性及阈值**。由于每个 $\mathrm{Drv}_M(i)$ 和 $\mathrm{Dep}_M(i)$ 都是实数，因此平均值

$$\tau_{\mathrm{drv}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Drv}_M(i), \qquad \tau_{\mathrm{dep}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Dep}_M(i)$$

是良定义的实数。

**(iv) 四个类别的划分性质**。任取一个因素 $f_i \in \mathcal{F}$。以下两个关系中恰有一个

$$\mathrm{Drv}_M(i) < \tau_{\mathrm{drv}} \qquad \text{or} \qquad \mathrm{Drv}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{drv}}$$

成立，且以下两个关系中恰有一个

$$\mathrm{Dep}_M(i) < \tau_{\mathrm{dep}} \qquad \text{or} \qquad \mathrm{Dep}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{dep}}$$

成立。因此，以下四种组合中恰有一种成立：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Drv}_M(i) < \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) < \tau_{\mathrm{dep}},\\
&\mathrm{Drv}_M(i) < \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{dep}},\\
&\mathrm{Drv}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{dep}},\\
&\mathrm{Drv}_M(i) \ge \tau_{\mathrm{drv}} \text{ and } \mathrm{Dep}_M(i) < \tau_{\mathrm{dep}}.
\end{aligned}$$

因此，$f_i$ 恰好属于以下类别之一

$$\mathcal{F}_{\mathrm{aut}},\ \mathcal{F}_{\mathrm{dep}},\ \mathcal{F}_{\mathrm{lin}},\ \mathcal{F}_{\mathrm{drv}}.$$

这表明，四个类别的并集是 $\mathcal{F}$，且它们两两不相交。

因此，四个类别构成了 $\mathcal{F}$ 的一个划分，且不确定 MICMAC 定义良好 d. □

不确定性感知模型中 MICMAC 的相关概念列于表 5 .4.

表 5.4：不确定性感知模型下的 MICMAC 相关概念。

| $k$ | 相关 MICMAC 概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 MICMAC |
| 2 | 直觉模糊 MICMAC |
| 3 | 中智 MICMAC [696, 697] |

## 5.4 模糊认知图（FCM）

认知图是由因果概念构成的带符号有向图；通过加权和更新节点状态，可以模拟系统行为和反馈回路 [698, 699]。模糊认知图使用模糊因果权重和模糊概念激活值，应用非线性更新函数，并对不确定反馈动力学进行建模，以进行情景评估 [700–702]。

**定义 5.4.1**（模糊认知图（FCM））。[700, 701] 设 $N \geq 1$，并设 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_N\}$ 为有限个概念（所建模系统的状态/变量/特征）组成的有限集。模糊认知图（*FCM*）是一个加权有向图（等价地，也可表示为权重矩阵）

$$\mathsf{FCM} = (\mathcal{C}, W, f),$$

其中：

（i） $W = (w_{ji}) \in [-1, 1]^{N \times N}$ 是因果连接（邻接）矩阵，其中 $w_{ii} = 0$。元素 $w_{ji}$表示因果影响 $C_j \to C_i$的带符号强度：

$$w_{ji} > 0 \text{ (positive causality)}, \qquad w_{ji} < 0 \text{ (negative causality)}, \qquad w_{ji} = 0 \text{ (no direct relation)}.$$

（ii） $f : \mathbb{R} \to I$ 是一个激活（传递）函数，其映射到有界区间 $I = [0, 1]$（单极性）或$I = [-1, 1]$（双极性），通常是单调连续函数（例如 Sigmoid 函数）。

**模糊认知图状态与推理动力学。** 离散时间 $k \in \mathbb{N}_0$ 下模糊认知图的状态 是一个向量

$$A(k) = (A_1(k), \ldots, A_N(k)) \in I^N,$$

其中， $A_i(k)$ 是概念 $C_i$ 的激活水平。给定初始状态 $A(0) \in I^N$，标准的同步模糊认知图更新规则为

$$A_i(k+1) = f\left( A_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_j(k)\, w_{ji} \right), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5.1}$$

等价地，对 $f$ 逐分量应用，

$$A(k+1) = f\big(A(k) + A(k)W\big).$$

（变体会省略自记忆项 $A_i(k)$，并使用 $A(k+1) = f(A(k)W)$。）

**常见选择 的 $f$（单极性 sigmoid 函数）。**一种广泛使用的激活函数是逻辑 sigmoid 函数

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}}, \qquad \lambda > 0,$$

它确保对于所有 $k$， $A_i(k) \in [0,1]$ 。

**结果**。 迭代（5.1）会在 $I^N$ 中生成一条轨迹，它可能收敛到一个不动点、进入一个极限环，或呈现更复杂的吸引子，具体取决于 $A(0)$、 $W$和 $f$。

下面，我们介绍　　通过使用不确定集扩展框架而得到的不确定认知图　　.

**定义5.4.2** （不确定认知图（UCM）：期望权重动态）。 设 $N \geq 1$ ，且 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_N\}$ 为一个有限概念集。固定一个不确定性空间（$\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}$）以及一个有界区间 $I = [0,1]$（单极）或 $I = [-1,1]$ （双极）。

**（1）不确定因果权重**。 一个不确定认知图由一个不确定数矩阵指定

$$\widetilde{W} = \big(\widetilde{w}_{ji}\big) \in \mathsf{US}([-1,1])^{N \times N}, \qquad \widetilde{w}_{ii} \equiv 0,$$

其中， $\widetilde{w}_{ji}$ 编码不确定的有符号因果影响 $C_j \to C_i$。假设期望存在，并定义期望权重矩阵

$$W := (w_{ji}) \in [-1,1]^{N \times N}, \qquad w_{ji} := \mathbb{E}[\widetilde{w}_{ji}].$$

**（2）状态空间与激活函数**。令 $f \colon \mathbb{R} \to I$ 为一个激活（传递）函数，使得

$$f(\mathbb{R}) \subseteq I.$$

（例如，单极逻辑 sigmoid 函数或双极双曲正切型映射。）

**（3）期望值 UCM 动力学**。一个*UCM* 状态在离散时间 $k \in \mathbb{N}_0$ 是一个向量

$$A(k) = (A_1(k), \ldots, A_N(k)) \in I^N.$$

给定 $A(0) \in I^N$，按以下方式定义同步更新规则

$$A_i(k+1) = f\left( A_i(k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} A_j(k)\, w_{ji} \right), \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5.2}$$

等价地，

$$A(k+1) = f\big(A(k) + A(k)W\big),$$

其中， $f$按分量应用。三元组 $\mathsf{UCM} := (\mathcal{C},\ W,\ f)$ 称为不确定认知图。

**定义5.4.3** （由不确定认知图诱导的不确定集输出）。 设 $A(0) \in I^N$ 为固定值，且 $(A(k))_{k \geq 0}$ 由（5.2）生成。对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和每个概念 $i$，定义单值不确定集

$$\mathcal{A}_{i,k} : \Gamma \to \mathcal{P}(I), \qquad \mathcal{A}_{i,k}(\gamma) := \{A_i(k)\}.$$

那么，$\big(\mathcal{A}_{i,\ k}\big)_{i=1\ \ldots}^{k \in \mathbb{N}_0}$， $N$ 称为由 UCM（通过期望值真实化）诱导的不确定集状态族。

定理5.4.4（不确定集结构与 UCM 动力学的良定义性）。在定义 5.4.2 的设定下，假设：

（A1）（有限期望）对所有 $i$、$j$ 均存在且有限。

（A2）（有界传递） $f(\mathbb{R}) \subseteq I$。

因此，对于每个初始状态 $A(0) \in I^N$：

（i）递推式（5.2）定义了一个在 $I^N$ 中的唯一序列 $(A(k))_{k\geq 0}$；

（ii）对于所有 $i$ 和所有 $k$，每个 $A_i(k) \in I$ 都是良定义的；

(iii) 定义*5.4.3*中的这一族是关于$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$的不确定集结构化输出。

证明。固定 $A(0) \in I^N$。

**步骤 1（期望权重矩阵的存在性）**。根据 (A1)，每个 $w_{ji} := \mathbb{E}[\widetilde{w}_{ji}]$ 都存在且为实数，因此 $W = (w_{ji})$ 是良定义的实矩阵。

**步骤 2（单步更新是良定义的）**。假设 $A(k) \in I^N$。对每个 $i$，定义实投入

$$u_i(k) := A_i(k) + \sum_{j \neq i} A_j(k)\, w_{ji} \in \mathbb{R},$$

该投入是良定义的，因为它是有限个实数乘积的和。于是 (A2) 蕴含 $A_i(k+1) := f(u_i(k)) \in I$。因此 $A(k+1) \in I^N$。

**步骤 3（所有时刻的存在性与唯一性）**。步骤 2 表明，由$F(A) = f(A + AW)$（逐分量地为 $f$）定义的映射 $F : I^N \to I^N$ 是良定义函数。因此，递推 $A(k+1) = F(A(k))$ 通过对函数进行确定性迭代，产生一个位于 $I^N$ 中的唯一序列 $(A(k))_{k\geq 0}$。

**第4步（不确定集结构化输出）**。对每个 $(i,\ k)$，$\mathcal{A}_{i,\ k}(\gamma) = \{A_i(k)\}$ 是常值单点值集映射，因此它是 $(\Gamma,\ \mathcal{L},\ \mathcal{M})$ 上的不确定集。这证明了 (iii)。 □

作为不确定认知图之外的相关概念，灰色认知图 [717, 718]，粗糙认知图 [719, 720]，证据认知图 [721, 722]，动态认知图 [723, 724]，粒化认知图 [725, 726]，认知超图 [727–729]，双极认知图 [730, 731]，语言认知图 [732]，和概率认知图 [733, 734] 也同样广为人知。

表5.5：按不确定性编码编制的认知图变体简明目录（按便于使用的度域维数 $k$索引）。

| $k$ | 认知图变体 | 备注（不确定性的表示方式） |
|---|---|---|
| 1 | 模糊认知图（模糊认知图） [703, 704] | 因果影响（边权重）和/或概念激活由单一分级度建模（通常在必要时归一化为 $[0,1]$ ）并依据非线性动力学规则进行更新。 |
| 2 | 直觉模糊认知映射 [705, 706] | 每种影响都用二分量度编码（例如，隶属属度与非隶属度，并带有隐含犹豫度），从而得到更丰富的不确定性描述，优于标量权重。 |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊认知图（毕达哥拉斯模糊认知图） [707, 708] | 毕达哥拉斯模糊认知图（毕达哥拉斯模糊认知图）（度（$\mu,\nu$） $\in [0,1]^2$ 且 $\mu^2+\nu^2\le 1$；犹豫度 $\pi=\sqrt{1-\mu^2-\nu^2}$ 由此导出）。 |
| 3 | 犹豫模糊认知图 [709, 710] | 每种影响都通过多个可能的程度进行评估（一个有限的犹豫模糊集）；出于目录编制的目的，通常会将其概括为固定长度的 $k$=3 编码（例如最小值/代表值/最大值）。 |
| 3 | 中智认知映射 [711–714] | 每种影响都包含真度/不确定度/假度分量，取值范围为 $[0,1]^3$，从而能够明确表示因果强度中的不确定性和不一致性。 |
| $3n$ ($n\ge 1$) | 精细中智认知图映射 [704, 714] | **精细中智认知图 (R-NCMs)**：其程度为 $[0,1]^{3n}$，通常为（$T_1$，……，$T_n$，$I_1$，……，$I_n$，$F_1$，……，$F_n$），对于每个概念/边概念/边。 |
| $n$ | 偏析认知映射 [715, 716] | 影响基于属性–值，并具有标量隶属度作用于属性–值对，并结合了针对值的矛盾函数；聚合采用多属性算子。 |

# 第6章

# 决策矩阵上的补偿性评分方法（“加权和”系列）

补偿性评分将加权后的正规化准则表现聚合为总体效用得分，允许进行权衡，即强项表现弥补弱项准则，并通过求和/乘积得出排序。

为方便起见，表6.1列出了本章讨论的代表性决策矩阵方法的简要比较。

表6.1：简　　要比较本章讨论的代表性决策矩阵方法　　er.

| 方法 | 主要作用 | 核心机制 | 典型最终量 | 简要说明 |
|---|---|---|---|---|
| COPRAS | 效用排序 | 使用加权归一化的绩效，区分效益型与成本总和，并计算相对重要性。 | 相对重要性和效用度 | 明确的效益型–成本型分解过程。 |
| MACBETH | 值尺度 con-构建与排序 | 将定性成对吸引力判断转换为数值型价值尺度，通常通过线性规划实现。 | 基数价值尺度 / 总体得分 | 强烈判断驱动且以尺度为导向。 |
| CoCoSo | 折中排序 | 结合加权和与加权积逻辑，形成折衷聚合。 | 综合折中得分 | 混合 SAW–WPM 风格方法。 |
| SAW | 效用排序 | 聚合正规化的准则性能，采用简单加权和。 | 加权和效用ity | 规范补偿补偿基准行。 |
| RAFSI | 效用排序 | 将准则值映射到一个通用区间，使用理想与反理想锚点，然后聚合门控它们。 | RAFSI分数 | 强调公共区间函数映射操作。 |

续见下一页。

表*6.1*（续）。

| 方法 | 主要作用 | 核心机制 | 典型最终量 | 简要说明 |
|---|---|---|---|---|
| RATMI | 效用排序 | 结合基于迹的逐项以中位数为基准的绩效项加权后的相似度项。 | 迹-中位数指数 | 矩阵几何风格的排序规则。 |
| RANCOM | 准则权重-ing | 对准则进行排名，根据秩关-系构建比较矩阵，并对行和进行正规化。 | 准则权重向量 | 主要是一种权重分配工具，而非直接的备选方案排序方法。 |
| AROMAN | 效用排序 | 采用两步归一化，区分效益型和成本型效应，并采用指数偏好得分。 | 排序指数 | 旨在平衡两种正规化观点。化视角。 |
| MAUT | 效用排序 | 应用单属性效用函数，并将其组合成总体多属性效用。 | 总体效用 | 偏好—理论性且基于效用。 |
| SMART | 效用排序 | 使用价值函数和摆动类型权重，然后计算一个简单加权加和得分。 | SMART 得分 | 透明且易于实施。 |
| REGIME | 两两排序 | 对备选方案进行两两比较在每个准则上，聚合加权胜负指标，并形成净支配度。 | 净引导指数 | 基于比较的而非纯粹的直接评分。 |
| TODIM | 优势度排序 | 采用前景理论的收益和相对于参照点的损失并聚合优势度值ues. | 总体支配值 | 捕捉不对称损失处理的方式。 |
| GRA | 相似度排序ing | 衡量与理想或参考序列的接近程度，通过灰色关联tional系数和等级。 | 灰色关联度 | 参照点-基于相似度。 |
| ARAS | 效用比排序 | 聚合加权归一化相对于一个明确定义的理想方案。 | 效用度 | 理想方案基线是中-央。 |
| WASPAS | 折衷排序 | 结合加权和与加权积效用通过混合参数。 | 集成 WAS-PAS 效用 | 稳健 WSM–WPM 混合方法。 |
| MOORA | 比率排序 | 采用向量归一化，并计算加权效益型减成本型得分。 | MOORA得分 | 简单比率分析法系列。 |
| PSI | 客观加权与排序 | 从……推导准则权重归一化数据的离散程度然后计算一个偏好指数。 | 偏好选择指数 | 更加数据驱动而非主观赋权方法-ods. |
| ROV | 区间效用排序 | 形成悲观和乐观加权效用及排名，依据一种依态度而定的评分。 | 价值区间 / 态度得分 | 自然地支-持乐观–悲观评估-方法。 |

续见下一页。

表*6.1*（续）。

| 方法 | 主要作用 | 核心机制 | 典型最终量 | 简要说明 |
|---|---|---|---|---|
| MOOSRA | 比率排序 | 计算加权收益与归一化后的成本比率。 | MOOSRA 得分 | 直接效益-益/成本比率形式。 |

**注。** 尽管所有方法都在同一总体决策矩阵背景下加以讨论，但它们的作用并不相同。具体而言，RANCOM 主要是一种准则赋权方法，而 MACBETH 本质上是一种价值标度构建框架，随后可支撑排序。

## 6.1 模糊 COPRAS（模糊复杂比例评估）

COPRAS 使用加权归一化准则对备选方案进行排序，分别汇总效益和成本总和，以计算相对重要性和效用 [618, 735, 736]。模糊 COPRAS 将评价和权重建模为模糊数，对其进行去模糊化或比较，然后在不确定性条件下计算 COPRAS 的重要性和效用 [737, 738]。

**定义 6.1.1**（模糊 COPRAS（COPRAS-F））。[737, 738] 令 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。将准则划分为效益型与成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-, \qquad J^+ := \{j : C_j \in \mathcal{C}^+\}, \quad J^- := \{j : C_j \in \mathcal{C}^-\}.$$

˜设三角模糊数决策矩阵 $D = (\tilde{x}_{ij}) \in$（三角模糊数）$^{m \times n}$ 以及三角模糊数准则权重 ˜w $=$（$\tilde{w}_1$，.. .. ，$\tilde{w}_n$）$\in$（三角模糊数）$^n$。

**（0）BNP去模糊化**。对于一个三角模糊数 $\tilde{x} =$（$l$，$m$，$u$）定义

$$\mathrm{BNP}(\tilde{x}) := \frac{l + m + u}{3}.$$

**(1) 对权重进行去模糊化，并（可选）进行归一化**。设定

$$x_{ij} := \mathrm{BNP}(\tilde{x}_{ij}), \qquad q_j := \mathrm{BNP}(\tilde{w}_j),$$

并（可选）对 $q$ 按 $q_j \leftarrow q_j / \sum_{t=1}^{n} q_t$ 进行归一化，使得 $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$。

**(2) 列和归一化与加权**。定义

$$n_{ij} := \frac{x_{ij}}{\sum_{p=1}^{m} x_{pj}}, \qquad \hat{x}_{ij} := q_j \, n_{ij}.$$

**（3）效益/成本总和**。对于每个备选方案 $A_i$，设

$$P_i := \sum_{j \in J^+} \hat{x}_{ij}, \qquad R_i := \sum_{j \in J^-} \hat{x}_{ij}, \qquad R_{\min} := \min_{1 \le i \le m} R_i.$$

**（4）相对重要性和效用度**。定义

$$Q_i := P_i + \frac{R_{\min}\sum_{t=1}^{m} R_t}{R_i \sum_{t=1}^{m}\left(\frac{R_{\min}}{R_t}\right)}, \qquad Q_{\max} := \max_{1\le i\le m} Q_i, \qquad N_i := \frac{Q_i}{Q_{\max}} \times 100\%.$$

按降序排列 $Q_i$ （等价地， $N_i$），即可得到最终排序。

使用不确定集，我们定义不确定 COPRAS（U-COPRAS）如下。

**定义6.1.2** （不确定 COPRAS（U-COPRAS）：期望得分形式）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$为一个有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为一个有限准则集。将准则划分为效益型与成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot\cup \mathcal{C}^-, \qquad J^+ := \{j : C_j \in \mathcal{C}^+\}, \ J^- := \{j : C_j \in \mathcal{C}^-\}.$$

固定一个不确定性空间（$\Gamma$， $\mathcal{L}$， $\mathcal{M}$）。

**(1) 不确定决策矩阵和不确定权重**。一个不确定 *COPRAS* 实例由以下部分组成：

- 一个不确定决策矩阵
$$\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij}) \in \mathsf{US}(\mathbb{R}_{\ge 0})^{m\times n},$$
其中 $\widetilde{x}_{ij}$ 是 $A_i$ 在准则 $C_j$下的不确定性能；
- 一个不确定权重向量
$$\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n) \in \mathsf{US}(\mathbb{R}_{\ge 0})^{n},$$
其中 $\widetilde{w}_j$ 是准则 $C_j$的不确定重要性。

假设所有期望均存在，并定义期望值（清晰）得分

$$x_{ij} := \mathbb{E}[\widetilde{x}_{ij}] \in \mathbb{R}_{\ge 0}, \qquad q_j := \mathbb{E}[\widetilde{w}_j] \in \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

**(2) 归一化期望权重**。如果 $\sum_{t=1}^{n} q_t > 0$，则设

$$\bar q_j := \frac{q_j}{\sum_{t=1}^{n} q_t} \in [0,1] \quad (j = 1, \ldots, n),$$

使得 $\sum_{j=1}^{n} \bar q_j = 1$。如果 $\sum_{t=1}^{n} q_t = 0$，则设 $\bar q_j := 1/n$ ，对所有 $j$ 均成立。

**(3) 列和归一化与加权（基于期望数据）**。对于每个准则 $j$，令

$$s_j := \sum_{p=1}^{m} x_{pj}.$$

假设对于所有 $j$ （非退化准则）， $s_j > 0$ 。定义

$$n_{ij} := \frac{x_{ij}}{s_j} \in [0,1], \qquad \hat x_{ij} := \bar q_j\, n_{ij} \in [0,1].$$

**（4）效益/成本聚合和**。对于每个备选方案 $A_i$，定义

$$P_i := \sum_{j \in J^+} \hat{x}_{ij}, \qquad R_i := \sum_{j \in J^-} \hat{x}_{ij}.$$

若 $J^- \neq \varnothing$，也定义

$$R_{\min} := \min_{1 \le i \le m} R_i.$$

**(5) 相对重要性和效用度**。若 $J^- = \varnothing$，令 $Q_i : = P_i$。若 $J^- \neq \varnothing$ 且 $R_i > 0$ 对所有 $i$，定义

$$Q_i := P_i + \frac{R_{\min} \sum_{t=1}^{m} R_t}{R_i \sum_{t=1}^{m} \left( \frac{R_{\min}}{R_t} \right)}.$$

令 $Q_{\max} := \max_{1 \le i \le m} Q_i$，并且若 $Q_{\max} > 0$，定义效用百分比

$$N_i := \frac{Q_i}{Q_{\max}} \times 100\%.$$

The U-COPRAS 排序通过按降序排列 $Q_i$（等价地，$N_i$）获得 .

**定义 6.1.3**（由 U-COPRAS 诱导的不确定集输出）。根据定义6.1.2，定义单值不确定集

$$\mathcal{Q}_i : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{Q}_i(\gamma) := \{Q_i\},$$

以及（当 $Q_{\max} > 0$ 时）单值不确定集

$$\mathcal{N}_i : \Gamma \to \mathcal{P}([0, 100]), \qquad \mathcal{N}_i(\gamma) := \{N_i\}.$$

则 $(\mathcal{Q}_i)_{i=1}^m$（以及 $(\mathcal{N}_i)_{i=1}^m$）称为不确定集结构化 *COPRAS* 输出（通过期望得分实现）。

**定理6.1.4**（U-COPRAS 的不确定集结构与良定义性）。在定义 *6.1.2* 的设定下，假设：

（A1）（有限期望）对所有 $i$、$j$，$\mathbb{E}[\widetilde{x}_{ij}]$ 和 $\mathbb{E}[\widetilde{w}_j]$ 均存在且有限。

（A2）（非退化列）$s_j = \sum_{p=1}^{m} x_{pj} > 0$ 对所有 $j$。

(A3) *(*在需要时满足成本总和正性*)* 二者择一：$J^- = \varnothing$，否则 $R_i > 0$ 对所有 $i$ .

(A4) *(*非平凡总体得分*)* $Q_{\max} > 0$ 只要 $N_i$ 形成。

那么：

(i) 定义*6.1.2*的步骤(2)–(5)中的所有量均为良定义的实数；

(ii) 诱导排序预序 $A_i \succeq A_k \iff Q_i \geq Q_k$ 在 $\mathcal{A}$上良定义；

(iii) $t$ 他在定义 *6.1.3* 中输出的$(\mathcal{Q}_i)$ 和$(\mathcal{N}_i)$ 构成$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$上的不确定集 .

证明。 假设（A1）保证 $x_{ij} = \mathbb{E}[\widetilde{x}_{ij}]$ 和 $q_j = \mathbb{E}[\widetilde{w}_j]$ 作为有限实数存在，因此步骤（1）–（2）是良定义的。若 $\sum_t q_t > 0$，则归一化 $\bar{q}_j = q_j / \sum_t q_t$ 是 $[0,1]$中的实数；若$\sum_t q_t = 0$，则回退值 $\bar{q}_j = 1/n$ 是实数，并且仍然满足 $\sum_j \bar{q}_j = 1$。

根据 (A2)，每个 $s_j > 0$，因此 $n_{ij} = x_{ij}/s_j$ 是良定义的，且属于 $[0,1]$，因为 $x_{ij} \geq 0$ 和 $x_{ij} \leq s_j$。于是 $\hat{x}_{ij} = \bar{q}_j n_{ij}$ 是良定义且非负的，因此 $P_i = \sum_{j \in J^+} \hat{x}_{ij}$ 和 $R_i = \sum_{j \in J^-} \hat{x}_{ij}$ 是良定义的有限和。

如果 $J^- = \varnothing$，则 $Q_i = P_i$ 是良定义的。否则，根据 (A3)，我们有 $R_i > 0$，并且对于每个 $t$，也有 $R_t > 0$，因此每个分数 $R_{\min}/R_t$ 都是良定义且为正的，所以 $\sum_{t=1}^{m} (R_{\min}/R_t) > 0$。因此，对于所有 $i$，$Q_i$ 的 COPRAS 表达式都是良定义的。

排序预序 $A_i \succeq A_k \iff Q_i \geq Q_k$ 是良定义的，因为 $(Q_i)$ 是实数。最后，当 $Q_{\max} > 0$（假设 (A4)）时，每个 $N_i = (Q_i/Q_{\max}) \cdot 100$ 都是 $[0,100]$ 中良定义的实数。集合映射 $\mathcal{Q}_i(\gamma) = \{Q_i\}$ 和 $\mathcal{N}_i(\gamma) = \{N_i\}$ 是 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 上的单值不确定集，由此证明 (iii)。 □

参阅 COPRAS 及代表性的不确定性感知变体列于表 6.2 .

表 6.2：COPRAS 及代表性的不确定性感知变体（按度域维数 $k$ 组织）。

| $k$ | 评价度取值于 $[0,1]^k$ 子集中的代表性 COPRAS 型模型 |
|---|---|
| 1 | 模糊 COPRAS。 |
| 2 | 直觉模糊COPRAS [57, 739]；毕达哥拉斯模糊COPRAS [740, 741]。 |
| 3 | 犹豫模糊COPRAS [742, 743]；球形模糊COPRAS [744, 745]；图片模糊COPRAS [746, 747]；中智COPRAS [748, 749]。 |

**注释**。 此处，$k$ 表示用于编码各项准则评价（以及适用时的各项权重）的度域的环境维数。

## 6.2 模糊 MACBETH（基于类别的评价技术测量吸引力）

MACBETH通过线性规划，将对吸引力差异的定性成对判断转换为数值价值尺度，并聚合加权分数，以一致地对备选方案进行排序 [750,751]。模糊 MACBETH以模糊语言术语或模糊数取代清晰类别，在标度构建模型中传递不精确性，从而获得模糊得分和稳健排序 [752–754]。

**定义 6.2.1**（模糊 MACBETH（三角模糊语义标度 + F-LP-MACBETH））。[752–754]设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 为一个有限的评价元素 集合（行动、备选方案或绩效水平），由决策者按完全预序排列（$P =$ 严格偏好，$I =$ 无差异）。假设 $a^+ \in A$ 是最具吸引力的元素，$a^- \in A$ 是最不具吸引力的元素。

**（1）语义类别及其三角模糊编码**。设语义类别为$C_0$，$C_1$，……，$C_6$，其中 $C_0$ 表示无差异，$C_1$，……，$C_6$ 表示吸引力差异逐渐增大。将每个类别 $C_k$ 与一个三角模糊数（TFN）

$$\tilde{A}_k = (\ell_k, m_k, u_k) \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}, \qquad \ell_k \leq m_k \leq u_k,$$

相关联，该三角模糊数由标准模糊 MACBETH 量表给出

$$\tilde{A}_0 = (0,0,0),\ \tilde{A}_1 = (1,1,2),\ \tilde{A}_2 = (1,2,3),\ \tilde{A}_3 = (2,3,4),$$

$$\tilde{A}_4 = (3,4,5),\ \tilde{A}_5 = (4,5,6),\ \tilde{A}_6 = (5,6,6).$$

（等价地：对于 $k = 2$，3，4，5，取 $\ell_k = k-1$、 $m_k = k$、 $u_k = k+1$；对于 $k = 1$、 $\ell_1 = m_1 = 1$, $u_1 = 2$；对于$k = 6$、 $\ell_6 = 5$， $m_6 = u_6 = 6$。）

**（2）模糊化判断矩阵**。 对于每个有序对（$x$， $y$） $\in A\times A$ 且满足 $xPy$，决策者指定˜ ˜一个类别 $c$（$x$， $y$） $\in \{1,\dots,6\}$（无差异时为 0）。将模糊化判断定义为 $d$（$x$， $y$）：$= A_{c(x,y)}$。

**（3）三角模糊数运算与三角模糊数序**。对于三角模糊数 $\tilde{p} =$ （$p_1$， $p_2$， $p_3$） 与 $\tilde{q} =$ （$q_1$， $q_2$， $q_3$） 定义

$$\tilde{p} \oplus \tilde{q} = (p_1+q_1,\ p_2+q_2,\ p_3+q_3), \qquad \tilde{p} \ominus \tilde{q} = (p_1-q_1,\ p_2-q_2,\ p_3-q_3).$$

在三角模糊数上使用逐分量预序 $\succeq$：

$$(\ell_1,m_1,u_1) \succeq (\ell_2,m_2,u_2) \iff \ell_1 \geq \ell_2,\ m_1 \geq m_2,\ u_1 \geq u_2.$$

令 COA$(\ell,m,u) := (\ell+m+u)/3$ 为质心去模糊化映射。

**(4) F-LP-MACBETH（模糊线性规划）和模糊基本量表**。 对于所有 $x \in A$ （基数前的 / 基本模糊量表），决策变量为三角模糊数$\tilde{v}(x) = (v_x^L, v_x^M, v_x^U)$。通过求解以下优化问题计算 $\tilde{v}$：

$$\min\ \mathrm{COA}\big(\tilde{v}(a^+) \ominus \tilde{v}(a^-)\big)$$

满足约束

（原点） $\tilde{v}(a^-) = (0,0,0),$

（无差异） $\tilde{v}(x) \ominus \tilde{v}(y) = (0,0,0) \quad \forall (x,y) \in C_0,$

(正向分离) $\tilde{v}(x) \ominus \tilde{v}(y) \succeq (1,1,2) \quad \forall (x,y) \in C_k,\ k \in \{1,\dots,6\},$

(类别间基数一致性) $\tilde{v}(x) \ominus \tilde{v}(y) \ \succeq\ \tilde{v}(w) \ominus \tilde{v}(z)$

$$\forall (x,\ y) \in C_k, \forall (w,\ z) \in C_{k'}, k > k',\ k,\ k' \in \{1,\dots,6\}.$$

任何可行的优化器 $\tilde{v}$ 都称为模糊 *MACBETH* 基本（前基数）量表。

**（5）去模糊化和基数化**。 对每个 $x \in A$，定义基本清晰量表 $v_x :=$ COA$(\tilde{v}(x))$。为获得一个基数 量表 $E_x$，锚定两个参照层级：选择一个“中性”层级 $x^{\mathrm{neu}}$ 和一个“良好”层级$x^{\mathrm{good}}$ ，并施加

$$E_{x^{\mathrm{neu}}} = 0, \qquad E_{x^{\mathrm{good}}} = 100.$$

然后定义仿射变换

$$E_x = \alpha\, v_x + \beta,$$

其中（$\alpha$， $\beta$）由上述两个锚定方程确定。所得映射 $x \mapsto E_x$ 称为（模糊）*MACBETH* 基数价值函数。

利用不确定集，我们将不确定 MACBETH（U-MACBETH）作为对以下原有框架的扩展提出。

**定义 6.2.2**（不确定 MACBETH（U-MACBETH）：期望区间线性规划标度构建）。设$A = \{a_1, \dots, a_N\}$为一个有限的评价元素集（行动/备选方案/层级）。假设 $A$ 上存在一个全预序$\succeq$，其严格部分为 $P$，无差异部分为 $I$：

$$xPy \iff (x \succeq y \text{ and } y \not\succeq x), \qquad xIy \iff (x \succeq y \text{ and } y \succeq x).$$

设 $a^+ \in A$ 为最具吸引力的元素，$a^- \in A$ 为最不具吸引力的元素（其中 $a^+ P a^-$）。

**(1) 语义类别与不确定数值界**。设 MACBETH语义类别为 $C_0$，$C_1$，……，$C_6$，其中 $C_0$ 表示无差异，而 $C_1$，……，$C_6$ 表示吸引力差异逐渐增大。固定一个不确定性空间 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$。对于每个类别 $k \in \{0, \dots, 6\}$，指定一个不确定区间界对

$$(\widetilde{L}_k, \widetilde{U}_k) \in \mathsf{US}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathsf{US}(\mathbb{R}_{\geq 0}),$$

将其解释为属于类别 $C_k$的价值差的（不确定）下界/上界。假设期望界存在，并令

$$L_k := \mathbb{E}[\widetilde{L}_k], \qquad U_k := \mathbb{E}[\widetilde{U}_k] \qquad (k = 0, \dots, 6),$$

with

$$0 = L_0 = U_0, \qquad 0 \leq L_k \leq U_k < \infty \ (k \geq 1), \qquad U_k \leq L_{k+1} \ (k = 0, \dots, 5)$$

（期望界上的类别分离）。

**(2) 不确定MACBETH判断矩阵**。对于每个有序对 $(x, y) \in A \times A$ 且满足 $xPy$，决策者会给出一个类别标签

$$c(x, y) \in \{1, \dots, 6\}.$$

对于无差异对 $(x, y) \in I$，设 $c(x, y) := 0$。由此得到一个（类别值）判断矩阵 $c : A \times A \to \{0, \dots, 6\}$。

**(3) 期望区间线性规划（基本价值标度）**。决策变量是实数值 $v(x) \in \mathbb{R}$，适用于所有 $x \in A$。通过期望区间约束定义可行集：

| | |
|---|---|
| (Anchor) | $v(a^-) = 0,$ |
| (Indifference) | $v(x) - v(y) = 0 \quad \forall (x, y) \in I,$ |
| (Category bounds) | $L_{c(x,y)} \ \leq \ v(x) - v(y) \ \leq \ U_{c(x,y)} \quad \forall (x, y) \in A \times A \text{ with } xPy,$ |
| (Monotonicity) | $v(x) \geq v(y) \quad \forall x, y \in A \text{ with } x \succeq y.$ |

在所有可行的 $v$中，通过求解以下问题定义基本*MACBETH*标度

$$\min \ v(a^+) \quad \text{subject to the above constraints.} \tag{6.1}$$

(6.1) 的任一优化器 $v^\star$ 称为*U-MACBETH*基本价值尺度。

**(4) 基数化（0–100标度）和排序**。如果 $v^\star(a^+) \ > \ 0$，定义基数价值函数$E$： $A \to [0, 100]$ 如下

$$E(x) := 100 \cdot \frac{v^\star(x) - v^\star(a^-)}{v^\star(a^+) - v^\star(a^-)} = 100 \cdot \frac{v^\star(x)}{v^\star(a^+)} \qquad (x \in A).$$

按诱导预序对元素排序

$$x \succeq_{\text{U-MACBETH}} y \iff E(x) \geq E(y).$$

**定义 6.2.3**（不确定集结构化 U-MACBETH 输出）。根据定义 6.2.2，固定（6.1）的一个优化器$v^\star$（以及诱导的 $E$，当 $v^\star(a^+) > 0$ 时）。定义单值不确定集

$$\mathcal{V}_x : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{V}_x(\gamma) := \{v^\star(x)\},$$

且当 $v^\star(a^+) > 0$,

$$\mathcal{E}_x : \Gamma \to \mathcal{P}([0,100]), \qquad \mathcal{E}_x(\gamma) := \{E(x)\}.$$

那么 $(\mathcal{V}_x)_{x\in A}$ (和 $(\mathcal{E}_x)_{x\in A}$) 称为不确定集结构化 *U-MACBETH* 输出（通过期望区间实现）。

**定理 6.2.4**（U-MACBETH 的不确定集结构与良定义性）。 在定义 *6.2.2* 的设定下，假设：

~ ~（A1）（有限期望） $\mathbb{E}[L_k]$ 和 $\mathbb{E}[U_k]$ 存在且对所有 $k = 0$均有限，.....，6。

(A2) *(*分离的期望类别界限*)* $0 = L_0 = U_0$, $0 \le L_k \le U_k$，以及 $U_k \le L_{k+1}$ 对于 $k = 0$，.....，5。

(A3) *(*可行性*)* (6.1) 的约束集非空。

(A4) *(*非平凡顶部锚点*)* 每个可行的 $v$ 都满足 $v(a^+) > 0$ （等价地，约束保证 $a^+$ 与 $a^-$之间存在严格正的分离度）。

那么：

(i) 线性规划(6.1)良定义，且能取得一个最优解 $v^\star$；(ii) 基数值 $E(x)$ 对于所有 $x \in A$，都是 $[0,100]$ 中的良定义实数；(iii) 排序预序 $\succeq_{\text{U-MACBETH}}$ 在 $A$上良定义；(iv) 定义*6.2.3*中的映射 $\mathcal{V}_x$ 和 $\mathcal{E}_x$ 是$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$上的不确定集。

证明。 根据 (A1)，期望界 $L_k$， $U_k$ 是有限实数。因此，定义 6.2.2 中的所有约束都是常规的线性等式/不等式，所以 (6.1) 是一个标准线性规划。

根据 (A3)，可行域非空。锚点约束 $v(a^-) = 0$ 和单调性约束确保对每个可行的 $v$，都有 $v(a^+) \ge 0$，因为 $a^+ \succeq a^-$。因此，目标函数 $\min v(a^+)$ 的下界为 0。由于可行域是闭多面体，且目标函数是连续线性的，因此最小值在某个优化器 $v^\star$ 处取得，从而证明 (i)。

根据 (A4)，有 $v^\star(a^+) > 0$，因此对每个 $x \in A$，归一化 $E(x) = 100\, v^\star(x)/v^\star(a^+)$ 都是良定义的。此外， $v^\star(a^-) = 0$，而单调性意味着对所有 $x \in A$，都有 $0 \le v^\star(x) \le v^\star(a^+)$（因为 $a^+ \succeq x \succeq a^-$ 在全预序中成立）。因此， $E(x) \in [0,100]$，从而证明 (ii)。

预序 序 $\succeq_{\text{U-MACBETH}}$ 是良定义的，因为它比较实数 $E(x)$，从而证明了（iii ).

最后， $\mathcal{V}_x(\gamma) = \{v^\star(x)\}$ 和 $\mathcal{E}_x(\gamma) = \{E(x)\}$ 是从 $\Gamma$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ （分别到$\mathcal{P}([0,100])$）的单值集合映射，因此它们是不确定集。这证明了（iv）。 □

Re不确定性感知模型下 MACBETH 的相关概念列于表 6。 3.

表 6.3：不确定性感知模型下 MACBETH 的相关概念。

| $k$ | 相关 MACBETH 概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 MACBETH |
| 2 | 直觉模糊 MACBETH |
| 3 | 中智 MACBETH |

## 6.3 模糊 CoCoSo（模糊组合折衷解）

CoCoSo 结合 SAW 与 WEP 聚合来计算折衷分数，即使备选方案发生微小扰动后，仍能产生稳定、稳健的排序 [755, 756]。模糊 CoCoSo 用三角模糊数表示绩效与偏好，对其进行归一化，聚合模糊和/幂，然后一致地去模糊化最终分数 [641, 757]。

**定义 6.3.1**（模糊 CoCoSo（三角模糊数基础的组合折衷解））。[641, 757] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。将准则划分为效益集与成本集

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot\cup \mathcal{C}^-.$$

设三角模糊数$_{\geq 0} := \{(l,\ m,\ u) \in \mathbb{R}^3_{\geq 0} :\ \ l \leq m \leq u\}$。

**（0）三角模糊数运算（非负约定）**。对于 $\tilde{x} = (l_x,\ m_x,\ u_x)$ $\tilde{y} = (l_y,\ m_y,\ u_y)$ $\in$ 三角模糊数$_{\geq 0}$ 并且$c > 0$ 定义

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y,\ m_x + m_y,\ u_x + u_y), \qquad \tilde{x} \otimes \tilde{y} := (l_x l_y,\ m_x m_y,\ u_x u_y),$$

$$c \odot \tilde{x} := (c l_x,\ c m_x,\ c u_x), \qquad \tilde{x} \oslash c := \Big(\frac{l_x}{c}, \frac{m_x}{c}, \frac{u_x}{c}\Big).$$

对于 $w \geq 0$，定义（三角模糊数）标量幂为

$$\tilde{x}^{\,w} := (l_x^w,\ m_x^w,\ u_x^w),$$

（采用标准约定 e $0^0 := 1$ （如有需要）。固定一个去模糊化／评分映射（质心）

$$\mathrm{Defuzz}(l, m, u) := \frac{l + m + u}{3}.$$

**（1）输入数据（模糊决策矩阵 + 权重）**。假设给定一个三角模糊数决策矩阵

$$\widetilde{Y} = (\tilde{y}_{ij}) \in (\mathsf{TFN}_{\geq 0})^{m \times n}, \qquad \tilde{y}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}),$$

以及一个（清晰）权重向量 $w = (w_1,\ \dots\dots,\ w_n)$，其中 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$。（如果给定的是三角模糊数权重，可以先对其去模糊化并重新归一化，以得到这样的 $w$。）

**(2) 归一化（CoCoSo（7）–（8）的模糊提升）**。对于每个准则 $j$，设定全局下限和上限标量

$$\underline{y}_j := \min_{1 \leq i \leq m} l_{ij}, \qquad \overline{y}_j := \max_{1 \leq i \leq m} u_{ij}, \qquad \Delta_j := \overline{y}_j - \underline{y}_j > 0.$$

˜定义归一化三角模糊数 $t_{ij} \in$TFN$_{\geq 0}$ 如下

$$\tilde{t}_{ij} := \begin{cases} \Big(\dfrac{l_{ij}-\underline{y}_j}{\Delta_j},\ \dfrac{m_{ij}-\underline{y}_j}{\Delta_j},\ \dfrac{u_{ij}-\underline{y}_j}{\Delta_j}\Big), & C_j \in \mathcal{C}^+ \text{ (benefit)}, \\ \Big(\dfrac{\overline{y}_j-u_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{\overline{y}_j-m_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{\overline{y}_j-l_{ij}}{\Delta_j}\Big), & C_j \in \mathcal{C}^- \text{ (cost)}. \end{cases}$$

然后，逐分量计算 $0 \leq \tilde{t}_{ij} \leq$ (1,1,1)，当$\tilde{y}_{ij} =$ ($y_{ij}$,$y_{ij}$,$y_{ij}$)时，该构造简化为清晰归一化。

**(3) 模糊可比序列（CoCoSo (9)–(10) 的扩展）**。定义

$$\tilde{G}_i := \bigotimes_{j=1}^{n} \big(\tilde{t}_{ij}\big)^{w_j} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}, \qquad \tilde{H}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \big(w_j \odot \tilde{t}_{ij}\big) \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}.$$

**(4) 三个模糊评价分数（CoCoSo (11)–(13) 的扩展）**。设

$$S_{GH} := \sum_{p=1}^{m} \mathrm{Defuzz}\big(\tilde{G}_p \oplus \tilde{H}_p\big) \ > \ 0, \qquad G_{\min} := \min_p \mathrm{Defuzz}(\tilde{G}_p), \quad H_{\min} := \min_p \mathrm{Defuzz}(\tilde{H}_p),$$

$$G_{\max} := \max_p \mathrm{Defuzz}(\tilde{G}_p), \quad H_{\max} := \max_p \mathrm{Defuzz}(\tilde{H}_p).$$

定义

$$\tilde{as}_i^{(\alpha)} := \big(\tilde{G}_i \oplus \tilde{H}_i\big) \oslash S_{GH},$$

$$\tilde{as}_i^{(\beta)} := \big(\tilde{H}_i \oslash H_{\min}\big) \ \oplus \ \big(\tilde{G}_i \oslash G_{\min}\big),$$

对于参数 $\lambda \in [0,1]$ （通常为 $\lambda = 0.5$），

$$\tilde{as}_i^{(\gamma)} := \Big(\lambda \odot \tilde{H}_i \ \oplus \ (1-\lambda) \odot \tilde{G}_i\Big) \oslash \Big(\lambda H_{\max} + (1-\lambda) G_{\max}\Big).$$

**（5）最终模糊 CoCoSo 分数（CoCoSo（14）的提升）及排序**。定义最终三角模糊数分数

$$\tilde{as}_i := \Big(\tilde{as}_i^{(\alpha)} \otimes \tilde{as}_i^{(\beta)} \otimes \tilde{as}_i^{(\gamma)}\Big)^{1/3} \ \oplus \ \frac{1}{3} \odot \Big(\tilde{as}_i^{(\alpha)} \oplus \tilde{as}_i^{(\beta)} \oplus \tilde{as}_i^{(\gamma)}\Big).$$

对 $AS_i$ 去模糊化：= Defuzz($\tilde{as}_i$) $\in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 并按以下方式对备选方案进行排序

$$A_p \succeq_{\mathrm{FCoCoSo}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad AS_p \geq AS_q.$$

任何 $A^\star \in$ 最大值点集$_{1 \leq i \leq m}$ $AS_i$ 都称为一个模糊 *CoCoSo* （折中）解。

利用不确定集，我们定义不确定 CoCoSo 如下。

**定义 6.3.2** （不确定性空间、不确定变量和诱导不确定集）。 一个不确定性空间是一个三元组（$\Gamma$， $\mathcal{L}$， $\mathcal{M}$），其中 $\Gamma \neq \varnothing$, $\mathcal{L}$ 是 $\sigma$上的代数， $\mathcal{M}$： $\mathcal{L} \to [0,1]$ 是不确定测度。一个（实值）不确定变量 是一个 $\mathcal{L}$-可测映射 $\xi : \Gamma \to \mathbb{R}$。任何不确定变量 $\xi$ 都会诱导出一个单值不确定集

$$\mathcal{X}_\xi : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{X}_\xi(\gamma) := \{\xi(\gamma)\}.$$

当 $\mathbb{E}[\xi] \in \mathbb{R}$ 存在（有限）时，将其用作清晰得分。

**定义 6.3.3**（不确定 CoCoSo（U-CoCoSo）：采用期望得分决策的逐情景 CoCoSo）。设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为准则，并将其划分为

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^+\dot\cup\mathcal{C}^- \quad (\text{benefit/cost}), \qquad J^+:=\{j:C_j\in\mathcal{C}^+\},\ \ J^-:=\{j:C_j\in\mathcal{C}^-\}.$$

固定一个不确定性空间 $(\Gamma,\ \mathcal{L},\ \mathcal{M})$。

**(1) 不确定输入数据**。一个不确定 *CoCoSo* 实例由以下部分组成

- 一个不确定决策矩阵 $\Xi=(\xi_{ij})\in \mathrm{UV}_{\geq 0}^{m\times n}$，其中每个 $\xi_{ij}:\Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个不确定变量，表示 $A_i$ 在 $C_j$下的性能；
- 一个不确定权重向量$\Omega=(\omega_1,\ \dots,\ \omega_n)\in \mathrm{UV}_{\geq 0}^{n}$，其中$\omega_j:\Gamma\to\mathbb{R}_{\geq 0}$是一个不确定变量，表示 $C_j$的重要性；
- 一个参数 $\lambda\in[0,1]$（通常为 $\lambda=\frac{1}{2}$）。

这里，$\mathrm{UV}_{\geq 0}$表示定义在（$\Gamma,\ \mathcal{L},\ \mathcal{M}$）上的非负不确定变量类别。

**（2）逐情景归一化权重**。对于每个 $\gamma\in\Gamma$，定义

$$W(\gamma):=\sum_{t=1}^{n}\omega_t(\gamma), \qquad w_j(\gamma):=\frac{\omega_j(\gamma)}{W(\gamma)} \quad (j=1,\dots,n),$$

使得 $\sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma)=1$ 当且仅当 $W(\gamma)>0$。

**（3）表现的逐情景归一化**。对于每个准则 $j$ 和情景 $\gamma$，设

$$\underline{\xi}_j(\gamma):=\min_{1\leq i\leq m}\xi_{ij}(\gamma), \qquad \overline{\xi}_j(\gamma):=\max_{1\leq i\leq m}\xi_{ij}(\gamma), \qquad \Delta_j(\gamma):=\overline{\xi}_j(\gamma)-\underline{\xi}_j(\gamma).$$

假设 $\Delta_j(\gamma)>0$，定义归一化得分 $t_{ij}(\gamma)\in[0,1]$ 为

$$t_{ij}(\gamma):=\begin{cases}\dfrac{\xi_{ij}(\gamma)-\underline{\xi}_j(\gamma)}{\Delta_j(\gamma)}, & j\in J^+\ (\text{benefit}),\\[2mm] \dfrac{\overline{\xi}_j(\gamma)-\xi_{ij}(\gamma)}{\Delta_j(\gamma)}, & j\in J^-\ (\text{cost}).\end{cases}$$

**(4) CoCoSo 可比序列（类似 SAW 和类似 WEP）**。对每个备选方案 $A_i$和情景 $\gamma$，

$$H_i(\gamma):=\sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma)\,t_{ij}(\gamma), \qquad G_i(\gamma):=\prod_{j=1}^{n}\big(t_{ij}(\gamma)\big)^{\,w_j(\gamma)},$$

按照约定 $0^0:=1$，当其出现时。

**（5）三个评价分数。** 设

$$S_{GH}(\gamma) := \sum_{p=1}^{m} \big(G_p(\gamma) + H_p(\gamma)\big), \quad H_{\min}(\gamma) := \min_p H_p(\gamma), \quad G_{\min}(\gamma) := \min_p G_p(\gamma),$$

$$H_{\max}(\gamma) := \max_p H_p(\gamma), \quad G_{\max}(\gamma) := \max_p G_p(\gamma).$$

假设下列分母均为正，定义

$$as_i^{(\alpha)}(\gamma) := \frac{G_i(\gamma) + H_i(\gamma)}{S_{GH}(\gamma)},$$

$$as_i^{(\beta)}(\gamma) := \frac{H_i(\gamma)}{H_{\min}(\gamma)} + \frac{G_i(\gamma)}{G_{\min}(\gamma)},$$

$$as_i^{(\gamma)}(\gamma) := \frac{\lambda H_i(\gamma) + (1-\lambda) G_i(\gamma)}{\lambda H_{\max}(\gamma) + (1-\lambda) G_{\max}(\gamma)}.$$

**(6) 最终 U-CoCoSo 评分和决策规则。**定义最终的逐情景评分

$$AS_i(\gamma) := \Big(as_i^{(\alpha)}(\gamma)\, as_i^{(\beta)}(\gamma)\, as_i^{(\gamma)}(\gamma)\Big)^{1/3} + \frac{as_i^{(\alpha)}(\gamma) + as_i^{(\beta)}(\gamma) + as_i^{(\gamma)}(\gamma)}{3}.$$

那么 $AS_i : \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个不确定变量（满足下文的良定义性条件），并由此导出一个不确定集

$$\mathcal{AS}_i(\gamma) := \{AS_i(\gamma)\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

若期望存在，则定义清晰效用

$$U_i := \mathbb{E}[AS_i] \in \mathbb{R},$$

按 $A_p \succeq_{\text{U-CoCoSo}} A_q \iff U_p \geq U_q$ 对备选方案进行排序，并任选一个

$$A^\star \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} U_i.$$

**定理6.3.4 (不确　　定集结构与 U-CoCoSo 的良定义性)。** 在定义 *6.3.3* 中，假设　　*:*

(A1) 每个 $\xi_{ij}$ 和 $\omega_j$ 都是一个 $\mathcal{L}$-可测映射 $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。

(A2) 权重归一化有效： $W(\gamma) = \sum_{t=1}^{n} \omega_t(\gamma) > 0$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立。

(A3) 非退化准则范围： $\Delta_j(\gamma) > 0$ 对所有 $j = 1,\ldots,n$ 以及所有 $\gamma \in$ $\Gamma$.

(A4) 评价分数的正分母:

$$S_{GH}(\gamma) > 0, \quad H_{\min}(\gamma) > 0, \quad G_{\min}(\gamma) > 0, \quad \lambda H_{\max}(\gamma) + (1-\lambda) G_{\max}(\gamma) > 0 \quad (\forall \gamma \in \Gamma).$$

(A5) 有限期望分数：对于所有 $i = 1,\ldots,m$，均存在 $\mathbb{E}[AS_i] \in \mathbb{R}$。

那么:

(i) 定义 *6.3.3* 的步骤 (2)–(6) 中的所有量对于每个 $\gamma \in$ 都是良定义的 $\Gamma$;

(ii) 每个 $AS_i : \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都是不确定变量，因此 $\mathcal{AS}_i(\gamma) = \{AS_i(\gamma)\}$ 是$(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$上的不确定集;

(iii) 由 $U_i = \mathbb{E}[AS_i]$ 诱导的排序预序 $\succeq_{\text{U-CoCoSo}}$ 在 $\mathcal{A}$上是良定义的，且最大值点$_i\, U_i$ 非空。

证明。 任取 $\gamma \in \Gamma$。

由 (A2)， $W(\gamma) > 0$，因此每个归一化权重 $w_j(\gamma) = \omega_j(\gamma)/W(\gamma)$ 都是良定义的实数，且$\sum_j w_j(\gamma) = 1$。

根据 (A3)， $\Delta_j(\gamma) > 0$，因此每个归一化表现 $t_{ij}(\gamma)$ 都是良定义的。此外，根据构造，$t_{ij}(\gamma) \in [0, 1]$。

因此，加权和 $H_i(\gamma) = \sum_j w_j(\gamma) t_{ij}(\gamma)$ 是良定义的，且属于 $[0, 1]$。此外， $G_i(\gamma) = \prod_j (t_{ij}(\gamma))^{w_j(\gamma)}$ 作为非负实数的有限乘积（必要时使用 $0^0 := 1$ ）是良定义的，因此$G_i(\gamma) \in [0, 1]$。

假设 (A4) 保证 $as_i^{(\alpha)}(\gamma)$ $as_i^{(\beta)}(\gamma)$ $as_i^{(\gamma)}(\gamma)$ 中出现的每个分母都严格为正，因此这些评价分数都是良定义的实数。因此， $AS_i(\gamma)$ 是良定义的。

为证明可测性，注意到和、乘积、除以严格正可测函数的标量除法，以及逐点最小值/最大值都能保持 $\mathcal{L}$-可测性。在 (A1)–(A4) 下，每个映射 $\gamma \mapsto AS_i(\gamma)$ 都由 $(\xi_{ij})$ 和 $(\omega_j)$ 经有限次此类运算得到，因此 $AS_i$ 是一个 $\mathcal{L}$-可测映射 $\Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，即一个不确定变量。这证明了 (i) 和 (ii)。

最后，根据 (A5)，每个 $U_i = \mathbb{E}[AS_i]$ 都是有限实数，因此预序 $A_p \succeq_{\text{U-CoCoSo}} A_q \iff U_p \geq U_q$ 是良定义的。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，$\max_i U_i$ 存在，且 $\arg\max_i U_i$ 非空，从而证明了 (iii)。 □

CoCoSo 及具有代表性的不确定性感知变体列于表6.4。

表6.4：CoCoSo 及具有代表性的不确定性感知变体（按度域维度 $k$ 分类）。

| $k$ | 评价度取值于 $[0,1]^k$ 子集中的代表性 CoCoSo 型模型 |
|---|---|
| 1 | 模糊 CoCoSo。 |
| 2 | 直觉模糊CoCoSo [758, 759]；勾股模糊CoCoSo [760, 761]；费马模糊CoCoSo [762]。 |
| 3 | 图片模糊CoCoSo [764, 765]；球形模糊CoCoSo [766, 767]；中智CoCoSo 。 |
| $n$ | 析取生成CoCoSo [768] |

**注释**。 此处 $k$ 表示用于编码每项准则评价（以及适用时的每项权重）的度域的环境维数。按照这一约定，图片模糊评价和（单值）中智评价均视为三分量度，因此 $k = 3$。

除不确定 CoCoSo 之外，粗糙CoCoSo [769], 灰色CoCoSo [770, 771], SWARA-CoCoSo[772, 773], 以及扩展 CoCoSo [774, 775] 等概念亦为人所知。

## 6.4 模糊 SAW（模糊加性加权）

经典 SAW 对性能得分进行归一化，将每个准则乘以其权重，对加权值求和，并在给定准则下按总分最大值对备选方案进行排名 [776,777]。模糊 SAW 对模糊绩效评级进行归一化，乘以准则权重，对加权模糊得分求和，对其进行去模糊化，并按最高总体效用最终指数对备选方案进行排名 [778–780]。

**定义 6.4.1**（带三角模糊数的模糊 SAW（FSAW））。 [778–780] 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集。假设每个准则 $C_j$或者是效益型 准则（↑；越大越好），或者是成本型 准则（↓；越小越好）。

**（0）三角模糊数（TFNs）及算术运算**。设

$$\mathsf{TFN}_{\geq 0}:=\{(l,m,u)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq l\leq m\leq u\}.$$

对于 $\tilde{x}=(l_x,\ m_x,\ u_x)$ $\tilde{y}=(l_y,\ m_y,\ u_y)$ $\in$三角模糊数$\geq 0$和 $\alpha\geq 0$，定义

$$\tilde{x}\oplus\tilde{y}:=(l_x+l_y,\ m_x+m_y,\ u_x+u_y),\qquad \alpha\odot\tilde{x}:=(\alpha l_x,\ \alpha m_x,\ \alpha u_x).$$

**(1) 模糊决策矩阵**。A基于三角模糊数的模糊决策矩阵为

$$\tilde{X}=(\tilde{x}_{ij})\in(\mathsf{TFN}_{\geq 0})^{m\times n},\qquad \tilde{x}_{ij}=(a_{ij},b_{ij},c_{ij}),$$

其中，$\tilde{x}_{ij}$ 表示 $C_j$下 $A_i$ 的性能（可能是语言型）。如果 $P\geq 1$ 决策者提供三角模糊数 $\tilde{x}_{ij}^{(p)}=($$a_{ij}^{(p)}$ ， $b_{ij}^{(p)}$ ，$c_{ij}^{(p)}$ **)**，一种标准的聚合方法是三角模糊数几何平均

$$\tilde{x}_{ij}:=\Big(\prod_{p=1}^{P}a_{ij}^{(p)}\Big)^{1/P},\quad \Big(\prod_{p=1}^{P}b_{ij}^{(p)}\Big)^{1/P},\quad \Big(\prod_{p=1}^{P}c_{ij}^{(p)}\Big)^{1/P}.$$

（模糊多准则决策矩阵通常采用几何平均聚合。）

**(2) 准则权重**。设 $w=($$w_1$，.....， $w_n$**)**为一个（清晰）权重向量，且

$$w_j\geq 0,\qquad \sum_{j=1}^{n}w_j=1.$$

（例如，可通过对语言判断进行去模糊化和归一化来获得权重。）

**(3) 三角模糊数的归一化**。为将异质标准映射到可比较的尺度，并使归一化三角模糊数保持在 $[0,1]$, 中，效益型准则的一种标准线性尺度变换为:

$$\tilde{r}_{ij}:=\Big(\frac{a_{ij}}{c_j^*},\ \frac{b_{ij}}{c_j^*},\ \frac{c_{ij}}{c_j^*}\Big),\qquad c_j^*:=\max_{1\leq i\leq m}c_{ij},\qquad (C_j:\uparrow).$$

这种归一化方法广泛用于模糊 SAW 的实现中。

对于成本型准则，一种常见的对偶形式（确保正性后）为:

$$\tilde{r}_{ij} := \Big(\frac{a_j^-}{c_{ij}},\ \frac{a_j^-}{b_{ij}},\ \frac{a_j^-}{a_{ij}}\Big), \qquad a_j^- := \min_{1\le i\le m} a_{ij}, \qquad (C_j :\downarrow),$$

这是成本倒数归一化对应的三角模糊数形式。

**(4) 加权归一化矩阵与模糊 SAW 得分**。将加权归一化三角模糊数的各项定义为

$$\tilde{v}_{ij} := w_j \odot \tilde{r}_{ij} = (w_j r_{ij}^{\ell},\ w_j r_{ij}^{m},\ w_j r_{ij}^{u}),$$

备选方案 $A_i$ 的模糊总得分由三角模糊数之和给出

$$\tilde{s}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{v}_{ij} \in \mathsf{TFN}_{\ge 0}.$$

~等价地，用矩阵形式表示即为模糊加权求和 $\tilde{s} = R\,w$ （即对归一化评价值按权重进行简单加权聚合）。

**(5) 去模糊化与排序**。通过（有符号距离/质心）去模糊化，将 $\tilde{s}_i = (s_i^{\ell},\ s_i^{m},\ s_i^{u})$ 转换为清晰得分:

$$\mathrm{Score}(A_i) := \mathrm{Defuzz}(\tilde{s}_i) := \frac{s_i^{\ell} + s_i^{m} + s_i^{u}}{3}.$$

然后按得分降序排列备选方案:

$$A_p \succeq_{\mathrm{FSAW}} A_q \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Score}(A_p) \ge \mathrm{Score}(A_q).$$

（在模糊简单加权实践中，将 $(a+b+c)/3$ 用作三角模糊数的去模糊化规则是标准做法。）

**(6) 化简为精确简单加权法**。如果每个三角模糊数都是退化的 $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij},\ x_{ij},\ x_{ij})$，那么 $\tilde{r}_{ij}$ 和 $\tilde{s}_i$ 也都是退化的，上述过程便化简为经典的（精确）SAW 方法。

使用不确定集，我们将不确定SAW（U-SAW）定义如下。

**定义 6.4.2** （不确定SAW（U-SAW）：逐情景SAW与期望得分决策）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集，并将其划分为

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot\cup \mathcal{C}^- \quad (\text{benefit/cost}), \qquad J^+ := \{j : C_j \in \mathcal{C}^+\},\ \ J^- := \{j : C_j \in \mathcal{C}^-\}.$$

给定一个不确定性空间 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 。

**(1) 不确定输入数据**。一个不确定*SAW*实例由以下部分组成:

- 一个不确定决策矩阵

$$\Xi = (\xi_{ij}) \in \mathsf{UV}^{m\times n}, \qquad \xi_{ij} : \Gamma \to \mathbb{R}_{\ge 0},$$

其中 $\xi_{ij}(\gamma)$是在情景 $\gamma$下 $A_i$ 依据 $C_j$ 的（非负）性能;

- 一个不确定准则权重向量

$$\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\mathsf{UV}_{\geq 0})^n, \qquad \omega_j : \Gamma \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

**（2）分情景权重归一化**。对于每种情景 $\gamma \in \Gamma$，定义

$$W(\gamma) := \sum_{t=1}^{n} \omega_t(\gamma), \qquad w_j(\gamma) := \frac{\omega_j(\gamma)}{W(\gamma)} \quad (j = 1, \dots, n),$$

使得 $\sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma) = 1$ 当 $W(\gamma) > 0$时。

**（3）情景性能分情景归一化**。对于每个准则 $j$ 和情景 $\gamma$，定义

$$\underline{\xi}_j(\gamma) := \min_{1 \leq i \leq m} \xi_{ij}(\gamma), \qquad \overline{\xi}_j(\gamma) := \max_{1 \leq i \leq m} \xi_{ij}(\gamma).$$

假设效益型准则满足 $\xi_j(\gamma) > 0$，成本型准则满足 $\xi_j(\gamma) > 0$，则将归一化得分 $r_{ij}(\gamma) \in [0, 1]$定义为

$$r_{ij}(\gamma) := \begin{cases} \dfrac{\xi_{ij}(\gamma)}{\overline{\xi}_j(\gamma)}, & j \in J^{+} \text{ (benefit)}, \\[2ex] \dfrac{\underline{\xi}_j(\gamma)}{\xi_{ij}(\gamma)}, & j \in J^{-} \text{ (cost)}. \end{cases}$$

**(4) 逐情景SAW聚合**。对于每个备选方案 $A_i$ 和情景 $\gamma$，定义

$$S_i(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma)\, r_{ij}(\gamma) \in [0, 1].$$

则 $S_i : \Gamma \to [0, 1]$ 是不确定*SAW*得分（逐情景SAW效用）。

**(5) 不确定集结构与决策规则**。每个 $S_i$ 都会诱导出一个不确定集

$$\mathcal{S}_i(\gamma) := \{S_i(\gamma)\} \subseteq [0, 1].$$

如果 $\mathbb{E}[S_i]$存在且为有限值，则定义清晰效用

$$U_i := \mathbb{E}[S_i] \in \mathbb{R},$$

按备选方案排序，方式为

$$A_p \succeq_{\text{U-SAW}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad U_p \geq U_q,$$

并选择任意

$$A^{\star} \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} U_i.$$

**定理 6.4.3** （U-SAW 的不确定集结构与良定义性）。 在定义 *6.4.2* 中，假设：

(A1) *(*可测性*)* 每个 $\xi_{ij}$ 和 $\omega_j$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的。

**(A2)** *(总权重为正)* $W(\gamma) = \sum_{t=1}^{n} \omega_t(\gamma) > 0$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$。

**(A3)** *(归一化分母)* 对所有 $\gamma \in \Gamma$:

$$\bar{\xi}_j(\gamma) > 0 \ \ \forall j \in J^+, \qquad \underline{\xi}_j(\gamma) > 0 \ \ \forall j \in J^-, \qquad \xi_{ij}(\gamma) > 0 \ \ \forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times J^-.$$

(A4) *(有限期望)* 对所有 $i = 1$，……，$m$，$\mathbb{E}[S_i]$ 均存在且有限。

于是:

(i) 归一化权重 $w_j(\gamma)$ 和归一化得分 $r_{ij}(\gamma)$ 对每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $r_{ij}(\gamma) \in [0,1]$ 都是良定义的;

（ii）每个 $S_i$： $\Gamma \to [0,1]$ 都是一个不确定变量，因此 $\mathcal{S}_i$（$\gamma$）$= \{S_i$（$\gamma$）$\}$ 是 （$\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}$）上的一个不确定集;

（iii）由 $U_i = \mathbb{E}[S_i]$ 诱导的预序 $\succeq_{\text{U-SAW}}$ 是良定义的，并且由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，最大值点$_i$ $U_i$ 非空。

证明。取 $\gamma \in \Gamma$。

由（A2），$W(\gamma) > 0$，因此每个归一化权重 $w_j(\gamma) = \omega_j(\gamma)/W(\gamma)$ 都是良定义的实数，并且$\sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma) = 1$。

对于 $j \in J^+$，（A3）给出 $\xi_j(\gamma) > 0$，因此 $r_{ij}(\gamma) = \bar{\xi}_{ij}(\gamma)/\xi_j(\gamma)$ 是良定义的，且属于 $[0,1]$，因为根据最大值的定义，$0 \le \xi_{ij}(\gamma) \le \xi_j(\gamma)$。对于 $j \in J^-$，（A3）保证 $\xi_{ij}(\gamma) > 0$ 且 $\xi_j(\gamma) > 0$，因此$r_{ij}(\gamma) = \xi_j(\gamma)/\xi_{ij}(\gamma)$ 是良定义的，并属于 $[0,1]$，因为 $\xi_j(\gamma) \le \xi_{ij}(\gamma)$。

因此，对于每个 $i$，SAW评分 $S_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma) r_{ij}(\gamma)$ 都是良定义的，并且作为 $[0,1]$ 中数值的凸组合，其取值位于 $[0,1]$，中。

要证明 $S_i$ 是不确定变量，注意到在 (A1) 条件下，映射 $\xi_{ij}$ 和 $\omega_j$ 均可测；有限个可测函数的逐点最小值/最大值仍可测；和、乘积以及除以严格正可测函数均保持可测性。因此，$\gamma \mapsto w_j(\gamma)$、$\gamma \mapsto r_{ij}(\gamma)$ 以及由此得到的 $\gamma \mapsto S_i(\gamma)$ 均为 $\mathcal{L}$-可测。由此，$S_i$ 是不确定变量 $\Gamma \to [0,1]$，且其诱导的单点映射 $\mathcal{S}_i(\gamma) = \{S_i(\gamma)\}$ 是一个不确定集。这证明了 (i) 和 (ii)。

最后，(A4) 得出有限实数 $U_i = \mathbb{E}[S_i]$。因此，$A_p \succeq_{\text{U-SAW}} A_q \iff U_p \ge U_q$ 在 $\mathcal{A}$ 上定义了良定义的预序。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，$\max_i U_i$ 存在，且 $\arg\max_i U_i$ 非空。这就证明了 (iii)。 □

不确定性感知模型下 SAW 的相关概念列于表6.5 .

表6.5：不确定性感知模型下的 SAW 相关概念。

| $k$ | 相关 SAW 概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 SAW |
| 2 | 直觉模糊简单加权加法法 [781,782] |
| 3 | 中智简单加权加法法 [783,784] |

## 6.5 模糊RAFSI（通过将准则子区间函数映射至单一区间对备选方案进行模糊排序）

RAFSI利用理想点和负理想点将准则值映射到公共区间，然后聚合加权归一化得分 [785, 786]。模糊RAFSI使用模糊数进行评价，将其映射到公共区间，对效益型/成本型准则进行归一化，并聚合模糊加权得分 [787, 788]。

**定义 6.5.1**（基于三角模糊数的模糊RAFSI法）。 [787,788] 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集。将准则划分为效益型（最大化）和成本型（最小化）两类：

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^{+}\dot{\cup}\mathcal{C}^{-}.$$

假设评价值由三角模糊数（TFNs）给出

$$\tilde{x}_{ij}=(l_{ij},m_{ij},u_{ij}),\qquad 0\le l_{ij}\le m_{ij}\le u_{ij},$$

~构成模糊决策矩阵 $X=(\tilde{x}_{ij})\in(\text{三角模糊数}\ge 0)^{m\times n}$。设 $w=(w_1,\dots,w_n)\in[0,1]^n$ 为准则权重，且满足 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。

~**三角模糊数运算（标准正向约定）**。对于三角模糊数 $\tilde{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$b=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 和 $\alpha\ge 0$，定义

$$\tilde{a}\oplus\tilde{b}:=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3),\qquad \alpha\odot\tilde{a}:=(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3),$$

以及（对于严格正的三角模糊数）其倒数

$$\tilde{a}^{-1}:=\left(\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_1}\right).$$

确定质心得分（去模糊化）映射

$$\mathrm{COA}(l,m,u):=\frac{l+m+u}{3}.$$

**步骤 1（参考点：正理想解/负理想解）**。对于每个准则 $C_j$，定义精确参考点（通过重心面积排序）：

$$a_j^{I}:=\begin{cases}\max_{1\le i\le m}\mathrm{COA}(\tilde{x}_{ij}), & C_j\in\mathcal{C}^{+},\\ \min_{1\le i\le m}\mathrm{COA}(\tilde{x}_{ij}), & C_j\in\mathcal{C}^{-},\end{cases}\qquad a_j^{N}:=\begin{cases}\min_{1\le i\le m}\mathrm{COA}(\tilde{x}_{ij}), & C_j\in\mathcal{C}^{+},\\ \max_{1\le i\le m}\mathrm{COA}(\tilde{x}_{ij}), & C_j\in\mathcal{C}^{-}.\end{cases}$$

（等价地，决策者也可以从外部指定 $a_j^{I},\ a_j^{N}$。）

**步骤 2（映射至公共区间的函数映射）**。固定数值 $n_1 > 0$ 和 $n_2 > n_1$（通常为 $n_1 = 1,\ n_2 = 6$）。定义仿射映射

$$f_j(x) := \frac{n_2 - n_1}{a_j^I - a_j^N}\, x + \frac{a_j^I n_1 - a_j^N n_2}{a_j^I - a_j^N} \qquad (a_j^I \neq a_j^N),$$

并设标准化三角模糊数

$$\tilde{s}_{ij} := f_j(\tilde{x}_{ij}) := \big(f_j(l_{ij}),\, f_j(m_{ij}),\, f_j(u_{ij})\big) \in \mathsf{TFN}_{>0}.$$

（若 $a_j^I = a_j^N$，则对所有 $i$，设 $\tilde{s}_{ij} := (n_1,\ n_1,\ n_1)$。）

**第3步（公共区间的算术平均数与调和平均数）**。定义 e

$$A := \frac{n_1 + n_2}{2}, \qquad H := \frac{2}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

**第4步（RAFSI 归一化）**。定义归一化三角模糊数 $\tilde{s}_{ij}$ 为

$$\widehat{\tilde{s}}_{ij} := \begin{cases} \dfrac{1}{2A} \odot \tilde{s}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^+, \\ \dfrac{H}{2} \odot \tilde{s}_{ij}^{-1}, & C_j \in \mathcal{C}^-. \end{cases}$$

**第5步（准则函数/总体得分与排序）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其总体模糊RAFSI得分

$$\tilde{V}(A_i) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Big( w_j \odot \widehat{\tilde{s}}_{ij} \Big) \in \mathsf{TFN}_{>0}.$$

去模糊化 $V_i :=$ 面积中心法$(V(A_i))$，并据此对备选方案排序

$$A_p \succeq_{\text{F-RAFSI}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad V_p \geq V_q.$$

任一最大化元 $A^\star \in$ 最大值点集$_i\, V_i$ 称为模糊*RAFSI*最优备选方案。

利用不确定集，我们将不确定RAFSI（U-RAFSI）定义如下。

**定义6.5.2**（不确定性空间、不确定变量与诱导不确定集）。一个不确定性空间是三元组（$\Gamma$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$），其中 $\Gamma \neq \varnothing$，$\mathcal{L}$ 是 $\Gamma$上的 $\sigma$-代数，且 $\mathcal{M}:\ \mathcal{L} \to [0,1]$ 是一个不确定测度。一个（实值）不确定变量 是 $\mathcal{L}$-可测映射 $\xi:\ \Gamma \to \mathbb{R}$。每个不确定变量 $\xi$ 诱导一个单值不确定集

$$\mathcal{X}_\xi : \Gamma \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{X}_\xi(\gamma) := \{\xi(\gamma)\}.$$

只要该值存在且为有限值，$\mathbb{E}[\xi] \in \mathbb{R}$ 就表示 $\xi$的期望值。

**定义 6.5.3**（不确定RAFSI（U-RAFSI）：采用期望得分决策的分情景RAFSI）。设$\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$为备选方案，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$为准则，并划分为效益/成本集合

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^+\dot\cup\mathcal{C}^-,\qquad J^+:=\{j:C_j\in\mathcal{C}^+\},\ \ J^-:=\{j:C_j\in\mathcal{C}^-\}.$$

固定一个不确定性空间（$\Gamma$、$\mathcal{L}$、$\mathcal{M}$）和常数$0<n_1<n_2$。设算术与调和锚点

$$A:=\frac{n_1+n_2}{2},\qquad H:=\frac{2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

**(1) 不确定评价与权重**。一个不确定*RAFSI*实例由以下内容指定：

- 一个不确定决策矩阵

$$\Xi=(\xi_{ij})\in\mathsf{UV}^{m\times n},\qquad \xi_{ij}:\Gamma\to\mathbb{R},$$

- 一个不确定准则权重向量

$$\Omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)\in(\mathsf{UV}_{\ge0})^n,\qquad \omega_j:\Gamma\to\mathbb{R}_{\ge0}.$$

**(2) 分情景权重归一化**。对于每个情景$\gamma\in\Gamma$，定义

$$W(\gamma):=\sum_{t=1}^{n}\omega_t(\gamma),\qquad w_j(\gamma):=\frac{\omega_j(\gamma)}{W(\gamma)}\quad(j=1,\dots,n).$$

**(3) 分情景理想/反理想参考点**。对于每个准则$j$和情景$\gamma$，定义参考标量

$$a_j^I(\gamma):=\begin{cases}\max\limits_{1\le i\le m}\ \xi_{ij}(\gamma), & j\in J^+,\\ \min\limits_{1\le i\le m}\ \xi_{ij}(\gamma), & j\in J^-,\end{cases}\qquad a_j^N(\gamma):=\begin{cases}\min\limits_{1\le i\le m}\ \xi_{ij}(\gamma), & j\in J^+,\\ \max\limits_{1\le i\le m}\ \xi_{ij}(\gamma), & j\in J^-.\end{cases}$$

(因此，$a_j^I(\gamma)$是分情景理想点，而$a_j^N(\gamma)$是分情景反理想点。)

**(4) 映射到公共区间$[n_1,n_2]$的分情景函数映射**。每当$a_j^I(\gamma)\neq a_j^N(\gamma)$，定义仿射映射

$$f_{j,\gamma}(x):=\frac{n_2-n_1}{a_j^I(\gamma)-a_j^N(\gamma)}\,x+\frac{a_j^I(\gamma)n_1-a_j^N(\gamma)n_2}{a_j^I(\gamma)-a_j^N(\gamma)}.$$

定义标准化（映射）绩效

$$s_{ij}(\gamma):=\begin{cases}f_{j,\gamma}\big(\xi_{ij}(\gamma)\big), & a_j^I(\gamma)\neq a_j^N(\gamma),\\ n_1, & a_j^I(\gamma)=a_j^N(\gamma),\end{cases}\qquad(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

（因此，当$a_j^I(\gamma)\neq a_j^N(\gamma)$时，$s_{ij}(\gamma)\in[n_1,n_2]$。）

**（5）RAFSI 归一化（效益/成本）**。定义归一化值 $\widehat{s}_{ij}$（$\gamma$）为

$$\widehat{s}_{ij}(\gamma) := \begin{cases} \dfrac{s_{ij}(\gamma)}{2A}, & j \in J^{+}, \\ \dfrac{H}{2} \cdot \dfrac{1}{s_{ij}(\gamma)}, & j \in J^{-}. \end{cases}$$

**(6) 逐情景 RAFSI 得分和不确定集输出**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其（逐情景）RAFSI 得分

$$V_i(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma)\, \widehat{s}_{ij}(\gamma) \in \mathbb{R}.$$

那么 $V_i : \Gamma \to \mathbb{R}$ 是一个不确定变量，并且它会导出一个不确定集

$$\mathcal{V}_i(\gamma) := \{V_i(\gamma)\}.$$

**(7) 期望得分排序与选择**。如果 $\mathbb{E}[V_i]$存在且为有限值，则定义

$$U_i := \mathbb{E}[V_i] \in \mathbb{R}, \qquad A_p \succeq_{\text{U-RAFSI}} A_q \iff U_p \geq U_q,$$

并选择任意一个

$$A^{\star} \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} U_i.$$

**定理 6.5.4(不确定集　结构与 U-RAFSI 的良定义性)**。 在定义 *6.5.3* 中，假设：

(A1) *(*可测性*)* 每个 $\xi_{ij}$ 和 $\omega_j$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的。

**(A2)** *(*总权重为正*)* $W(\gamma) = \sum_{t=1}^{n} \omega_t(\gamma) > 0$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$。

**(A3)** *(*公共区间锚点*)* $0 < n_1 < n_2$。

(A4) *(* 映射后成本为正*)* 对每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $j \in J^{-}$，映射后的值满足 $s_{ij}(\gamma) > 0$，对所有 $i$ 均成立（特别是，当 $n_1 > 0$ 时，此条件成立）。

(A5) *(*有限期望*)* $\mathbb{E}[V_i]$ 存在，且对于所有 $i = 1, \ldots, m$ 都是有限的。

那么：

(i) 对于每个 $\gamma \in \Gamma$，量 $w_j(\gamma)$、 $a_j^I(\gamma)$、 $a_j^N(\gamma)$、$s_{ij}(\gamma)$、 $\widehat{s}_{ij}(\gamma)$以及 $V_i(\gamma)$ 都是良定义的实数；

(ii) 每个 $V_i$ 都是一个不确定变量，因此 $\mathcal{V}_i(\gamma) = \{V_i(\gamma)\}$ 是一个不确定集；

(iii) 预序 $\succeq_{\text{U-RAFSI}}$ 是良定义的，且最大值点集$_i\, \mathbb{E}[V_i] \neq \varnothing$。

证明。取定 $\gamma \in \Gamma$。

(i) 根据 (A2)， $W(\gamma) > 0$，因此 $w_j(\gamma) = \omega_j(\gamma)/W(\gamma)$ 是良定义的，且 $\sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma) = 1$。由于 $m < \infty$，$\{\xi_{ij}(\gamma)\}_{i=1}^{m}$ 的逐点最大值/最小值在 $\mathbb{R}$ 中存在，因此 $a_j^I(\gamma)$ 和 $a_j^N(\gamma)$ 是良定义的实数。

若 $a_j^I(\gamma) \neq a_j^N(\gamma)$，则 $f_{j,\gamma}$ 是良定义的仿射映射，且 $s_{ij}(\gamma) = f_{j,\gamma}(\xi_{ij}(\gamma))$ 是实数。若$a_j^I(\gamma) = a_j^N(\gamma)$，则令 $s_{ij}(\gamma) = n_1$，根据 (A3)，该定义良好。因此，$s_{ij}(\gamma)$ 在所有情况下都有良好定义。此外，对于 $a_j^I(\gamma) \neq a_j^N(\gamma)$，有 $f_{j,\gamma}(a_j^N(\gamma)) = n_2$ 且 $f_{j,\gamma}(a_j^I(\gamma)) = n_1$，因此只要$\xi_{ij}(\gamma) \in [a_j^N(\gamma)\ a_j^I(\gamma)],$，就有 $s_{ij}(\gamma) \in [n_1, n_2]$；根据最大值/最小值的定义，这一条件成立。因此 $s_{ij}(\gamma) \geq n_1 > 0$。特别地，对于$j \in J^-$，有 $s_{ij}(\gamma) > 0$，所以成本归一化中的倒数 $1/s_{ij}(\gamma)$ 是良定义的。因此，$\widehat{s}_{ij}(\gamma)$ 对所有 $i, j$ 都有良好定义，$V_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} w_j(\gamma)\widehat{s}_{ij}(\gamma)$ 也一样。

(ii) 在 (A1) 下，每个 $\xi_{ij}$和 $\omega_j$都是可测的。有限和保持可测性，且有限多个可测函数的逐点最小值/最大值是可测的。在集合 $\{\gamma$ 上：$a_j^I(\gamma) \neq a_j^N(\gamma)\}$, $s_{ij}(\gamma)$ 由可测函数经算术运算以及除以一个非零可测函数得到，因此在该处可测；在补集上它是常数 $n_1$，因此可测。从而$s_{ij}$ 在整个 $\Gamma$ 上可测。由于 $1/s_{ij}$ 在 $s_{ij} > 0$ 处可测（且 (A4) 对成本型准则保证了这一点），故 $\widehat{s}_{ij}$ 可测。因此每个 $V_i$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的，即不确定变量，且$\mathcal{V}_i(\gamma) = \{V_i(\gamma)\}$ 是不确定集。

(iii) 由 (A5)，每个 $U_i = \mathbb{E}[V_i]$ 都是有限实数，因此 $A_p \succeq_{\text{U-RAFSI}} A_q \iff U_p \geq U_q$ 定义了一个良定义的预序。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，$\max_i U_i$ 存在，且最大值点集$_i\, U_i$ 非空。 □

不确定性感知模型下RAFSI的相关概念列于表6.6。

表6.6：不确定性感知模型下RAFSI的相关概念。

| $k$ | **相关RAFSI概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊RAFSI |
| 2 | 直觉模糊RAFSI |
| 2 | 费马模糊RAFSI [789] |
| 3 | 中智RAFSI [790] |

## 6.6 模糊RATMI（基于迹到中位数指数的备选方案模糊排序）

RATMI 是一种基于矩阵的多准则决策排序方法，它对准则值进行归一化，应用准则权重，并将基于迹的绩效项与中位数相似度项结合，得出单一的迹-中位数指数 [791, 792]。RAMS-RATMI 等相关概念 [793, 794]，也已为人所知。模糊 RATMI 将 RATMI 扩展至评价为模糊或语言型的设定；首先将模糊评估转换为可比较的标量得分（例如，通过去模糊化），然后采用相同的迹-中位数聚合，在不确定性下对备选方案进行排序 [795]。

**定义 6.6.1** （模糊 RATMI（FRATMI）：基于迹到中位数指数的备选方案模糊排序）。[795] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则（$m$，$n \geq 2$）。将准则划分为效益集和成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot{\cup}\, \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

设模糊决策矩阵为正

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} \in \mathbb{F}_{>0},$$

其中 $\mathbb{F}_{>0}$ 是选定的正模糊评价值族（例如，三角模糊数、梯形模糊数、区间值模糊数）。

**步骤0（得 分/去模糊化）**。固定一个评分映射 $S:\ \mathbb{F}_{>0} \to (0,\ \infty)$，并定义一个清晰矩阵

$$x_{ij} := S(\tilde{x}_{ij}) > 0 \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

（三角模糊数 $\tilde{x} = (\ell,\ m,\ u)$的示例：$S(\tilde{x}) = (\ell + m + u)/3$。）

**步骤 1（归一化）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{\max_{1\le i\le m} x_{ij}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\[2ex] \dfrac{\min_{1\le i\le m} x_{ij}}{x_{ij}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases}$$

然后 $r_{ij} \in (0, 1]$。

**步骤 2（权重与加权归一化）**。令 $w = (w_1,\dots,w_n)^{\top}$ 为准则权重，且满足

$$w_j \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

定义加权归一化矩阵 $U = (u_{ij})$ 如下

$$u_{ij} := w_j\, r_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

**步骤 3（最优备选方案分量）**。定义分量最优向量 $Q = (q_1,\dots,q_n)$如下

$$q_j := \max_{1\le i\le m} u_{ij} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

令 $k := |\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}|$ 和 $h := |\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}|$ $(k + h = n)$，并根据 $\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}$ 和 $\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$ 将 $Q = Q_{\max} \cup Q_{\min}$ 分解。

**第4步（幅度）**。定义效益型和成本型分量的幅度 :

$$Q_k := \sqrt{\sum_{C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}} q_j^2}, \qquad Q_h := \sqrt{\sum_{C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}} q_j^2}.$$

对于每个备选方案 $A_i$，定义

$$U_{ik} := \sqrt{\sum_{C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}} u_{ij}^2}, \qquad U_{ih} := \sqrt{\sum_{C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}} u_{ij}^2}.$$

**步骤 5（迹指数：MCRAT 组件）**。定义对角矩阵

$$F := \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & Q_h \end{pmatrix}, \qquad G_i := \begin{pmatrix} U_{ik} & 0 \\ 0 & U_{ih} \end{pmatrix}, \qquad T_i := F\,G_i.$$

定义迹得分

$$\mathrm{tr}_i := \mathrm{tr}(T_i) = Q_k U_{ik} + Q_h U_{ih}.$$

**步骤 6（中位数相似度：RAMS 分量）**。定义中位数长度

$$M := \frac{\sqrt{Q_k^2 + Q_h^2}}{2}, \qquad M_i := \frac{\sqrt{U_{ik}^2 + U_{ih}^2}}{2},$$

和中位数相似度

$$\mathrm{MS}_i := \frac{M_i}{M}.$$

**步骤 7（迹-中位数指数：RATMI）**。令 $v \in [0,1]$（通常 $v = 0.5$）。定义

$$\mathrm{tr}^* := \min_{1\le i\le m} \mathrm{tr}_i, \quad \mathrm{tr}^- := \max_{1\le i\le m} \mathrm{tr}_i, \quad \mathrm{MS}^* := \min_{1\le i\le m} \mathrm{MS}_i, \quad \mathrm{MS}^- := \max_{1\le i\le m} \mathrm{MS}_i\,.$$

假设 $\mathrm{tr}^- > \mathrm{tr}^*$ 且 $\mathrm{MS}^- > \mathrm{MS}^*$。$A_i$ 的（模糊）*RATMI* 指数为

$$E_i := v\,\frac{\mathrm{tr}_i - \mathrm{tr}^*}{\mathrm{tr}^- - \mathrm{tr}^*} + (1-v)\,\frac{\mathrm{MS}_i - \mathrm{MS}^*}{\mathrm{MS}^- - \mathrm{MS}^*}.$$

**排序规则：**按 $E_i$降序排列备选方案。

现在，我们通过使用不确定集扩展该框架，给出类型为 $M$ 的不确定RATMI。

**定义 6.6.2**（类型为 $M$ 的不确定RATMI（U-RATMI））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则，且 $m,\ n \ge 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \,\dot\cup\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其中 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，并设可容许正评分为 $S_M$。假设给定一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n).$$

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $X = (x_{ij})$如下

$$x_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in (0,\infty).$$

**步骤 1（归一化）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$x_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} x_{ij}, \qquad x_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} x_{ij}.$$

然后 $x_j^{\max} > 0$ 和 $x_j^{\min} > 0$。定义

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{x_j^{\max}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\ \dfrac{x_j^{\min}}{x_{ij}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

因此 $r_{ij} \in (0, 1]$。

**步骤 2（权重和 加权归一化）**。设 $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ 为满足以下条件的准则权重

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

定义加权归一化矩阵 $U = (u_{ij})$ 如下

$$u_{ij} := w_j\, r_{ij} \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

**第3步（分量最优向量）**。定义

$$q_j := \max_{1 \leq i \leq m} u_{ij} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

并设为 $Q = (q_1, \dots, q_n)$。

**第4步（效益/成本量值）**。令 $k := |\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}|$ 以及 $h := |\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}|$ $(k + h = n)$。定义

$$Q_k := \sqrt{\sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}} q_j^2}, \qquad Q_h := \sqrt{\sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}} q_j^2},$$

对于每个备选方案 $A_i$,

$$U_{ik} := \sqrt{\sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}} u_{ij}^2}, \qquad U_{ih} := \sqrt{\sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}} u_{ij}^2}.$$

（空和视为 0。）

**第5步（迹指数分量）**。定义对角矩阵

$$F := \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & Q_h \end{pmatrix}, \qquad G_i := \begin{pmatrix} U_{ik} & 0 \\ 0 & U_{ih} \end{pmatrix}, \qquad T_i := F\, G_i,$$

以及迹得分

$$\mathrm{tr}_i := \mathrm{tr}(T_i) = Q_k U_{ik} + Q_h U_{ih}.$$

**步骤 6（中位数相似度分量）**。定义

$$M := \frac{\sqrt{Q_k^2 + Q_h^2}}{2}, \qquad M_i := \frac{\sqrt{U_{ik}^2 + U_{ih}^2}}{2}, \qquad \mathrm{MS}_i := \frac{M_i}{M}.$$

**步骤 7（迹-中位数指数）**。令 $v \in [0,1]$。定义

$$\mathrm{tr}^{*} := \min_{1\le i\le m} \mathrm{tr}_i, \quad \mathrm{tr}^{-} := \max_{1\le i\le m} \mathrm{tr}_i, \quad \mathrm{MS}^{*} := \min_{1\le i\le m} \mathrm{MS}_i, \quad \mathrm{MS}^{-} := \max_{1\le i\le m} \mathrm{MS}_i,$$

以及范围 $\Delta_{\mathrm{tr}} := \mathrm{tr}^{-} - \mathrm{tr}^{*}$，$\Delta_{\mathrm{MS}} := \mathrm{MS}^{-} - \mathrm{MS}^{*}$。定义归一化分量

$$T_i := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tr}_i - \mathrm{tr}^{*}}{\Delta_{\mathrm{tr}}}, & \Delta_{\mathrm{tr}} > 0, \\ 0, & \Delta_{\mathrm{tr}} = 0, \end{cases} \qquad S_i := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{MS}_i - \mathrm{MS}^{*}}{\Delta_{\mathrm{MS}}}, & \Delta_{\mathrm{MS}} > 0, \\ 0, & \Delta_{\mathrm{MS}} = 0. \end{cases}$$

该不确定 *RATMI* 指数的 $A_i$ 为

$$E_i := v\, T_i + (1 - v)\, S_i.$$

**排序规则：**按 $E_i$降序对备选方案进行排序。

**定理 6.6.3**（U-RATMI的良定义性与有界性）。在定义*6.6.2*的假设下（特别是 $m$、$n \ge 2$，定义域（$M$）$\neq \emptyset$，以及 $S_M$：定义域（$M$）$\to$（0，$\infty$））， *U-RATMI*过程中的所有量均为良定义且有限。此外，对于每个备选方案 $A_i$，

$$0 \le T_i \le 1, \qquad 0 \le S_i \le 1, \qquad 0 \le E_i \le 1.$$

因此，定义 *6.6.2* 中的排序规则始终是良定义的。

证明。由于 $S_M$将 Dom($M$)映射到 $(0,\infty)$ 中，因此每个 $x_{ij} > 0$ 都是有限的。由于 $\{1,\dots,m\}$ 是有限的，$x_j^{\max}$和$x_j^{\min}$存在并满足 $x_j^{\max} \ge x_{ij} \ge x_j^{\min} > 0$。因此，对于效益型准则，$r_{ij} = x_{ij}/x_j^{\max} \in (0,1]$，；对于成本型准则，$r_{ij} = x_j^{\min}/x_{ij} \in (0,1]$。结合 $w_j \ge 0$和 $\sum_j w_j = 1$，每个$u_{ij} = w_j r_{ij}$都是有限的，且属于 $[0,1]$。因此，每个$q_j = \max_i u_{ij}$ 都存在且为有限值。

量 $Q_k$、$Q_h$、$U_{ik}$、$U_{ih}$ 是有限个平方的和的平方根，因此是有限且非负的。至少有一个权重为正，因此至少有一个 $q_j > 0$，这意味着 $Q_k^2 + Q_h^2 = \sum_{j=1}^{n} q_j^2 > 0$，从而 $M > 0$ 和 $\mathrm{MS}_i = M_i/M$ 是良定义且有限的。

极值 $\mathrm{tr}^{*}$、$\mathrm{tr}^{-}$、$\mathrm{MS}^{*}$、$\mathrm{MS}^{-}$ 存在，因为 $m$ 是有限的。如果 $\Delta_{\mathrm{tr}} > 0$，那么 $T_i$ 是 $\mathrm{tr}_i$ 的标准最小—最大归一化，因此 $0 \le T_i \le 1$；如果 $\Delta_{\mathrm{tr}} = 0$，定义将 $T_i = 0$ 设为，因此仍有 $0 \le T_i \le 1$。同样的论证可得 $0 \le S_i \le 1$。

最后，由于 $v \in [0,1]$, $E_i = vT_i + (1-v)S_i$是 $[0,1]$, 中两个数的凸组合，因此 $0 \le E_i \le 1$。所以，对于每个 $i$，指标 $E_i$ 都存在，按 $E_i$ 排序即可得到有效排序。 □

不确定性感知模型下 RATMI 的相关概念列于表6.7　　.

表6.7：不确定性感知模型下 RATMI 的相关概念。

| $k$ | RATMI 相关概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 RATMI |
| 2 | 直觉模糊RATMI |
| 2 | 费马特模糊RATMI |
| 3 | 中智RATMI |

## 6.7 模糊 RANCOM（模糊排序比较）

RANCOM 根据重要性判断对准则进行排序，根据排名构建比较矩阵，对各行求和，并将结果归一化为权重 [796, 797]。模糊 RANCOM 将语言重要性表示为模糊数，聚合专家意见，对准则进行评分和排序，然后得出归一化权重 [65, 798]。

**定义6.7.1** （模糊 RANCOM（PTF-RANCOM）用于主观准则赋权）。[65, 798] 设$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则的有限集，$\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_r\}$ 为专家的有限集。固定一个整数$q \geq 1$。

**（A）多面体模糊数（PTFN）**。一个多面体模糊数（*PTFN*）是一个三元组

$$z = \langle \alpha, \eta, \zeta \rangle \in [0,1]^3 \quad \text{satisfying} \quad \alpha^q + \eta^q + \zeta^q \leq 1,$$

其中 $\alpha$ 为正隶属度，$\eta$ 为中性隶属度，$\zeta$ 为负隶属度。

**(B) 得分函数**。对于 $z = \langle \alpha, \eta, \zeta \rangle$，定义清晰得分

$$\mathrm{Score}(z) := \frac{1 + \alpha^q + \eta^q - \zeta^q}{3} \in \mathbb{R}.$$

**(C) PTF加权聚合（PTFWA）**。给定 PTFN $z_1 = \langle \alpha_1, \eta_1, \zeta_1 \rangle$、……、$z_r = \langle \alpha_r, \eta_r, \zeta_r \rangle$ 以及专家权重 $\lambda =$（$\lambda_1$、……、$\lambda_r$），其中 $\lambda_k \geq 0$ 和 $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$，定义

$$\mathrm{PTFWA}_\lambda(z_1, \dots, z_r) := \left\langle \left(1 - \prod_{k=1}^{r} (1 - \alpha_k^q)^{\lambda_k}\right)^{1/q}, \prod_{k=1}^{r} \eta_k^{\lambda_k}, \prod_{k=1}^{r} \zeta_k^{\lambda_k} \right\rangle.$$

**(D) 模糊 RANCOM 的投入数据**。每位专家 $E_k$ 都会针对每个准则 $C_j$ 提供一个 PTFN 重要性评估

$$\iota_{jk} = \langle \alpha_{jk}, \eta_{jk}, \zeta_{jk} \rangle \qquad (j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, r),$$

通常通过将语言术语编码为 PTFN 得到。

**(E) PTF-RANCOM程序与输出权重**。

步骤 1。（ **汇总专家意见)** 对于每个准则 $C_j$，计算其综合PTF重要性

$$\iota_j := \mathrm{PTFWA}_\lambda(\iota_{j1}, \ldots, \iota_{jr}) \in [0,1]^3.$$

步骤 2。**（评分与排序）**计算 $s_j$ :=Score($\iota_j$)，并定义排名位置

$$\varsigma_j := 1 + |\{t \in \{1,\ldots,n\} : \ s_t > s_j\}| \in \{1,\ldots,n\},$$

使较小的 $\varsigma_j$ 表示较高的重要性（允许并列）。

步骤 3。**（排名比较矩阵）**定义 $B = (b_{gj}) \in [0,1]^{n\times n}$ 通过

$$b_{gj} := \begin{cases} 1, & \varsigma_g < \varsigma_j, \\ 0.5, & \varsigma_g = \varsigma_j, \\ 0, & \varsigma_g > \varsigma_j, \end{cases} \qquad (g,j = 1,\ldots,n).$$

第4步。**（行和）**定义行和向量 $h \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ 为

$$h_j := \sum_{g=1}^{n} b_{jg} \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

第5步。**（归一化准则权重）**定义准则权重

$$w_j := \frac{h_j}{\sum_{t=1}^{n} h_t} \in [0,1], \qquad j = 1,\ldots,n,$$

使得 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

向量 $w = (w_1,\ldots, w_n)$ 称为 *C*的（*PTF-*）模糊 *RANCOM* 权重向量 .

**定义 6.7.2**（ $M$类型的不确定 RANCOM）。设 $\mathcal{C} = \{C_1,\ldots,C_n\}$ 是准则的有限集（$n \geq 2$）， $\mathcal{E} = \{E_1,\ldots,E_r\}$ 是专家的有限集（$r \geq 1$）。固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq \emptyset$，且具有一个可容许评分 $S_M$。

**投入（专家不确定重要性评估）**。每位专家 $E_k$ 针对每个准则 $C_j$ 提供一个不确定重要性程度

$$\iota_{jk} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (j = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots,r),$$

解释为 $C_j$ 在不确定性模型 $M$下的重要性。

**步骤 1（专家聚合）**。 设 $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$为满足 $\lambda_k \geq 0$ 和 $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1$的专家权重。固定一个聚合算子

$$\mathrm{Agg}_M : \mathrm{Dom}(M)^r \to \mathrm{Dom}(M),$$

并计算每个准则的聚合重要性:

$$\iota_j := \mathrm{Agg}_M(\iota_{j1},\ldots,\iota_{jr}) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad j = 1,\ldots,n.$$

（当 $r = 1$时，将 Agg$_M$ 作为单位元。）

**步骤 2（得分与诱导排序）**。计算清晰分数

$$s_j := S_M(\iota_j) \in \mathbb{R}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

并按以下方式定义排名位置（允许并列）：

$$\varsigma_j := 1 + \big|\{t \in \{1, \dots, n\} : \ s_t > s_j\}\big| \in \{1, \dots, n\}.$$

因此，$\varsigma_j$ 越小，重要性越高。

**第3步（排名比较矩阵）**。定义 $B = (b_{gj}) \in [0,1]^{n \times n}$ 的方式为

$$b_{gj} := \begin{cases} 1, & \varsigma_g < \varsigma_j, \\ 0.5, & \varsigma_g = \varsigma_j, \\ 0, & \varsigma_g > \varsigma_j, \end{cases} \qquad (g, j = 1, \dots, n).$$

**第4步（行和）**。定义

$$h_j := \sum_{g=1}^{n} b_{jg} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

**Step 5（归一化准则权重）**。定义不确定 RANCOM 权重如下：

$$w_j := \frac{h_j}{\sum_{t=1}^{n} h_t} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

在 $\sum_{t=1}^{n} h_t > 0$ 的条件下。向量 $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$ 称为类型为 $M$ 的不确定 RANCOM 权重向量。

**定理 6.7.3**（不确定 RANCOM 的良定义性）。根据定义 *6.7.2*，假设：

- $n \geq 2$、$r \geq 1$，且 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$；
- $\mathrm{Agg}_M$：$\mathrm{Dom}(M)^r \to \mathrm{Dom}(M)$ 在 $\mathrm{Dom}(M)^r$ 上良定义；
- $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}$ 是可容许的。

那么：

(*i*) 对于所有 $j$，聚合重要性 $\iota_j$ 和得分 $s_j$ 均为良定义。

(*ii*) 排名位置 $\varsigma_j$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 中良定义的整数。

*(iii)* 矩阵 $B$ 和行和 $h_j$ 是良定义的，其中

$$0 \leq b_{gj} \leq 1, \qquad 0 \leq h_j \leq n \quad (g, j = 1, \dots, n).$$

*(iv)* $\sum_{t=1}^{n} h_t > 0$ 始终成立，因此权重 $w_j$ 是良定义的，并满足

$$w_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$$

即， $w \in \Delta^{n-1} : = \{w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\}$。

证明。 (i) 由于每个 $\iota_{jk} \in$Dom($M$)且Agg$_M$将Dom($M$)$^r$映射到Dom($M$)，每个$\iota_j$ =Agg$_M$($\iota_{j1}$，.....， $\iota_{jr}$)都是良定义的，并且属于Dom($M$)。 $S_M$的可容许性意味着每个 $s_j = S_M(\iota_j)$都是有限实数。

(ii) 对于每个固定的 $j$，集合 $\{t : \quad s_t > s_j\}$ 是有限集 $\{1, \ldots, n\}$的子集，因此其基数是介于0与 $n-1$之间的良定义整数。因此 $\varsigma_j = 1 + |\{t : \quad s_t > s_j\}|$ 位于 $\{1, \ldots, n\}$中。

(iii) 对于任意一对 ($g$， $j$)，三种关系 $\varsigma_g < \varsigma_j$、 $\varsigma_g = \varsigma_j$ 或 $\varsigma_g > \varsigma_j$ 中恰有一种成立，因此 $b_{gj}$ 是良定义的，且属于 $\{0, 0.5, 1\} \subset [0, 1]$。因此，每个行和 $h_j = \sum_{g=1}^{n} b_{jg}$ 都是良定义的，并满足 $0 \leq h_j \leq n$。

(iv) 考虑对角元素 $b_{jj}$。由于 $\varsigma_j = \varsigma_j$，对于所有 $j$，我们有 $b_{jj} = 0.5$ 。因此 s

$$\sum_{t=1}^{n} h_t = \sum_{t=1}^{n} \sum_{g=1}^{n} b_{tg} = \sum_{t=1}^{n} b_{tt} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq t}}^{n} b_{tg} \;\geq\; \sum_{t=1}^{n} b_{tt} = \frac{n}{2} > 0.$$

因此， $w_j = h_j / \sum_{t=1}^{n} h_t$ 中的分母严格为正，所以 $w_j$ 是良定义的。由于 $h_j \geq 0$，对于所有 $j$，我们有 $w_j \geq 0$ ，并且

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} h_j}{\sum_{t=1}^{n} h_t} = 1.$$

因此 $w \in \Delta^{n-1}$。 □

Re不确定性感知模型下 RANCOM 的相关概念列于表6.8 .

表6.8：不确定性感知模型下 RANCOM 的相关概念。

| $k$ | **相关 RANCOM 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 RANCOM |
| 2 | 直觉模糊 RANCOM |
| 2 | 费马模糊 RANCOM |
| 3 | 中智 RANCOM |

## 6.8 模糊 AROMAN（考虑两步归一化的模糊备选方案排序方法）

AROMAN 采用两步归一化对备选方案进行排序，区分效益型和成本型影响，然后计算指数偏好得分 [799, 800]。模糊 AROMAN 以模糊数替代精确评分，进行两步模糊归一化，聚合加权影响，并对排序进行去模糊化 [801]。

**定义 6.8.1**（模糊 AROMAN（考虑两步归一化的替代排序法））。[801] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集。将准则划分为效益型指标和成本型指标

$$J_{\max} \dot{\cup} J_{\min} = \{1, \dots, n\},$$

其中 $j \in J_{\max}$ 表示“越大越好”，$j \in J_{\min}$ 表示“越小越好”。

假设评价以三角模糊数（TFNs）的形式给出

$$\tilde{x}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}) \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}, \qquad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

如果 $K \geq 1$ 位专家提供三角模糊数 $\tilde{x}_{ij}^{(k)}$，则设聚合模糊决策矩阵为

$$\tilde{x}_{ij} := \frac{1}{K}\Big(\tilde{x}_{ij}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \tilde{x}_{ij}^{(K)}\Big).$$

˜三角模糊数算术约定（分量运算，正值情形）。对于三角模糊数 $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$b = (b_1, b_2, b_3)$ 和 $\alpha \geq 0$，定义

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \qquad \alpha \odot \tilde{a} := (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

如果所涉及的所有三角模糊数均为非负数，则将（近似）乘积和幂定义为

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} := (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3), \qquad \tilde{a}^{\,p} := (a_1^p, a_2^p, a_3^p)\ (p > 0),$$

对于单调函数 $f\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$（例如 $f = \exp$），

$$f(\tilde{a}) := (f(a_1), f(a_2), f(a_3)).$$

**步骤 1（归一化第 1 步：最小-最大）**。对于每个准则 $j$，根据任意固定的三角模糊数预序（例如通过得分/去模糊化映射；见下文），定义各备选方案中的模糊极值：

$$\tilde{x}_j^{\min} := \min_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_{ij}, \qquad \tilde{x}_j^{\max} := \max_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_{ij}.$$

˜通过以下方式设置第一组归一化三角模糊数 $t_{ij}$

$$\tilde{t}_{ij} := \begin{cases} (\tilde{x}_{ij} \ominus \tilde{x}_j^{\min}) \oslash (\tilde{x}_j^{\max} \ominus \tilde{x}_j^{\min}), & j \in J_{\max}, \\ (\tilde{x}_j^{\max} \ominus \tilde{x}_{ij}) \oslash (\tilde{x}_j^{\max} \ominus \tilde{x}_j^{\min}), & j \in J_{\min}, \end{cases}$$

其中 $\ominus$，$\oslash$ 表示所选的 三角模糊数减法/除法规则（可以使用任何一致的三角模糊数运算） .

**步骤 2（归一化第 2 步：向量型）**。定义第二组归一化三角模糊数 $\tilde{t}_{ij}^{*}$ 如下

$$\tilde{t}_{ij}^{*} := \begin{cases} \tilde{x}_{ij} \oslash \sqrt{\bigoplus_{p=1}^{m} \big(\tilde{x}_{pj} \otimes \tilde{x}_{pj}\big)}, & j \in J_{\max}, \\ \tilde{x}_{ij}^{-1} \oslash \sqrt{\bigoplus_{p=1}^{m} \big(\tilde{x}_{pj}^{-1} \otimes \tilde{x}_{pj}^{-1}\big)}, & j \in J_{\min}, \end{cases}$$

其中， $\tilde{x}^{-1}$ 是三角模糊数倒数（当三角模糊数严格为正时定义）。

**第3步（聚合两步归一化）**。固定 $\beta \in [0,1]$ 并设定

$$\tilde{t}_{ij}^{\mathrm{norm}} := \beta\, \tilde{t}_{ij} \;\oplus\; (1-\beta)\, \tilde{t}_{ij}^{*}.$$

**第4步（加权）**。设 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 为非负准则权重，且满足 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。定义加权归一化三角模糊数

$$\widehat{\tilde{t}}_{ij} := w_j \odot \tilde{t}_{ij}^{\mathrm{norm}}.$$

**第5步（按准则类型分别聚合）**。定义模糊和

$$\tilde{L}_i := \bigoplus_{j \in J_{\min}} \widehat{\tilde{t}}_{ij}, \qquad \tilde{A}_i := \bigoplus_{j \in J_{\max}} \widehat{\tilde{t}}_{ij}.$$

**第6步（类型平衡指数和最终模糊排序指标）**。设定类型平衡系数

$$\lambda := \sum_{j \in J_{\min}} w_j \in [0,1],$$

并定义

$$\widehat{\tilde{L}}_i := \tilde{L}_i^{\lambda}, \qquad \widehat{\tilde{A}}_i := \tilde{A}_i^{1-\lambda}, \qquad \tilde{R}_i := \exp\!\big(\widehat{\tilde{A}}_i \ominus \widehat{\tilde{L}}_i\big).$$

**步骤 7（去模糊化与排序）**。固定一个三角模糊数评分/去模糊化映射，例如质心得分

$$\mathrm{Score}(l,m,u) := \frac{l+m+u}{3}.$$

模糊 *AROMAN* 排序是 $\mathcal{A}$ 上由下式给出的预序

$$A_p \succeq_{\mathrm{FAROMAN}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}(\tilde{R}_p) \geq \mathrm{Score}(\tilde{R}_q).$$

˜Score($R_i$) 的任何最大化元都称为模糊 *AROMAN* 最优备选方案。

现在，我们通过将 AROMAN 扩展到一般的不确定模型$M$，并使用总分映射将不确定评价转换为正实数值，然后对诱导得分矩阵执行两步归一化，来定义不确定 *AROMAN*（U-AROMAN）。

**定义 6.8.2**（类型为 $M$ 的不确定 AROMAN）。令

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$$

be 分别表示备选方案集和准则集，其中 $m, n \in \mathbb{N}$、 $m \geq 1$ 和 $n \geq 2$ .

固定一个度域为 $M$ 的不确定模型

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

对于某个整数 $k \geq 1$。设

$$X_M = (\mu_{ij})_{m\times n} \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$$

为一个不确定决策矩阵，其中 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$ 是备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$ 下的不确定评价。

将准则指标集划分为

$$J_{\max} \dot\cup J_{\min} = \{1,\dots,n\},$$

其中 $J_{\max}$ 是效益型准则集，$J_{\min}$ 是成本型准则集。

Fix:

- 一个总分映射
$$\mathrm{Score}_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0},$$
- 一个参数
$$\beta \in [0,1],$$
- 一个权重向量
$$w = (w_1,\dots,w_n) \in (0,1)^n, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

定义正向评分矩阵

$$S = (s_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}, \qquad s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij}).$$

对于每个准则 $j$，定义

$$s_j^{\min} := \min_{1\leq i\leq m} s_{ij}, \qquad s_j^{\max} := \max_{1\leq i\leq m} s_{ij}, \qquad \delta_j := s_j^{\max} - s_j^{\min}.$$

假设 $\delta_j > 0$ 对所有 $j$均成立。

**步骤 1（归一化第 1 步：最小—最大归一化）**。定义

$$t_{ij}^{(1)} := \begin{cases} \dfrac{s_{ij} - s_j^{\min}}{\delta_j}, & j \in J_{\max}, \\ \dfrac{s_j^{\max} - s_{ij}}{\delta_j}, & j \in J_{\min}. \end{cases}$$

**第2步 （归一化第 2 步：向量型归一化）**。对于每个准则 $j$，定义 e

$$\nu_j := \sqrt{\sum_{r=1}^{m} s_{rj}^2}, \qquad \eta_j := \sqrt{\sum_{r=1}^{m} s_{rj}^{-2}}.$$

然后定义

$$t_{ij}^{(2)} := \begin{cases} \dfrac{s_{ij}}{\nu_j}, & j \in J_{\max}, \\ \dfrac{s_{ij}^{-1}}{\eta_j}, & j \in J_{\min}. \end{cases}$$

**第3步（聚合两步归一化）**。定义

$$t_{ij} := \beta\, t_{ij}^{(1)} + (1-\beta)\, t_{ij}^{(2)}.$$

**第4步（加权）**。定义

$$u_{ij} := w_j\, t_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, n.$$

**步骤 5（按准则类型分别聚合）**。定义

$$L_i := \sum_{j \in J_{\min}} u_{ij}, \qquad A_i := \sum_{j \in J_{\max}} u_{ij}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

**步骤 6（类型平衡系数和最终排序指数）**。定义

$$\lambda := \sum_{j \in J_{\min}} w_j.$$

假设

$$0 < \lambda < 1.$$

不确定 *AROMAN* 排序指数，备选方案 $A_i$ 为

$$R_i := \exp\!\big(A_i^{1-\lambda} - L_i^{\lambda}\big), \qquad i = 1, \dots, m.$$

**步骤 7（排序）**。 $\mathcal{A}$上的 U-AROMAN偏好关系定义为

$$A_p \succeq_{\mathrm{UAROMAN}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad R_p \geq R_q.$$

任意备选方案

$$A^\star \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} R_i$$

被称为*U-AROMAN*最优备选方案。

**理论 m 6.8.3 (**不确定AROMAN的良定义性)。 根据定义 *6.8.2*，假设 *e:*

*(A1)* $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{C}$ 均为有限非空集；

*(A2)* $X_M = (\mu_{ij}) \in \mathrm{Dom}(M)^{m\times n}$；

*(A3)* 得分$_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个全映射；

*(A4)* $J_{\max} \dot\cup J_{\min} = \{1,\dots,n\}$，同时满足 $J_{\max} \neq \varnothing$ 和 $J_{\min} \neq \varnothing$；

*(A5)* 对每个 $j \in \{1,\dots,n\}$，

$$\delta_j = s_j^{\max} - s_j^{\min} > 0;$$

*(A6)* $w = (w_1,\dots,w_n) \in (0,\ 1)^n$ 满足 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$；

*(A7)* $\beta \in [0,1]$。

则以下结论成立：

*(i) the matrices* $S = (s_{ij})$, $T^{(1)} = (t_{ij}^{(1)})$, $T^{(2)} = (t_{ij}^{(2)})$, $T = (t_{ij})$, *and* $U = (u_{ij})$ *are well-defined;*

*(ii)* 对所有 $i$、$j$，

$$0 \le t_{ij}^{(1)} \le 1, \qquad 0 < t_{ij}^{(2)} \le 1, \qquad 0 \le t_{ij} \le 1, \qquad 0 \le u_{ij} \le w_j;$$

*(iii)* 对每个 $i$，

$$0 \le L_i \le \lambda, \qquad 0 \le A_i \le 1-\lambda;$$

*(iv)* 系数 $\lambda$ 满足 $0 < \lambda < 1$，每个排序指数 $R_i$ 都是良定义的正实数，且关系 $\succeq_{\mathrm{UAROMAN}}$ 是 $\mathcal{A}$上的全预序；

*(v)* 该集合

$$\arg\max_{1\le i\le m} R_i$$

是非空的。

因此，类型为 $M$ 的不确定 *AROMAN* 是良定义的。

证明。 根据 (A2)，每个 $\mu_{ij} \in \mathrm{Dom}(M)$。由于 $\mathrm{Score}_M$ 根据 (A3) 是完全的，

$$s_{ij} := \mathrm{Score}_M(\mu_{ij})$$

是良定义的，且属于 $\mathbb{R}_{>0}$。因此， $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m\times n}$ 是良定义的。

对于每个固定的准则 $j$，集合 $\{s_{1j},\dots,s_{mj}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ 有限且非空，因此 $s_j^{\min}$和 $s_j^{\max}$均有良定义。由 (A5) 可知， $\delta_j > 0$，因此极差归一化值

$$t_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{s_{ij} - s_j^{\min}}{\delta_j}, & j \in J_{\max}, \\ \dfrac{s_j^{\max} - s_{ij}}{\delta_j}, & j \in J_{\min} \end{cases}$$

有良定义。由于 $s_j^{\min} \le s_{ij} \le s_j^{\max}$，可得

$$0 \le t_{ij}^{(1)} \le 1.$$

接下来，由于每个 $s_{rj} > 0$，这些和

$$\sum_{r=1}^{m} s_{rj}^2 \qquad \text{and} \qquad \sum_{r=1}^{m} s_{rj}^{-2}$$

都严格为正，因此 $\nu_j > 0$ 和 $\eta_j > 0$。因此

$$t_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{s_{ij}}{\nu_j}, & j \in J_{\max}, \\ \dfrac{s_{ij}^{-1}}{\eta_j}, & j \in J_{\min} \end{cases}$$

对于每个 $i,\ j$ 都是良定义的。此外，

$$\nu_j^2 = \sum_{r=1}^{m} s_{rj}^2 \ge s_{ij}^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{s_{ij}}{\nu_j} \le 1,$$

同理

$$\eta_j^2 = \sum_{r=1}^{m} s_{rj}^{-2} \ge s_{ij}^{-2} \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{s_{ij}^{-1}}{\eta_j} \le 1.$$

Thus

$$0 < t_{ij}^{(2)} \le 1.$$

由于 $\beta \in [0,1]$，聚合后的归一化值

$$t_{ij} = \beta t_{ij}^{(1)} + (1-\beta) t_{ij}^{(2)}$$

是 $[0,1]$，中各数的凸组合，因此

$$0 \le t_{ij} \le 1.$$

由于 $w_j > 0$ ，根据 (A6)，加权值

$$u_{ij} = w_j t_{ij}$$

是良定义的，且满足

$$0 \le u_{ij} \le w_j.$$

这证明了 (i) 和 (ii)。

现在定义

$$L_i = \sum_{j \in J_{\min}} u_{ij}, \qquad A_i = \sum_{j \in J_{\max}} u_{ij}.$$

由于 $0 \le u_{ij} \le w_j$，我们得到

$$0 \le L_i \le \sum_{j \in J_{\min}} w_j = \lambda, \qquad 0 \le A_i \le \sum_{j \in J_{\max}} w_j = 1 - \lambda.$$

这就证明了 (iii)。

由于 $J_{\min} \neq \varnothing$、 $J_{\max} \neq \varnothing$，并且每个 $w_j > 0$，我们有

$$0 < \lambda = \sum_{j \in J_{\min}} w_j < 1.$$

因此，指数 $\lambda$ 和 $1 - \lambda$ 严格为正。由于 $L_i$， $A_i \geq 0$，幂 $L_i^{\lambda}$ 和 $A_i^{1-\lambda}$ 是良定义的非负实数。因此

$$R_i = \exp\bigl(A_i^{1-\lambda} - L_i^{\lambda}\bigr)$$

对于每个 $i$，其良定义且严格为正。

关系

$$A_p \succeq_{\text{UAROMAN}} A_q \iff R_p \geq R_q$$

由 $\mathbb{R}$ 上的通常序所诱导，因此它具有自反性、传递性和完全性。因此，它是 $\mathcal{A}$ 上的全预序。这证明了 (iv)。

最后，由于 $\mathcal{A}$ 是有限且非空的，该有限集

$$\{R_1, \ldots, R_m\} \subset \mathbb{R}_{>0}$$

可取到最大值。因此

$$\arg\max_{1 \leq i \leq m} R_i \neq \varnothing.$$

这证明了 (v)，因此 U-AROMAN 是良定义的。 □

Rel不确定性感知模型下 AROMAN 的相关概念列于表 6.9。

表 6.9：不确定性感知模型下 AROMAN 的相关概念。

| $k$ | 相关 AROMAN 概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 AROMAN |
| 2 | 直觉模糊 AROMAN |
| 2 | 费马模糊 AROMAN |
| 3 | 中智 AROMAN |

## 6.9 模糊多属性效用理论（模糊多属性效用理论）

多属性效用理论（MAUT）通过单属性效用函数和权衡权重来建模偏好，并将它们（通常以加性方式）组合成总体效用，以选择效用最大化备选方案 [802–804]。模糊多属性效用理论（模糊 MAUT）将效用、权重或结果表示为模糊集/数，计算模糊期望效用，再通过去模糊化或利用优势度，在模糊评价下进行选择 [805–807]。

**定义 6.9.1**（模糊多属性效用理论（模糊多属性效用理论））。（参见 [808,809]）令 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_K\}$ 为有限属性（准则）集。

**(0) 模糊数与去模糊化**。确定一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的模糊数类 FN($\mathbb{R}$)（例如三角形或梯形模糊数），并令 FN($[0,1]$) 表示支撑集位于 $[0,1]$ 中的模糊数。确定一个去模糊化（得分）泛函

$$\mathrm{Defuzz}:\mathsf{FN}([0,1])\to[0,1]$$

（例如重心法/面积中心法），仅用于最终排序。

**(1) 模糊绩效评级**。一个模糊多属性效用理论实例针对每个备选方案 $A_i$ 和属性 $C_k$ 指定一个模糊评级

$$\tilde{x}_{ik}\in\mathsf{FN}(\mathbb{R}),\qquad i=1,\dots,m,\quad k=1,\dots,K,$$

解释为备选方案 $A_i$ 在属性 $C_k$ 上的不确定值。

**（2）属性效用函数**。对于每个属性 $C_k$，固定一个（归一化的）效用函数

$$u_k:\mathbb{R}\to[0,1].$$

其模糊扩展将模糊评分映射为模糊效用：

$$\tilde{u}_{ik}:=u_k(\tilde{x}_{ik})\in\mathsf{FN}([0,1]),$$

由 Zadeh 的扩展原理定义。等价地，用 $\alpha$-截集形式表示：若 $(\tilde{x}_{ik})_\alpha=[x_{ik}^L(\alpha)\ x_{ik}^U(\alpha)]$, 则

$$(\tilde{u}_{ik})_\alpha=\Big[\min_{t\in[x_{ik}^L(\alpha),x_{ik}^U(\alpha)]}u_k(t),\ \max_{t\in[x_{ik}^L(\alpha),x_{ik}^U(\alpha)]}u_k(t)\Big]\quad(\alpha\in(0,1]).$$

（特别地，若 $u_k$ 单调递增，则 $(\tilde{u}_{ik})_\alpha=[u_k(x_{ik}^L(\alpha))\ u_k(x_{ik}^U(\alpha))]$。）

**（3）权重**。可以使用清晰权重 $w=(w_1,\dots,w_K)$，其中 $w_k\ge0$ 且 $\sum_{k=1}^K w_k=1$；也可以使用模糊权重 $\tilde{w}_k\in\mathsf{FN}([0,1])$（并选定一个归一化规则）。

**（4）总体模糊效用（加性多属性效用理论聚合）**。使用对 FN($[0,1]$) 进行的模糊算术，将 $A_i$ 的总体模糊效用定义为

$$\tilde{U}(A_i):=\begin{cases}\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{K}\big(w_k\odot\tilde{u}_{ik}\big), & \text{(crisp weights)},\\ \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{K}\big(\tilde{w}_k\otimes\tilde{u}_{ik}\big), & \text{(fuzzy weights)},\end{cases}\qquad i=1,\dots,m,$$

其中，$\oplus$ 是模糊加法，$\odot$ 是数乘，$\otimes$ 是模糊乘法（或另一种选定的类似 t-范数的加权运算）。

**（5）排序与解**。对总体效用进行去模糊化：

$$U_i:=\mathrm{Defuzz}\big(\tilde{U}(A_i)\big)\in[0,1],\qquad i=1,\dots,m,$$

并定义诱导预序

$$A_i \succeq_{\mathrm{FMAUT}} A_j \quad \Longleftrightarrow \quad U_i \geq U_j.$$

任何最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} U_i$$

称为模糊多属性效用理论 （最优效用）解。

**（化简为经典多属性效用理论）**。如果每个模糊评级都是退化的 $\tilde{x}_{ik} = （x_{ik}, \ x_{ik}, \ x_{ik}）$（或清晰单元素集），且权重是清晰的，那么 $\tilde{u}_{ik}$ 就变为清晰的 $u_k（x_{ik}）$，模型可化简为

$$U(A_i) = \sum_{k=1}^{K} w_k \, u_k(x_{ik}).$$

使用不确定集，我们将不确定多属性效用理论（U-MAUT）定义如下。

**定义 6.9.2** （不确定多属性效用理论（U-MAUT）：具有不确定输入的多属性效用）。设 $\mathcal{A} =\{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_K\}$ 为有限属性（准则）集。固定一个不确定性空间（$\Gamma$， $\mathcal{L}$， $\mathcal{M}$）。

**（1）不确定绩效评价值（属性结果）**。对于每个备选方案 $A_i$ 和属性 $C_k$，属性结果由一个不确定变量建模

$$x_{ik} : \Gamma \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, K.$$

等价地，每个 $x_{ik}$ 都诱导出一个不确定集 $\mathcal{X}_{ik}(\gamma) := \{x_{ik}(\gamma)\}$。

**（2）单属性效用函数和不确定效用**。对于每个属性 $C_k$，固定一个效用函数

$$u_k : \mathbb{R} \to [0, 1].$$

通过复合定义备选方案 $A_i$ 在属性 $C_k$ 下的不确定效用：

$$U_{ik}(\gamma) := (u_k \circ x_{ik})(\gamma) = u_k\big(x_{ik}(\gamma)\big) \in [0, 1].$$

因此 $U_{ik} : \Gamma \to [0, 1]$ 是一个不确定变量，并引出不确定集 $\mathcal{U}_{ik}(\gamma) := \{U_{ik}(\gamma)\}$。

**(3) 属性权重（清晰或不确定）**。任选其一：

(Wc) 清晰权重： $w = (w_1, \ldots, w_K) \in [0, 1]^K$ 其中 $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$；或

（Wu）不确定权重：不确定变量 $w_k$： $\Gamma \to [0, 1]$ 使得

$$\sum_{k=1}^{K} w_k(\gamma) = 1 \quad \text{for all } \gamma \in \Gamma.$$

**（4）总体不确定性 确定效用（加性多属性效用理论聚合）**。定义 $A_i$ 的总体效用

$$U_i(\gamma) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} w_k\, U_{ik}(\gamma), & \text{under (Wc)}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{K} w_k(\gamma)\, U_{ik}(\gamma), & \text{under (Wu)}, \end{cases} \qquad \gamma \in \Gamma.$$

每个 $U_i:\ \Gamma \to [0,1]$ 都会诱导出一个不确定集

$$\mathcal{U}(A_i)(\gamma) := \{U_i(\gamma)\} \subseteq [0,1].$$

**（5）决策规则（期望效用排序）**。如果对于所有 $i$都存在 $\mathbb{E}[U_i]$，则将（清晰）多属性效用理论排序定义为

$$A_p \succeq_{\text{U-MAUT}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[U_p] \geq \mathbb{E}[U_q],$$

并选择任意一个

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[U_i].$$

**定理 6.9.3**（不确定集结构与 U-MAUT 的良定义性）。 在定义 *6.9.2* 中，假设：

（A1）（结果的可测性）每个 $x_{ik}:\ \Gamma \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{L}$-可测的。

（A2）（效用正则性）每个 $u_k:\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 均为博雷尔可测。

（A3）（权重）要么满足 （Wc），要么满足 （Wu），且每个 $w_k$ $\mathcal{L}$均可测。

则：

（i）对于所有 $i$、$k$， $U_{ik} = u_k \circ x_{ik}$ 是一个取值于 $[0,1]$，的不确定变量，因此 $\mathcal{U}_{ik}$（$\gamma$）$= \{U_{ik}$（$\gamma$）$\}$ 是一个不确定集。

(ii) 对于所有 $i$，聚合效用 $U_i$ 是取值于 $[0,1]$，的不确定变量，因此 $\mathcal{U}(A_i)(\gamma)$ $=\{U_i(\gamma)\}$ 是一个不确定集。

(iii) 此外，若对所有 $i$， $\mathbb{E}[U_i]$ 都存在（例如，若底层期望对所有有界不确定变量都有定义），则定义 *6.9.2* 中的期望效用排序是良定义的。

证明。 (i) 固定 $i$，$k$。由 (A1)， $x_{ik}$ 是 $\mathcal{L}$-可测的；由 (A2)， $u_k$ 是博雷尔可测的。因此，复合 $U_{ik} = u_k \circ x_{ik}$ 是 $\mathcal{L}$- 可测的，故为一个不确定变量。由于 $u_k(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$，对所有 $\gamma$，均有$U_{ik}(\gamma) \in [0,1]$。因此， $\mathcal{U}_{ik}(\gamma) = \{U_{ik}(\gamma)\}$ 定义了一个单值不确定集。

(ii) 固定 $i$。在（Wc）下， $U_i(\gamma) = \sum_{k=1}^{K} w_k U_{ik}(\gamma)$ 是 $\mathcal{L}$-可测函数的有限线性组合，因此是 $\mathcal{L}$-可测的。在（Wu）下，每个乘积 $w_k(\gamma)U_{ik}(\gamma)$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的（可测函数的乘积），且有限和是可测的；因此 $U_i$ 是一个不确定变量。

此外，在这两种情况下，$w_k(\gamma) \geq 0$ 和 $\sum_{k=1}^{K} w_k(\gamma) = 1$（将清晰情形解释为常函数），且 $0 \leq U_{ik}(\gamma) \leq 1$。因此

$$0 \leq U_i(\gamma) = \sum_{k=1}^{K} w_k(\gamma) U_{ik}(\gamma) \leq \sum_{k=1}^{K} w_k(\gamma) \cdot 1 = 1,$$

所以，对于所有 $\gamma$，$U_i(\gamma) \in [0,1]$。因此，$\mathcal{U}(A_i)(\gamma) = \{U_i(\gamma)\}$ 是一个良定义的不确定集。

(iii) 如果对于所有 $i$，$\mathbb{E}[U_i]$ 都存在，那么每个 $\mathbb{E}[U_i]$ 都是一个有限实数，因此预序 $A_p \succeq_{\text{U-MAUT}} A_q \iff \mathbb{E}[U_p] \geq \mathbb{E}[U_q]$ 是良定义的，并且由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，极大值集合非空。 □

不确定性感知模型下多属性效用理论的相关概念列于表6.10。

表6.10：不确定性感知模型下多属性效用理论的相关概念。

| $k$ | **相关多属性效用理论概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊多属性效用理论 |
| 2 | 直觉模糊多属性效用理论 |
| 2 | 费马模糊多属性效用理论 |
| 3 | 中智多属性效用理论 |

## 6.10 模糊 SMART（模糊简单多属性评分技术 )

SMART（简单多属性评分技术）为每个准则赋予一个值标度，通过摆动权重确定其重要性，并为每个备选方案计算简单的加权和得分，以进行总体排序 [810,811]。模糊 SMART 使用语言评价和模糊权重（例如三角数），通过模糊算术进行聚合，并通过去模糊化或直接比较模糊得分来得出排序 $[812, 813]$。

**定义 6.10.1**（模糊 SMART（模糊简单多属性评定技术））。 [812,813] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。将准则划分为效益集与成本集

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-.$$

设 $P = \{1, \ldots, p\}$ 为决策者（DMs）集合。

**（0）三角模糊数、模糊算术与去模糊化。** 设 TFN $:= \{(l, m, u) \in \mathbb{R}^3 : \ l \leq m \leq u\}$ 为三角模糊数（TFNs）集合。对于 $\tilde{x} = (l_x, m_x, u_x)$ $\tilde{y} = (l_y, m_y, u_y) \in$ TFN 和 $\alpha \geq 0$，定义

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} := (l_x + l_y,\ m_x + m_y,\ u_x + u_y), \qquad \alpha \odot \tilde{x} := (\alpha l_x,\ \alpha m_x,\ \alpha u_x).$$

固定一个去模糊化映射（例如重心法/面积中心法）

$$\text{Defuzz}(l, m, u) := \frac{l + m + u}{3}.$$

（当三角模糊数为 使用时，质心型去模糊化是模糊 SMART 实现中的标准做法。）

**（1）模糊准则权重（群体聚合）**。 每位决策者 $t \in P$ 为准则 $C_j$分配一个三角模糊数权重 $\tilde{w}_j^{(t)} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}$。将聚合模糊权重定义为三角模糊数均值

$$\tilde{w}_j := \frac{1}{p} \bigoplus_{t=1}^{p} \tilde{w}_j^{(t)} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

去模糊化并归一化，以获得清晰的SMART权重

$$\hat{w}_j := \mathrm{Defuzz}(\tilde{w}_j), \qquad w_j := \frac{\hat{w}_j}{\sum_{r=1}^{n} \hat{w}_r}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

使得 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

**（2）模糊评分与聚合**。每位决策者 $t \in P$ 在$C_j$下为 $A_i$ 给出三角模糊数评级 $\tilde{x}_{ij}^{(t)} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}$ 。按三角模糊数均值进行聚合：

$$\tilde{x}_{ij} := \frac{1}{p} \bigoplus_{t=1}^{p} \tilde{x}_{ij}^{(t)} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

˜因此， $X = (\tilde{x}_{ij})$ 为聚合模糊决策矩阵。

**（3）归一化（效益型/成本型）**。通过去模糊化对三角模糊数进行清晰排序，并对每个准则 $j$ 定义：

$$\underline{x}_j := \min_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Defuzz}(\tilde{x}_{ij}), \qquad \overline{x}_j := \max_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Defuzz}(\tilde{x}_{ij}), \qquad \Delta_j := \overline{x}_j - \underline{x}_j > 0.$$

将（清晰）归一化评价值 $r_{ij} \in [0, 1]$ 定义为：

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Defuzz}(\tilde{x}_{ij}) - \underline{x}_j}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^+, \\ \dfrac{\overline{x}_j - \mathrm{Defuzz}(\tilde{x}_{ij})}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^-. \end{cases}$$

（或者，也可以直接在三角模糊数层级进行归一化，然后再去模糊化；这两种做法在模糊SMART实践中均有应用。）

**（4）SMART聚合（简单加性加权）**。备选方案的 SMART 得分 $A_i$ 为

$$S_i := \sum_{j=1}^{n} w_j \, r_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

这是 SMART 所采用的经典 SAW 型综合方法。

**（5）排序与解**。按 $S_i$ 降序排列备选方案：

$$A_p \succeq_{\mathrm{FSMART}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad S_p \geq S_q,$$

以及任何最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} S_i$$

称为模糊 *SMART* 解。

**（化简为经典 SMART）**。 如果所有三角模糊数都是退化的（清晰的），且 $p = 1$，那么 $\tilde{x}_{ij}$ 和 $\tilde{w}_j$ 会化为精确值，而上述过程也会化为标准 SMART/SAW 评分公式。

我们使用不确定集定义不确定 SMART（U-SMART），如下所示。

**定义 6.10.2**（不确定 SMART（U-SMART）：不确定简单多属性评分技术）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集。固定一个不确定性空间（$\Gamma$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$）。

**（1）不确定原始评分（属性表现）**。对于每个备选方案 $A_i$ 和准则 $C_j$，（原始）性能由一个不确定变量建模

$$X_{ij} : \Gamma \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, n.$$

因此，每个 $X_{ij}$ 都会诱导出不确定集 $\mathcal{X}_{ij}(\gamma) := \{X_{ij}(\gamma)\}$。

**（2）价值函数和不确定价值评分**。对于每个准则 $C_j$，固定一个博雷尔可测的价值函数

$$v_j : \mathbb{R} \to [0, 1].$$

定义不确定值得分

$$V_{ij}(\gamma) := (v_j \circ X_{ij})(\gamma) = v_j\big(X_{ij}(\gamma)\big) \in [0, 1].$$

则 $V_{ij}$： $\Gamma \to [0, 1]$ 是一个诱导 $\mathcal{V}_{ij}(\gamma) := \{V_{ij}(\gamma)\}$ 的不确定变量。

**(3) 摆动权重（清晰或不确定）**。或者：

(Wc) 清晰权重： $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$；或

(Wu) 不确定权重：不确定变量 $W_j$： $\Gamma \to [0, 1]$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} W_j(\gamma) = 1 \quad \text{for all } \gamma \in \Gamma.$$

**(4) 总体不确定 SMART 评分（简单加权和）**。定义备选方案的总体 SMART 得分 $A_i$ 为

$$S_i(\gamma) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j \, V_{ij}(\gamma), & \text{under (Wc)}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} W_j(\gamma) \, V_{ij}(\gamma), & \text{under (Wu)}, \end{cases} \qquad \gamma \in \Gamma.$$

每个 $S_i$： $\Gamma \to [0, 1]$ 诱导不确定集

$$\mathcal{S}(A_i)(\gamma) := \{S_i(\gamma)\} \subseteq [0, 1].$$

**(5) Deci sion规则（期望 SMART 分数）**。若对所有 $i$ 均存在 $\mathbb{E}[S_i]$，则定义排序 g

$$A_p \succeq_{\text{U-SMART}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[S_p] \geq \mathbb{E}[S_q],$$

并选择任意最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[S_i].$$

**定理6.10.3**（U-SMART 的不确定集结构和良定义性）。 在定义*6.10.2*中，假设：

(A1) 每个 $X_{ij}$： $\Gamma \to \mathbb{R}$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的。

(A2) 每个价值函数 $v_j$： $\mathbb{R} \to [0,1]$ 都是博雷尔可测的。

(A3) 或者(Wc) 成立，或者(Wu) 成立且每个 $W_j$ 都是 $\mathcal{L}$-可测的。

那么：

(i) 对于所有 $i$，$j$ $V_{ij} = v_j \circ X_{ij}$ 是一个取值于 $[0,1]$，的不确定变量，因此 $\mathcal{V}_{ij}(\gamma) = \{V_{ij}(\gamma)\}$ 是一个不确定集。

(ii) 对于所有 $i$，聚合得分 $S_i$ $[0,1]$，是一个取值于 $\mathcal{S}$ 的不确定变量，因此 $\mathcal{O}(\gamma) = \{S_i(\gamma)\}$ 是一个不确定集。

(iii) 此外，如果对于所有 $i$， $\mathbb{E}[S_i]$ 都存在（例如，如果对所有有界不确定变量都定义了期望），那么定义 *6.10.2* 中的期望得分排序是良定义的，且 $\operatorname{argmax}_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[S_i] \neq \varnothing$。

证明。 (i) 固定 $i, j$。根据 (A1)， $X_{ij}$ 是 $\mathcal{L}$-可测的；根据 (A2)， $v_j$ 是博雷尔可测的。因此， $V_{ij} = v_j \circ X_{ij}$ 是 $\mathcal{L}$-可测的，即一个不确定变量。由于对于所有 $\gamma$，$v_j(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$， $V_{ij}(\gamma) \in [0,1]$ 。因此，$\mathcal{V}_{ij}(\gamma) = \{V_{ij}(\gamma)\}$ 是一个良定义的不确定集。

(ii) 固定 $i$。在 (Wc) 下， $S_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} w_j V_{ij}(\gamma)$ 是可测函数的有限线性组合，因此可测。在 (Wu) 下，每个乘积 $W_j(\gamma)V_{ij}(\gamma)$ 都是可测的，有限和仍然可测；因此 $S_i$ 是一个不确定变量。

此外，在两种情况下，权重均非负且总和为 1（在不确定权重情形下逐点成立），并且 $0 \le V_{ij}(\gamma) \le 1$。因此

$$0 \le S_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{weight}_j(\gamma)\, V_{ij}(\gamma) \le \sum_{j=1}^{n} \mathrm{weight}_j(\gamma) \cdot 1 = 1,$$

因此，对于所有 $\gamma$， $S_i(\gamma) \in [0,1]$ 。所以 $\mathcal{S}(A_i)(\gamma) = \{S_i(\gamma)\}$ 是一个不确定集。

(iii) 如果每个 $\mathbb{E}[S_i]$ 都存在且为有限值，则关系 $A_p \succeq_{\text{U-SMART}} A_q \iff \mathbb{E}[S_p] \ge \mathbb{E}[S_q]$ 是一个良定义的预序。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，最大值 $_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[S_i]$ 可以取得，因此极大值集合非空。 □

不确定性感知模型下 SMART 的相关概念列于表6.1 1.

表6.11：不确定性感知模型下 SMART 的相关概念。

| $k$ | 相关 SMART 概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊 SMART |
| 2 | 直觉模糊 SMART |
| 2 | 费马模糊 SMART |
| 3 | 中智 SMART |

## 6.11 模糊 REGIME

REGIME 在每个准则上对备选方案进行两两比较，记录胜负平符号，乘以权重，并求和，以构建偏好矩阵，从而对所有准则进行排序。模糊 REGIME 用模糊比较替代清晰的表现和胜负符号，从而得到模糊偏好强度；聚合和去模糊化生成的排序能够更好地反映测量不确定性 [814]。

**定义 6.11.1**（多属性决策的模糊 REGIME（F-REGIME））。[814] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。对于每个准则 $C_j$，令 $s_j \in \{+1, -1\}$表示其类型（$s_j = +1$ 表示效益型准则；$s_j = -1$ 表示成本型准则）。令 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 为准则权重，且

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

~设有一个模糊决策矩阵 $X = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n}$，其中 $\tilde{x}_{ij} \in \mathrm{F}$，F 表示在 $\mathbb{R}$上选定的一类模糊数（例如正规凸模糊数）。

**（1）模糊两两比较器**。对于每个准则 $C_j$，固定一个映射

$$\kappa_j : \mathrm{F} \times \mathrm{F} \longrightarrow [-1, 1]$$

满足以下最小公理:

~ ~ ~(K1)（反对称性）$\kappa_j(\tilde{a}, \tilde{b}) = -\kappa_j(\tilde{b}, \tilde{a})$，对所有 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathrm{F}$ 均成立。

（K2）（精确一致性）对于嵌入 F 中的清晰 $a, b \in \mathbb{R}$，$\kappa_j(a, b) = \mathrm{sgn}(a - b)$。

**（2）REGIME 标识符（按准则）**。对于每个满足 $i \neq k$ 的有序对 $(A_i, A_k)$ 以及每个准则 $C_j$，定义（可能是模糊/分级的）REGIME 标识符

$$R_{ik}^{(j)} := s_j \, \kappa_j(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) \in [-1, 1].$$

将这些汇总为*REGIME* 向量

$$\boldsymbol{R}(A_i, A_k) := \left(R_{ik}^{(1)}, \ldots, R_{ik}^{(n)}\right) \in [-1, 1]^n.$$

将所有有序对（$i$，$k$）对应的 $\boldsymbol{R}$（$A_i$，$A_k$）依次排列，$i \neq k$，即可得到*REGIME* 矩阵 $x$.

**（3）指导指数 （成对聚合）**。将 $A_i$ 在 $A_k$ 上的指导指数定义为加权和 m

$$\mathsf{GI}_{ik} := \sum_{j=1}^{n} w_j \, R_{ik}^{(j)} \in [-1, 1].$$

**（4）净引导指数与排序**。 将每个备选方案的净引导指数定义为

$$\mathsf{NGI}(A_i) := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \mathsf{GI}_{ik}.$$

F-REGIME 排名通过按 NGI($A_i$) 降序排列备选方案得出（如有并列，可采用次级规则打破，例如按各项准则下的平均排序，或选择一种去模糊化的并列处理规则）。

**命题 6.11.2**（基本良定义性）。 在定理 *6.11.1* 和 *(K1)* 的条件下，对所有 $i \neq k$,

$$R_{ik}^{(j)} = -R_{ki}^{(j)} \quad (\forall j), \qquad \mathsf{GI}_{ik} = -\mathsf{GI}_{ki}.$$

因此，NGI($A_i$) 是良定义的，用于度量在所选模糊比较器下， $A_i$ 相对于其余备选方案的净两两优势。

证明。 根据定义， $R_{ik}^{(j)} = s_j \kappa_j(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{kj}) = -s_j \kappa_j(\tilde{x}_{kj}, \tilde{x}_{ij}) = -R_{ki}^{(j)}$ ，由（K1）可得。按权重求和可得 GI$_{ik} = -$GI$_{ki}$。 NGI($A_i$) 的公式是有限和，因此是良定义的。 □

利用不确定集，我们定义如下不确定 REGIME。

**定义 6.11.3**（类型为 $M$(U-REGIME) 的不确定 REGIME）。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集，其中 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$。对于每个准则 $C_j$，令 $s_j \in \{+1, -1\}$ 表示其类型（效益型对应 $s_j = +1$；成本型对应 $s_j = -1$）。令 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 为权重，且

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

设定一个度域 Dom($M$) 非空的不确定模型 $M \subseteq [0,1]^k$。假设有一个 不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

其中 $x_{ij}^{(M)}$ 表示备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$ 上的（不确定）性能 .

**(1) 逐准则不确定比较器**。对于每个准则 $C_j$，固定一个映射

$$\kappa_j^{(M)} : \mathrm{Dom}(M) \times \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [-1, 1]$$

满足以下最小公理：

(U1)（反对称性）$\kappa_j^{(M)}(a, b) = -\kappa_j^{(M)}(b, a)$ 对所有 $a, b \in$ Dom($M$) 均成立。

(U2)（等同性中立性）$\kappa_j^{(M)}(a,\ a) = 0$ 对所有 $a \in \mathrm{Dom}(M)$ 均成立。

（当 $M$ 是模糊的且 $\mathrm{Dom}(M) = [0,1]$ 时，$\kappa_j^{(M)}$ 可能是模糊/可能性比较强度；其他 $M$ 也可以采用类似的基于得分或可能性的比较器。）

**(2) REGIME 标识符（按准则）**。对于每个有序对（$A_i,\ A_k$），其中 $i \neq k$，以及每个准则 $C_j$，定义

$$R_{ik}^{(j)} := s_j\, \kappa_j^{(M)}\big(x_{ij}^{(M)},\, x_{kj}^{(M)}\big) \in [-1,1].$$

将它们汇集为*REGIME* 向量

$$\boldsymbol{R}(A_i, A_k) := \big(R_{ik}^{(1)}, \ldots, R_{ik}^{(n)}\big) \in [-1,1]^n.$$

**(3) 指南　　指数（成对聚合）**。定义 $A_i$ 相对于 $A_k$ b的成对指导指数　　y

$$\mathsf{GI}_{ik} := \sum_{j=1}^{n} w_j\, R_{ik}^{(j)} \in [-1,1].$$

(4) **净引导指数与排序**。定义每个备选方案 b 的净引导指数　　y

$$\mathsf{NGI}(A_i) := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} \mathsf{GI}_{ik} \in \mathbb{R}.$$

U-REGIME 排序通过按 $\mathrm{NGI}(A_i)$ 降序排列备选方案得出（并列情况可采用任意固定的次级规则处理）。

**定理6.11.4**（U-REGIME 的良定义性与反对称性）。 根据定义 *6.11.3*，*U-REGIME* 各量均良定义，并满足：

*(i)* 对所有 $i \neq k$ 及所有 $j$，$R_{ik}^{(j)}$ 和$\mathsf{GI}_{ik}$ 均存在且属于 $[-1,1]$。

*(ii)* 对所有 $i \neq k$ 及所有 $j$，

$$R_{ik}^{(j)} = -R_{ki}^{(j)}, \qquad \mathsf{GI}_{ik} = -\mathsf{GI}_{ki}.$$

*(iii)* 对每个 $i$，$\mathsf{NGI}(A_i)$ 都是良定义的有限实数。

证明。 (i) 由于 $x_{ij}^{(M)}, x_{kj}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M)$，且 $\kappa_j^{(M)}$将 $\mathrm{Dom}(M)\times\mathrm{Dom}(M)$ 映射到 $[-1,1]$ 中，因此值 $\kappa_j^{(M)}(x_{ij}^{(M)}, x_{kj}^{(M)})$ 在 $[-1,1]$ 中良定义。乘以 $s_j \in \{\pm 1\}$ 不会改变范围，因此每个 $R_{ik}^{(j)} \in [-1,1]$ 都存在。定义 $\mathsf{GI}_{ik}$ 的加权和是有限和，且是 $[-1,1]$ 中数值的凸组合，因此 $\mathsf{GI}_{ik} \in [-1,1]$。

(ii) 根据反对称性 (U1)，

$$R_{ki}^{(j)} = s_j\, \kappa_j^{(M)}(x_{kj}^{(M)}, x_{ij}^{(M)}) = -s_j\, \kappa_j^{(M)}(x_{ij}^{(M)}, x_{kj}^{(M)}) = -R_{ik}^{(j)}.$$

乘以权重并对 $j$ 求和，得到 $\mathsf{GI}_{ki} = -\mathsf{GI}_{ik}$。

(iii) 对固定的 $i$，$\mathrm{NGI}(A_i) = \sum_{k\neq i} \mathsf{GI}_{ik}$ 是有限个有限实数的有限和（至多有 $m-1$ 项），因此是良定义且有限的。

□

作为相关概念　pts，球形模糊REGIME [815] 和中智REGIME [816] 也广为人知　　.

## 6.12 模糊 TODIM

TODIM依据前景理论进行排序：它根据相对于参照点的收益和损失计算优势度，对损失使用衰减参数，并聚合优势度 [817–819]。模糊 TODIM 将准则值视为模糊数，计算收益和损失的模糊优势，并通过去模糊化或模糊偏好关系得出最终排序 [820]。

**定义 6.12.1**（基于三角模糊数的模糊TODIM）。设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集。将 $\mathcal{C}=\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}\cup\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$ 划分为效益型准则和成本型准则。

**（1）三角模糊评价**。设三角模糊数决策矩阵

$$\widetilde{X}=(\widetilde{x}_{ij})_{m\times n},\qquad \widetilde{x}_{ij}=(\ell_{ij},\,\mu_{ij},\,u_{ij}),\qquad 0<\ell_{ij}\le\mu_{ij}\le u_{ij},$$

其中，$\widetilde{x}_{ij}$ 是 $A_i$ 关于 $C_j$ 的（语言型到模糊）评估。

如果多位决策 者 $e=1$，…，$k$ 提供三角模糊数 $\widetilde{x}_{ij}^{(e)}$，则使用分量平均聚合

$$\widetilde{x}_{ij}:=\frac{1}{k}\sum_{e=1}^{k}\widetilde{x}_{ij}^{(e)}=\Big(\frac{1}{k}\sum_{e=1}^{k}\ell_{ij}^{(e)},\ \frac{1}{k}\sum_{e=1}^{k}\mu_{ij}^{(e)},\ \frac{1}{k}\sum_{e=1}^{k}u_{ij}^{(e)}\Big).$$

**(2) 三角模糊数权重和参考准则**。设三角模糊数准则权重为

$$\widetilde{w}_j=(\ell_j^w,\mu_j^w,u_j^w),\qquad 0<\ell_j^w\le\mu_j^w\le u_j^w,\qquad j=1,\dots,n,$$

（如有需要，可按相同方式对多位专家的结果进行聚合）。

固定一个得分/去模糊化映射 $s:$ 三角模糊数$_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$，例如

$$s(\ell,\mu,u):=\frac{\ell+2\mu+u}{4}.$$

定义归一化清晰权重

$$w_j:=\frac{s(\widetilde{w}_j)}{\sum_{t=1}^{n}s(\widetilde{w}_t)},\qquad j=1,\dots,n.$$

令参考准则为任意最大化元

$$r\in\arg\max_{1\le j\le n}w_j,$$

并定义相对权重（投影到参考准则）

$$w_{jr}:=\frac{w_j}{w_r},\qquad j=1,\dots,n,\qquad W_r:=\sum_{t=1}^{n}w_{tr}.$$

**（3）归一化三角模糊数性能**。定义归一化三角模糊数性能 $\widehat{x}_{ij}$（越大越好）如下。

对于 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}$，令

$$\widetilde{x}_j^{\max} := \big(\max_i \ell_{ij},\ \max_i \mu_{ij},\ \max_i u_{ij}\big), \qquad \widehat{x}_{ij} := \widetilde{x}_{ij} \oslash \widetilde{x}_j^{\max}.$$

对于 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$，设

$$\widetilde{x}_j^{\min} := \big(\min_i \ell_{ij},\ \min_i \mu_{ij},\ \min_i u_{ij}\big), \qquad \widehat{x}_{ij} := \widetilde{x}_j^{\min} \oslash \widetilde{x}_{ij}.$$

这里的三角模糊数除法是标准的正三角模糊数运算

$$(\ell_1, \mu_1, u_1) \oslash (\ell_2, \mu_2, u_2) := \Big(\frac{\ell_1}{u_2},\ \frac{\mu_1}{\mu_2},\ \frac{u_1}{\ell_2}\Big).$$

**(4) 三角模糊数距离（顶点法）**。对于三角模糊数 $\widetilde{a} = (\ell_a,\ \mu_a,\ u_a)$ 和 $b = (\ell_b,\ \mu_b,\ u_b)$ 定义

$$d(\widetilde{a}, \widetilde{b}) := \sqrt{\frac{1}{3}\Big[(\ell_a - \ell_b)^2 + (\mu_a - \mu_b)^2 + (u_a - u_b)^2\Big]}.$$

**(5) 收益／损失矩阵（两两比较）**。使用得分 $s(\cdot)$ 来比较三角模糊数：记作 $\widetilde{x} \succeq \widetilde{y}$ 当且仅当$s(\widetilde{x}) \ \geq s(\widetilde{y})$。

对于每个准则 $C_j$ 和每一对 $(i,k)$，定义增益和损失：

$$G_{ik}^j,\ L_{ik}^j \in \mathbb{R}, \qquad i,k = 1,\dots,m, \qquad j = 1,\dots,n.$$

如果 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}$ （效益型），则设

$$G_{ik}^j := \begin{cases} d(\widehat{x}_{ij}, \widehat{x}_{kj}), & \widetilde{x}_{ij} \succeq \widetilde{x}_{kj}, \\ 0, & \widetilde{x}_{ij} \prec \widetilde{x}_{kj}, \end{cases} \qquad L_{ik}^j := \begin{cases} 0, & \widetilde{x}_{ij} \succeq \widetilde{x}_{kj}, \\ -d(\widehat{x}_{ij}, \widehat{x}_{kj}), & \widetilde{x}_{ij} \prec \widetilde{x}_{kj}. \end{cases}$$

如果 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$ （成本型），则设

$$G_{ik}^j := \begin{cases} 0, & \widetilde{x}_{ij} \succeq \widetilde{x}_{kj}, \\ d(\widehat{x}_{ij}, \widehat{x}_{kj}), & \widetilde{x}_{ij} \prec \widetilde{x}_{kj}, \end{cases} \qquad L_{ik}^j := \begin{cases} -d(\widehat{x}_{ij}, \widehat{x}_{kj}), & \widetilde{x}_{ij} \succeq \widetilde{x}_{kj}, \\ 0, & \widetilde{x}_{ij} \prec \widetilde{x}_{kj}. \end{cases}$$

（因此 $G_{ik}^j \geq 0$ 和 $L_{ik}^j \leq 0$ 始终成立，且 $G_{ii}^j = L_{ii}^j = 0$。）

**（6）各准则的支配度（前景型非对称性）**。固定一个损失衰减参数$\theta > 0$。定义（平方根形式的）支配贡献：

$$\Phi_{ik}^{j(+)} := \sqrt{\frac{G_{ik}^j\, w_{jr}}{W_r}}, \qquad \Phi_{ik}^{j(-)} := -\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{(-L_{ik}^j)\, W_r}{w_{jr}}}, \qquad \Phi_{ik}^j := \Phi_{ik}^{j(+)} + \Phi_{ik}^{j(-)}.$$

令 $\Phi^j := (\Phi_{ik}^j)_{m\times m}$ 为准则 $C_j$的支配矩阵。

**(7) 总体支配和总体值**。定义总体支配矩阵 $\Delta = (\delta_{ik})_{m\times m}$ 为

$$\delta_{ik} := \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ik}^j.$$

通过对行和进行正规化，定义备选方案 $A_i$ 的总体值：

$$S_i := \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}, \qquad \Xi(A_i) := \frac{S_i - \min_{1\leq t\leq m} S_t}{\max_{1\leq t\leq m} S_t - \min_{1\leq t\leq m} S_t} \in [0,1].$$

按 $\Xi(A_i)$ 递减排序备选方案（允许并列）。

**命题 6.12.2 (良定义性)。** 在既定假设 $\widetilde{x}_{ij} \in$三角模糊数$_{>0}$ 和 $\widetilde{w}_j \in$ 三角模糊数$_{>0}$下，并且给定 $\theta > 0$，量 $G_{ik}^{j}, L_{ik}^{j}, \Phi_{ik}^{j}, \delta_{ik}, \Xi(A_i)$ 均为良定义的实数，且对于所有 $i$， $0 \le \Xi(A_i) \le 1$。

证明。 顶点距离 $d(\cdot,\cdot)$ 根据定义为实数且非负。因此，每个 $G_{ik}^{j}$ 要么为 0，要么为非负实数；每个 $L_{ik}^{j}$ 要么为 0，要么为非正实数。由于 $w_j > 0$ 和 $w_r =$ 最大值为 $_j\, w_j > 0$，所有比率 $w_{jr}$ 和 $W_r$ 均为正，因此 $\Phi_{ik}^{j(+)}$ 和 $\Phi_{ik}^{j(-)}$ 均为实数。因此， $\delta_{ik}$ 和 $S_i$ 均为实数。最后， $\Xi(A_i)$ 是对 $\{S_i\}_{i=1}^{m}$进行的标准仿射归一化，因此只要分母非零，它就属于 $[0,1]$ ；若所有$S_i$ 都相等，则对所有 $i$ 定义 $\Xi(A_i) := 0$ （或取 $[0,1]$中的任意常数）。

□

利用不确定集，我们将不确定 TODIM 定义如下。

**定义 6.12.3** （不确定模型上的可容许距离）。 设 $M$ 为一个不确定模型。可容许距离是一个映射

$$d_M : \mathrm{Dom}(M) \times \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [0, \infty)$$

满足：(i) $d_M(a,\ b) = d_M(b,\ a)$, (ii) $d_M(a,\ a) = 0$, 以及 (iii) $d_M(a,\ b) < \infty$ 对所有 $a,\ b \in \mathrm{Dom}(M)$ .

**定义 6.12.4** （类型为 $M$(U-TODIM) 的不确定 TODIM）。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，且 $m \ge 2$ 和 $n \ge 1$。将 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \dot{\cup}\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$ 划分为效益型准则和成本型准则。

假设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

和不确定准则权重

$$w_j^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

固定一个可容许评分 $S_M$ 和一个可容许距离 $d_M$。

**步骤 1（清晰权重和参考准则）**。定义正清晰权重如下

$$\omega_j := \frac{\exp(S_M(w_j^{(M)}))}{\sum_{t=1}^{n} \exp(S_M(w_t^{(M)}))} \in (0,1), \qquad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1.$$

选择一个参考准则

$$r \in \arg\max_{1 \le j \le n} \omega_j,$$

并定义相对权重

$$\omega_{jr} := \frac{\omega_j}{\omega_r} \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad W_r := \sum_{t=1}^{n} \omega_{tr}.$$

**步骤 2（归一化为效益型方向）**。对于每个准则 $C_j$，在 Dom($M$) 中定义逐准则最优与最差程度：

$$x_j^{\max} \in \arg\max_{1 \le i \le m} S_M(x_{ij}^{(M)}), \qquad x_j^{\min} \in \arg\min_{1 \le i \le m} S_M(x_{ij}^{(M)}).$$

定义归一化最佳性能距离

$$\Delta_i^{(j)} := \begin{cases} d_M\big(x_{ij}^{(M)},\, x_j^{\max}\big), & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ d_M\big(x_{ij}^{(M)},\, x_j^{\min}\big), & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}, \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m).$$

（因此，对于每个准则， $\Delta_i^{(j)}$ 越小越好。）

**第3步（两两增益/损失）**。对于每个准则 $C_j$ 和每一对（$i$， $k$），定义

$$G_{ik}^j := \max\{\,0,\ \Delta_k^{(j)} - \Delta_i^{(j)}\,\} \ \geq 0, \qquad L_{ik}^j := -\max\{\,0,\ \Delta_i^{(j)} - \Delta_k^{(j)}\,\} \ \leq 0.$$

因此， $G_{ik}^j$ 表示 $A_i$ 相对于 $A_k$的增益，而 $L_{ik}^j$ 则表示（负的）损失。

**第4步（按准则计算前景理论型支配）**。设损失衰减参数为 $\theta > 0$。定义支配贡献

$$\Phi_{ik}^{j(+)} := \sqrt{\frac{G_{ik}^j\, \omega_{jr}}{W_r}}, \qquad \Phi_{ik}^{j(-)} := -\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{(-L_{ik}^j)\, W_r}{\omega_{jr}}}, \qquad \Phi_{ik}^{j} := \Phi_{ik}^{j(+)} + \Phi_{ik}^{j(-)}.$$

令 $\Phi^j := (\Phi_{ik}^j)_{m\times m}$ 为准则 $C_j$ 的支配矩阵。

**步骤 5（总体支配和最终值）**。定义总体支配矩阵 $\Delta = (\delta_{ik})$ 如下

$$\delta_{ik} := \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ik}^j.$$

Let

$$S_i := \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}.$$

通过最小—最大归一化定义最终 TODIM 值:

$$\Xi(A_i) := \begin{cases} \dfrac{S_i - \min_{1\leq t\leq m} S_t}{\max_{1\leq t\leq m} S_t - \min_{1\leq t\leq m} S_t}, & \max S_t > \min S_t, \\ 0, & \max S_t = \min S_t, \end{cases}$$

并按 $\Xi(A_i)$ 的降序对备选方案进行排序。

**定理 6.12.5** (U-TODIM 的良定义性)。 在定义 *6.12.4* 下，假设 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$, $S_M$ 可容许， $d_M$ 是可容许距离，且 $\theta > 0$。那么:

*(i) U-TODIM* 中的所有量都是良定义的有限实数。

*(ii)* 清晰权重满足 $\omega_j \in (0,1)$ 和 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$，因此 $\omega_{jr} > 0$ 和 $W_r > 0$。

*(iii)* 对于每个 $i$，最终值满足 $0 \leq \Xi(A_i) \leq 1$。

证明。 (i) $S_M$ 的可容许性意味着 $S_M(w_j^{(M)}) \in \mathbb{R}$，因此 $\exp(S_M(w_j^{(M)})) \in (0,\infty)$ 是有限的。因此，对 $\omega_j$ 的归一化会得到良定义的正实数，其和为 1。

(ii) 由于 $r$ 最大化$\omega_j$，我们有 $\omega_r > 0$，因此每个比率$\omega_{jr} = \omega_j/\omega_r$ 均为良定义且为正，并且 $W_r = \sum_t \omega_{tr} > 0$。

(iii) 由于 $m$ 是有限的，且 $S_M(x_{ij}^{(M)})$是有限的，用于选择 $x_j^{\max}, x_j^{\min}$的最大值／最小值集合是非空的，因此这些选择存在。由 $d_M$的可容许性，每个 $\Delta_i^{(j)}$ 都是有限非负实数。因此 $G_{ik}^j$和 $L_{ik}^j$ 是良定义的有限实数，且满足 $G_{ik}^j \geq 0$ 和 $L_{ik}^j \leq 0$。在 $\theta > 0$、 $\omega_{jr} > 0$和 $W_r > 0$下， $\Phi_{ik}^{j(+)}$ 和 $\Phi_{ik}^{j(-)}$ 中的平方根表达式是良定义的有限实数，因此 $\Phi_{ik}^j$，进而 $\delta_{ik}$ 和 $S_i$ 均为有限实数。

最后，通过标准的最小—最大归一化得到 $\Xi(A_i)$。如果 $\max S_t > \min S_t$，则对于所有 $i$， $0 \leq \Xi(A_i) \leq 1$；如果 $\max S_t = \min S_t$，则定义规定 $\Xi(A_i) = 0$。 □

不确定性感知模型下 TODIM 的相关概念列于表6.1中 2.

表6.12：不确定性感知模型下 TODIM 的相关概念。

| $k$ | **相关 TODIM 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 TODIM [821] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 TODIM [822–824] |
| 2 | 费马特模糊 TODIM [825, 826] |
| 3 | 犹豫模糊 TODIM [827, 828] |
| 3 | 图像模糊 TODIM [829] |
| 3 | 球形模糊 TODIM [830, 831] |
| 3 | 中智 TODIM [832–835] |
| $n$ | 多属性生成 TODIM [836] |

作为不确定 TODIM 的相关概念，还包括一些已知的扩展形式，例如粗糙 TODIM[837, 838], 语言 TODIM [839, 840], 灰色 TODIM [841], TODIM-VIKOR [826, 842], 和扩展 TODIM [843, 844]。

## 6.13 模糊灰色关联分析（模糊灰色关联分析）

经典灰色关联分析（灰色关联分析）设定一个参考序列，根据绝对偏差计算灰色关联系数，利用权重聚合这些系数，并依据总体关联度最高对备选方案进行排序 [845, 846]。模糊灰色关联分析对模糊准则评价值进行归一化，定义理想参考序列，度量模糊偏差，计算灰色关联系数和加权关联度，然后依据相似度对备选方案进行排序 [847, 848]。

**定义 6.13.1** （基于三角模糊数的模糊灰色关联分析（模糊灰色关联分析））。[849, 850] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。假设将准则划分为效益型和成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-, \qquad J^+ := \{j : C_j \in \mathcal{C}^+\}, \quad J^- := \{j : C_j \in \mathcal{C}^-\}.$$

令 $\mathsf{TFN}_{>0} := \{(l,m,u) \in \mathbb{R}^3_{>0} : \ l \le m \le u\}$ 表示正三角模糊数（三角模糊数）。设模糊决策矩阵为

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij}) \in (\mathsf{TFN}_{>0})^{m\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}),$$

并令 $w = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ 为准则权重，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

**步骤 1（归一化至可比模糊尺度）**。对于每个准则 $j$，定义正标量

$$u_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} u_{ij}, \qquad l_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} l_{ij}.$$

定义归一化三角模糊数 $\tilde{r}_{ij} \in$（三角模糊数$_{>0}$），如下：

$$\tilde{r}_{ij} := \begin{cases} \Big(\dfrac{l_{ij}}{u_j^{\max}}, \dfrac{m_{ij}}{u_j^{\max}}, \dfrac{u_{ij}}{u_j^{\max}}\Big), & j \in J^{+} \quad \text{(benefit)},\\[2ex] \Big(\dfrac{l_j^{\min}}{u_{ij}}, \dfrac{l_j^{\min}}{m_{ij}}, \dfrac{l_j^{\min}}{l_{ij}}\Big), & j \in J^{-} \quad \text{(cost)}. \end{cases}$$

（因此，1 arger性能会为效益型准则和成本型准则都产生更大的归一化值。）

**第2步（参考/理想序列）**。用三角模糊数定义每个准则的模糊参考值

$$\tilde{r}_j^{*} := (1,1,1) \in \mathsf{TFN}_{>0}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

~以及相应的参考序列 $R^{*} := (\tilde{r}_1^{*}, \ldots\ldots, \tilde{r}_n^{*})$。

**第3步（模糊域中到参考值的距离）**。固定一个度量（距离） $D$ ： 三角模糊数$_{>0}$ ×三角模糊数$_{>0}$ → $\mathbb{R}_{\ge 0}$。标准选择是顶点距离：

$$D\big((l_1,m_1,u_1),(l_2,m_2,u_2)\big) := \sqrt{\frac{(l_1-l_2)^2 + (m_1-m_2)^2 + (u_1-u_2)^2}{3}}.$$

将偏差（到参考值的距离）定义为

$$\Delta_{ij} := D\big(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_j^{*}\big) \in \mathbb{R}_{\ge 0}, \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Let

$$\Delta_{\min} := \min_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} \Delta_{ij}, \qquad \Delta_{\max} := \max_{1\le i\le m} \max_{1\le j\le n} \Delta_{ij}.$$

**第4步（灰色关联系数）**。固定分辨系数 $\rho \in (0,1]$。若 $\Delta_{\max} = 0$ （所有备选方案均与参照点重合），则对所有 $i$， $j$定义$\gamma_{ij} := 1$。否则，将模糊灰色关联系数定义为

$$\gamma_{ij} := \frac{\Delta_{\min} + \rho\,\Delta_{\max}}{\Delta_{ij} + \rho\,\Delta_{\max}} \in (0,1], \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

**步骤 5（灰色关联度和排序）**。将备选方案 $A_i$ 的灰色关联度（总体相似度）定义为加权和

$$\Gamma_i := \sum_{j=1}^{n} w_j\, \gamma_{ij} \in [0,1], \qquad i = 1, \ldots, m.$$

按 $\Gamma_i$降序排列备选方案：

$$A_p \succeq_{\mathrm{FGRA}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_p \geq \Gamma_q.$$

任意最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{1\leq i\leq m} \Gamma_i$$

称为模糊灰色关联分析的最优备选方案。

下文给出 $M$ 类型的不确定灰色关联分析的定义。

**定义6.13.2** （ $M$类型的不确定灰色关联分析（U-GRA））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，且 $m,\ n \geq 2$。将准则划分为效益集和成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \dot{\cup}\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

假设存在一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

以及准则权重 $w = (w_1,\ \ldots,\ w_n)$，满足 $w_j \geq 0$和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。固定一个不确定模型 $M$，使其 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，并给定一个可容许评分 $S_M$ 和一个可容许距离 $d_M$。固定一个分辨系数 $\rho \in (0, 1]$。

**步骤 1（清晰投影）**。定义 $y_{ij} := S_M(x_{ij}^{(M)}) \in \mathbb{R}$，并构造实矩阵 $Y = (y_{ij})$。

**步骤 2（M in–max 归一化为效益型方向）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$y_j^{\min} := \min_{1\leq i\leq m} y_{ij}, \qquad y_j^{\max} := \max_{1\leq i\leq m} y_{ij}.$$

定义归一化标量矩阵 $R = (r_{ij})$，其定义如下：

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \text{ and } y_j^{\max} > y_j^{\min}, \\ \dfrac{y_j^{\max} - y_{ij}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}} \text{ and } y_j^{\max} > y_j^{\min}, \\ 0, & y_j^{\max} = y_j^{\min}, \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

使得 $r_{ij} \in [0, 1]$，且值越大始终表示性能越好。

**步骤 3（参考序列）**。将参考（理想）序列定义为

$$r_j^* := 1 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

**第4步（与参考序列的偏差）**。定义

$$\Delta_{ij} := \left|r_j^* - r_{ij}\right| = |1 - r_{ij}| \in [0, 1], \qquad \Delta_{\min} := \min_{i,j} \Delta_{ij}, \qquad \Delta_{\max} := \max_{i,j} \Delta_{ij}.$$

**步骤 5（G rey关系系数）**。如果 $\Delta_{\max}=0$，令$\gamma_{ij}:=1$ 对所有 $i,\ j$。否则定义 e

$$\gamma_{ij}:=\frac{\Delta_{\min}+\rho\,\Delta_{\max}}{\Delta_{ij}+\rho\,\Delta_{\max}}\in(0,1],\qquad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

**步骤 6（灰色关联度与排序）**。定义备选方案 $A_i$ 的灰色关联度

$$\Gamma_i:=\sum_{j=1}^{n}w_j\,\gamma_{ij}\in[0,1],\qquad i=1,\dots,m,$$

并按 $\Gamma_i$ 降序排序。

**（可选）不确定性感知距离细化**。可以不用 $\Delta_{ij}=|1-r_{ij}|$，而使用 $d_M$ 定义不确定性感知偏差，例如，

$$\Delta_{ij}^{(M)}:=d_M\big(x_{ij}^{(M)},\,x_j^{(M)*}\big),$$

其中，$x_j^{(M)*}$是 Dom($M$) 中选定的参考度（例如，$S_M$最大化元）。随后用 $\Delta_{ij}^{(M)}$ 替代 $\Delta_{ij}$，即可执行其余步骤。

**定理6.13.3 (U-GRA的良定义性)**。 根据定义*6.13.2*，假设 $m,n\geq 2,\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset,S_M$ 是可容许的，且 $\rho\in(0,1]$。则：

*(i)* 归一化值 $r_{ij}$ 是良定义的，且满足 $0\leq r_{ij}\leq 1$。

*(ii)* 偏差满足 $0\leq\Delta_{ij}\leq 1$，因此 $\Delta_{\min},\Delta_{\max}$ 存在。

*(iii)* 灰色关联系数 $\gamma_{ij}$ 是良定义的，且当 $\Delta_{\max}>0$时满足 $0<\gamma_{ij}\leq 1$，当 $\Delta_{\max}=0$时满足 $\gamma_{ij}=1$。

*(iv)* 对所有 $i$，灰色关联度满足 $0\leq\Gamma_i\leq 1$，且按 $\Gamma_i$ 排序是良定义的。

证明。 (i) 根据 $S_M$的可容许性，每个 $y_{ij}=S_M(x_{ij}^{(M)})$都是有限实数，因此对于每个 $j$，极值$y_j^{\min}$和 $y_j^{\max}$均存在（指标集有限）。若 $y_j^{\max}>y_j^{\min}$，则所述最小–最大公式定义了$r_{ij}$。由于$y_{ij}\in[y_j^{\min},y_j^{\max}]$，可得 $r_{ij}\in[0,1]$，这对效益型和成本型情形均成立。若 $y_j^{\max}=y_j^{\min}$，则定义令 $r_{ij}=0$，因此 $r_{ij}\in[0,1]$ 始终成立。

(ii) 由于 $r_j^*=1$和 $r_{ij}\in[0,1]$，我们有 $\Delta_{ij}=|1-r_{ij}|\in[0,1]$。因此，$\Delta_{\min}$和 $\Delta_{\max}$作为有限集上的最小值/最大值均存在。

(iii) 若 $\Delta_{\max}=0$，则所有 $\Delta_{ij}=0$，且定义令 $\gamma_{ij}=1$。若 $\Delta_{\max}>0$，则 $\rho\,\Delta_{\max}>0$ 且分母 $\Delta_{ij}+\rho\Delta_{\max}\geq\rho\Delta_{\max}>0$，因此$\gamma_{ij}$ 是良定义的。此外，$\Delta_{ij}\geq\Delta_{\min}$ 意味着

$$\gamma_{ij}=\frac{\Delta_{\min}+\rho\Delta_{\max}}{\Delta_{ij}+\rho\Delta_{\max}}\leq 1,$$

且分子为正，因此得到 $\gamma_{ij}>0$。

（iv）由于 $w_j\geq 0$、$\sum_j w_j=1$和 $0<\gamma_{ij}\leq 1$，加权和满足 $0\leq\Gamma_i\leq 1$。因此，按$\Gamma_i$ 分类可定义有效排序（允许并列）。

□

不确定性感知模型下灰色关联分析的相关概念列于表6.1 3.

表6.13：不确定性感知模型下灰色关联分析的相关概念。

| $k$ | 相关灰色关联分析概念 |
|---|---|
| 1 | 模糊灰色关联分析 |
| 2 | 直觉模糊灰色关联分析 [851] |
| 2 | 费马模糊灰色关联分析 |
| 3 | 犹豫模糊灰色关联分析 [852,853] |
| 3 | 中智灰色关联分析 [854,855] |

## 6.14 模糊 ARAS（模糊加性比率评估）

ARAS依据归一化加权准则和对备选方案进行排名，并通过效用比率 [856, 857]将每个选项与最优备选方案进行比较。模糊ARAS将评价和权重表示为模糊数，将其归一化，计算模糊最优性和，进行去模糊化，并按效用排名 [858–860]。

**定义 6.14.1** （基于三角模糊数的模糊加法比率评估（FARAS））。[858–860] 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集。将准则划分为效益集与成本集：

$$J^+ \dot\cup J^- = \{1,\dots,n\},$$

其中， $j\in J^+$ 表示“越大越好”， $j\in J^-$ 表示“越小越好”。

假设 $A_i$ 在 $C_j$ 下的（模糊）性能为正三角模糊数

$$\tilde a_{ij}=(l_{ij},m_{ij},u_{ij})\quad (0<l_{ij}\le m_{ij}\le u_{ij}),\qquad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

并令 $w=(w_1,\dots,w_n)$为清晰 权重向量，其中 $w_j\ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j=1$。

**三角模糊数运算（标准正向约定）**。对于正三角模糊数 $\tilde x=(l_x,m_x,u_x)$ 和 $\tilde y=(l_y,m_y,u_y)$ 定义

$$\tilde x\oplus\tilde y:=(l_x+l_y,\ m_x+m_y,\ u_x+u_y),\qquad \tilde x^{-1}:=\left(\frac{1}{u_x},\frac{1}{m_x},\frac{1}{l_x}\right),$$

$$\tilde x\oslash\tilde y:=\tilde x\otimes\tilde y^{-1},\qquad r\odot\tilde x:=(rl_x,\ rm_x,\ ru_x)\quad (r\ge 0).$$

**步骤 0（添加最优/理想方案）**。引入 $A_0$ 并对每个准则 $j$,

$$\tilde a_{0j}:=\begin{cases}\max_{1\le i\le m}\tilde a_{ij}, & j\in J^+,\\ \min_{1\le i\le m}\tilde a_{ij}, & j\in J^-,\end{cases}$$

其中，最大值/最小值可根据 TFN 上任意固定的全预序（例如通过基于去模糊化的得分）确定。构造扩展决策矩阵

$$\tilde A=\big(\tilde a_{ij}\big)_{(m+1)\times n}\qquad (i=0,1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

**步骤 1（归一化）**。对于每个 $j\in J^+$ （效益型），设

$$\tilde a^*_{ij}:=\tilde a_{ij}\oslash\left(\bigoplus_{p=0}^{m}\tilde a_{pj}\right),\qquad i=0,1,\dots,m.$$

对于每个 $j \in J^{-}$（成本型），应用两阶段变换：

$$\tilde{b}_{ij} := \tilde{a}_{ij}^{-1}, \qquad \tilde{a}_{ij}^{*} := \tilde{b}_{ij} \oslash \left( \bigoplus_{p=0}^{m} \tilde{b}_{pj} \right), \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

令 $A^{*} = (\tilde{a}_{ij}^{*})$ 表示归一化三角模糊数矩阵。

**步骤 2（加权归一化矩阵）**。定义

$$\tilde{\hat{a}}_{ij} := w_j \odot \tilde{a}_{ij}^{*}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

并记作 $\hat{A} = (\tilde{\hat{a}}_{ij})$。

**步骤 3（最优性函数和去模糊化）**。对于每个 $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$，定义（模糊）最优性值

$$\tilde{S}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{\hat{a}}_{ij}.$$

若 $\tilde{S}_i = (S_i^{\ell}, S_i^{m}, S_i^{u})$，则根据 COA/质心法则定义清晰得分：

$$S_i := \operatorname{Defuzz}(\tilde{S}_i) := \frac{S_i^{\ell} + S_i^{m} + S_i^{u}}{3}.$$

**第4步（效用度与排序）**。对每个真实备选方案 $A_i (i = 1, \ldots, m)$，定义其效用度

$$K_i := \frac{S_i}{S_0} \in [0, 1].$$

FARAS 排序是 $\mathcal{A}$ 上由下式给出的全预序

$$A_p \succeq_{\mathrm{FARAS}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad K_p \geq K_q.$$

基于不确定集扩展而来的不确定 ARAS（U-ARAS）的定义如下。

**定义 6.14.2**（不确定 ARAS（U-ARAS）：不确定性下的加性比率评估）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $J^{+} \dot{\cup} J^{-} = \{1, \ldots, n\}$ 为效益型（$J^{+}$）准则与成本型（$J^{-}$）准则的划分。固定一个不确定性空间 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$。

**(0) 不确定性能矩阵**。对于每个（$i,\ j$），令 $X_{ij} : \Gamma \to (0,\ \infty)$ 为表示 $A_i$ 在准则 $C_j$ 下性能（正值）的不确定变量。将诱导不确定集记为 $\mathcal{X}_{ij}(\gamma) := \{X_{ij}(\gamma)\}$。

**(1) 确定性准则权重（ARAS 标准）**。令 $w = (w_1,\ \ldots\ldots,\ w_n) \in [0, 1]^n$ 满足

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

**(2) C 构造最优（理想）备选方案**。引入 $A_0$ 并对每个 $j$定义

$$X_{0j}(\gamma) := \begin{cases} \max_{1\le i\le m} X_{ij}(\gamma), & j \in J^+, \\ \min_{1\le i\le m} X_{ij}(\gamma), & j \in J^-, \end{cases} \qquad \gamma \in \Gamma.$$

由此得到不确定变量 $X_{0j}: \Gamma \to (0, \infty)$ 和不确定集 $\mathcal{X}_{0j}(\gamma) := \{X_{0j}(\gamma)\}$。

**(3) ARAS 归一化（逐情景）**。按如下方式定义归一化不确定变量 $R_{ij}: \Gamma \to [0,1]$ 。

- 对于 $j \in J^+$ (效益型),

$$R_{ij}(\gamma) := \frac{X_{ij}(\gamma)}{\sum_{p=0}^{m} X_{pj}(\gamma)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

- 对于 $j \in J^-$ （成本型），使用倒数变换:

$$Y_{ij}(\gamma) := \frac{1}{X_{ij}(\gamma)}, \qquad R_{ij}(\gamma) := \frac{Y_{ij}(\gamma)}{\sum_{p=0}^{m} Y_{pj}(\gamma)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

令 $\mathcal{R}_{ij}(\gamma) := \{R_{ij}(\gamma)\}$ 为诱导不确定集。

**（4）加权归一化值和加法最优性函数**。定义

$$V_{ij}(\gamma) := w_j\, R_{ij}(\gamma) \in [0,1], \qquad S_i(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} V_{ij}(\gamma) \in [0,1], \qquad i = 0, 1, \ldots, m,$$

以及诱导不确定集 $\mathcal{S}(A_i)(\gamma) := \{S_i(\gamma)\}$。

**（5）效用度和决策规则**。假设对所有 $\gamma \in \Gamma$ ， $S_0(\gamma) > 0$ ，并定义（逐情景）效用度

$$K_i(\gamma) := \frac{S_i(\gamma)}{S_0(\gamma)} \in [0,1], \qquad i = 1, \ldots, m,$$

具有诱导 不确定集 $\mathcal{K}(A_i)(\gamma) := \{K_i(\gamma)\}$。若对所有 $i$， $\mathbb{E}[K_i]$ 均存在，则按期望效用排序 y:

$$A_p \succeq_{\text{U-ARAS}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[K_p] \ge \mathbb{E}[K_q],$$

并选择任意最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[K_i].$$

**定理 6.14.3**（不确定集结构与 U-ARAS 的良定义性）。在定义 *6.14.2* 中，假设:

(A1) 对所有 $i$、 $j$、 $X_{ij}: \Gamma \to (0, \infty)$ 是 $\mathcal{L}$-可测的。

（A2） $w_j \ge 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

(A3) 对所有 $\gamma$ 以及所有 $j$，$\sum_{p=0}^{m} X_{pj}(\gamma) > 0$（由正性自动得出），并且对 $j \in J^{-}$ 亦有 $\sum_{p=0}^{m} 1/X_{pj}(\gamma) > 0$（由正性自动得出）。

则：

(i) 对每个 $j$，理想绩效映射 $X_{0j}$ 是一个 $\mathcal{L}$可测的不确定变量，因此 $\mathcal{X}_{0j}$ 是一个不确定集。(ii) 对所有 $i$、$j$，归一化值 $R_{ij}$ 是取值于 $[0,1]$, 的 $\mathcal{L}$可测不确定变量，且$S_i$ 是取值于 $[0,1]$的 $\mathcal{L}$可测不确定变量；因此 $\mathcal{R}_{ij}$ 与 $\mathcal{S}(A_i)$ 均为不确定集。(iii) 此外，若对所有 $\gamma$有 $S_0(\gamma) > 0$，则每个 $K_i$ 是取值于 $[0,1]$, 的 $\mathcal{L}$ 可测不确定变量，且 $\mathcal{K}(A_i)$ 是一个不确定集。(iv)进一步，若对所有 $i$，$\mathbb{E}[K_i]$ 存在，则期望效用排序 $\succeq_{\text{U-ARAS}}$ 是良定义的，且最大值点集$\arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[K_i] \neq \varnothing$。

证明。(i) 固定 $j$。对于 $j \in J^{+}$, $X_{0j}(\gamma) = \max_{1 \le i \le m} X_{ij}(\gamma)$。有限个可测函数的逐点最大值是可测的；因此 $X_{0j}$ 是 $\mathcal{L}$-可测的。对于 $j \in J^{-}$, $X_{0j}(\gamma) = \min_{1 \le i \le m} X_{ij}(\gamma)$，有限个可测函数的逐点最小值也是可测的。$X_{ij}$ 的正性意味着$X_{0j}(\gamma) \in (0, \infty)$。

(ii) 固定 $(i, j)$。由 (A3) 可知，归一化中的分母严格为正。对于 $j \in J^{+}$, $R_{ij}$ 是分母为正的可测函数之比，因此是可测的。此外，$0 \le R_{ij}(\gamma) \le 1$，因为$X_{ij}(\gamma) \le \sum_{p=0}^{m} X_{pj}(\gamma)$。对于 $j \in J^{-}$，倒数 $Y_{ij} = 1/X_{ij}$ 是可测的（与 $x \mapsto 1/x$ 在 $(0, \infty)$ 上复合），且再次有分母为正的 $R_{ij} = Y_{ij} / \sum_{p=0}^{m} Y_{pj}$ 是可测的。因此，每个 $\mathcal{R}_{ij}(\gamma) = \{R_{ij}(\gamma)\}$ 都是不确定集。

现在，$V_{ij}(\gamma) = w_j R_{ij}(\gamma)$ 是可测的，并且由于 $w_j \in [0,1]$ 与 $R_{ij} \in [0,1]$ 而位于 $[0,1]$ 中。因此，$S_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij}$ 是可测函数的有限和，因而可测，并且根据 (A2) 满足 $0 \le S_i(\gamma) \le \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。故 $\mathcal{S}(A_i)$ 是一个不确定集。

(iii) 若对所有 $\gamma$ 均有 $S_0(\gamma) > 0$，则 $K_i = S_i / S_0$ 是具有正分母的可测函数比率，因而可测。此外，由于在将 $A_0$ 构造为理想的标准 ARAS 设置中成立 $S_0(\gamma) \ge \max_{0 \le p \le m} S_p(\gamma) \ge S_i(\gamma)$，故有 $0 \le K_i(\gamma) \le 1$；因此 $K_i(\gamma) \in [0,1]$，且 $\mathcal{K}(A_i)$ 是一个不确定集。

（iv）如果对所有 $i$ 都存在 $\mathbb{E}[K_i]$，则排序 $A_p \succeq_{\text{U-ARAS}} A_q \iff \mathbb{E}[K_p] \ge \mathbb{E}[K_q]$ 是良定义的。由于 $\mathcal{A}$ 是有限的，因此最大期望效用可以取到，故极大值集合非空。 □

不确定性感知模型下 ARAS 的相关概念列于表 6.14。

表 6.14：不确定性感知模型下 ARAS 的相关概念。

| $k$ | **相关 ARAS 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 ARAS |
| 2 | 直觉模糊ARAS [861] |
| 3 | 图片模糊ARAS [862,863] |
| 3 | 球形模糊ARAS [864,865] |
| 3 | 中智ARAS [99,866] |

## 6.15 模糊 y WASPAS（模糊加权聚合和积评估）

WASPAS 在归一化后结合加权和模型与加权积模型，对备选方案进行排序，并生成综合效用得分 [867,868]。模糊 WASPAS 使用模糊评分和权重，对其进行归一化，计算模糊 WSM 和 WPM 效用，进行去模糊化，并对 [869,870] 进行排序。

**定义 6.15.1**（基于三角模糊数的模糊 WASPAS（WASPAS-F））。[871, 872] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。假设给定一个三角模糊数决策矩阵和三角模糊数权重

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} \in \mathrm{TFN}_{>0}, \qquad \tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n), \quad \tilde{w}_j \in \mathrm{TFN}_{>0},$$

以及（可选）在所选三角模糊数运算中取 $\sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j = (1,\ 1,\ 1)$。令 $J^+ \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为效益型准则指标，$J^- \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为成本型准则指标，且 $J^+ \dot\cup J^- = \{1, \dots, n\}$。

固定三角模糊数上的全预序 $\preceq$（用于计算有限三角模糊数集上的最大值和最小值）。对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，定义

$$\tilde{x}_j^{\max} := \max_{1\le i\le m} \tilde{x}_{ij}, \qquad \tilde{x}_j^{\min} := \min_{1\le i\le m} \tilde{x}_{ij},$$

其中最大值、最小值是相对于 $\preceq$ 取的。

步骤 1（归一化）。定义归一化模糊矩阵 $\bar{X} = (\tilde{\bar{x}}_{ij})$ 为

$$\tilde{\bar{x}}_{ij} := \begin{cases} \tilde{x}_{ij} \oslash \tilde{x}_j^{\max}, & j \in J^+, \\ \tilde{x}_j^{\min} \oslash \tilde{x}_{ij}, & j \in J^-, \end{cases} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

步骤 2（WSM 部分）。定义加权和模型（WSM）的加权归一化三角模糊数 b y

$$\tilde{\bar{x}}_{ij}^{(q)} := \tilde{\bar{x}}_{ij} \otimes \tilde{w}_j, \qquad \tilde{Q}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{\bar{x}}_{ij}^{(q)}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

步骤 3（WPM 部分）。假设（与归一化后的典型情况一致）$\tilde{\bar{x}}_{ij} = (a,\ b,\ c)$ 满足 $0 < a \le b \le c \le 1$，且 $\tilde{w}_j = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 满足 $0 < \alpha \le \beta \le \gamma \le 1$。使用标准的三角模糊数幂规则

$$(a, b, c)^{(\alpha,\beta,\gamma)} := \left(a^{\gamma},\, b^{\beta},\, c^{\alpha}\right).$$

定义加权积模型（WPM）的加权归一化三角模糊数如下：

$$\tilde{\bar{x}}_{ij}^{(p)} := (\tilde{\bar{x}}_{ij})^{\tilde{w}_j}, \qquad \tilde{P}_i := \bigotimes_{j=1}^{n} \tilde{\bar{x}}_{ij}^{(p)}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

第4步（去模糊化 化）。令面积中心法$(l,m,u) := \frac{l+m+u}{3}$(质心/面积中心)。定义清晰得分

$$Q_i := \mathrm{COA}(\tilde{Q}_i), \qquad P_i := \mathrm{COA}(\tilde{P}_i).$$

第5步（综合效用与排序）。固定 $\lambda \in [0,1]$ （或按下文的平衡规则设定），并定义

$$K_i := \lambda\, Q_i + (1-\lambda)\, P_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

一种常用的平衡选择是

$$\lambda := \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i}{\sum_{i=1}^{m} Q_i + \sum_{i=1}^{m} P_i}.$$

按降序排列 $K_i$ 即可得到模糊 WASPAS 排序（ $K_i$ 越大，备选方案越优）。

**定义6.15.2** （不确定 WASPAS（U-WASPAS）：不确定条件下的 WSM–WPM 折衷）。设$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$为有限准则集。设 $J^+ \dot{\cup} J^- =\{1, \dots, n\}$ 为效益型（$J^+$）和成本型（$J^-$）准则的划分。固定一个不确定性空间（$\Gamma$， $\mathcal{L}$， $\mathcal{M}$）。

**（0）不确定性能矩阵（正数据）**。对于（$i$， $j$），令

$$X_{ij} : \Gamma \to (0, \infty)$$

为一个不确定变量，表示 $A_i$ 在准则 $C_j$下的性能。将诱导不确定集记为 $\mathcal{X}_{ij}(\gamma) := \{X_{ij}(\gamma)\}$。

**（1）准则　　权重和 WASPAS 混合参数**。设 $w =$ （$w_1$，…， $w_n$） $\in [0,1]^n$ 满足

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$$

并固定 $\lambda \in [0,1]$ （WSM–WPM 折衷参数）。

**(2) 归一化（逐情景）**。对于每个准则 $j$ 和情景 $\gamma \in \Gamma$，定义归一化标量

$$M_j(\gamma) := \max_{1 \leq i \leq m} X_{ij}(\gamma), \qquad m_j(\gamma) := \min_{1 \leq i \leq m} X_{ij}(\gamma).$$

定义归一化不确定变量 $R_{ij}$： $\Gamma \to (0,1]$ 通过

$$R_{ij}(\gamma) := \begin{cases} \dfrac{X_{ij}(\gamma)}{M_j(\gamma)}, & j \in J^+ \quad \text{(benefit)}, \\[2ex] \dfrac{m_j(\gamma)}{X_{ij}(\gamma)}, & j \in J^- \quad \text{(cost)}. \end{cases}$$

令 $\mathcal{R}_{ij}(\gamma) := \{R_{ij}(\gamma)\}$ 为诱导不确定集。

**（3）WSM 部分艺术（加权和模型）**。定义 $A_i$ 的 WSM 效用（不确定变量）为

$$Q_i(\gamma) := \sum_{j=1}^{n} w_j \, R_{ij}(\gamma) \in [0,1], \qquad \mathcal{Q}(A_i)(\gamma) := \{Q_i(\gamma)\}.$$

**（4）WPM 部分（加权积模型）**。定义 $A_i$ 的 WPM 效用（不确定变量）如下：

$$P_i(\gamma) := \prod_{j=1}^{n} \big(R_{ij}(\gamma)\big)^{w_j} \in (0,1], \qquad \mathcal{P}(A_i)(\gamma) := \{P_i(\gamma)\}.$$

（此处 $x \mapsto x^{w_j}$ 取自 $(0,1]$。）

**（5）综合 WA SPAS效用和决策规则**。 定义综合效用（不确定变量 )

$$K_i(\gamma) := \lambda \, Q_i(\gamma) + (1-\lambda) \, P_i(\gamma) \in [0,1], \qquad \mathcal{K}(A_i)(\gamma) := \{K_i(\gamma)\}.$$

如果对所有 $i$都存在 $\mathbb{E}[K_i]$，则根据期望效用对备选方案进行排序：

$$A_p \succeq_{\text{U-WASPAS}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}[K_p] \geq \mathbb{E}[K_q],$$

并选择任意一个最大化元

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[K_i].$$

U-WASPAS是基于不确定集的扩展，其定义如下 .

**定理6.15.3**（不确定集结构与U-WASPAS的良定义性）。 在定义*6.15.2*中，假设：

（A1）对于所有 $i$、 $j$、 $X_{ij}$： $\Gamma \to$（0， $\infty$）是 $\mathcal{L}$-可测的。（A2） $w_j \geq 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，以及 $\lambda \in [0,1]$。

那么：

(i) 对于每个 $j$，映射 $M_j(\gamma) = \max_i X_{ij}(\gamma)$ 和 $m_j(\gamma) = \min_i X_{ij}(\gamma)$ 是取值于 $(0,\infty)$ 的 $\mathcal{L}$-可测不确定变量。

(ii) 对于所有 $i, j$，归一化值 $R_{ij}$ 是取值于 $(0,1]$ 的 $\mathcal{L}$-可测不确定变量；因此 $\mathcal{R}_{ij}$ 是不确定集。

(iii) 对于每个 $i$， $Q_i$ 和 $P_i$ 是 $\mathcal{L}$-可测不确定变量，且 $Q_i(\gamma) \in [0,1]$ 和 $P_i(\gamma) \in (0,1]$ 对所有 $\gamma$均成立；因此 $\mathcal{Q}(A_i)$ 和 $\mathcal{P}(A_i)$ 是不确定集。

(iv) 对于每个 $i$， $K_i$ 都是一个取值于 $[0,1]$，的 $\mathcal{L}$-可测不确定变量，因此 $\mathcal{K}(A_i)$ 是一个不确定集。

(v) 如果对所有 $i$， $\mathbb{E}[K_i]$ 都存在，那么期望效用排序 $\succeq_{\text{U-WASPAS}}$ 是良定义的，且 最大值点集$_{A_i\in\mathcal{A}}\mathbb{E}[K_i]\neq\varnothing$。

证明。 (i) 对固定的 $j$， $M_j$ 和 $m_j$ 是有限个可测映射 $\{X_{1j},\dots,X_{mj}\}$ 的逐点最大值/最小值，因此是可测的。每个 $X_{ij}$ 的正性意味着 $M_j$， $m_j\in(0,\ \infty)$。

(ii) 固定 $(i,\ j)$。对于 $j\in J^{+}$,

$$R_{ij}=\frac{X_{ij}}{M_j}$$

由于可测函数之商的分母严格为正，因此是可测的。此外， $0<R_{ij}(\gamma)\ \leq 1$ ，因为 $X_{ij}(\gamma)\ \leq M_j(\gamma)$。对于 $j\in J^{-}$,

$$R_{ij}=\frac{m_j}{X_{ij}}$$

是可测的，且 $0<R_{ij}(\gamma)\ \leq 1$ ，因为 $m_j(\gamma)\ \leq X_{ij}(\gamma)$。

(iii) 由于 $R_{ij}$ 是可测的，且 $w_j$ 是常数，因此 $w_jR_{ij}$ 是可测的，有限和 $Q_i=\sum_j w_jR_{ij}$也可测。此外，$0\ \leq\ Q_i(\gamma)\ \leq\ \sum_j w_j\ =\ 1$。对于 $P_i\ =\ \prod_j(R_{ij})^{w_j}$：对每个 $j$，映射 $x\ \mapsto\ x^{w_j}$ 在（$(0,1],$）上连续，因此（$R_{ij}$）$^{w_j}$可测；有限乘积可测。由于 $R_{ij}(\gamma)\ \in(0,1]$，，可得 $P_i(\gamma)\ \in(0,1]$。

(iv) $K_i=\lambda Q_i+(1-\lambda)P_i$是可测映射的线性组合，因此可测。由于 $Q_i\in[0,1]$、$P_i\in(0,1]$,且 $\lambda\in[0,1]$，可得 $K_i(\gamma)\ \in[0,1]$。

(v) 如果对所有 $i$都存在 $\mathbb{E}[K_i]$，那么关系 $A_p\succeq_{\text{U-WASPAS}}A_q\iff\mathbb{E}[K_p]\geq\mathbb{E}[K_q]$ 是良定义的。由于$\mathcal{A}$是有限的，因此可以达到最大期望值，所以极大值集合非空。 □

Rel不确定性感知模型下 WASPAS 的相关概念列于表6.15。

表6.15：不确定性感知模型下 WASPAS 的相关概念。

| $k$ | **WASPAS 相关概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 WASPAS |
| 2 | 直觉模糊 WASPAS [873, 874] |
| 2 | 双极模糊 WASPAS [875, 876] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 WASPAS [877, 878] |
| 2 | 费马提模糊 WASPAS [879, 880] |
| 3 | 图像模糊 WASPAS [881, 882] |
| 3 | 中智 WASPAS [883, 884] |
| 3 | 球形模糊 WASPAS [885, 886] |
| 3 | 毕达哥拉斯中智 WASPAS [887] |
| 3 | 犹豫模糊 WASPAS [888, 889] |

除了不确定 WASPAS 外，粗糙WASPAS [593, 890] 和扩展 WASPAS [891] 等相关变体也广为人知。

## 6.16 模糊 MOORA（基于比率分析的模糊多目标优化）

MOORA 对准则值进行归一化，应用准则权重，然后根据多目标下汇总的效益型减成本型得分对备选方案进行排序 [892, 893]。作为 MOORA 的扩展，Multi-MOORA 方法也广为人知 [893–895]。模糊 MOORA 将评价和/或权重表示为模糊数，通过模糊归一化和加权推广了这一过程，最后通过对所得效益型减成本型模糊得分进行去模糊化来排列备选方案 [896, 897]。

**定义 6.16.1**（基于三角模糊数的模糊 MOORA）。[898, 899] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。假定将准则划分为效益型和成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot\cup \mathcal{C}^-, \qquad \mathcal{C}^+ = \{C_1, \dots, C_g\}, \;\; \mathcal{C}^- = \{C_{g+1}, \dots, C_n\},$$

且清晰权重向量为 $w = (w_1, \dots, w_n)$，其中 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。令 $X = (\tilde{x}_{ij}) \in$（三角模糊数）$^{m\times n}$ 为三角模糊数决策矩阵，其中 $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^{\ell}, x_{ij}^{m}, x_{ij}^{u})$。

**（0）采用三角模糊数运算。** 以下所有运算均按分量进行：

$$(x^{\ell}, x^{m}, x^{u}) \oplus (y^{\ell}, y^{m}, y^{u}) = (x^{\ell} + y^{\ell},\, x^{m} + y^{m},\, x^{u} + y^{u}),$$

$$\alpha \odot (x^{\ell}, x^{m}, x^{u}) = (\alpha x^{\ell},\, \alpha x^{m},\, \alpha x^{u}) \qquad (\alpha \geq 0),$$

并且我们使用标准的三角近似进行减法：

$$(x^{\ell}, x^{m}, x^{u}) \ominus (y^{\ell}, y^{m}, y^{u}) = (x^{\ell} - y^{\ell},\, x^{m} - y^{m},\, x^{u} - y^{u}).$$

**(1) 归一化。**对于每个准则 $j$，设

$$d_j := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Big( (x_{ij}^{\ell})^2 + (x_{ij}^{m})^2 + (x_{ij}^{u})^2 \Big)} \;>\; 0, \qquad \tilde{x}_{ij}^{*} := \tilde{x}_{ij} / d_j.$$

**(2) 加权。**定义 $\tilde{v}_{ij} := w_j \odot \tilde{x}_{ij}^{*}$ 并收集 $V = (\tilde{v}_{ij})$。

**(3) 比率计 分（效益型减成本型）。**对于每个备选方案 $A_i$，定义模糊 MOORA 得 e

$$\tilde{y}_i := \left( \bigoplus_{j=1}^{g} \tilde{v}_{ij} \right) \ominus \left( \bigoplus_{j=g+1}^{n} \tilde{v}_{ij} \right) = (y_i^{\ell}, y_i^{m}, y_i^{u}).$$

**(4) 去模糊化和排序。** 定义最佳非模糊性能 $(\tilde{y}_i) := (y_i^{\ell} + y_i^{m} + y_i^{u})/3$。最终排序是 $\mathcal{A}$ 上的预序，定义如下

$$A_p \succeq A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{BNP}(\tilde{y}_p) \geq \mathrm{BNP}(\tilde{y}_q).$$

Usi对于不确定集，我们将类型为 $M$ 的不确定多目标优化比率分析（U-MOORA）定义如下　　s.

**定义6.16.2** （ $M$类型的不确定多目标优化比率分析（不确定性多目标优化比率分析））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，且有 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot{\cup} \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其Dom($M$)为 $\neq \emptyset$，并给定一个可容许评分 $S_M$。

设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \text{Dom}(M),$$

以及准则权重 $w =$ （$w_1$，.....， $w_n$）其中 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

**步骤 0（清晰投影）**。定义实值矩阵 $Y =$($y_{ij}$)，如下：

$$y_{ij} := S_M\left(x_{ij}^{(M)}\right) \in \mathbb{R}.$$

**步骤 1（向量归一化）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$d_j := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_{ij}^2} \geq 0.$$

定义归一化绩效 $r_{ij}$ ，如下：

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij}}{d_j}, & d_j > 0, \\ 0, & d_j = 0, \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

**步骤 2（加权）**。定义加权归一化绩效

$$v_{ij} := w_j \, r_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

**步骤 3（MOORA 得分 比率：效益型减去成本型）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义不确定性多目标优化比率分析得分

$$\Psi_i := \sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}} v_{ij} \; - \sum_{C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}} v_{ij}.$$

**排序规则：**

$$A_p \succeq_{\text{UMOORA}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi_p \geq \Psi_q.$$

**定理6.16.3** （U-MOORA的良定义性）。 根据定义*6.16.2*，假设 $S_M$ 是可容许的，且$m \geq 2$。那么：

*(i)* 所有量$y_{ij}$、 $d_j$、 $r_{ij}$、 $v_{ij}$和 $\Psi_i$ 都是良定义的有限实数。

(ii) 若 $d_j > 0$ 则 $r_{ij} = y_{ij}/d_j$ 是良定义的；若 $d_j = 0$，则根据定义， $r_{ij} = 0$ 是良定义的 .

(iii) 由 $\Psi_i$ 导出的排序关系是良定义的（允许并列）。

证明。 (i) 由于 $S_M$ 是可容许的，因此每个 $y_{ij} = S_M(x_{ij}^{(M)})$ 都是有限的。因此，每个 $y_{ij}^2$ 都是有限且非负的，所以 $d_j = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ij}^2}$ 是良定义且有限的。

(ii) 如果 $d_j > 0$，则除以 $d_j$ 是有效的，且 $r_{ij}$ 是有限的。如果 $d_j = 0$，那么 $\sum_{i=1}^m y_{ij}^2 = 0$ 意味着对于所有 $i$， $y_{ij} = 0$；设定 $r_{ij} = 0$ 是一致的，并会得到一个有限值。

(iii) 由于 $w_j \geq 0$ 和 $r_{ij}$ 都是有限的，因此 $v_{ij} = w_j r_{ij}$ 是有限的。定义 $\Psi_i$ 的和是有限个有限实数的和，因此 $\Psi_i$ 是有限的。因此，按实值评分 $\Psi_i$ 对备选方案进行分类，定义了一个良定义的预序。 □

不确定性感知模型下 MOORA 的相关概念列于表6.16。

表6.16：不确定性感知模型下 MOORA 的相关概念。

| $k$ | **相关 MOORA 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊多目标优化比率分析 [900, 901] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊多目标优化比率分析 [898, 902] |
| 2 | 费马提模糊多目标优化比率分析 [903, 904] |
| 3 | 中智多目标优化比率分析 [905, 906] |

作为不确定多目标优化比率分析的相关概念，已知的几种变体包括层次分析法–多目标优化比率分析 [907, 908], 逼近理想解排序法–多目标优化比率分析 [909, 910], 和灰色多目标优化比率分析 [911, 912]。

## 6.17 模糊偏好选择指数

经典偏好选择指数根据归一化性能的离散度推导客观准则权重，避免主观赋权，计算每个备选方案的偏好指数，并据此进行排序 [913, 914]。模糊偏好选择指数根据归一化评价值的模糊离散度估计准则权重，避免主观赋权，计算偏好选择指数，对其进行去模糊化，并根据优先级对备选方案进行排序 [915, 916]。

**定义 6.17.1** （模糊偏好选择指数（FPSI））。[917] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集，并将其划分为效益型准则 $\mathcal{C}_b$ 和成本型准则 $\mathcal{C}_c$。假设有一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij})_{m\times n}, \qquad \widetilde{x}_{ij} \in \mathbb{FN}_{>0} \ \ (i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n),$$

其中 $\mathbb{FN}_{>0}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上具有紧 $\alpha$-截集的正模糊数类别。对于 $\widetilde{z} \in \mathbb{FN}_{>0}$，将其$\alpha$-截集记为 $[\widetilde{z}]_\alpha = [z_\alpha^-, z_\alpha^+]$，其中 $\alpha \in [0, 1]$。

**（模糊算术通过 $\alpha$-截集）**。对于 $\widetilde{u}$， $\widetilde{v} \in \mathbb{FN}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，定义（扩展原理/区间算术）

$$[\widetilde{u} \oplus \widetilde{v}]_\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, \ u_\alpha^+ + v_\alpha^+], \qquad [\widetilde{u} \ominus \widetilde{v}]_\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^+, \ u_\alpha^+ - v_\alpha^-],$$

$$[\lambda \odot \widetilde{u}]_\alpha = \begin{cases} [\lambda u_\alpha^-,\ \lambda u_\alpha^+], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda u_\alpha^+,\ \lambda u_\alpha^-], & \lambda < 0, \end{cases}$$

$$[\widetilde{u} \otimes \widetilde{v}]_\alpha = \big[\min\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\},\ \max\{u_\alpha^- v_\alpha^-, u_\alpha^- v_\alpha^+, u_\alpha^+ v_\alpha^-, u_\alpha^+ v_\alpha^+\}\big],$$

并且，在对所有 $\alpha$均有0/$\in [\widetilde{v}]_\alpha$ 的前提下，

$$[\widetilde{u} \oslash \widetilde{v}]_\alpha = \big[\min\{u_\alpha^-/v_\alpha^-, u_\alpha^-/v_\alpha^+, u_\alpha^+/v_\alpha^-, u_\alpha^+/v_\alpha^+\},\ \max\{u_\alpha^-/v_\alpha^-, u_\alpha^-/v_\alpha^+, u_\alpha^+/v_\alpha^-, u_\alpha^+/v_\alpha^+\}\big].$$

将模糊平方定义为 $\widetilde{z}^{\odot 2} := \widetilde{z} \otimes \widetilde{z}$。

**步骤 1（归一化）**。对于每个 $j$，定义

$$c_j^+ := \max_{1\leq i\leq m} \sup(\mathrm{supp}(\widetilde{x}_{ij})) \quad (j \in \mathcal{C}_b), \qquad a_j^- := \min_{1\leq i\leq m} \inf(\mathrm{supp}(\widetilde{x}_{ij})) \quad (j \in \mathcal{C}_c),$$

~并通过以下方式设置归一化模糊评价值 $R_{ij} \in \mathbb{FN}_{>0}$

$$\widetilde{R}_{ij} := \begin{cases} \widetilde{x}_{ij} \oslash c_j^+, & j \in \mathcal{C}_b, \\ a_j^- \oslash \widetilde{x}_{ij}, & j \in \mathcal{C}_c. \end{cases}$$

这是经典 PSI 归一化 $R_{ij} = x_{ij}/x_j^{\max}$（效益型）和 $R_{ij} = x_j^{\min}/x_{ij}$（成本型）的模糊类比。

~**步骤 2（模糊偏好变异）**。令 $R_j$ 为准则的模糊均值 $j$ :

$$\overline{\widetilde{R}}_j := \frac{1}{m} \odot \bigoplus_{i=1}^{m} \widetilde{R}_{ij}.$$

选择一个缩放常数 $\kappa > 0$（常见选择包括： $\kappa = 1$，如基础 PSI 方差类比；或 $\kappa = m-1$，以模拟样本方差缩放）。定义模糊偏好变异

$$\widetilde{PV}_j := \frac{1}{\kappa} \odot \bigoplus_{i=1}^{m} (\widetilde{R}_{ij} \ominus \overline{\widetilde{R}}_j)^{\odot 2}.$$

这推广了 经典 PSI 步骤 $PV_j = \sum_{i=1}^m (R_{ij} - \overline{R_j})^{\ 2}$ 及其区间值模糊对应形式 t.

**步骤 3（模糊偏差和总体偏好权重）**。定义模糊偏差

$$\widetilde{\delta}_j := 1 \ominus \widetilde{PV}_j,$$

~并假设 $\bigoplus_{j=1}^n \delta_j$ 严格为正（即 0 不包含在其任何一个 $\alpha$-截集中），因此模糊除法是良定义的。然后定义准则 $j$ 的数据驱动模糊总体偏好权重：

$$\widetilde{w}_j := \widetilde{\delta}_j \oslash \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} \widetilde{\delta}_k\Big), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

这与经典偏好选择指数的 PSI 构造 $\delta_j = 1 - PV_j$和 $w_j = \delta_j / \sum_k \delta_k$ 及其区间值模糊类比相符。

**第4步（模糊偏好选择指数）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其模糊偏好选择指数

$$\widetilde{I}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \big(\widetilde{R}_{ij} \otimes \widetilde{w}_j\big), \qquad i = 1, \dots, m,$$

它推广了 $I_i = \sum_{j=1}^{n} (R_{ij}\, w_j)$ 及其区间值模糊版本。

**步骤 5（排序）**。确定一个得分（排序）函数 $S:\ \mathbb{FN} \to \mathbb{R}$ （例如基于质心的或基于期望值的 ~ ~）。根据 $S(I_i)$ 的降序对备选方案进行排序；最优备选方案是 $S(I_i)$ 的任意最大化元。

使用不确定 集，我们将类型为 $M$ 的不确定偏好选择指数（U-PSI）定义如下。

**定义 6.17.2** （类型为 $M$（U-PSI）的不确定偏好选择指数）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集，其中 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$。将准则划分为效益型和成本型集合：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \,\dot\cup\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\neq \emptyset$，且具有一个可容许正评分 $S_M$。假设存在一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $Y = (y_{ij})$ 如下：

$$y_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in (0, \infty).$$

**步骤 1（归一化）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$y_j^{\max} := \max_{1 \leq i \leq m} y_{ij} \ > \ 0, \qquad y_j^{\min} := \min_{1 \leq i \leq m} y_{ij} \ > \ 0.$$

定义归一化绩效 $R = (r_{ij})$ 如下：

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij}}{y_j^{\max}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\[2mm] \dfrac{y_j^{\min}}{y_{ij}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n).$$

那么 $r_{ij} \in (0, 1]$。

**St第 2 步（偏好变异 / 离散度）**。对于每个准则 $j$，定义均值

$$\bar{r}_j := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} r_{ij},$$

以及（缩放后的）偏好变异

$$PV_j := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (r_{ij} - \bar{r}_j)^2.$$

**步骤3（偏差与客观准则权重）**。定义偏差

$$\delta_j := 1 - PV_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

以及客观权重

$$w_j := \frac{\delta_j}{\sum_{t=1}^{n} \delta_t}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

**第4步（不确定PSI指数和排序）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其偏好选择指数

$$I_i := \sum_{j=1}^{n} w_j \, r_{ij}.$$

按 $I_i$ 降序排列备选方案（允许并列）。

**定理6.17.3**（U-PSI的良定义性和单纯形性质）。在定义*6.17.2*的条件下（特别是，$m \geq 2$、$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$以及 $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to (0, \infty)$），*U-PSI*过程是良定义的。更确切地说：

*(i)* 归一化得到 $r_{ij} \in (0, 1]$，对所有 $i, j$均成立。

*(ii)* 对每个 $j$，均有 $0 \leq PV_j \leq \frac{1}{4}$，因此 $\delta_j = 1 - PV_j \in [\frac{3}{4}, 1]$。特别地，$\sum_{t=1}^{n} \delta_t > 0$，所以权重$w_j$是良定义的。

*(iii)* 权重向量 $w = (w_1, \dots, w_n)^\top$满足 $w_j \geq 0$和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$（即 $w \in \Delta^{n-1}$）。

*(iv)* 对每个备选方案 $A_i$，指标 $I_i$ 是良定义的，且满足 $0 < I_i \leq 1$。

证明。(i) 由 $S_M$的可容许性可知，每个 $y_{ij} > 0$ 均为有限值。因此，对每个 $j$，极值 $y_j^{\max}$和 $y_j^{\min}$均存在且严格为正（指标集有限）。对于 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}$, $r_{ij} = y_{ij}/y_j^{\max} \in (0, 1]$。对于 $C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$,$r_{ij} = y_j^{\min}/y_{ij} \in (0, 1]$。因此，对于所有 $i$， $j$， $r_{ij} \in (0, 1]$。

(ii) 固定 $j$。由于 $r_{ij} \in [0, 1]$，样本值的范围至多为1。根据关于方差的波波维丘不等式，平方偏差的平均值满足

$$PV_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (r_{ij} - \bar{r}_j)^2 \leq \frac{(1-0)^2}{4} = \frac{1}{4},$$

并且显然 $PV_j \geq 0$。因此 $\delta_j = 1 - PV_j \in [\frac{3}{4}, 1]$。所以

$$\sum_{t=1}^{n} \delta_t \;\geq\; n \cdot \frac{3}{4} \;>\; 0,$$

从而 $w_j = \delta_j / \sum_t \delta_t$ 是良定义的。

(iii) 由于每个 $\delta_j \geq 0$，可得 $w_j \geq 0$，并且

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \delta_j}{\sum_{t=1}^{n} \delta_t} = 1.$$

(iv) 因为 $w_j \geq 0$、$\sum_j w_j = 1$以及 $r_{ij} \in (0, 1]$, 加权和 $I_i = \sum_j w_j r_{ij}$ 是有限的。此外，$I_i \leq \sum_j w_j \cdot 1 = 1$。由于至少有一个 $w_j > 0$ 且所有 $r_{ij} > 0$，可得 $I_i > 0$。 □

相关概念： 不确定性感知模型下的偏好选择指数列于表6.17 .

表 6.17：不确定性感知模型下偏好选择指数的相关概念 s.

| $k$ | **相关偏好选择指数概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊偏好选择指数 |
| 2 | 直觉模糊偏好选择指数 |
| 3 | 中智偏好选择指数 |

## 6.18 FROV（模糊值域法）

经典ROV根据加权归一化准则计算各备选方案的价值区间，然后采用反映不确定性情境下决策态度的悲观、乐观或中点得分进行排名 [918, 919]。模糊值域法（ROV）根据加权归一化模糊评价值计算各备选方案的模糊效用区间，对界进行去模糊化，并采用乐观/悲观或中程得分进行排名 [920, 921]。

**定义 6.18.1**（基于三角模糊数的模糊值域法（FROV））。 [920, 921] 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$为有限备选方案集， $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为有限准则集，并划分为效益型准则和成本型准则：

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^{+}\dot{\cup}\mathcal{C}^{-}.$$

假设 模糊决策矩阵由（非负）三角模糊数（TFN）组成 )

$$\widetilde{X}=(\tilde{x}_{ij})\in(\mathsf{TFN}_{\geq 0})^{m\times n},\qquad \tilde{x}_{ij}=(l_{ij},m_{ij},u_{ij}),\ \ 0\leq l_{ij}\leq m_{ij}\leq u_{ij},$$

并令 $w=(w_1,\dots,w_n)\in[0,1]^n$ 为准则权重，且满足 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。设定态度参数$\lambda\in[0,1]$（通常为 $\lambda=\frac{1}{2}$）。 –

**步骤 1（模糊线性归一化至 $[0,1]$）**。对于每个准则 $C_j$，定义全局下界和上界锚点

$$\underline{x}_j:=\min_{1\leq i\leq m}l_{ij},\qquad \overline{x}_j:=\max_{1\leq i\leq m}u_{ij},\qquad \Delta_j:=\overline{x}_j-\underline{x}_j.$$

假设对所有 $j$均有 $\Delta_j>0$。定义归一化三角模糊数 $\tilde{r}_{ij}=(r_{ij}^{\ell},r_{ij}^{m},r_{ij}^{u})\in$三角模糊数$_{[0,1]}$ 如下

$$\tilde{r}_{ij}:=\begin{cases}\Big(\dfrac{l_{ij}-\underline{x}_j}{\Delta_j},\ \dfrac{m_{ij}-\underline{x}_j}{\Delta_j},\ \dfrac{u_{ij}-\underline{x}_j}{\Delta_j}\Big), & C_j\in\mathcal{C}^{+}\ (\text{benefit}),\\[2ex] \Big(\dfrac{\overline{x}_j-u_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{\overline{x}_j-m_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{\overline{x}_j-l_{ij}}{\Delta_j}\Big), & C_j\in\mathcal{C}^{-}\ (\text{cost}).\end{cases}$$

（因此，按分量有 $0\leq r_{ij}^{\ell}\leq r_{ij}^{m}\leq r_{ij}^{u}\leq 1$。）

**步骤 2（悲观/乐观总体值 = “值域”）**。对每个备选方案 $A_i$，定义悲观和乐观聚合效用

$$V_i^{-}:=\sum_{j=1}^{n}w_j\,r_{ij}^{\ell},\qquad V_i^{+}:=\sum_{j=1}^{n}w_j\,r_{ij}^{u},$$

以及由此得到的值域

$$\mathrm{ROV}(A_i):=\big[V_i^{-},\,V_i^{+}\big]\subseteq[0,1].$$

等价地，可以构造三角模糊数聚合效用

$$\tilde{V}_i:=\sum_{j=1}^{n}w_j\odot\tilde{r}_{ij}=\Big(\sum_{j=1}^{n}w_jr_{ij}^{\ell},\ \sum_{j=1}^{n}w_jr_{ij}^{m},\ \sum_{j=1}^{n}w_jr_{ij}^{u}\Big)=(V_i^{-},V_i^{m},V_i^{+}),$$

其支撑端点与范围 ROV($A_i$) 一致。

**步骤3（清晰ROV评分与排序）**。定义（态度依赖型）清晰得分

$$\mathrm{Score}_{\mathrm{FROV}}(A_i) := (1-\lambda)\, V_i^{-} + \lambda\, V_i^{+} \in [0,1].$$

FROV排序是 $\mathcal{A}$上由下式给出的预序

$$A_p \succeq_{\mathrm{FROV}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Score}_{\mathrm{FROV}}(A_p) \geq \mathrm{Score}_{\mathrm{FROV}}(A_q).$$

任一最大化元

$$A^{\star} \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} \ \mathrm{Score}_{\mathrm{FROV}}(A_i)$$

称为*FROV*最优方案。

使用不确定集，我们将 $M$ 型不确定价值范围法（U-ROV）定义如下。

**定义6.18.2**（ $M$型不确定价值范围法（U-ROV））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，其中 $m$， $n \geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \dot{\cup}\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq \emptyset$，且有一个可容许正评分 $S_M$。设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

设 $w$ =（$w_1$、.....、 $w_n$）为准则权重，其中 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。固定一个态度参数$\lambda \in [0,1]$。

**步骤 0（清晰投影）**。 定义正实矩阵 $Y = (y_{ij})$ 如下：

$$y_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in (0, \infty).$$

**步骤 1（线性归一化至** $[0,1]$）。对于每个准则 $C_j$，定义锚点

$$\underline{y}_j := \min_{1\leq i\leq m} y_{ij}, \qquad \overline{y}_j := \max_{1\leq i\leq m} y_{ij}, \qquad \Delta_j := \overline{y}_j - \underline{y}_j \ \geq\ 0.$$

定义归一化值 $r_{ij} \in [0,1]$ 如下

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij} - \underline{y}_j}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \text{ and } \Delta_j > 0, \\[2ex] \dfrac{\overline{y}_j - y_{ij}}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}} \text{ and } \Delta_j > 0, \\[2ex] 0, & \Delta_j = 0. \end{cases}$$

（因此，$r_{ij}$ 越大总是越好； $\Delta_j = 0$ 对应的退化准则贡献为 0。）

**步骤 2（值域：悲观和乐观效用）**。定义每个 $A_i$ 的悲观和乐观聚合效用如下：

$$V_i^- := \sum_{j=1}^{n} w_j\, r_{ij}, \qquad V_i^+ := \sum_{j=1}^{n} w_j\, r_{ij},$$

之后 应用不同的不确定性态度。为明确地对不确定性进行建模，引入逐准则可容许区间半径 $\varepsilon_{ij} \in [0, r_{ij}]$，并定义

$$r_{ij}^- := r_{ij} - \varepsilon_{ij} \in [0,1], \qquad r_{ij}^+ := r_{ij} + \varepsilon_{ij} \in [0,1],$$

然后设

$$V_i^- := \sum_{j=1}^{n} w_j\, r_{ij}^-, \qquad V_i^+ := \sum_{j=1}^{n} w_j\, r_{ij}^+.$$

不确定价值范围 $A_i$ 为

$$\mathrm{ROV}(A_i) := \left[V_i^-,\, V_i^+\right] \subseteq [0,1].$$

**步骤 3（态度相关的确定性评分与排序）**。定义态度得分

$$\mathrm{Score}_{\mathrm{UROV}}(A_i) := (1-\lambda)\, V_i^- + \lambda\, V_i^+ \in [0,1].$$

按得分$_{\mathrm{UROV}}(A_i)$递减的顺序排列备选方案。

**定理6.18.3 (U-ROV的良定义性)。** 根据定义*6.18.2*，假设 $m, n \geq 2$, $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且 $S_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to (0,\infty)$ 可容许。选择 $\varepsilon_{ij} \in [0, r_{ij}]$，使得对于所有 $i, j$，均有 $r_{ij}^+ = r_{ij} + \varepsilon_{ij} \leq 1$。则：

*(i)* 所有归一化值$r_{ij}$和界 $r_{ij}^-, r_{ij}^+$均良定义，且属于 $[0,1]$。

*(ii)* 对于每个 $i$, $0 \leq V_i^- \leq V_i^+ \leq 1$，$\mathrm{ROV}(A_i)$ 都是 $[0,1]$中的良定义区间 .

*(iii)* 对于每个 $i$, $0 \leq$ ，得分$_{\mathrm{UROV}}(A_i) \leq 1$；因此，排序规则是良定义的。

证明。 (i) 由于 $S_M$ 可容许，每个 $y_{ij} > 0$ 都是有限的，因此$^{y_j}$,$^{y_j}$ 存在且有限。若 $\Delta_j > 0$，线性公式给出 $r_{ij} \in [0,1]$；若 $\Delta_j = 0$，则根据定义有 $r_{ij} = 0$。结合 $\varepsilon_{ij} \in [0, r_{ij}]$和 $r_{ij}^+ \leq 1$，可得
$0 \leq r_{ij}^- \leq r_{ij} \leq r_{ij}^+ \leq 1$。

（ii）由于 $w_j \geq 0$、 $\sum_j w_j = 1$和 $r_{ij}^-$， $r_{ij}^+ \in [0,1]$，加权和满足 $0 \leq V_i^- \leq V_i^+ \leq 1$。因此，ROV($A_i$) $= [V_i^-, V_i^+]$ 是包含于 $[0,1]$中的良定义区间。

（iii）由于 Score$_{\mathrm{UROV}}$($A_i$) 是 $V_i^-$和 $V_i^+$的凸组合，且具有 $\lambda \in [0,1]$，因此 Score$_{\mathrm{UROV}}$($A_i$) $\in [0,1]$。所以，按这些得分进行排序可定义一个有效排序（允许并列）。 □

相关内容 不确定性感知模型中的值域概念列于表 6.18 .

表 6.18：不确定性感知模型下的值域相关概念。

| $k$ | **相关值域概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊值域法 |
| 2 | 直觉模糊值范围 |
| 3 | 中智值范围 |

## 6.19 模糊 MOOSRA

MOOSRA 对准则值进行归一化，应用准则权重，根据加权和计算效益成本比，并按降序排列备选方案 [922, 923]。作为一种扩展，MULTIMOOSRAL 等变体也已得到研究 [924, 925]。模糊 MOOSRA 用模糊数取代清晰准则值，通过 $\alpha$-截集运算或去模糊化来传递不确定性，然后以稳健的方式根据所得模糊比率对备选方案进行排序 [926, 927]。

**定义 6.19.1** （MOOSRA 得分（清晰基准））。[922, 923] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案集合，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则集合。设 $J^+ \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为效益型（需最大化）准则的指标集，$J^- \subseteq \{1, \dots, n\}$ 为成本型（需最小化）准则的指标集，其中 $J^+ \cup J^- = \{1, \dots, n\}$ 和 $J^+ \cap J^- = \varnothing$。设 $w_j > 0$ 为准则权重，且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。

给定一个 （清晰）决策矩阵 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$，定义归一化矩阵 $H = (h_{ij})$ b y

$$h_{ij} := \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{p=1}^{m} x_{pj}^2}} \qquad (i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n),$$

并将备选方案 $A_i$ 的 MOOSRA 性能得分定义为

$$Y_i(X) := \frac{\sum\limits_{j \in J^+} w_j\, h_{ij}}{\sum\limits_{j \in J^-} w_j\, h_{ij}}, \qquad i = 1, \dots, m,$$

assu前提是分母为正。备选方案按得分降序排列 $Y_i$.

˜**定义 6.19.2** （通过扩展原理 / $\alpha$-截集的模糊 MOOSRA（F-MOOSRA））。设 $X =(\tilde{x}_{ij})$ 为一个模糊决策矩阵，其中每个元素 $\tilde{x}_{ij}$ 都是非负模糊数（例如三角形/梯形），且 $(\tilde{x}_{ij})_\alpha = [x_{ij}^L(\alpha)\ x_{ij}^U(\alpha)] \subseteq \mathbb{R}_+$ 表示其 $\alpha$-截集，其中 $\alpha \in (0, 1]$。

将层级 $\alpha$ 处精确实现的可行集定义为

$$\mathcal{D}_\alpha := \Big\{ X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{m \times n} \;\Big|\; x_{ij} \in (\tilde{x}_{ij})_\alpha \text{ for all } i, j \Big\}.$$

设 $Y_i(\cdot)$ 为前一定义中的（清晰）MOOSRA 得分。备选方案˜$A_i$ 的模糊 *MOOSRA* 得分是模糊数 $\tilde{Y}_i$，其 $\alpha$-截集为

$$(\tilde{Y}_i)_\alpha = \big[\, Y_i^L(\alpha),\, Y_i^U(\alpha) \,\big], \qquad Y_i^L(\alpha) := \inf_{X \in \mathcal{D}_\alpha} Y_i(X), \quad Y_i^U(\alpha) := \sup_{X \in \mathcal{D}_\alpha} Y_i(X),$$

˜ ˜，其中对所有 $X \in \mathcal{D}_\alpha$，$\sum_{j \in J^-} w_j\, h_{ij}(X) > 0$。等价地，$Y_i$ 由 $X$ 通过将扎德扩张原理应用于映射 $X \mapsto Y_i(X)$ 得到。

˜最后，模糊 *MOOSRA* 通过应用固定的模糊数比较规则对备选方案进行排序，该规则应用于 $\tilde{Y}_i$ （例如，重心去模糊化、可能性/必然性优势度或 $\alpha$ 层级区间优势度）。

使用 不确定集，我们将类型为 $M$ 的不确定 MOOSRA（U-MOOSRA）定义如下 s.

**定义6.19.3** （ $M$类型的不确定 MOOSRA（U-MOOSRA））。设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为备选方案， $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为准则，其中 $m\geq 2$ 且 $n\geq 2$。设 $J^+\subseteq\{1,\dots,n\}$ 为效益型准则集合，$J^-\subseteq\{1,\dots,n\}$ 为成本型准则集合，其中 $J^+\cup J^-=\{1,\dots,n\}$ 且 $J^+\cap J^-=\varnothing$，并假设 $J^-\neq\emptyset$。

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq\emptyset$，且具有一个可容许正评分 $S_M$。

假设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)}=\big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n},\qquad x_{ij}^{(M)}\in \mathrm{Dom}(M)\quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n),$$

以及准则权重 $w=(w_1,..,w_n)$，其中 $w_j>0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j=1$。（若给出不确定权重，可先对其评分并归一化，以得到这样的$w_j$。）

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $X=(x_{ij})$ 为

$$x_{ij}:=S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big)\in(0,\infty).$$

**步骤 1（向量归一化）**。对每个准则 $j$，定义

$$d_j:=\sqrt{\sum_{p=1}^{m}x_{pj}^2}\ >\ 0,\qquad h_{ij}:=\frac{x_{ij}}{d_j}\in(0,1]\qquad (i=1,\dots,m).$$

**Step 2（效益型与成本型部分的加权和）**。对每个备选方案 $A_i$，定义

$$N_i:=\sum_{j\in J^+}w_j\,h_{ij}\ \geq\ 0,\qquad D_i:=\sum_{j\in J^-}w_j\,h_{ij}\ >\ 0,$$

以及 U-MOOSRA分数

$$Y_i:=\frac{N_i}{D_i}\in[0,\infty).$$

**排序规则：**按 $Y_i$降序对备选方案进行排序。

**定理6.19.4** （U-MOOSRA的良定义性与正性）。根据定义*6.19.3*，假设 $m\geq$2、 $J^-\neq\emptyset$、Dom（$M$） $\neq\emptyset$，且 $S_M$： Dom （ $M$ ） $\to$ （ 0 、 $\infty$ ）是可容许的。则：

（*i*） $d_j>0$ 对每个 $j$均成立，因此所有 $h_{ij}$ 均良定义，并满足 $h_{ij}\in$ （$0,1$]。

（*ii*）对于每个 $i$，均有 $D_i>0$，因此 $Y_i$ 良定义并满足 $Y_i\geq 0$。

*(iii)* 由 $\{Y_i\}$ 诱导的排序规则是良定义的（允许并列）。

证明。 (i) 由于 $S_M$ 映射到 $(0,\infty)$，每个 $x_{pj}>0$。因此 $\sum_{p=1}^{m} x_{pj}^2>0$，从而 $d_j=\sqrt{\sum_{p=1}^{m} x_{pj}^2}>0$。因此 $h_{ij}=x_{ij}/d_j$ 是良定义且严格为正的。此外，$x_{ij}\le d_j$，因为 $d_j\ge\sqrt{x_{ij}^2}=x_{ij}$，所以 $h_{ij}\le 1$。

(ii) 因为对于所有 $j$，$J^-\neq\emptyset, w_j>0$；对于所有 $i$，$j$，$h_{ij}>0$，所以和 $D_i=\sum_{j\in J^-} w_j h_{ij}$ 至少包含一项严格正值，因此 $D_i>0$。因此，$Y_i=N_i/D_i$ 是良定义且非负的。

(iii) 每个 $Y_i$ 是一个有限实数，因此按 $Y_i$ 对备选方案进行排序会得到一个良定义的预序。 □

不确定性感知模型下 MOOSRA 的相关概念列于表6.19。

表6.19：不确定性感知模型下 MOOSRA 的相关概念。

| $k$ | **相关 MOOSRA 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 MOOSRA |
| 2 | 直觉模糊 MOOSRA |
| 3 | 中智 MOOSRA |

# 第7章

# 参考点距离／边界／折中指数法

参考距离、基于边界和折衷指数方法首先对准则进行归一化，然后测量与参照实体（例如正理想解/负理想解点、边界剖面或边界区域）的距离，最后将这些距离汇总为单一的折中得分，以权衡各准则上的接近度、分离度和取舍。为方便起见，本章讨论的代表性参考距离、基于边界和折衷指数方法的简要比较见表7.1。

表7.1：代表性参考距离、基于边界和折中指数方法的简要比较。

| 方法 | 参考实体 | 核心机制 | 典型最终量 | 排序方向 |
|---|---|---|---|---|
| TOPSIS | 正理想解-度和负理想解 | 对决策矩阵进行正规化并赋予权重，计算与理想点和负理想点的分离度，并评估相对接近度。 | 贴近度系数 | 越大越好 |
| MARCOS | 理想和反理想备选方案 | 扩展决策矩阵，添加理想行和反理想行，朝向理想进行正规化 , and 计算相对于两个参考方案的效用度。 | MARCOS效用 | 越大越好 |
| CODAS | 负理想解tion | 欧几里得距离和曼哈顿距离度量指标与负理想解的距离，然后构建相对评估矩阵，并采用基于阈值的校正。 | 评价得分 | 越大越更优 |

下页继续。

表7.1（续）。

| 方法 | 参考实体 | 核心机制 | 典型最终数量 | 排序方向 |
|---|---|---|---|---|
| EDAS | 平均解 | 计算正负与平均标准的距离理值，并将其按权重聚合，形成评价分数。 | 评价分数 | 越大越好 |
| VIKOR | 最佳与最差准则值 | 使用相对于最佳值的归一化遗憾聚合群体效用与个体遗憾，并将二者结合将它们转化为折衷指数。 | 折衷指数 $Q_i$ | 越小越好 |
| MABAC | 边界逼近法 tion 面积 | 对绩效进行正规化并赋予权重-表现，构建边界面积按准则，并汇总带符号的偏差-值与该边界的偏离。 | 边界偏差得分 | 越大越好 |
| MAIRCA | 理论值与真实值 标准重要性分布 | 将理论分布矩阵与真实加权归一化分布进行比较，并汇总所得差距。 | 总体差距／准则函数 | 越小越好 |

**注。** 尽管这些方法都属于同一大类基于参考的多准则决策技术，但它们使用的参照类型各不相同：TOPSIS 和 VIKOR 基于理想解，MARCOS 同时使用理想和反理想方案，CODAS 使用负理想解，EDAS 使用平均解，MABAC 使用边界近似区域，而 MAIRCA 则比较理论分布与实际分布。

## 7.1 模糊TOPSIS（基于与理想解相似度的偏好顺序模糊技术）

TOPSIS通过归一化和加权后各备选方案与理想解及反理想解之间的距离进行排序，并选择相对贴近度系数最高的方案 [928, 929]。模糊TOPSIS利用模糊评分和权重在不确定条件下对备选方案进行排序，定义模糊理想值和模糊反理想值，计算距离，并选择接近度系数最高的方案 [930, 931]。

**定义 7.1.1** （基于三角模糊数的模糊逼近理想解排序法）。[419, 932] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，划分为效益型与成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-.$$

假设 $K \geq 1$ 位决策者提供三角模糊数评价值 $\tilde{x}_{ij}^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}, c_{ij}^{(k)})$ 和三角模糊数权重 $\tilde{w}_j^{(k)} = (w_{j1}^{(k)}, w_{j2}^{(k)}, w_{j3}^{(k)})$。

**(0) 顶点距离**。对于三角模糊数 $\tilde{x} = (a_1, b_1, c_1)$ 和 $\tilde{y} = (a_2, b_2, c_2)$，定义

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) := \sqrt{\frac{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}{3}}.$$

**(1) 群体聚合（最小–均值–最大）**。将聚合三角模糊数定义为

$$\tilde{x}_{ij} := \Big(\min_k a_{ij}^{(k)},\ \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} b_{ij}^{(k)},\ \max_k c_{ij}^{(k)}\Big), \qquad \tilde{w}_j := \Big(\min_k w_{j1}^{(k)},\ \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} w_{j2}^{(k)},\ \max_k w_{j3}^{(k)}\Big).$$

设 $X=(\tilde{x}_{ij})$ 与 $\tilde{w}=(\tilde{w}_1,\ \ldots\ldots,\ \tilde{w}_n)$。

**(2) 归一化**。定义 $R=(\tilde{r}_{ij})$ 为

$$\tilde{r}_{ij} := \begin{cases} \big(a_{ij}/c_j^*,\ b_{ij}/c_j^*,\ c_{ij}/c_j^*\big), & C_j \in \mathcal{C}^+, \quad c_j^* := \max_{1\le i\le m} c_{ij}, \\ \big(a_j^-/c_{ij},\ a_j^-/b_{ij},\ a_j^-/a_{ij}\big), & C_j \in \mathcal{C}^-, \quad a_j^- := \min_{1\le i\le m} a_{ij}. \end{cases}$$

**(3) 加权**。定义加权归一化矩阵 $V=(\tilde{v}_{ij})$ 为

$$\tilde{v}_{ij} := \tilde{r}_{ij} \otimes \tilde{w}_j = (r_{ij1}w_{j1},\ r_{ij2}w_{j2},\ r_{ij3}w_{j3}),$$

并记 $\tilde{v}_{ij}=(v_{ij1},\ v_{ij2},\ v_{ij3})$。

**(4) 模糊正理想解/模糊负理想解**。定义（作为清晰三角模糊数）

$$v_j^* := \max_{1\le i\le m} v_{ij3}, \qquad v_j^- := \min_{1\le i\le m} v_{ij1},$$

$$\tilde{v}_j^* := (v_j^*, v_j^*, v_j^*), \qquad \tilde{v}_j^- := (v_j^-, v_j^-, v_j^-),$$

并令 $A^*:=(\tilde{v}_1^*,\ldots,\tilde{v}_n^*)$，$A^-:=(\tilde{v}_1^-,\ldots,\tilde{v}_n^-)$。

**(5) 分离度和接近度系数**。对于每个备选方案 $A_i$，定义

$$d_i^* := \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), \qquad d_i^- := \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), \qquad CC_i := \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*} \in [0,1].$$

**(6) 排序**。模糊TOPSIS排序是由 $CC_i$诱导的 $\mathcal{A}$ 上的全预序 ：

$$A_p \succeq A_q \quad \Longleftrightarrow \quad CC_p \ge CC_q,$$

即，按 $CC_i$ 递减顺序排列备选方案（允许并列）。

Using不确定集，我们将类型 $M$ 的不确定 TOPSIS（U-TOPSIS）定义如下 .

**定义7.1.2**（类型 $M$的不确定 TOPSIS（U-TOPSIS））。 设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$为备选方案，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$为准则，且 $m,\ n\geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}\,\dot\cup\,\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

给定一个不确定模型 $M$，满足 $\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset$，以及一个可容许正评分 $S_M$ 和一个可容许距离 $d_M$。

假设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)}=\big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n},\qquad x_{ij}^{(M)}\in\mathrm{Dom}(M)\quad(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

设 $w=(w_1,\ \dots\dots,\ w_n)$ 为准则权重，满足 $w_j>0$ 和 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。（如果给定的是不确定权重，则先通过 $S_M$ 对其评分并进行归一化，以获得这样的 $w_j$。）

**步骤 0（清晰投影）**。定义$y_{ij}:=S_M\left(x_{ij}^{(M)}\right)>0$并构造 $Y=(y_{ij})\in(0,\ \infty)^{m\times n}$。

**步骤 1（向量归一化）**。对于每个准则 $j$，定义

$$d_j:=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}y_{ij}^2}\ >\ 0,\qquad r_{ij}:=\frac{y_{ij}}{d_j}\in(0,1]\qquad(i=1,\dots,m).$$

**第2步（加权归一化矩阵）**。定义

$$v_{ij}:=w_j\,r_{ij}\in(0,1]\qquad(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

**第3步（理想解与负理想解）**。定义（清晰）正理想解（PIS）和负理想解（NIS）：

$$v_j^{*}:=\begin{cases}\max_{1\leq i\leq m}v_{ij}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}},\\ \min_{1\leq i\leq m}v_{ij}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}},\end{cases}\qquad v_j^{-}:=\begin{cases}\min_{1\leq i\leq m}v_{ij}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}},\\ \max_{1\leq i\leq m}v_{ij}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.\end{cases}$$

令 $V^{*}=(v_1^{*},\dots,v_n^{*})$ 和 $V^{-}=(v_1^{-},\dots,v_n^{-})$。

**第4步（分离度量）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义分离度

$$D_i^{*}:=\sum_{j=1}^{n}d\big(v_{ij},v_j^{*}\big),\qquad D_i^{-}:=\sum_{j=1}^{n}d\big(v_{ij},v_j^{-}\big),$$

其中，$d$是 $\mathbb{R}$ 上的任意度量（例如，$d(a,b)=|a-b|$）。（等价地，也可以直接在 $\mathrm{Dom}(M)$ 上使用 $d_M$，并用适当的 $x_j^{(M)*}$定义 $D_i^{*}:=\sum_j d_M(x_{ij}^{(M)},x_j^{(M)*})$。）

**第5步（接近度系数与排序）**。定义接近度系数

$$CC_i:=\begin{cases}\dfrac{D_i^{-}}{D_i^{-}+D_i^{*}}, & D_i^{-}+D_i^{*}>0,\\ 0, & D_i^{-}+D_i^{*}=0,\end{cases}\qquad i=1,\dots,m,$$

并按降序排列备选方案 $CC_i$（允许并列）。

**定理7.1.3**（U-TOPSIS 的良定义性与有界性）。 根据定义*7.1.2*，假设 $m, n \geq 2$、$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$, $S_M$: $\mathrm{Dom}(M) \to (0, \infty)$ 是可容许的，且 $w_j > 0$ 满足 $\sum_j w_j = 1$。那么：

*(i)* 对每个准则 $j$，$d_j > 0$，因此 $r_{ij}$ 和 $v_{ij}$ 均为良定义。

*(ii)* $V^*$ 和 $V^-$ 存在且为良定义。

*(iii)* 对每个 $i$，$D_i^* \geq 0$、$D_i^- \geq 0$ 和 $CC_i$ 均为良定义，且满足 $0 \leq CC_i \leq 1$。

*(iv)* 由 $CC_i$ 导出的排序为良定义（允许并列）。

证明。 (i) 由于 $S_M$ 可容许且映射到 $(0, \infty)$，每个 $y_{ij} > 0$。因此 $\sum_{i=1}^m y_{ij}^2 > 0$ 和 $d_j = \sqrt{\sum_i y_{ij}^2} > 0$，所以 $\overline{r_{ij}} = y_{ij}/d_j$ 为良定义。此外，$y_{ij} \leq d_j$ 蕴含 $r_{ij} \leq 1$，因此 $r_{ij} \in (0, 1]$。对于 $w_j > 0$，$v_{ij} = w_j r_{ij}$ 为良定义。

(ii) 对于每个 $j$，集合 $\{v_{1j}, \ldots, v_{mj}\}$ 是有限的，因此 $v_j^*$ 和 $v_j^-$ 的定义中的最大值和最小值均存在。因此，$V^*$ 和 $V^-$ 是良定义的。

(iii) 每个分离度量都是非负距离的有限和，因此 $D_i^*$，$D_i^- \geq 0$ 且是有限的。如果 $D_i^- + D_i^* > 0$，则 $CC_i = D_i^-/(D_i^- + D_i^*)$ 是良定义的，并且属于 $[0, 1]$。如果 $D_i^- + D_i^* = 0$，则定义令 $CC_i = 0$，其同样属于 $[0, 1]$。

(iv) 由于 e ach $CC_i$ 是一个实数，按照 $CC_i$ 对备选方案进行分类定义了一个良定义的预序 er. □

不确定性感知模型下 TOPSIS 的相关概念列于表7.2中 .

表7.2：不确定性感知模型下 TOPSIS 的相关概念。

| $k$ | **相关TOPSIS概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊逼近理想解排序法 [933–935] |
| 2 | Vague逼近理想解排序法 [936] |
| 2 | 双极模糊逼近理想解排序法 [937, 938] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊逼近理想解排序法 [939, 940] |
| 2 | 费马模糊逼近理想解排序法 [941, 942] |
| 3 | 犹豫模糊逼近理想解排序法 [943, 944] |
| 3 | 图像模糊逼近理想解排序法 [945, 946] |
| 3 | 球形模糊逼近理想解排序法 [947, 948] |
| 3 | 中智 TOPSIS [949–951] |
| 4 | 四分区中智逼近理想解排序法 [204, 952] |
| 6 | 双极中智 TOPSIS [953, 954] |
| $n$ | 多源 TOPSIS [955, 956] |

除不确定 TOPSIS 外，相关概念还包括若干扩展方法，包括粗糙 TOPSIS[957, 958], 灰色 TOPSIS [959, 960], 软集 TOPSIS [961], 超软集 TOPSIS [962, 963], 超超软集 TOPSIS [964], 群体 TOPSIS [965, 966], 区间 TOPSIS [967, 968], OWA-TOPSIS [969, 970], 定性 TOPSIS [971, 972], TOPSIS-AHP [973, 974], 和语言 TOPSIS [975, 976]。

## 7.2 模糊 MARCOS（基于折衷解的模糊方案测量与排序）

经典 MARCOS 增加理想替代方案和反理想替代方案，对决策矩阵进行归一化，应用准则权重，计算相对于理想方案的效用度，并据此对选择进行排序 [636, 977]。模糊 MARCOS 增加理想替代方案和反理想替代方案，对模糊矩阵进行归一化，计算加权和，得出相对于理想方案的效用度，进行去模糊化，并对所有选项进行整体一致的排序 [978, 979]。

**定义 7.2.1**（基于三角模糊数的模糊 MARCOS（基于折衷解的测量替代方案与排序））。 [978, 979] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $\mathcal{C}^+$ （效益型）和 $\mathcal{C}^-$ （成本型）构成 $\mathcal{C}$的一个划分。假设绩效评价值为正三角模糊数（*TFNs*）

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^{\ell}, x_{ij}^{m}, x_{ij}^{u}), \qquad 0 < x_{ij}^{\ell} \le x_{ij}^{m} \le x_{ij}^{u}, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

并且令 $w = (w_1, \dots, w_n)$ 为一个（清晰）权重向量，其中 $w_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ .

**（0）三角模糊数运算约定**。对于三角模糊数 $\tilde{a} =$ （$a^{\ell}$， $a^{m}$， $a^{u}$）和 $\tilde{b} =$ （$b^{\ell}$， $b^{m}$， $b^{u}$）（正数），定义

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} := (a^{\ell} + b^{\ell},\ a^{m} + b^{m},\ a^{u} + b^{u}), \qquad r \odot \tilde{a} := (ra^{\ell},\ ra^{m},\ ra^{u})\ (r \ge 0),$$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} := (a^{\ell}b^{\ell},\ a^{m}b^{m},\ a^{u}b^{u}), \qquad \tilde{a} \oslash \tilde{b} := \left(\frac{a^{\ell}}{b^{u}},\ \frac{a^{m}}{b^{m}},\ \frac{a^{u}}{b^{\ell}}\right),$$

以确保所有分量均为正时，除法仍保持三角模糊数序。

要对有限三角模糊数集取最大值/最小值，需在三角模糊数上固定任意一种全预序；一种标准选择是去模糊化得分

$$\mathrm{Score}_{\mathrm{TFN}}(\tilde{a}) := \frac{a^{\ell} + 4a^{m} + a^{u}}{6}.$$

˜ ˜那么， $\tilde{a} \preceq b \iff$ 得分$_{\mathrm{TFN}}(\tilde{a})$ $\le$ 得分$_{\mathrm{TFN}}(b)$。

**步骤 1（初始模糊决策矩阵）**。设

$$\tilde{X} := (\tilde{x}_{ij}) \in (\mathsf{TFN}_{>0})^{m \times n}.$$

**步骤 2（反理想解与理想解；矩阵扩展）**。对于每个准则 $C_j$，定义反理想（最差）和理想（最佳）三角模糊数:

$$\tilde{x}_j^{\mathrm{AAI}} := \begin{cases} \min_{1 \le i \le m} \tilde{x}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^+, \\ \max_{1 \le i \le m} \tilde{x}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^-, \end{cases} \qquad \tilde{x}_j^{\mathrm{AI}} := \begin{cases} \max_{1 \le i \le m} \tilde{x}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^+, \\ \min_{1 \le i \le m} \tilde{x}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^-. \end{cases}$$

引入两个 o 其他备选方案 $A_0$ :=AAI 和 $A_{m+1}$ := AI，并形成扩展矩阵 ix

$$\tilde{X}^{\mathrm{ext}} = (\tilde{x}_{ij}^{\mathrm{ext}}) \in (\mathsf{TFN}_{>0})^{(m+2) \times n},$$

其中 $\tilde{x}_{0j}^{\mathrm{ext}}$:= $\tilde{x}_j^{\mathrm{AAI}}$, $\tilde{x}_{m+1,j}^{\mathrm{ext}}$ := $\tilde{x}_j^{\mathrm{AI}}$， 以及 $\tilde{x}_{ij}^{\mathrm{ext}}$:= $\tilde{x}_{ij}$对于 $i = 1, \dots, m$。

**步骤3（归一化）**。 按下式定义归一化三角模糊数 $\tilde{n}_{ij}$

$$\tilde{n}_{ij} := \begin{cases} \tilde{x}_{ij}^{\mathrm{ext}} \oslash \tilde{x}_{j}^{\mathrm{AI}}, & C_j \in \mathcal{C}^{+}, \\ \tilde{x}_{j}^{\mathrm{AI}} \oslash \tilde{x}_{ij}^{\mathrm{ext}}, & C_j \in \mathcal{C}^{-}, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, m+1,\ j = 1, \ldots, n.$$

˜收集 $N := (\tilde{n}_{ij})$。

**第4步（加权）**。定义加权归一化三角模糊数

$$\tilde{v}_{ij} := w_j \odot \tilde{n}_{ij}, \qquad \tilde{V} := (\tilde{v}_{ij}).$$

**第5步（行聚合）**。对于每个扩展备选方案 $A_i (i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ m+1)$，定义聚合三角模糊数

$$\tilde{S}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{v}_{ij}.$$

**第6步（相对于 AAI 和 AI 的有用度）**。定义

$$\tilde{K}_i^{-} := \tilde{S}_i \oslash \tilde{S}_0, \qquad \tilde{K}_i^{+} := \tilde{S}_i \oslash \tilde{S}_{m+1}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

**第7步（辅助模糊和与极大参考）**。设定

$$\tilde{T}_i := \tilde{K}_i^{-} \oplus \tilde{K}_i^{+} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

并定义逐分量极大三角模糊数

$$\tilde{D} := (d^{\ell}, d^{m}, d^{u}) := \left( \max_i t_i^{\ell},\ \max_i t_i^{m},\ \max_i t_i^{u} \right), \quad \text{where } \tilde{T}_i = (t_i^{\ell}, t_i^{m}, t_i^{u}).$$

˜按分级均值对 $D$ 去模糊化：

$$d_{\mathrm{def}} := \mathrm{Defuzz}(\tilde{D}) := \frac{d^{\ell} + 4d^{m} + d^{u}}{6}.$$

**步骤 8（相对于 AAI 和 AI 的效用函数）**。定义

$$\tilde{f}(\tilde{K}_i^{-}) := \frac{1}{d_{\mathrm{def}}} \odot \tilde{K}_i^{-}, \qquad \tilde{f}(\tilde{K}_i^{+}) := \frac{1}{d_{\mathrm{def}}} \odot \tilde{K}_i^{+}.$$

**步骤 9（最终效用和排序）**。按 Defuzz$(\ell, m, u)$ 对（三角模糊数）去模糊化 $= (\ell + 4m + u)/6$ 并设

$$K_i^{-} := \mathrm{Defuzz}(\tilde{K}_i^{-}), \quad K_i^{+} := \mathrm{Defuzz}(\tilde{K}_i^{+}), \quad f_i^{-} := \mathrm{Defuzz}\big(\tilde{f}(\tilde{K}_i^{-})\big), \quad f_i^{+} := \mathrm{Defuzz}\big(\tilde{f}(\tilde{K}_i^{+})\big).$$

那么，（清晰）最终的 MARCOS 效用为

$$f(K_i) := \frac{K_i^{-} + K_i^{+}}{1 + \dfrac{1 - f_i^{+}}{f_i^{+}} + \dfrac{1 - f_i^{-}}{f_i^{-}}}.$$

按 $f(K_i)$ 降序排列备选方案：

$$A_p \succeq_{\mathrm{FMARCOS}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad f(K_p) \geq f(K_q).$$

参考 据此，我们将类型为 $M$ 的不确定MARCOS（U-MARCOS）定义如下 s.

**定义 7.2.2** （类型为 $M$的不确定MARCOS（U-MARCOS））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$为准则的有限集，且 $m,\ n \geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot{\cup} \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其Dom($M$)为 $\neq \emptyset$，以及一个可容许正评分 $S_M$。

假设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \text{Dom}(M) \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

以及一个清晰权重向量 $w =$ （$w_1$，.....， $w_n$），满足

$$w_j > 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

引入两个辅助备选方案：

$$A_0 := \text{AAI (anti-ideal)}, \qquad A_{m+1} := \text{AI (ideal)}.$$

**步骤 0（C risp 投影）**。定义$y_{ij} :=$ $S_M(x_{ij}^{(M)}) \in (0, \infty)$ 并设 $Y = (y_{ij}) \in (0, \infty)^{m\times n}$。

**步骤 1（理想/反理想分量和矩阵扩展）**。对于每个准则 $C_j$，定义

$$y_j^{\text{AI}} := \begin{cases} \max_{1\leq i\leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ \min_{1\leq i\leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}, \end{cases} \qquad y_j^{\text{AAI}} := \begin{cases} \min_{1\leq i\leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ \max_{1\leq i\leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}. \end{cases}$$

定义扩展矩阵 $Y_{\text{ext}} = (y_{ij}^{\text{ext}}) \in (0, \infty)^{(m+2)\times n}$ 为

$$y_{0j}^{\text{ext}} := y_j^{\text{AAI}}, \quad y_{m+1,j}^{\text{ext}} := y_j^{\text{AI}}, \quad y_{ij}^{\text{ext}} := y_{ij}\ (i = 1, \ldots, m).$$

**步骤 2（向理想值归一化）**。对于 $i = 0,\ 1,\ldots, m + 1$，定义

$$n_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij}^{\text{ext}}}{y_j^{\text{AI}}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ \dfrac{y_j^{\text{AI}}}{y_{ij}^{\text{ext}}}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}. \end{cases}$$

则 $n_{ij} \in$ $(0, 1]$ 与$n_{m+1,\ j} = 1$。

**第3步（加权和聚合）**。定义

$$v_{ij} := w_j\, n_{ij}, \qquad S_i := \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \qquad (i = 0, 1, \ldots, m + 1).$$

**第4步（效用度）**。对于每个真实备选方案 $A_i (i = 1,\ldots,m)$，定义

$$K_i^- := \frac{S_i}{S_0}, \qquad K_i^+ := \frac{S_i}{S_{m+1}}, \qquad T_i := K_i^- + K_i^+.$$

**步骤5（最终效用函数和排序）**。令 $D :=$ 最大值$_{1\le i\le m} T_i$ 并定义

$$f_i^- := \frac{K_i^-}{D}, \qquad f_i^+ := \frac{K_i^+}{D}.$$

定义 MARCOS效用

$$U_i := \frac{K_i^- + K_i^+}{1 + \dfrac{1 - f_i^+}{f_i^+} + \dfrac{1 - f_i^-}{f_i^-}}, \qquad i = 1,\ldots,m,$$

并按 $U_i$降序对备选方案进行排序。

**定理 7.2.3**（U-MARCOS 的良定义性）。 根据定义 *7.2.2*，假设 $S_M$ 是可容许的，并且对所有 $j$均有$w_j > 0$。则所有量 $n_{ij}$、 $S_i$、 $K_i^-$、 $K_i^+$、 $T_i$、 $D$、 $f_i^-$、 $f_i^+$、 $U_i$均良定义且有限。此外，对所有 $i$均有$S_0 > 0$、 $S_{m+1} = \sum_{j=1}^n w_j > 0$、 $D > 0$和 $U_i \ge 0$ 。

证明。 $S_M$ 的可容许性意味着 $y_{ij} > 0$ 有限，因此极值 $y_j^{\mathrm{AI}}$和 $y_j^{\mathrm{AAI}}$存在且为正。因此，步骤2中的归一化具有正分母，并且 $n_{ij} \in (0, 1]$ 良定义。由于 $w_j > 0$，每个 $v_{ij} = w_j n_{ij} > 0$，所以对所有 $i$均有 $S_i = \sum_j v_{ij} > 0$ ，特别是 $S_0 > 0$。因为$n_{m+1,\ j} = 1$，所以有 $S_{m+1} = \sum_{j=1}^n w_j > 0$。因此， $K_i^- = S_i/S_0$ 和 $K_i^+ = S_i/S_{m+1}$ 均良定义且为正，从而$T_i = K_i^- + K_i^+ > 0$，因此 $D =$最大值$_i\, T_i > 0$。于是 $f_i^-$， $f_i^+ \in (0, 1]$且 $U_i$ 中的分母严格为正，所以 $U_i$ 良定义且有限。最后， $U_i$ 是正项之比，因此 $U_i \ge 0$。 □

Re不确定性感知模型下 MARCOS 的相关概念列于表 7.3 中。

表 7.3：不确定性感知模型下 MARCOS 的相关概念。

| $k$ | **相关 MARCOS 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 MARCOS |
| 2 | 直觉模糊 MARCOS [979, 980] |
| 3 | 犹豫模糊 MARCOS [981] |
| 3 | 图像模糊 MARCOS [982, 983] |
| 3 | 球形模糊 MARCOS [984, 985] |
| 3 | 中智 MARCOS [636, 986] |

## 7.3 模糊 CODAS（模糊组合距离评估）

经典 CODAS 定义负理想解，计算每个备选方案的欧几里得距离和曼哈顿距离，应用阈值，并根据总体表现较大的距离进行排名 [987, 988]。模糊 CODAS 定义模糊负理想解，计算每个备选方案的欧几里得距离和曼哈顿距离，应用阈值，进行去模糊化并排序；距离越大，表示方案越好 [989, 990]。

**定义 7.3.1**（模糊 CODAS（组合距离评估）— 梯形模糊、群体多准则决策）。[989, 990] **输入数据**。令 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，且令 $Q = \{1, \ldots, q\}$ 为决策者（DMs）的集合。将准则划分为效益集与成本集

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot{\cup} \mathcal{C}^-.$$

假设所有评价和权重都是正梯形模糊数

$$\tilde{x}_{ij}^{(\ell)} = (x_{ij,1}^{(\ell)}, x_{ij,2}^{(\ell)}, x_{ij,3}^{(\ell)}, x_{ij,4}^{(\ell)}) \in \mathsf{TrFN}_{>0}, \qquad \tilde{w}_j^{(\ell)} \in \mathsf{TrFN}_{>0},$$

其中 $\ell \in Q$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$。固定：(i) 梯形模糊运算（$\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$）定义在 $\mathsf{TrFN}_{>0}$ 上（按分量进行标准运算）；(ii) 去模糊化/排序映射 $D : \mathsf{TrFN}_{>0} \to \mathbb{R}$，仅用于对有限模糊集取最大值/最小值；以及 (iii) 阈值参数 $\theta \geq 0$。

˜**步骤 1（聚合模糊决策矩阵）**。定义平均模糊决策矩阵 $X = (\tilde{x}_{ij})$ 为

$$\tilde{x}_{ij} := \frac{1}{q} \bigoplus_{\ell=1}^{q} \tilde{x}_{ij}^{(\ell)}.$$

**步骤 2（聚合模糊权重）**。定义平均模糊权重向量 $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n)$ 为

$$\tilde{w}_j := \frac{1}{q} \bigoplus_{\ell=1}^{q} \tilde{w}_j^{(\ell)}.$$

**第3步（归一化）**。对于每个准则 $j$，选择一个模糊“最大值”

$$\tilde{x}_j^{\max} \in \arg\max_{1 \leq i \leq m} D(\tilde{x}_{ij}).$$

˜将归一化模糊矩阵 $N = (\tilde{n}_{ij})$ 定义为

$$\tilde{n}_{ij} := \begin{cases} \tilde{x}_{ij} \oslash \tilde{x}_j^{\max}, & C_j \in \mathcal{C}^+ \text{ (benefit)}, \\ \tilde{x}_j^{\max} \oslash \tilde{x}_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^- \text{ (cost)}. \end{cases}$$

˜**第4步（加权归一化矩阵）**。定义 $R = (\tilde{r}_{ij})$ 为

$$\tilde{r}_{ij} := \tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}.$$

**步骤 5（模糊负理想解）**。对于每个 $j$，定义

$$\tilde{ns}_j \in \arg\min_{1 \leq i \leq m} D(\tilde{r}_{ij}), \qquad \tilde{NS} := (\tilde{ns}_1, \ldots, \tilde{ns}_n).$$

**步骤 6（与模糊负理想解的距离）**。对于梯形模糊数 $\tilde{a} = \tilde{}(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ 和 $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$ 定义：

$$d_E(\tilde{a},\tilde{b}) := \sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2 + 2(a_2-b_2)^2 + 2(a_3-b_3)^2 + (a_4-b_4)^2}{6}},$$

$$d_H(\tilde{a},\tilde{b}) := \frac{|a_1-b_1| + 2|a_2-b_2| + 2|a_3-b_3| + |a_4-b_4|}{6}.$$

然后，对于每个备选方案 $A_i$，定义（组合）距离分量

$$ED_i := \sum_{j=1}^{n} d_E(\tilde{r}_{ij}, \tilde{ns}_j), \qquad HD_i := \sum_{j=1}^{n} d_H(\tilde{r}_{ij}, \tilde{ns}_j).$$

**步骤7（相对评价矩阵）**。定义阈值函数 $t:\ \mathbb{R} \to \{0,1\}$ 如下

$$t(x) := \begin{cases} 1, & |x| \geq \theta, \\ 0, & |x| < \theta. \end{cases}$$

对于 $i,\ k \in \{1,\dots,m\}$，定义相对评价项

$$p_{ik} := (ED_i - ED_k)\ +\ t(ED_i - ED_k)\,(HD_i - HD_k),$$

并收集 $RA = (p_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$。

**步骤8（评价得分）**。对于每个 $i$，定义CODAS评价得分

$$AS_i := \sum_{k=1}^{m} p_{ik}.$$

**步骤 9（排序 / 解）**。模糊 *CODAS* 排序是由 $AS$ 在 $\mathcal{A}$ 上诱导的全预序：

$$A_i \succeq_{\mathrm{FCODAS}} A_k \quad \Longleftrightarrow \quad AS_i \geq AS_k.$$

最优解是任意一个

$$A^\star \in \arg\max_{A_i \in \mathcal{A}} AS_i.$$

利用不确定集，我们将类型为 $M$ 的不确定 CODAS（U-CODAS）定义如下。

**定义 7.3.2**（类型为 $M$ 的不确定 CODAS（U-CODAS））。设 $\mathcal{A} = \{A_1,\dots,A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1,\dots,C_n\}$ 为准则，其中 $m \geq 2$ 且 $n \geq 1$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \dot{\cup}\, \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\neq \emptyset$，以及一个可容许正评分 $S_M$。假设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n),$$

和准则权重 s $w=(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_n)$，其中 $w_j>0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$。固定一个阈值参数 $\theta\geq 0$ .

**步骤 0（清晰投影）**。定义 $y_{ij}:=S_M(x_{ij}^{(M)})\in(0,\infty)$ 并设置 $Y=(y_{ij})\in(0,\infty)^{m\times n}$。

**步骤 1（归一化）**。对于每个准则 $j$，定义

$$y_j^{\max}:=\max_{1\leq i\leq m} y_{ij}\ >\ 0.$$

将归一化绩效 $n_{ij}\in(0,1]$ 定义为

$$n_{ij}:=\begin{cases}\dfrac{y_{ij}}{y_j^{\max}}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}},\\[2mm] \dfrac{y_j^{\max}}{y_{ij}}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.\end{cases}$$

**步骤 2（加权归一化矩阵）**。定义加权归一化值

$$r_{ij}:=w_j\,n_{ij}\qquad(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

**第3步（负理想解）**。根据以下方式定义每个准则的负理想分量

$$ns_j:=\min_{1\leq i\leq m} r_{ij},\qquad \mathrm{NS}:=(ns_1,\ldots,ns_n).$$

**第4步（到负理想解的距离）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其到中智集 NS 的欧几里得距离和曼哈顿距离：

$$ED_i:=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(r_{ij}-ns_j)^2},\qquad HD_i:=\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}-ns_j|.$$

**第5步（相对评价矩阵）**。定义阈值指示函数 $t:\ \mathbb{R}\to\{0,1\}$ 如下

$$t(x):=\begin{cases}1, & |x|\geq\theta,\\ 0, & |x|<\theta,\end{cases}$$

并对每一对 $(i,\ k)$ 定义

$$p_{ik}:=(ED_i-ED_k)+t(ED_i-ED_k)\,(HD_i-HD_k).$$

令 $RA=(p_{ik})\in\mathbb{R}^{m\times m}$。

**步骤 6（评价得分与排序）**。定义

$$AS_i:=\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\qquad(i=1,\ldots,m),$$

并按 $AS_i$降序排列备选方案。

**定理 7.3.3 (U-CODAS 的良定义性)。** 根据定义 *7.3.2*，假设 $S_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to (0,\ \infty)$是可容许的，并且对所有 $j,\ w_j > 0$ 。那么所有量 $n_{ij}$、 $r_{ij}$、 $ns_j$、 $ED_i$、 $HD_i$、 $p_{ik}$ 和 $AS_i$ 都是良定义的有限实数。

证明。 由于 $S_M$ 映射到 $(0,\infty)$，每个 $y_{ij} > 0$ 都是有限的；因此 $y_j^{\max} = \max_i y_{ij} > 0$ 存在。因此，步骤 1 中的 $n_{ij}$是良定义的，且对于效益型和成本型准则均属于 $(0,1]$ 。由于 $w_j > 0,\ r_{ij} = w_j n_{ij}$ 是良定义且为正的，因此每个 $ns_j = \min_i r_{ij}$ 都存在且有限。

因此，$r_{ij} - ns_j$ 是有限实数，所以 $ED_i$ 和 $HD_i$ 是有限的，并满足 $ED_i \geq 0, HD_i \geq 0$。给定 $\theta \geq 0,\ t(\cdot)$ 是良定义的，且取值于 $\{0,1\}$，因此每个 $p_{ik}$ 都是有限实数。最后， $AS_i = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}$ 是有限和，因此良定义且有限。 □

不确定性感知模型下 CODAS 的相关概念列于表 7.4。 .

表 7.4：不确定性感知模型下 CODAS 的相关概念。

| $k$ | **CODAS 相关概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 CODAS [991, 992] |
| 2 | 勾股模糊 CODAS [993, 994] |
| 3 | 中智 CODAS [995, 996] |
| 3 | 图像模糊 CODAS [997, 998] |
| 3 | 犹豫模糊 CODAS [999, 1000] |
| 3 | 球形模糊 CODAS [1001, 1002] |

## 7.4 模糊　　EDAS（基于与平均解距离的模糊评估）

EDAS（基于与平均解距离的评价）根据与平均解的正负距离对备选方案进行排序，聚合加权距离，并计算评价分数 [1003, 1004]。模糊 EDAS 使用模糊评分和权重，计算与平均解的模糊距离，进行去模糊化，并根据评价分数进行排序 [1005]。

**定义 7.4.1** （模糊 EDAS（基于与平均解距离的评价））。[1005] 令 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则。假设存在一个梯形模糊决策矩阵和梯形模糊准则权重

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{m\times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3}, x_{ij4}),$$

$$\tilde{W} = (\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n), \qquad \tilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}),$$

其中所有元素均为梯形模糊数。固定一个非负标量“距离”函数 $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ （例如，在标量层级选用一个 $L_1$-度量），并将其逐分量扩展到梯形模糊数，定义如下

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) := \big(d(a_1,b_1), d(a_2,b_2), d(a_3,b_3), d(a_4,b_4)\big), \quad \tilde{a} = (a_1,a_2,a_3,a_4),\ \tilde{b} = (b_1,b_2,b_3,b_4).$$

**(0) 去模糊化　　和 $\psi$-算子。** 对于 $\tilde{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$，定义分级均值去模糊化

$$\mathrm{Defuzz}(\tilde{a}) := \frac{a_1 + a_4}{2} + (a_2 - a_1 - a_4 + a_3),$$

并将 $\psi$ （“与零取最大值”）定义为

$$\psi(\tilde{a}) := \begin{cases} \tilde{a}, & \mathrm{Defuzz}(\tilde{a}) > 0, \\ \tilde{0}, & \mathrm{Defuzz}(\tilde{a}) \le 0, \end{cases} \qquad \tilde{0} := (0,0,0,0).$$

**(1) 平均值（参照点）解**。对于每个准则 $j$，定义平均梯形模糊值

$$\tilde{AV}_j := \frac{1}{m} \bigoplus_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij},$$

wh此处 $\oplus$ 表示梯形模糊加法，数乘按分量进行 .

**(2) 与平均值的正/负距离**。定义梯形模糊矩阵 $PDA = (\tilde{pda}_{ij})$ 和 $NDA = (\tilde{nda}_{ij})$ 如下：

$$\tilde{pda}_{ij} := \psi\big(d(\tilde{x}_{ij}, \tilde{AV}_j)\big), \qquad \tilde{nda}_{ij} := \psi\big(d(\tilde{AV}_j, \tilde{x}_{ij})\big).$$

**(3) 加权和**。对于每个备选方案 $A_i$，令

$$\tilde{sp}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \big(\tilde{w}_j \otimes \tilde{pda}_{ij}\big), \qquad \tilde{sn}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \big(\tilde{w}_j \otimes \tilde{nda}_{ij}\big),$$

其中 $\otimes$ 为梯形模糊乘法。

**(4) 归一化**。 记 $\tilde{sp}_i = (sp_{i1}, sp_{i2}, sp_{i3}, sp_{i4})$和 $\tilde{sn}_i = (sn_{i1}, sn_{i2}, sn_{i3}, sn_{i4})$。定义归一化（真实）值

$$\widetilde{NSP}_i := \frac{sp_{i1}}{\max_{1\le t\le m} \mathrm{Defuzz}(\tilde{sp}_t)}, \qquad \widetilde{NSN}_i := 1 - \frac{sn_{i1}}{\max_{1\le t\le m} \mathrm{Defuzz}(\tilde{sn}_t)}.$$

**(5) 评价分数与排序**。定义评价分数

$$AS_i := \frac{\widetilde{NSP}_i + \widetilde{NSN}_i}{2} \in [0,1],$$

以及r ank备选方案按 $AS_i$ 降序排列（ $AS_i$ 越大表示备选方案越好 ve).

利用不确定集，我们将类型 $M$ 的不确定 EDAS（U-EDAS）定义如下 s.

**定义 7.4.2**（类型 $M$的不确定 EDAS（U-EDAS））.设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，且 $m,\ n \geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot{\cup} \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

给定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq \emptyset$，以及一个可容许正评分 $S_M$。设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \text{Dom}(M) \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

和准则权重 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，其中

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $Y = (y_{ij})$ 如下：

$$y_{ij} := S_M\left(x_{ij}^{(M)}\right) \in (0, \infty).$$

**步骤 1（平均解）**。对于每个准则 $C_j$，定义平均（参照）值

$$AV_j := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ \in (0, \infty).$$

**步骤 2（相对于平均值的正/负距离）**。对于每个 $i, j$，定义正平均距离（PDA）和负平均距离（NDA）如下：

$$PDA_{ij} := \begin{cases} \dfrac{\max\{0,\ y_{ij} - AV_j\}}{AV_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ \dfrac{\max\{0,\ AV_j - y_{ij}\}}{AV_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}, \end{cases} \qquad NDA_{ij} := \begin{cases} \dfrac{\max\{0,\ AV_j - y_{ij}\}}{AV_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{ben}}, \\ \dfrac{\max\{0,\ y_{ij} - AV_j\}}{AV_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\text{cost}}. \end{cases}$$

因此 $PDA_{ij} \geq 0$ 且 $NDA_{ij} \geq 0$。

**步骤 3（加权和）**。 对于每个备选方案 $A_i$，定义

$$SP_i := \sum_{j=1}^{n} w_j\, PDA_{ij} \ \geq 0, \qquad SN_i := \sum_{j=1}^{n} w_j\, NDA_{ij} \ \geq 0.$$

**第4步（归一化）**。令

$$SP^{\max} := \max_{1\leq i\leq m} SP_i, \qquad SN^{\max} := \max_{1\leq i\leq m} SN_i.$$

定义归一化值

$$NSP_i := \begin{cases} \dfrac{SP_i}{SP^{\max}}, & SP^{\max} > 0, \\ 0, & SP^{\max} = 0, \end{cases} \qquad NSN_i := \begin{cases} 1 - \dfrac{SN_i}{SN^{\max}}, & SN^{\max} > 0, \\ 1, & SN^{\max} = 0. \end{cases}$$

**步骤 5（评价分数与排序）**。定义评价分数

$$AS_i := \frac{NSP_i + NSN_i}{2} \in [0,1],$$

并按 $AS_i$ 降序排列备选方案（允许并列）。

**定理 7.4.3**（U-EDAS 的良定义性与有界性）。根据定义 *7.4.2*（特别是，$m$、$n \geq 2$ 和 $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to (0, \infty)$），*U-EDAS* 中的所有量均良定义且有限。此外，

$$0 \leq PDA_{ij}, NDA_{ij} < \infty, \qquad 0 \leq SP_i, SN_i < \infty, \qquad 0 \leq NSP_i, NSN_i, AS_i \leq 1.$$

因此，由 $AS_i$ 导出的排序规则是良定义的。

证明。由于 $S_M$ 映射到 $(0, \infty)$，每个 $y_{ij} > 0$ 均为有限值，因此 $AV_j = \frac{1}{m}\sum_i y_{ij} > 0$ 也是有限值。因此，$PDA_{ij}$ 和 $NDA_{ij}$ 的定义中的比率具有严格为正的分母和有限的分子，所以 $PDA_{ij}$ 和 $NDA_{ij}$ 均为有限的非负值。

由于 $w_j \geq 0$ 和 $\sum_j w_j = 1$、$SP_i$ 和 $SN_i$ 都是有限个非负加权和，因此 $SP^{\max}$ 和 $SN\max$ 存在（有限集上的有限最大值），且满足 $SP\max \geq 0$, $SN^{\max} \geq 0$。若 $SP\max > 0$，则 $NSP_i = SP_i/SP\max \in [0,1]$；若 $SP\max = 0$，则定义令 $NSP_i = 0$。类似地，若 $SN\max > 0$，则 $SN_i/SN\max \in [0,1]$，因此 $NSN_i = 1 - SN_i/SN\max \in [0,1]$；若 $SN\max = 0$，则定义令 $NSN_i = 1 \in [0,1]$。最后，$AS_i$ 是 $[0,1]$，中的两个数的平均值，因此 $AS_i \in [0,1]$。因此，按照 $AS_i$ 对备选方案进行分类可得到良定义的预序。 □

不确定性感知模型下 EDAS 的相关概念列于表 7.5 .

表 7.5：不确定性感知模型下 EDAS 的相关概念。

| $k$ | **相关 EDAS 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 EDAS [70, 1006] |
| 3 | 犹豫模糊 EDAS [1007, 1008] |
| 3 | 球形模糊 EDAS [1009, 1010] |
| 3 | 中智 EDAS [1011, 1012] |

## 7.5 不确定 VIKOR

VIKOR 根据备选方案到理想点和负理想点的距离进行排序，计算群体效用和个体遗憾，再通过折衷指数平衡二者 [1013, 1014]。模糊 VIKOR 在不确定性下，利用模糊理想值和最差解、聚合效用及遗憾度量对备选方案进行排序，再通过折衷指数平衡群体收益和个体遗憾 [892, 1015, 1016]。

**定义 7.5.1**（基于三角模糊数的模糊VIKOR）。[892, 1015, 1016] 设 $A = \{A_1, \dots, A_J\}$ 为备选方案，$C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。设 $I_b$ 和 $I_c$ 分别为效益型准则和成本型准则的指标集，且 $I_b \dot\cup I_c = \{1, \dots, n\}$。假设三角模糊数绩效为 $f_{ij} = (l_{ij},\ m_{ij},\ r_{ij})$，三角模糊数权重为 $\tilde w_i = (l_i^w,\ m_i^w,\ r_i^w)$。

**（0）约定（去模糊化与最大值/最小值）**。采用“第二加权均值”去模糊化

$$\mathrm{Crisp}(l, m, r) := \frac{l + 2m + r}{4},$$

并按 $\tilde x \preceq \tilde y \iff \mathrm{Crisp}(\tilde x) \le \mathrm{Crisp}(\tilde y)$ 比较三角模糊数。以下所有三角模糊数的加法和标量除法均按分量进行；除数仅限正标量。

**（1）模糊理想值和底点值**。对于每个准则 $i$ 定义

$$\tilde f_i^\star := \begin{cases} \max_{1\le j\le J} \tilde f_{ij}, & i \in I_b, \\ \min_{1\le j\le J} \tilde f_{ij}, & i \in I_c, \end{cases} \qquad \tilde f_i^\ominus := \begin{cases} \min_{1\le j\le J} \tilde f_{ij}, & i \in I_b, \\ \max_{1\le j\le J} \tilde f_{ij}, & i \in I_c, \end{cases}$$

其中，最大值，最小值均相对于 $\preceq$ 取。记作 $\tilde f_i^\star = (l_i^\star,\ m_i^\star,\ r_i^\star)$ 和 $\tilde f_i^\ominus = (l_i^\ominus,\ m_i^\ominus,\ r_i^\ominus)$。

**（2）归一化模糊偏差**。定义（清晰）范围

$$\Delta_i := \begin{cases} r_i^\star - l_i^\ominus, & i \in I_b, \\ r_i^\ominus - l_i^\star, & i \in I_c, \end{cases} \qquad (\Delta_i > 0),$$

并且对于每个备选方案 $A_j$，

$$\tilde d_{ij} := \begin{cases} (\tilde f_i^\star - \tilde f_{ij})/\Delta_i, & i \in I_b, \\ (\tilde f_{ij} - \tilde f_i^\star)/\Delta_i, & i \in I_c. \end{cases}$$

**（3）群 体效用和个体遗憾值（模糊）**。对于每个备选方案 $A_j$ 定义三角模糊数

$$\tilde S_j := \sum_{i=1}^{n} \tilde w_i\, \tilde d_{ij}, \qquad \tilde R_j := \max_{1\le i\le n} \big(\tilde w_i\, \tilde d_{ij}\big),$$

其中乘积/和均按分量计算，最大值是相对于 $\preceq$而言的。

**（4）折衷指数（模糊）**。令

$$\tilde S := \min_{1\le j\le J} \tilde S_j, \qquad \tilde R := \min_{1\le j\le J} \tilde R_j,$$

并设

$$S^{\max} := \max_{1\le j\le J} r(\tilde S_j), \qquad R^{\max} := \max_{1\le j\le J} r(\tilde R_j),$$

其中 $r(l, m, r) := r$ 与 $l(l, m, r) := l$ 表示右/左端点。固定 $v \in [0, 1]$。定义

$$\tilde Q_j := v\, \frac{\tilde S_j - \tilde S}{S^{\max} - l(\tilde S)} + (1 - v)\, \frac{\tilde R_j - \tilde R}{R^{\max} - l(\tilde R)}.$$

**(5) 排序与折中解（清晰）**。去模糊化

$$S_j := \mathrm{Crisp}(\tilde{S}_j), \qquad R_j := \mathrm{Crisp}(\tilde{R}_j), \qquad Q_j := \mathrm{Crisp}(\tilde{Q}_j),$$

并根据 $Q_j$ 对备选方案进行升序排序。令 $A_{(1)}$，$A_{(2)}$ 为 $Q$ 排序中的前两项，$A_{(J)}$ 为最后一项。设

$$DQ := \frac{1}{J-1}, \qquad \mathrm{Adv} := \frac{Q(A_{(2)}) - Q(A_{(1)})}{Q(A_{(J)}) - Q(A_{(1)})}.$$

那么，如果满足以下条件，$A_{(1)}$ 就是（唯一的）折中解

$$\mathrm{Adv} \geq DQ \quad \text{and} \quad A_{(1)} \text{ is also best by } S \text{ and/or by } R.$$

如果稳定性条件不成立，则提出 $\{A_{(1)}, A_{(2)}\}$。如果优势条件不成立，则提出 $\{A_{(1)}, \ldots, A_{(M)}\}$，其中 $M$ 是满足 $Q(A_{(M)}) - Q(A_{(1)}) < DQ$ 的最大指标。

基于不确定集，我们定义如下 $M$ 类型的不确定 VIKOR（U-VIKOR）。

**定义7.5.2**（$M$ 类型的不确定 VIKOR（U-VIKOR））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为准则，其中 $m$，$n \geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \dot{\cup} \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，以及一个可容许评分 $S_M$。

假设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \left(x_{ij}^{(M)}\right)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

以及准则权重 $w = (w_1、\ldots\ldots、w_n)$，其中

$$w_j > 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

固定 VIKOR折中参数 $v \in [0, 1]$。

**步骤 0（清晰投影）**。定义$y_{ij} := S_M(x_{ij}^{(M)}) \in \mathbb{R}$。

**步骤 1（各准则的最优值与最劣值）**。对于每个准则 $C_j$，定义其最优值和最劣（投影）值

$$f_j^* := \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\ \min_{1 \leq i \leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}, \end{cases} \qquad f_j^- := \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\ \max_{1 \leq i \leq m} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases}$$

定义范围 $\Delta_j := f_j^* - f_j^- \geq 0$。

**步骤 2（各准则的归一化遗憾）**。对于每个备选方案 $A_i$ 和准则 $C_j$，定义

$$d_{ij} := \begin{cases} \dfrac{f_j^* - y_{ij}}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \text{ and } \Delta_j > 0, \\ \dfrac{y_{ij} - f_j^*}{\Delta_j}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}} \text{ and } \Delta_j > 0, \\ 0, & \Delta_j = 0, \end{cases}$$

使得 $d_{ij} \in [0,1]$ 越小越好（后悔值越小）。

**第3步（群体效用和个体遗憾度量）**。定义

$$S_i := \sum_{j=1}^{n} w_j\, d_{ij}, \qquad R_i := \max_{1\le j\le n} (w_j\, d_{ij}).$$

**第4步（折衷指数）**。令

$$S^* := \min_{1\le i\le m} S_i, \quad S^- := \max_{1\le i\le m} S_i, \qquad R^* := \min_{1\le i\le m} R_i, \quad R^- := \max_{1\le i\le m} R_i.$$

定义 VIKOR 折衷指数

$$Q_i := \begin{cases} v\,\dfrac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1-v)\,\dfrac{R_i - R^*}{R^- - R^*}, & S^- > S^* \text{ and } R^- > R^*, \\ \dfrac{S_i - S^*}{S^- - S^*}, & S^- > S^* \text{ and } R^- = R^*, \\ \dfrac{R_i - R^*}{R^- - R^*}, & S^- = S^* \text{ and } R^- > R^*, \\ 0, & S^- = S^* \text{ and } R^- = R^*. \end{cases}$$

按 $Q_i$ 的升序排列备选方案（$Q_i$ 越小越好）。

**（可选）VIKOR折衷解集**。令 $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(m)}$ 为 $Q$排序后的备选方案，并设定

$$DQ := \frac{1}{m-1}.$$

可以对（$S_i$、$R_i$、$Q_i$）应用标准的 VIKOR 可接受优势规则和可接受稳定性规则，以产出单一折中解或一个小型折中解集。

**定理7.5.3**（U-VIKOR 的良定义性）。在定义*7.5.2* 下，假设 $m$、$n \ge 2$、$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$、$S_M$ 是可容许的，且 $w_j > 0$ 满足 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。则：

（*i*）对于所有 $i$、$j$，量 $f_j^*$、$f_j^-$、$\Delta_j$ 和 $d_{ij}$ 都是良定义的，且满足 $0 \le d_{ij} \le 1$。（*ii*）对于每个 $i$，$S_i$ 和 $R_i$ 都是良定义的有限实数，并满足 $0 \le S_i \le 1$ 和 $0 \le R_i \le 1$。（*iii*）折衷指数 $Q_i$ 是良定义的，并且对于所有 $i$ 满足 $0 \le Q_i \le 1$。（*iv*）由 $\{Q_i\}$ 导出的排序是良定义的（允许并列）。

证明。**(i)** 由于 $S_M$是可容许的，每个$y_{ij}$都是有限的。因为集合 $\{y_{1j}, \ldots, y_{mj}\}$ 是有限的，对每个 $j$，$f_j^*$和 $f_j^-$都存在，因此 $\Delta_j = f_j^* - f_j^- \ge 0$是良定义的。若 $\Delta_j > 0$，则 $d_{ij}$由有限数的比率定义；若 $\Delta_j = 0$，则 $d_{ij} = 0$ 由定义给出。无论哪种情形，都有 $0 \le d_{ij} \le 1$。

(ii) 由于 $0 \le d_{ij} \le 1$ 与 $\sum_j w_j = 1$，$S_i = \sum_j w_j d_{ij}$ 是一个凸组合，因此 $0 \le S_i \le 1$。此外，$0 \le w_j d_{ij} \le w_j$，所以 $R_i = \max_j(w_j d_{ij})$存在，并且满足 $0 \le R_i \le \max_j w_j \le 1$。

(iii) 极值 $S^*, S^-, R^*, R^-$ 存在，因为 $m$ 是有限的。$Q_i$ 定义中的每种情况都通过切换到单一归一化分量，或在两个范围均为零时设置 $Q_i = 0$，来避免除以零。每当使用分数时，其分子都介于 0 与相应的分母之间，因此该分数属于 $[0,1]$。因此，$Q_i \in [0,1]$。

(iv) 由于 每个 $Q_i$ 都是实数，因此按 $Q_i$ 对备选方案进行排序可定义一个良定义的预序 r. □

表 7.6 列出了不确定性感知模型下 VIKOR 的相关概念。

表 7.6：不确定性感知模型下 VIKOR 的相关概念。

| $k$ | **相关 VIKOR 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 VIKOR [1017, 1018] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 VIKOR [1019, 1020] |
| 2 | 费马模糊 VIKOR [1021] |
| 2 | 双极模糊 VIKOR [1022, 1023] |
| 3 | 犹豫模糊 VIKOR [1024, 1025] |
| 3 | 球形模糊 VIKOR [1026–1028] |
| 3 | 中智 VIKOR [1029, 1030] |
| $n$ | 多元生成 VIKOR [1031] |

除不确定 VIKOR 外，还有若干相关变体，例如灰色 VIKOR [1032], 群体 VIKOR [1033, 1034], Z-VIKOR [1035, 1036], VIKORSORT [1037, 1038], 粗糙 VIKOR [1039, 1040], TOP- SIS–VIKOR [1041, 1042], 和软 VIKOR [1043]。

## 7.6 不确定MABAC（多属性边界近似区域比较）

MABAC 根据各准则下备选方案与边界近似区域的距离进行排序，再汇总偏差以获得最终分数 [1044–1046]。模糊 MABAC 使用模糊评分和权重，计算模糊边界近似区域，并根据去模糊化偏差和对备选方案进行排序 [1047–1049]。

**定义 7.6.1** (基于三角模糊数的模糊 MABAC)。[1047–1049] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。将准则划分为效益型和成本型

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \dot\cup \mathcal{C}^-,$$

˜并设定清晰权重向量 w $= (w_1, \dots, w_n)$，其中 $w_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$。设 $X = (\tilde{x}_{ij}) \in$ (三角模糊数)$^{m\times n}$为三角模糊数决策矩阵，其中 $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^{\ell}, x_{ij}^{m}, x_{ij}^{r})$。

**(0) 使用三角模糊数运算**。除非另有说明，所有运算均按分量进行：

$$\tilde{x} \oplus \tilde{y} = (x^{\ell} + y^{\ell},\ x^{m} + y^{m},\ x^{r} + y^{r}), \qquad \alpha \odot \tilde{x} = (\alpha x^{\ell},\ \alpha x^{m},\ \alpha x^{r})\ (\alpha \ge 0),$$

$$\tilde{x} \otimes \tilde{y} = (x^{\ell} y^{\ell},\ x^{m} y^{m},\ x^{r} y^{r})\ \text{(nonnegative TFNs)}, \qquad \tilde{x}^{\,p} = \big((x^{\ell})^p,\ (x^{m})^p,\ (x^{r})^p\big)\ (p > 0),$$

并且我们使用常见的三角模糊数减法近似

$$\tilde{x} \ominus \tilde{y} = (x^{\ell} - y^{r},\, x^{m} - y^{m},\, x^{r} - y^{\ell}).$$

**(1) 归一化**。对于每个准则 $j$，定义

$$x_j^{+} := \max_{1 \le i \le m} x_{ij}^{r}, \qquad x_j^{-} := \min_{1 \le i \le m} x_{ij}^{\ell},$$

以及归一化三角模糊数

$$\tilde{t}_{ij} := \begin{cases} \dfrac{\tilde{x}_{ij} \ominus x_j^{-}}{x_j^{+} - x_j^{-}}, & C_j \in \mathcal{C}^{+}, \\[2ex] \dfrac{\tilde{x}_{ij} \ominus x_j^{+}}{x_j^{-} - x_j^{+}}, & C_j \in \mathcal{C}^{-}, \end{cases}$$

其中，除法是指除以一个正标量。

**(2) 加权**。定义 $\tilde{v}_{ij} := w_j \odot \tilde{t}_{ij}$，并收集 $\tilde{V} = (\tilde{v}_{ij})$。

**(3) 边界逼近　　近似面积（BAA）**。对于每个准则 $j$，定义边界近似三角模糊数　　N

$$\tilde{g}_j := \left( \prod_{i=1}^{m} \tilde{v}_{ij} \right)^{1/m}, \qquad \tilde{G} := (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n).$$

**（4）相对于边界的带符号偏差及总体得分**。设定

$$\tilde{q}_{ij} := \tilde{v}_{ij} \ominus \tilde{g}_j, \qquad \tilde{S}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{q}_{ij}.$$

（从启发式角度看，$\tilde{q}_{ij} > 0$ 表示 $A_i$ 在准则 $j$ 的上近似区域内，而 $\tilde{q}_{ij} < 0$ 表示其位于下近似区域；去模糊化后，可通过清晰符号检验来实现判断。）

**（5）去模糊化与排序**。对于 $\tilde{S}_i = (s_i^{\ell},\ s_i^{m},\ s_i^{r})$，定义

$$\mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_i) := \frac{s_i^{\ell} + s_i^{m} + s_i^{r}}{3}.$$

˜按 Defuzz($S_i$) 降序排列备选方案：

$$A_p \succeq A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_p) \ge \mathrm{Defuzz}(\tilde{S}_q).$$

下面给出类型为 $M$ （U-MABAC）的不确定MABAC定义。

**定义 7.6.2**（类型为 $M$（U-MABAC）的不确定MABAC）。设 $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为备选方案，$\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为准则，其中 $m,\ n\geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}\,\dot\cup\,\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset$，并给定一个可容许评分 $S_M$。

假设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)}=\big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n},\qquad x_{ij}^{(M)}\in\mathrm{Dom}(M)\quad(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n),$$

以及准则权重 $w=(w_1、\dots\dots、w_n)$，其中 $w_j\geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。

**步骤 0（清晰投影）**。定义一个实矩阵 $Y=(y_{ij})$ 如下

$$y_{ij}:=S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big)\in\mathbb{R}.$$

**步骤 1（线性归一化至 $[0,1]$）**。对于每个准则 $j$，定义

$$y_j^{\min}:=\min_{1\leq i\leq m}y_{ij},\qquad y_j^{\max}:=\max_{1\leq i\leq m}y_{ij},\qquad \Delta_j:=y_j^{\max}-y_j^{\min}\geq 0.$$

定义归一化值 $t_{ij}\in[0,1]$：

$$t_{ij}:=\begin{cases}\dfrac{y_{ij}-y_j^{\min}}{\Delta_j}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{ben}}\text{ and }\Delta_j>0,\\[2mm] \dfrac{y_j^{\max}-y_{ij}}{\Delta_j}, & C_j\in\mathcal{C}^{\mathrm{cost}}\text{ and }\Delta_j>0,\\[2mm] 0, & \Delta_j=0.\end{cases}$$

（因此，$t_{ij}$ 越大，性能越好。）

**第2步（加权）**。定义加权归一化矩阵 $V=(v_{ij})$：

$$v_{ij}:=w_j\,t_{ij}\qquad(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

**第3步（边界近似区域）**。对于每个准则 $j$，定义边界近似值（几何平均数）：

$$g_j:=\left(\prod_{i=1}^{m}v_{ij}\right)^{1/m}\ \geq\ 0.$$

令 $G:=(g_1,\dots\dots,g_n)$。

**第4步（带符号偏差和总体得分）**。定义偏差

$$q_{ij}:=v_{ij}-g_j,\qquad S_i:=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}.$$

按 $S_i$ 降序排列备选方案。

**定理 7.6.3**（U-MABAC 的良定义性）。 根据定义 *7.6.2*，假设 $m$、$n \geq 2$、$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$ 以及 $S_M$ 是可容许的。则所有量 $t_{ij}$、$v_{ij}$、$g_j$、$q_{ij}$、$S_i$ 都是良定义的有限实数。

证明。 因为 $S_M$ 是可容许的，每个$y_{ij}$ 均为有限；因此对每个 $j$，极值 $y_j^{\min}$，$y_j^{\max}$存在且有限，故 $\Delta_j \geq 0$ 是良定义的。若 $\Delta_j > 0$，归一化公式定义 $t_{ij} \in [0,1]$；若 $\Delta_j = 0$，定义设定 $t_{ij} = 0$，因此 $t_{ij}$ 在所有案例中均为良定义。

由于 $w_j \geq 0$ 与 $t_{ij} \in [0,1]$，每个 $v_{ij} = w_j t_{ij}$ 均为有限且非负。因此乘积 $\prod_{i=1}^{m} v_{ij}$ 是良定义的且非负，故几何平均数$g_j = (\prod_{i=1}^{m} v_{ij})^{1/m}$ 是良定义的且有限（若任一因素为0，则等于0）。因此，$q_{ij} = v_{ij} - g_j$ 与 $S_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$ 是有限实数的有限和／差，故为良定义。

□

MABAC 的相关概念列于表 7.7。

表 7.7：不确定性感知模型下 MABAC 的相关概念。

| $k$ | **相关 MABAC 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 MABAC [1050, 1051] |
| 3 | 球形模糊 MABAC [43, 1052] |
| 3 | 犹豫模糊 MABAC [1053, 1054] |
| 3 | 图像模糊 MABAC [1055, 1056] |
| 3 | 中智 MABAC [1057, 1058] |

作为一个相关概念，粗糙 MABAC [1059, 1060] 也广为人知。

## 7.7 Fuzzy MAIRCA（模糊多属性理想-现实比较分析）

MAIRCA 通过比较准则重要性的理论理想分布与实际表现，汇总偏差以计算得分 [1061, 1062]，从而对备选方案进行排序。模糊 MAIRCA 将性能以及可能的权重表示为模糊数，计算模糊理想–现实差距，并对汇总偏差进行去模糊化以进行排序 [1063, 1064]。

**定义 7.7.1**（模糊 MAIRCA（基于三角模糊数的理想–现实比较分析））。[1063, 1064] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $J^+$ 和 $J^-$ 分别为效益型准则和成本型准则的指标集，其中 $J^+ \dot{\cup} J^- = \{1, \ldots, n\}$。

Let 三角模糊数$_{\geq 0}$ := $\{(l,\ m,\ u) \in \mathbb{R}^3_{\geq 0}:\ l \leq m \leq u\}$。假设一个三角模糊决策矩阵 ix

$$\widetilde{X} = (\tilde{x}_{ij}) \in (\mathsf{TFN}_{\geq 0})^{m \times n}, \qquad \tilde{x}_{ij} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}),$$

以及一个（清晰）准则权重向量 $w = (w_1,\ \ldots,\ w_n)$，其中 $w_j \geq 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。固定一个概率向量 $p = (p_1,\ \ldots,\ p_m)$，其中 $p_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$（通常对所有 $i$，$p_i = 1/m$）。

**(0) 三角模糊数运算和去模糊化**。对于三角模糊数 $\tilde{a} = (a^{\ell},\ a^{m},\ a^{u})$ 和 $\tilde{b} = (b^{\ell},\ b^{m},\ b^{u})$ 以及 $\alpha \geq 0$，定义

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} := (a^{\ell} + b^{\ell},\ a^{m} + b^{m},\ a^{u} + b^{u}), \qquad \alpha \odot \tilde{a} := (\alpha a^{\ell},\ \alpha a^{m},\ \alpha a^{u}),$$

以及标准的三角模糊数减法近似

$$\tilde{a} \ominus \tilde{b} := (a^{\ell} - b^{u},\ a^{m} - b^{m},\ a^{u} - b^{\ell}).$$

固定一个去模糊化泛函 Defuzz : 三角模糊数$_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ （例如质心）

$$\mathrm{Defuzz}(l, m, u) := \frac{l + m + u}{3}.$$

**步骤 1（理论权重矩阵）**。定义理论权重矩阵 $T^{(p)} = (\tilde{t}_{ij}^{(p)}) \in$ (三角模糊数$_{\geq 0})^{m \times n}$如下

$$\tilde{t}_{ij}^{(p)} := (p_i w_j,\ p_i w_j,\ p_i w_j), \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

（这是分配给备选方案 $i$的准则 $j$ 的“理论份额”。）

**步骤 2（逐准则参考界限）**。对于每个准则 $j$，根据三角模糊数端点设置清晰界限

$$x_j^{-} := \min_{1 \leq i \leq m} l_{ij}, \qquad x_j^{+} := \max_{1 \leq i \leq m} u_{ij}, \qquad \Delta_j := x_j^{+} - x_j^{-} > 0.$$

**步骤 3（模糊归一化因子）**。定义归一化三角模糊数 $\tilde{r}_{ij} \in$三角模糊数$_{\geq 0}$ 如下

$$\tilde{r}_{ij} := \begin{cases} \left( \dfrac{l_{ij} - x_j^{-}}{\Delta_j},\ \dfrac{m_{ij} - x_j^{-}}{\Delta_j},\ \dfrac{u_{ij} - x_j^{-}}{\Delta_j} \right), & j \in J^{+}, \\ \left( \dfrac{x_j^{+} - u_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{x_j^{+} - m_{ij}}{\Delta_j},\ \dfrac{x_j^{+} - l_{ij}}{\Delta_j} \right), & j \in J^{-}. \end{cases}$$

（因此， $\tilde{r}_{ij}$ 对 $[0, 1]$上的“实际绩效”进行归一化编码；对于成本型准则，顺序反转以保持$l \leq m \leq u$。）

**第4步（矩　实际权重矩阵）**。定义实际权重矩阵 $T^{(r)} = (\tilde{t}_{ij}^{(r)}) \in$ (三角模糊数$_{\geq 0})^{m \times n}$ 如下：

$$\tilde{t}_{ij}^{(r)} := (p_i w_j) \odot \tilde{r}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

~**第5步（差距矩阵）**。定义模糊差距矩阵 $G =$($\tilde{g}_{ij}$) 如下：

$$\tilde{g}_{ij} := \tilde{t}_{ij}^{(p)} \ominus \tilde{t}_{ij}^{(r)}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

**第6步（准则函数和排序）**。对于每个备选方案 $A_i$，定义其模糊准则函数

$$\tilde{Q}_i := \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij} \in \mathsf{TFN}_{\geq 0}, \qquad Q_i := \mathrm{Defuzz}(\tilde{Q}_i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

模糊 *MAIRCA* 排序是 $\mathcal{A}$ 上的预序，定义如下：

$$A_i \succeq_{\mathrm{FMAIRCA}} A_k \quad \Longleftrightarrow \quad Q_i \leq Q_k,$$

即，越小 $Q_i$ 表示理想与现实差距越小，因此备选方案越好。最优备选方案是任意一个

$$A^{\star} \in \arg\min_{A_i \in \mathcal{A}} Q_i.$$

下面给出类型为 $M$ 的不确定 MAIRCA（U-MAIRCA）的定义。

**定义 7.7.2** （ $M$类型的不确定 MAIRCA（U-MAIRCA））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$为有限准则集，其中 $m,\ n \geq 2$。设 $J^+$和 $J^-$分别为效益型准则和成本型准则的指标集，其中 $J^+ \dot{\cup} J^- = \{1, \ldots, n\}$。

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq \emptyset$，并设一个可容许正评分 $S_M$。设有一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \quad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

设 $w = (w_1, \ldots w_n)$ 为准则权重，其中 $w_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。固定一个概率向量 $p = (p_1, \ldots p_m)$，其中 $p_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ （通常为 $p_i = 1/m$）。

**步骤 0（清晰投影）**。定义正实矩阵 $Y = (y_{ij})$ 为

$$y_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in (0, \infty).$$

**步骤 1（理论权重分布）**。定义理论分布矩阵 $T^{(p)} = (t_{ij}^{(p)}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m\times n}$ 为

$$t_{ij}^{(p)} := p_i\, w_j, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

**Step 2（实际表现的最小—最大归一化）**。对于每个准则 $j$，定义 e

$$y_j^{\min} := \min_{1\leq i\leq m} y_{ij}, \qquad y_j^{\max} := \max_{1\leq i\leq m} y_{ij}, \qquad \Delta_j := y_j^{\max} - y_j^{\min} \geq 0.$$

定义归一化值 $r_{ij} \in [0, 1]$ 为

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{y_{ij} - y_j^{\min}}{\Delta_j}, & j \in J^+ \text{ and } \Delta_j > 0, \\[2ex] \dfrac{y_j^{\max} - y_{ij}}{\Delta_j}, & j \in J^- \text{ and } \Delta_j > 0, \\[2ex] 0, & \Delta_j = 0. \end{cases}$$

（因此，较大的 $r_{ij}$ 总是意味着更好；当 $\Delta_j = 0$ 时，退化准则的贡献为 0。）

**Step 3（实际分布矩阵）**。定义实际分布矩阵 $T^{(r)} = (t_{ij}^{(r)})$ b y

$$t_{ij}^{(r)} := t_{ij}^{(p)}\, r_{ij} = p_i\, w_j\, r_{ij}.$$

**St步骤 4（差距矩阵和准则函数）**。定义差距矩阵 $G = (g_{ij})$ 如下：

$$g_{ij} := t_{ij}^{(p)} - t_{ij}^{(r)} = p_i\, w_j\, (1 - r_{ij}) \ \geq\ 0.$$

对于每个备选方案 $A_i$，定义其准则函数（总体差距）

$$Q_i := \sum_{j=1}^{n} g_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_i\, w_j\, (1 - r_{ij}) \;\geq\; 0.$$

**排序规则：** 按升序对备选方案排序 $Q_i$ （差距越小越好）。

**定理 7.7.3** （U-MAIRCA 的良定义性）。 根据定义 *7.7.2*，假设 $m, n \geq 2$, $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且 $S_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to (0, \infty)$ 是可容许的。则：

*(i)* 所有量 $y_{ij}$, $t_{ij}^{(p)}$ ,$r_{ij}$, $t_{ij}^{(r)}$ , $g_{ij}$ 和 $Q_i$ 都是良定义且有限的。

*(ii)* 对所有 $i, j$，都有 $0 \leq r_{ij} \leq 1$，因此 $g_{ij} \geq 0$ 和 $Q_i \geq 0$。

*(iii)* 由 $\{Q_i\}$ 诱导的排序是良定义的（允许并列）。

证明。 (i) $S_M$ 的可容许性意味着 $y_{ij} > 0$ 有限。由于 $p_i$， $w_j$ 有限且非负， $t_{ij}^{(p)} = p_i w_j$ 有限。对于每个 $j$， $y_j^{\min}$， $y_j^{\max}$均存在（指标集有限），且 $\Delta_j \geq 0$ 有限。若 $\Delta_j > 0$，则最小–最大公式定义$r_{ij}$；若 $\Delta_j = 0$，则定义将 $r_{ij} = 0$设定为相应值。因此，在所有情况下，$r_{ij}$ 均良定义且有限。于是$t_{ij}^{(r)} = t_{ij}^{(p)} r_{ij}$ 和 $g_{ij} = t_{ij}^{(p)} - t_{ij}^{(r)}$ 均有限，因此 $Q_i = \sum_j g_{ij}$ 有限。

(ii) 当 $\Delta_j > 0$时，最小—最大归一化得到 $r_{ij} \in [0, 1]$；当 $\Delta_j = 0$时， $r_{ij} = 0 \in [0, 1]$。因此 $1 - r_{ij} \in [0, 1]$，所以$g_{ij} = p_i w_j (1 - r_{ij}) \geq 0$ 且 $Q_i \geq 0$。

(iii) 每个 $Q_i$ 都是一个实数，因此按 $Q_i$ 对备选方案进行分类可定义一个良定义的预序。 □

不确定性感知模型下 MAIRCA 的相关概念列于表 7.8。

表 7.8：不确定性感知模型下 MAIRCA 的相关概念。

| $k$ | **相关 MAIRCA 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 MAIRCA |
| 2 | 直觉模糊 MAIRCA [1065, 1066] |
| 3 | 中智 MAIRCA |

# 第8章

# 超越（非补偿性／优势度关系）决策方法

超越方法使用一致性/不一致性阈值和否决机制对备选方案进行两两比较，从而得出非补偿性支配关系；在这种关系中，明显的缺点无法由优点抵消。为方便起见，本章讨论的代表性超越方法的简要比较见表8.1。

表8.1：代表性超越决策方法的简要比较。

| 方法 | 核心比较依据 | 主要机制 | 主要产出 | 决策form |
|---|---|---|---|---|
| ELECTRE | 两两比较备选方案之间的一致性和不一致性准则 | 构建一致性和不一致性指标，应用阈值（以及可能的否决逻辑），并推导出一种级别高于关系。 | 超越关系和核 | 部分支配inance / 选择集 |
| FlowSort | 对每个的比较备选方案与ordered极限参考-偏好组合 | 计算偏好流与边界剖面进行比较，并将备选方案分配到其剖面区间所对应的类别该区间包含其流。 | 类别指派类别指派 | 分类／有序分类 |
| PROMETHEE II | 两两准则偏好度备选方案之间 | 聚合偏好函数与准则权重并计算正值、负值以及净优序流。 | 净流 | 完全排序 |
| QUALIFLEX | 备选方案的两两一致性在以下条件下每一种可能的排列ation | 评估所有可容许的排列并对加权结果进行聚合一致性/不一致性占优的成对比较，并选择排列使综合一致性达到最大的排列。 | 最佳排列得分 | 完全排序 |

续见下页。

表*8.1*（续）。

| 方法 | 核心比较依据 | 主要机制 | 主要产出 | 决策form |
|---|---|---|---|---|
| ORESTE | 序数位置和基于距离的偏好偏好强度 | 使用绩效的序数秩和准则重要性的计算基于距离的得分和偏好强度，并推导出弱关系和PIR型关系。 | 距离得分和 PIR 关系 | 弱排入 / 出排序结构 |

**注**。 这些方法都属于级别高于方法族，但它们的决策逻辑各不相同。ELECTRE 强调通过一致性/不一致性阈值实现非补偿性支配；FlowSort 主要是一种基于参考剖面的分类程序；PROMETHEE II 通过净偏好流得出完全排序；QUALIFLEX 则从备选方案中选出最佳全局排列；ORESTE 尤其适用于序数信息情形，其中包含弱偏好、无差异和不可比性等结构。

## 8.1 模糊ELECTRE（模糊消去与选择转换现实法）

ELECTRE 是一种级别高于多准则决策方法，它构建一致性/不一致性指数，应用阈值和否决，建立级别高于关系，并消除被支配方案 [1067, 1068]。模糊ELECTRE 是一种级别高于多准则决策方法，使用模糊评价计算一致性/不一致性，并在不确定性下识别支配其他方案的备选方案 [1069, 1070]。

**定义 8.1.1**（基于三角模糊数的模糊ELECTRE）。 [1071, 1072] 设 $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，$C = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为准则。设 $B$ 和 $K$ 分别为效益型和成本型准则的指标集，且 $B \dot{\cup} K = \{1, \dots, n\}$。假设清晰决策矩阵为 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_{>0}^{m \times n}$，准则权重为三角模糊数 $\tilde{w}_j = (l_j,\ m_j,\ u_j)$。

**（0）约定**。 对于三角模糊数，采用分量加法和数乘 ：

$$(l,\ m,u) \oplus (l', m', u') = (l + l',\ m + m',\ u + u'), \qquad \alpha \odot (l, m, u) = (\alpha l,\ \alpha m,\ \alpha u)\ (\alpha \geq 0).$$

**（1）聚合并归一化模糊权重（三个分量）**。 如果 $K$ 位决策者为准则 $j$提供数值重要性得分 $y_{jk}$，则设

$$\tilde{w}_j = (l_j, m_j, u_j) := \Big( \min_k y_{jk},\ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} y_{jk},\ \max_k y_{jk} \Big).$$

对每个分量分别取倒数进行归一化：

$$w_{j1} := \frac{(1/l_j)}{\sum_{t=1}^{n} (1/l_t)}, \quad w_{j2} := \frac{(1/m_j)}{\sum_{t=1}^{n} (1/m_t)}, \quad w_{j3} := \frac{(1/u_j)}{\sum_{t=1}^{n} (1/u_t)}.$$

令 $\mathbf{w}^{(z)} = (w_{1z}、\dots、\ w_{nz})$ 对于 $z = 1, 2, 3$。

**(2) 对性能进行归一化并构建三个加权矩阵**。定义归一化矩阵$R=(r_{ij})$ 如下

$$r_{ij} := \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{p=1}^{m} x_{pj}^2}}, & j \in B, \\ \dfrac{(1/x_{ij})}{\sqrt{\sum_{p=1}^{m} (1/x_{pj})^2}}, & j \in K, \end{cases}$$

并对 $z \in \{1,2,3\}$ 定义

$$v_{ij}^{(z)} := r_{ij}\, w_{jz}, \qquad V^{(z)} = (v_{ij}^{(z)})_{m\times n}.$$

**（3）一致性／不一致性集合及指标**。对于 $p \neq q$ 和 $z \in \{1,2,3\}$ 定义

$$C^{(z)}(p,q) := \{j :\ v_{pj}^{(z)} \geq v_{qj}^{(z)}\}, \qquad D^{(z)}(p,q) := \{1,\dots,n\} \setminus C^{(z)}(p,q),$$

$$C_{pq}^{(z)} := \sum_{j \in C^{(z)}(p,q)} w_{jz}, \qquad D_{pq}^{(z)} := \frac{\sum_{j \in D^{(z)}(p,q)} |v_{pj}^{(z)} - v_{qj}^{(z)}|}{\sum_{j=1}^{n} |v_{pj}^{(z)} - v_{qj}^{(z)}|}.$$

通过对各分量求和进行去模糊化:

$$C_{pq}^{*} := \sum_{z=1}^{3} C_{pq}^{(z)}, \qquad D_{pq}^{*} := \sum_{z=1}^{3} D_{pq}^{(z)}.$$

**（4）阈值与超越**。设

$$\bar{C} := \frac{1}{m(m-1)} \sum_{\substack{p,q=1 \\ p\neq q}}^{m} C_{pq}^{*}, \qquad \bar{D} := \frac{1}{m(m-1)} \sum_{\substack{p,q=1 \\ p\neq q}}^{m} D_{pq}^{*}.$$

将模糊ELECTRE级别高于关系定义为

$$A_p \succcurlyeq_{\mathrm{FE}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \big(C_{pq}^{*} \geq \bar{C}\big) \ \wedge\ \big(D_{pq}^{*} \leq \bar{D}\big), \qquad (p \neq q).$$

**(5) 支配矩阵和核（最优集）**。定义

$$e_{pq} := \mathbb{1}[\, C_{pq}^{*} \geq \bar{C}\,], \qquad f_{pq} := \mathbb{1}[\, D_{pq}^{*} \leq \bar{D}\,], \qquad T := E \circ F,$$

使得 $t_{pq} = 1$ 当且仅当 $A_p \succcurlyeq_{\mathrm{FE}} A_q$。核为

$$\mathcal{K} := \{A_p \in A :\ \nexists\, q \neq p \text{ with } t_{qp} = 1\}.$$

以不确定集作为基础扩展框架，我们定义类型 $M$ 的不确定 ELECTRE（U-ELECTRE）如下。

**定义 8.1.2**（类型 $M$ 的不确定 ELECTRE（U-ELECTRE））。设 $A=\{A_1,\dots,A_m\}$ 为备选方案，$C=\{C_1,\dots,C_n\}$ 为准则，其中 $m\ge 2$ 和 $n\ge 1$。设 $B$ 和 $K$ 分别为效益型准则和成本型准则的指标集，其中 $B\cup K=\{1,\dots,n\}$。固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq\emptyset$，且有一个可容许评分$S_M$。

假设存在一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)}=\big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n},\qquad x_{ij}^{(M)}\in \mathrm{Dom}(M),$$

以及准则权重 $w=(w_1,\ .....,\ w_n)$，其中 $w_j\ge 0$ 和 $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$。（如果给出的是不确定权重，则对其进行评分和归一化，以得到这样的 $w_j$。）

**步骤 0（清晰投影和绩效方向转换）**。定义 $y_{ij}:=S_M(x_{ij}^{(M)})\in\mathbb{R}$。通过定义下式，将所有准则转换为“越大越好”的方向

$$z_{ij}:=\begin{cases} y_{ij}, & j\in B \quad \text{(benefit)},\\ -\,y_{ij}, & j\in K \quad \text{(cost)}.\end{cases}$$

令 $Z=(z_{ij})$。

**步骤 1（归一化）**。对于每个准则 $j$，定义

$$d_j:=\sqrt{\sum_{p=1}^{m} z_{pj}^2}\ \ge\ 0,\qquad r_{ij}:=\begin{cases}\dfrac{z_{ij}}{d_j}, & d_j>0,\\[2mm] 0, & d_j=0,\end{cases}$$

以及加权归一化矩阵

$$v_{ij}:=w_j\,r_{ij}.$$

**步骤2（C 一致性与不一致性集合）**。对于每个有序对 $(p,\ q)$ 且 $p\neq q$，定 ne

$$\mathcal{C}(p,q):=\{\,j:\ v_{pj}\ge v_{qj}\,\},\qquad \mathcal{D}(p,q):=\{1,\dots,n\}\setminus\mathcal{C}(p,q).$$

**步骤3（一致性指数）**。定义一致性指数

$$C_{pq}:=\sum_{j\in\mathcal{C}(p,q)} w_j\ \in[0,1].$$

**第4步（不一致性指数）**。将不一致性指数定义为

$$D_{pq}:=\begin{cases}\dfrac{\max\limits_{j\in\mathcal{D}(p,q)}|v_{pj}-v_{qj}|}{\max\limits_{1\le j\le n}|v_{pj}-v_{qj}|}, & \max\limits_{1\le j\le n}|v_{pj}-v_{qj}|>0,\\[2mm] 0, & \max\limits_{1\le j\le n}|v_{pj}-v_{qj}|=0,\end{cases}\qquad (p\neq q).$$

（因此 $D_{pq} \in [0,1]$。）

**步骤 5（阈值和级别高于关系）**。定义平均阈值

$$\bar{C} := \frac{1}{m(m-1)} \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{m} C_{pq}, \qquad \bar{D} := \frac{1}{m(m-1)} \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^{m} D_{pq}.$$

定义级别高于关系 $\succcurlyeq_{\mathrm{UE}}$ 如下

$$A_p \succcurlyeq_{\mathrm{UE}} A_q \quad \Longleftrightarrow \quad \big(C_{pq} \geq \bar{C}\big) \ \wedge \ \big(D_{pq} \leq \bar{D}\big), \qquad (p \neq q).$$

**步骤 6（核／最优集）**。令 $t_{pq} :=\mathbf{1}[A_p \succcurlyeq_{\mathrm{UE}} A_q]$ 并定义核

$$\mathcal{K} := \{A_p \in A : \ \nexists\, q \neq p \text{ with } t_{qp} = 1\}.$$

**定理 8.1.3**（U-ELECTRE 的良定义性）。 在定义 *8.1.2* 下，假设 $m \geq 2$，$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且 $S_M$是可容许的。则所有量 $z_{ij}$、$d_j$、$r_{ij}$、$v_{ij}$，集合 $\mathcal{C}(p、\ q)$ $\mathcal{D}(p、\ q)$，指标 $C_{pq}$、$D_{pq}$，¯ ¯阈值 $C$、$D$以及核 $\mathcal{K}$ 均是良定义的。此外，

$$0 \leq C_{pq} \leq 1, \qquad 0 \leq D_{pq} \leq 1.$$

证明。 由于 $S_M$是可容许的，因此每个 $y_{ij}$ 都是有限的，从而 $z_{ij}$ 也是有限的。因此每个 $d_j = \sqrt{\sum_{p=1}^{m} z_{pj}^2}$ 都是良定义且有限的，并且根据分类讨论，$r_{ij}$ 是良定义的（$d_j > 0$ 给出一个有效划分； $d_j = 0$ 设定 $r_{ij} = 0$）。于是 $v_{ij} = w_j r_{ij}$ 是良定义的。

对于每一对 $(p,\ q)$，集合 $\mathcal{C}(p,\ q)$ 由有限多个比较 $v_{pj} \geq v_{qj}$确定，因此是良定义的， $\mathcal{D}(p,\ q)$ 也是如此。由于 $w_j \geq 0$ and $\sum_j w_j = 1$，一致性指数 $C_{pq} = \sum_{j \in \mathcal{C}(p,\ q)} w_j$ 是良定义的，且取值属于 $[0,1]$。

对于不一致性，这些量 $|v_{pj} - v_{qj}|$ 都是有限的。若它们在 $j$ 上的最大值为正，则定义 $D_{pq}$ 的比率有效，且取值属于 $[0,1]$ ，因为分子是指标子集上的最大值。若最大值为 0，则对于所有 $j$ ，$v_{pj} = v_{qj}$ ，且定义规定 $D_{pq} = 0 \in [0,1]$。因此， $D_{pq}$ 始终是良定义的，且属于 $[0,1]$。

¯ ¯阈值 $C$ 和 $D$ 是对有限个良定义指标取平均值，因此是良定义的。因此，超越关系是良定义的，由对 $q \neq p$进行有限量化所定义的核 $\mathcal{K}$ 也同样良定义。 □

Re不确定性感知模型下 ELECTRE 的相关概念列于表 8.2 中 .

除了不确定 ELECTRE 外，还有几种已知的扩展方法，例如 ELECTRE TRI[1084,1085], 粗糙 ELECTRE [1086,1087], 扩展 ELECTRE [1088,1089], ELECTRE IS [1090], 群体 ELECTRE [1091, 1092], ELECTRE TRI-nC [1093, 1094], 灰色 ELECTRE [1095], 和软 ELECTRE[1096, 1097]。

表8.2：不确定性感知模型下的ELECTRE相关概念。

| $k$ | **相关ELECTRE概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊 ELECTRE [1073, 1074] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 ELECTRE [1075] |
| 2 | 费马提模糊 ELECTRE [1076, 1077] |
| 3 | 中智 ELECTRE [1078–1080] |
| 3 | 球形模糊 ELECTRE [1081] |
| 3 | 图片模糊 ELECTRE [1082] |
| 3 | 犹豫模糊 ELECTRE [1083] |

## 8.2 模糊 FlowSort

FlowSort 使用 PROMETHEE 超越流与参考偏好组合，将备选方案划分到有序类别中，并依据流采用分配规则 [1098, 1099]。模糊 FlowSort 将 FlowSort 扩展到模糊评价和权重，计算模糊超越度和去模糊化流，然后指派类别 [1100, 1101]。

**定义 8.2.1**（带限制剖面的模糊 FlowSort（F-FlowSort））。 [1100,1101] 设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$为有限备选方案集， $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 为有限准则集。假设 $K \geq 2$ 为有序类别

$$\mathcal{C} = \{C_1 \succ C_2 \succ \cdots \succ C_K\},$$

由 $(K+1)$ 极限参考剖面描述

$$\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_{K+1}\} \quad (\text{intended order: } r_1 \succ r_2 \succ \cdots \succ r_{K+1}),$$

其中，类别 $C_k$ 的性能介于 $r_k$ （上界）和 $r_{k+1}$ （下界）之间。

**模糊绩效数据**。 对于每个准则 $g_j$ 和每个 $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$，评价结果均为三角模糊数（TFN）

$$\tilde{g}_j(x) = (\ell_j(x),\, m_j(x),\, u_j(x)), \qquad \ell_j(x) \leq m_j(x) \leq u_j(x),$$

准则权重可以是清晰值（$w_j \in [0,1]$），也可以是模糊值（$\tilde{w}_j$），并满足标准归一化条件$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ （若使用 $\tilde{w}_j$，则满足双方约定的去模糊化归一化条件）。

**模糊偏好建模**。 对于每个准则 $j$，确定一个（PROMETHEE 类型的）单准则偏好函数

$$P_j : \mathbb{R} \to [0,1]$$

（例如，通常型、U形、V形、层级型、高斯型），并设定该类型所需的任何阈值（无差异阈值、偏好阈值）。对于 $x,\ y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ 定义模糊偏差

$$\widetilde{\Delta}_j(x,y) := \tilde{g}_j(x) \ominus \tilde{g}_j(y)$$

~ ~（使用三角模糊数减法），并通过选定的三角模糊数运算（例如区间／顶点求值或 LR形式），将 $P_j$ 应用于 $\Delta_j(x,\ y)$，以定义模糊单准则偏好 $P_j(x,\ y)$。

**聚合（模糊）超越度**。对于 $x,\ y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ 定义聚合模糊偏好

$$\widetilde{\pi}(x,y) := \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes \widetilde{P}_j(x,y),$$

其中 $\otimes$ 表示标量–三角模糊数乘法（如果使用 $\tilde{w}_j$，则表示三角模糊数乘法）。选择一个去模糊化算子

$$\mathrm{Def}:\ \mathrm{TFN} \to \mathbb{R}$$

（例如，Yager型、质心、最大值均值法），并设定清晰超越度

$$\pi_d(x,y) := \mathrm{Def}\big(\widetilde{\pi}(x,y)\big) \in [0,1].$$

**局部比较集和 PROMETHEE类流**。对于每个备选方案 $a_i \in \mathcal{A}$ 定义局部集合

$$\mathcal{R}_i^* := \{a_i\} \cup \mathcal{R}.$$

对于任意 $x \in \mathcal{R}_i^*$，定义其正、负和净流（在 $\mathcal{R}_i^*$ 内），如下：

$$\varphi_i^+(x) := \frac{1}{|\mathcal{R}_i^*|-1} \sum_{\substack{y \in \mathcal{R}_i^* \\ y \neq x}} \pi_d(x,y), \qquad \varphi_i^-(x) := \frac{1}{|\mathcal{R}_i^*|-1} \sum_{\substack{y \in \mathcal{R}_i^* \\ y \neq x}} \pi_d(y,x),$$

$$\varphi_i(x) := \varphi_i^+(x) - \varphi_i^-(x).$$

**类别分配规则**。对于每个 $a_i \in \mathcal{A}$ 和每个 $k \in \{1,\dots,K\}$ 定义：

（R$^+$）（正流规则）$C_{\varphi^+}(a_i) = C_k$，如果

$$\varphi_i^+(r_k) > \varphi_i^+(a_i) \ \geq\ \varphi_i^+(r_{k+1}).$$

（R$^-$）（负流规则）$C_{\varphi^-}(a_i) = C_k$ 若

$$\varphi_i^-(r_k) \ \leq\ \varphi_i^-(a_i) \ <\ \varphi_i^-(r_{k+1}).$$

（R）（净流规则）$C_{\varphi}(a_i) = C_k$ 若

$$\varphi_i(r_k) > \varphi_i(a_i) \ \geq\ \varphi_i(r_{k+1}).$$

模糊FlowSort分类是任意映射 模糊 *FlowSort* 分类 $\sigma:\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，通过选择规则 (R$^+$)、(R$^-$)、(R) 或确定性融合策略获得，例如：

$$\sigma(a_i) = C_{k^*} \quad \text{where} \quad k^* = \mathrm{Mode}\big\{k^+, k^-, k\big\}$$

其中 $C_{\varphi^+}(a_i) = C_{k^+}$, $C_{\varphi^-}(a_i) = C_{k^-}$, $C_{\varphi}(a_i) = C_k$，并采用固定的平局处理约定（例如，在并列时选择索引最差者）。

**命题 8.2.2 (**基本良定义性**)**。假设 $\pi_d(x,y) \in [0,1]$ 对所有相关的 $(x,y)$ 均成立，并令 $N_i := |\mathcal{R}_i^*|$。则 $\varphi_i^+(x)$ $\varphi_i^-(x) \in [0,1]$ 且 $\varphi_i(x) \in [-1,1]$ 对所有 $x \in \mathcal{R}_i^*$ 均成立。此外，对于固定规则 *(R$^+$)*（分别为 *(R$^-$)*、*(R)*），若偏好组合的剖面流量满足

$$\varphi_i^+(r_1) > \varphi_i^+(r_2) > \cdots > \varphi_i^+(r_{K+1}) \quad \textit{(resp. similarly for } \varphi_i^- \textit{ or } \varphi_i\textit{)},$$

那么，相应的指派会为每个 $a_i$ 生成一个唯一的类别。

证明。 由于 $\pi_d(\cdot,\cdot) \in [0,1]$，每个流都是 $[0,1]$, 中的数的平均值，因此也属于 $[0,1]$。净流是两个 $[0,1]$ 数之差，因此属于 $[-1,1]$。剖面流量的严格单调性将实数线划分为互不相交的半开区间，因此恰有一个 $k$ 满足相应的不等式。

□

以不确定集作为基础扩展框架，我们将类型为 $M$ 的不确定FlowSort（U-FlowSort）定义如下。

**定义 8.2.3** （具有极限剖面的类型为 $M$ 的不确定FlowSort（U-FlowSort））. 设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 为有限准则集，其中 $m \geq 1$ 和 $n \geq 1$。固定 $K \geq 2$ 个有序类别

$$\mathcal{C} = \{C_1 \succ C_2 \succ \cdots \succ C_K\},$$

由（$K+1$）个限制参考剖面描述

$$\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_{K+1}\} \quad (\text{intended order: } r_1 \succ r_2 \succ \cdots \succ r_{K+1}),$$

其中，类别 $C_k$ 由 $r_k$ （上界）和 $r_{k+1}$ （下界）限定。

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) 为 $\neq \emptyset$，且可容许评分为 $S_M$。假设不确定评价

$$x_j^{(M)}(x) \in \mathrm{Dom}(M) \qquad \text{for all } x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R},\ j = 1, \ldots, n,$$

以及清晰准则权重 $w = (w_1, \ldots\ldots, w_n)$，其中

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

**步骤 1（清晰投影）**。定义清晰绩效

$$y_j(x) := S_M\big(x_j^{(M)}(x)\big) \in \mathbb{R} \qquad (x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R},\ j = 1, \ldots, n).$$

**步骤 2（单准则偏好函数）**。对于每个准则 $j$，指定一个 PROMETHEE型偏好函数

$$P_j : \mathbb{R} \to [0,1],$$

其定义中可能隐含阈值（无差异/偏好阈值）。对于 $x,\ y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$ 定义单准则偏好度

$$\pi_j(x,y) := P_j\big(y_j(x) - y_j(y)\big) \in [0,1].$$

**步骤 3（聚合偏好指数）**。定义聚合超越（偏好）指数

$$\pi(x,y) := \sum_{j=1}^{n} w_j\, \pi_j(x,y) \in [0,1], \qquad x, y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{R}.$$

**第4步（L　局部比较集合和流）**。对于每个备选方案 $a_i \in \mathcal{A}$，定义局部集合

$$\mathcal{S}_i := \{a_i\} \cup \mathcal{R}, \qquad N_i := |\mathcal{S}_i| = K + 2.$$

对于任意 $x \in \mathcal{S}_i$，定义正流、负流和净流：

$$\varphi_i^+(x) := \frac{1}{N_i - 1} \sum_{\substack{y \in \mathcal{S}_i \\ y \neq x}} \pi(x, y), \qquad \varphi_i^-(x) := \frac{1}{N_i - 1} \sum_{\substack{y \in \mathcal{S}_i \\ y \neq x}} \pi(y, x),$$

$$\varphi_i(x) := \varphi_i^+(x) - \varphi_i^-(x).$$

**第5步（分配规则）**。对于每个 $a_i \in \mathcal{A}$，使用以下确定性规则之一指派一个类别：

*($R^+$)* 正流规则：选择唯一的 $k \in \{1, \ldots, K\}$，使得

$$\varphi_i^+(r_k) > \varphi_i^+(a_i) \;\geq\; \varphi_i^+(r_{k+1}),$$

并令 $\sigma(a_i) := C_k$。

*($R^-$)* 负流规则：选择唯一的 $k \in \{1, \ldots, K\}$，使得

$$\varphi_i^-(r_k) \;\leq\; \varphi_i^-(a_i) \;<\; \varphi_i^-(r_{k+1}),$$

并令 $\sigma(a_i) := C_k$。

*(R)* 净流规则：选择唯一的 $k \in \{1, \ldots, K\}$，使得

$$\varphi_i(r_k) > \varphi_i(a_i) \;\geq\; \varphi_i(r_{k+1}),$$

并令 $\sigma(a_i) := C_k$。

若因并列而导致唯一性不成立，则采用任一固定的平局打破规则（例如，在符合条件者中选择最差类别）。所得映射 $\sigma:\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 称为不确定 *FlowSort* 分类。

**定理 8.2.4**（U-FlowSort 的良定义性）**.** 在定义 *8.2.3* 下，假设 $S_M$ 是可容许的，且每个偏好函数 $P_j$ 将 $\mathbb{R}$ 映射到 $[0, 1]$。则：

*(i)* 单准则指标 $\pi_j(x, y)$ 和聚合指标 $\pi(x, y)$ 均为良定义，且属于 $[0, 1]$。

*(ii)* 对于每个 $i$ 和每个 $x \in \mathcal{S}_i$，流满足

$$0 \leq \varphi_i^+(x) \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi_i^-(x) \leq 1, \qquad -1 \leq \varphi_i(x) \leq 1.$$

*(iii)* 一旦确定确定性规则 *($R^+$)*、*($R^-$)* 或 *(R)* 以及平局处理约定，分配映射 $\sigma:\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 就是良定义的。

*(iv)* 如果对于选定的规则，相应的剖面流量严格递减（例如，对于 *(R⁺)*，$\varphi_i^+(r_1) > \cdots > \varphi_i^+(r_{K+1})$），那么每个 $a_i$ 都会被指派到一个唯一的类别，无需进行平局处理。

证明。 (i) 由于 $S_M$ 是可容许的，每个 $y_j(x)$ 都是有限的，因此每个差值 $y_j(x) - y_j(y)$ 都是有限的。根据假设 $P_j$：$\mathbb{R} \to [0,1]$，因此 $\pi_j(x,y)$ 在 $[0,1]$ 中是良定义的。由于 $w_j \geq 0$ 和 $\sum_j w_j = 1$，聚合指标 $\pi(x,y) = \sum_j w_j \pi_j(x,y)$ 是一个凸组合，因此属于 $[0,1]$，且是良定义的。

(ii) 对固定的 $i$ 和 $x \in \mathcal{S}_i$，$\varphi_i^+(x)$ 是 $[0,1]$，中 $N_i - 1$ 个数的平均值，因此属于 $[0,1]$。$\varphi_i^-(x)$ 也同样如此。因此 $\varphi_i(x) = \varphi_i^+(x) - \varphi_i^-(x) \in [-1,1]$。

（iii）在流良定义的情况下，每条指派规则比较有限多个实数。确定性规则加上固定的并列打破规则会产生唯一类别，因此 $\sigma$ 是良定义的。

（iv）在剖面流量严格递减的条件下，实数轴被划分为互不相交的半开区间$\big[\varphi(r_{k+1})\ \ \varphi(r_k)\big)$（或类似形式），因此恰好有一个 $k$ 满足定义不等式。 □

不确定性感知模型下 FlowSort 的相关概念列于表 8.3。

表 8.3：不确定性感知模型下 FlowSort 的相关概念。

| $k$ | **相关 FlowSort 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊 FlowSort |
| 2 | 直觉模糊 FlowSort |
| 3 | 中智 FlowSort |

## 8.3 不确定PROMETHEE（用于丰富评价的偏好排序组织方法）

PROMETHEE 根据成对准则差值上的偏好函数对备选方案进行排序，聚合加权偏好，并计算正向、负向和净超越流 [1102–1104]。模糊PROMETHEE 将评价和/或权重建模为模糊数，对其进行去模糊化或比较，然后在不确定性下应用 PROMETHEE偏好聚合并计算流 [1105–1107]。

**定义 8.3.1** （模糊 PROMETHEE II（三角模糊数输入 + Yager去模糊化））。（参见 [1105–1107]）设 $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ 为备选方案，$C = \{1, \ldots, n\}$ 为准则。假设每个准则 $j \in C$ 均为效益型 准则（↑）或成本型 准则（↓）。设 $\tilde{f}_j(a) \in \mathbb{R}^3$ 为备选方案 $a \in A$ 在准则 $j$上的（三角）模糊表现，$\tilde{w}_j \in \mathbb{R}^3$ 为准则 $j$的（三角）模糊权重。固定偏好函数（广义准则）

$$p_j : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

将绩效偏差转换为偏好度。

**（1）Yager去模糊化**。对于一个三角模糊数 $\tilde{x} = (l,\ m,\ u)$，将其Yager量值（中心/质心得分）定义为

$$\mathrm{Yag}(\tilde{x}) := \frac{l + m + u}{3}.$$

定义去模糊化绩效

$$g_j(a) := \begin{cases} \mathrm{Yag}\big(\tilde{f}_j(a)\big), & j \text{ is benefit } (\uparrow), \\ -\mathrm{Yag}\big(\tilde{f}_j(a)\big), & j \text{ is cost } (\downarrow), \end{cases}$$

和 d 去模糊化权重 $\hat{w}_j := \mathrm{Yag}(\tilde{w}_j)$。通过以下方式对权重进行归一化（可选，但通常采用）：

$$w_j := \frac{\hat{w}_j}{\sum_{t=1}^{n} \hat{w}_t} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

**(2) 成对偏好**。对于 $a,\ b \in A$，准则 $j$ 上的偏差定义为

$$d_j(a,b) := g_j(a) - g_j(b),$$

单准则偏好度定义为

$$P_j(a,b) := p_j\big(d_j(a,b)\big) \in [0,1],$$

聚合（全局）偏好指数定义为

$$\pi(a,b) := \sum_{j=1}^{n} w_j\, P_j(a,b) \in [0,1].$$

**(3) 超越流与完全排序（PROMETHEE II）**。对每个 $a \in A$ 定义正流、负流和净流如下

$$\varphi^+(a) := \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \pi(a,b), \qquad \varphi^-(a) := \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \pi(b,a), \qquad \varphi(a) := \varphi^+(a) - \varphi^-(a).$$

模糊 *PROMETHEE II* 排序是由 $\varphi$在 $A$ 上诱导的完全预序 ：

$$a \succeq b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) \geq \varphi(b).$$

以不确定集作为基础扩展框架，我们将类型 $M$ 的不确定 PROMETHEE II（U-PROMETHEE）定义如下。

**定义8.3.2** （类型 $M$的不确定 PROMETHEE II（U-PROMETHEE））。 设 $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ 为具有 $m \geq 2$的有限备选方案集，并设 $C = \{1, \ldots, n\}$ 为准则。将准则划分为效益集与成本集 $B,\ K \subseteq C$，且 $B \dot{\cup} K = C$。固定不确定模型 $M$，其Dom($M$)为 $\neq \emptyset$，以及可容许评分$S_M$。

假设对于每个 $a \in A$ 和准则 $j \in C$，不确定性能 $x_j^{(M)}(a) \in \mathrm{Dom}(M)$。设 $w$ =($w_1$、.....、 $w_n$)为准则权重，其中

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

设定 PROMETHEE 偏好函数（广义准则）

$$p_j : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad (j = 1, \dots, n),$$

用以将准则偏差转换为偏好度。

**步骤 1（清晰投影和方向化）**。对于每个 $a \in A$ 和 $j \in C$，定义

$$g_j(a) := \begin{cases} S_M\big(x_j^{(M)}(a)\big), & j \in B \quad \text{(benefit)}, \\ -\,S_M\big(x_j^{(M)}(a)\big), & j \in K \quad \text{(cost)}, \end{cases}$$

从而使较大的$g_j(a)$始终表示更优。

**步骤 2（两两单准则偏好）**。对于 $a,\ b \in A$ 和 $j \in C$，定义

$$d_j(a,b) := g_j(a) - g_j(b) \in \mathbb{R}, \qquad P_j(a,b) := p_j\big(d_j(a,b)\big) \in [0,1].$$

**步骤 3（聚合偏好指数）**。定义全局偏好指数

$$\pi(a,b) := \sum_{j=1}^{n} w_j\, P_j(a,b) \in [0,1], \qquad a,b \in A.$$

**第4步（PR　OMETHEE II 流）**。对于每个 $a \in A$，定义正流、负流和净流

$$\varphi^+(a) := \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \pi(a,b), \qquad \varphi^-(a) := \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \pi(b,a), \qquad \varphi(a) := \varphi^+(a) - \varphi^-(a).$$

**排序规则（PROMETHEE II）**。定义 $A$ 上的完全预序如下

$$a \succeq_{\mathrm{UP}} b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(a) \geq \varphi(b).$$

**定理8.3.3**（U-PROMETHEE的良定义性与界）。在定义*8.3.2*下，假设 $m \geq 2$，$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$, $S_M$ 可容许，且每个 $p_j$ 都将 $\mathbb{R}$ 映射到 $[0,1]$。那么：

*(i)* 对所有 $a, b \in A$, $\pi(a,b)$ 均有良定义，且属于 $[0,1]$。

*(ii)* 对所有 $a \in A$，这些流满足

$$0 \leq \varphi^+(a) \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi^-(a) \leq 1, \qquad -1 \leq \varphi(a) \leq 1.$$

*(iii)* 排序关系 $\succeq_{\mathrm{UP}}$ 是良定义的（允许并列）。

证明。 (i) $S_M$ 的可容许性意味着每个$g_j(a)$都是有限的，因此每个偏差 $d_j(a,\ b)$都是有限的。由于$p_j$： $\mathbb{R} \to [0,1]$, $P_j(a,\ b)$在 $[0,1]$中是良定义的。由 $w_j \geq 0$和 $\sum_j w_j = 1$可知， $\pi(a,\ b) = \sum_j w_j P_j(a,\ b)$是一个凸组合，因此属于 $[0,1]$。

(ii) 对于固定的 $a$， $\varphi^+(a)$是 $[0,1]$, 中 $m-1$ 个数的平均值，因此 $\varphi^+(a)\ \in [0,1]$。同理， $\varphi^-(a)\ \in [0,1]$。因此 $\varphi(a)$ $= \varphi^+(a)\ - \varphi^-(a)\ \in [-1,1]$。

(iii) 由于每个 $\varphi(a)$都是实数，按 $\varphi(a)$对备选方案进行分类定义了一个完全预序（允许并列），因此 $\succeq_{\mathrm{UP}}$ 是良定义的。 □

作为参照点，相关 概念：不确定性感知模型下的PROMETHEE列于表8。 4.

表8.4：不确定性感知模型下PROMETHEE的相关概念。

| $k$ | **相关 PROMETHEE 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊PROMETHEE |
| 2 | 直觉模糊PROMETHEE [1106, 1108] |
| 2 | 双极模糊 PROMETHEE [1109, 1110] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊 PROMETHEE [1111, 1112] |
| 2 | 费马模糊 PROMETHEE [1113, 1114] |
| 3 | 图像模糊 PROMETHEE [1115, 1116] |
| 3 | 犹豫模糊 PROMETHEE [503, 1117] |
| 3 | 球形模糊 PROMETHEE [1118, 1119] |
| 3 | 中智 PROMETHEE [1120, 1121] |

语言型 PROMETHEE [1122, 1123], 软 PROMETHEE [1112, 1124], 灰色 PROMETHEE [1125, 1126],群体 PROMETHEE [1127, 1128], 扩展 PROMETHEE [1129, 1130], PROMETHEE-GAIA [1113,1131], SMAA-PROMETHEE [1132,1133], PROMETHEE-MD-2T [1134], 以及粗糙 PROMETHEE [1135,1136]也被称为相关变体。

## 8.4 模糊 QUALIFLEX

QUALIFLEX 通过评估所有排列、汇总成对准则偏好的一致性来排列备选方案，并选出最佳顺序 [1137, 1138]。模糊 QUALIFLEX 使用模糊数或语言术语表示偏好，汇总各排列中的模糊一致性，从而得出稳健的排序 [1139, 1140]。

**定义 8.4.1** （模糊 QUALIFLEX（基于排列的超越））。 [1139,1140] 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集。设 $\mathbb{F}$ 为选定的一类模糊评价（例如三角形/梯形模糊数、犹豫模糊数等）。假设存在一个模糊决策矩阵

$$\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}, \qquad \widetilde{x}_{ij} \in \mathbb{F} \text{ is the evaluation of } A_i \text{ under } C_j.$$

令 $w = (w_1, \ldots, w_n)\ \in [0,1]^n$ 为准则权重，且满足 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$。对于每个准则 $C_j$，固定：

- 一个理想模糊值 $\widetilde{u}_j^+ \in \mathbb{F}$ （在 $C_j$ 上可达到的最佳值；对于成本型准则，选择最小型理想点） ;

- 一个取实数值的 接近度/得分函数

$$r_j : \mathbb{F} \to \mathbb{R}, \qquad r_j(\widetilde{x}) := d_j(\widetilde{x}, \widetilde{u}_j^+),$$

其中， $d_j$ 是 $\mathbb{F}$上的距离（或差异度）。

（因此，准则 $C_j$上的$r_j(\widetilde{x})$越小，表示越接近理想。）

令 $\mathfrak{S}_m$ 表示 $\{1, \ldots, m\}$的所有排列构成的集合。每个 $\pi \in \mathfrak{S}_m$ 代表一个候选完全排序

$$P_\pi = \big(A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \ldots, A_{\pi(m)}\big), \quad \text{where } A_{\pi(p)} \text{ is ranked not worse than } A_{\pi(q)} \text{ if } p < q.$$

对于任意有序对$(p, q)$ ，若满足 $1 \le p < q \le m$，则定义逐准则的一致性／不一致性指数为

$$\varphi_j^\pi\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) := r_j\big(\widetilde{x}_{\pi(q)j}\big) - r_j\big(\widetilde{x}_{\pi(p)j}\big).$$

因此:

$\varphi_j^\pi > 0 \Rightarrow$ 一致性（排序较高的备选方案更接近理想方案） $\varphi_j^\pi = 0 \Rightarrow$ 并列 $\varphi_j^\pi < 0 \Rightarrow$ 不一致性

对每一对备选方案，按准则（加权）汇总:

$$\varphi^\pi\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) := \sum_{j=1}^{n} w_j \, \varphi_j^\pi\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big).$$

定义排列的综合一致性/不一致性指数 $P_\pi$ 为

$$\Phi(\pi) := \sum_{1 \le p < q \le m} \varphi^\pi\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big).$$

任何能够达到 $\pi^\star \in \mathfrak{S}_m$ 的排列，都是一种模糊 *QUALIFLEX* 解

$$\pi^\star \in \arg\max_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \Phi(\pi),$$

以及诱导排序

$$A_{\pi^\star(1)} \succeq A_{\pi^\star(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi^\star(m)}.$$

使用一种非确 在不确定集的基础上，我们将类型为 $M$ 的不确定 QUALIFLEX（U-QUALIFLEX）定义如下 s.

**定义 8.4.2** （类型为 $M$ 的不确定 QUALIFLEX（U-QUALIFLEX））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为有限备选方案集， $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 为有限准则集，其中 $m \ge 2$ 和 $n \ge 1$。将准则划分为效益集与成本集:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot{\cup} \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，其 $\text{Dom}(M) \neq \emptyset$，以及一个可容许评分 $S_M$。假设一个不确定决策矩阵

$$X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m \times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \text{Dom}(M),$$

以及准则权重 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，其中 $w_j \ge 0$ 且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$。

**步骤 0（清晰投影与方向化）**。 定义 $y_{ij} := S_M(x_{ij}^{(M)}) \in \mathbb{R}$，并将所有准则转换为“越大越好”形式：

$$z_{ij} := \begin{cases} y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\ -y_{ij}, & C_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases}$$

令 $Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$。

**排列集合**。 令 $\mathfrak{S}_m$ 为 $\{1,\dots,m\}$的所有排列构成的集合。每个 $\pi \in \mathfrak{S}_m$ 都编码了一个候选完全排序

$$P_\pi = \big(A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \dots, A_{\pi(m)}\big), \quad \text{where } p<q \;\Rightarrow\; A_{\pi(p)} \text{ is ranked not worse than } A_{\pi(q)}.$$

**步骤 1（排列下的成对一致性贡献）**。 对于任意排列 $\pi \in \mathfrak{S}_m$以及任意有序对（$p$, $q$），其中 $1 \le p < q \le m$，定义逐准则一致性贡献

$$\varphi_j^{\pi}\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) := z_{\pi(p)j} - z_{\pi(q)j} \in \mathbb{R}, \qquad j = 1,\dots,n.$$

因此，$\varphi_j^{\pi} > 0$ 表示排序较高的备选方案在准则 $j$上更优。

**步骤 2（加权成对一致性指数）**。定义加权成对一致性指数

$$\varphi^{\pi}\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) := \sum_{j=1}^{n} w_j\, \varphi_j^{\pi}\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) \in \mathbb{R}.$$

**第3步（排列的综合一致性指数）**。定义排列的综合一致性 $\pi$ 为

$$\Phi(\pi) := \sum_{1\le p<q\le m} \varphi^{\pi}\big(A_{\pi(p)}, A_{\pi(q)}\big) \in \mathbb{R}.$$

**第4步（最优排列和排序）**。任意最大化元

$$\pi^{\star} \in \arg\max_{\pi\in\mathfrak{S}_m} \Phi(\pi)$$

称为一个不确定 *QUALIFLEX* 解，且诱导排序为

$$A_{\pi^\star(1)} \succeq_{\mathrm{UQF}} A_{\pi^\star(2)} \succeq_{\mathrm{UQF}} \cdots \succeq_{\mathrm{UQF}} A_{\pi^\star(m)}.$$

**定理 8.4.3**（U-QUALIFLEX 的良定义性）。 根据定义 *8.4.2*，假设 $m \ge 2$，$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且 $S_M$ 是可容许的。则：

（*i*）对于每个 $\pi \in \mathfrak{S}_m$，值 $\Phi(\pi)$ 都是良定义的有限实数。

（*ii*）最大化元集最大值点集$_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\,\Phi(\pi)$ 非空，因此存在一个最优排列 $\pi^\star$。

*(iii)* 由 $\pi^\star$ 诱导的排序是良定义的（并列对应多个最大值 *rs).*

证明。 (i) $S_M$ 的可容许性意味着每个$y_{ij}$ 都是有限的；因此，每个定向值$z_{ij}$ 都是有限的。对于任意 $\pi$以及任意 $(p,\ q)$，每个 $\varphi_j^{\pi} = z_{\pi(p)j} - z_{\pi(q)j}$ 都是有限实数。由于 $w_j \geq 0$ 和 $\sum_j w_j = 1$，$\varphi^{\pi} = \sum_j w_j \varphi_j^{\pi}$ 是有限的，而 $\Phi(\pi)$是对 $\binom{m}{2}$ 对求有限和，因此也是有限的。

(ii) 集合 $\mathfrak{S}_m$ 是有限的，且为 $|\mathfrak{S}_m| = m!$。因此，有限集 $\{\Phi(\pi):\ \pi \in \mathfrak{S}_m\} \subset \mathbb{R}$ 取得一个最大值，故最大值点集 $_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\ \Phi(\pi) \neq \emptyset$。

(iii) 任一最大化元 $\pi^{\star}$ 定义了备选方案的一种排序，从而定义了一种排序关系。若存在多个最大化元，则可能存在多种最优排序；选择任一 $\pi^{\star}$ 即可得到一个良定义排序。 □

作为相关概念，不确定性感知模型下的QUALIFLEX变体列于表8.5。

表8.5：不确定性感知模型下QUALIFLEX的相关概念。

| $k$ | **相关QUALIFLEX概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊QUALIFLEX [1141] |
| 3 | 犹豫模糊QUALIFLEX [1139, 1140] |
| 3 | 中智QUALIFLEX [1142–1144] |

## 8.5 模糊ORESTE（模糊组织排序与关系数据综合法）

ORESTE 利用偏好强度和基于距离的聚合，根据序数信息得出排序；当无法获得精确数据时，该方法尤为适用 [1145, 1146]。模糊 ORESTE 将序数判断表示为模糊秩，聚合模糊偏好距离，从而在模糊、不精确的评估下得出排序 [76, 1147, 1148]。

**定义 8.5.1** （模糊 ORESTE（基于距离的超越））。 [76, 1147, 1148] 设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 为有限准则集，并划分为 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{ben}} \sqcup \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}$ （效益型与成本型）。

设 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的一组模糊数（例如三角形、梯形或一般正规凸模糊数）。一个模糊决策矩阵为

$$\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij}) \in \mathbb{F}^{m\times n}, \qquad \widetilde{x}_{ij} \in \mathbb{F} \text{ encodes the (fuzzy) performance of } a_i \text{ on } c_j.$$

一个模糊重要性配置为

$$\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n) \in \mathbb{F}^n, \qquad \widetilde{w}_j \in \mathbb{F} \text{ encodes the (fuzzy) importance of } c_j.$$

假设：

(A1) 一个排序泛函 Rank：$\mathbb{F} \to \mathbb{R}$，它在 $\mathbb{F}$ 上诱导一个全预序（用于通过比较 Rank 值来定义模糊数的最大值/最小值）。

(A2) 一个（归一化的）距离 $d_{\mathbb{F}}$：$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to [0, 1]$ （适用于 $\mathbb{F}$ 的任意度量/伪度量，例如通过 $\alpha$-截集） .

**步骤 1（理想点）**。将逐准则模糊理想值 $\widetilde{x}_j^{+} \in \mathbb{F}$ 定义为

$$\widetilde{x}_j^{+} := \begin{cases} \arg\max\limits_{i\in\{1,\dots,m\}} \mathrm{Rank}(\widetilde{x}_{ij}), & c_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{ben}}, \\ \arg\min\limits_{i\in\{1,\dots,m\}} \mathrm{Rank}(\widetilde{x}_{ij}), & c_j \in \mathcal{C}^{\mathrm{cost}}. \end{cases}$$

同时定义最重要的模糊权重

$$\widetilde{w}^{+} := \arg\max_{j\in\{1,\dots,n\}} \mathrm{Rank}(\widetilde{w}_j).$$

**步骤 2（距离/坐标）**。对于 $(i,\ j)$ 设置

$$d_{ij} := d_{\mathbb{F}}\big(\widetilde{x}_{ij}, \widetilde{x}_j^{+}\big) \in [0,1], \qquad d_j := d_{\mathbb{F}}\big(\widetilde{w}_j, \widetilde{w}^{+}\big) \in [0,1].$$

将 **(**$d_{ij}$，$d_j$**)** 解释为相对于理想点而言，成对**“(**$a_i$，$c_j$**)”**的坐标。

**步骤 3（全局偏好得分）**。固定一个权衡参数 $\xi \in [0,1]$。$a_i$ 相对于 $c_j$ 的全局偏好得分为

$$D_{ij} := \Big(\xi\, d_{ij}^2 + (1-\xi)\, d_j^2\Big)^{1/2} \in [0,1],$$

其中 较小的 $D_{ij}$ 表示更接近理想，因此更优。该平均偏好得分 $a_i$ 为

$$D_i := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} \in [0,1].$$

由 $D_i$诱导的弱排序（预序）为:

$$a_i \succ a_k \iff D_i < D_k, \qquad a_i \sim a_k \iff D_i = D_k.$$

**第4步（偏好强度）**。对于成对比较（$a_i$，$a_k$），定义逐准则偏好强度

$$T_j(a_i,a_k) := \max\{D_{kj} - D_{ij},\, 0\} \in [0,1],$$

平均偏好强度

$$T(a_i,a_k) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_j(a_i,a_k) \in [0,1],$$

以及净偏好强度

$$\Delta T(a_i,a_k) := T(a_i,a_k) - T(a_k,a_i) \in [-1,1].$$

**步骤5（P/I/R检验与强排序）**。固定阈值 $\mu \in (0,1]$（偏好阈值）和 $\sigma \in (0,1]$（无差异界限）。定义 $a_i$ 与 $a_k$ 之间的PIR关系如下:

$$a_i\, I\, a_k \iff \big|\Delta T(a_i,a_k)\big| < \mu \text{ and } T(a_i,a_k) < \sigma \text{ and } T(a_k,a_i) < \sigma,$$

$$a_i \, R \, a_k \iff \big|\Delta T(a_i,a_k)\big| < \mu \text{ and } \max\{T(a_i,a_k), T(a_k,a_i)\} \geq \sigma,$$
$$a_i \, P \, a_k \iff \big|\Delta T(a_i,a_k)\big| \geq \mu \text{ and } \Delta T(a_i,a_k) > 0.$$

（情形 $\big|\Delta T（a_i，\ a_k）\big| \geq \mu$ 与 $\Delta T（a_i，\ a_k）< 0$ 得到 $a_k P a_i$。）

模糊ORESTE 的产出 是由 $(D_i)_{i=1}^m$ 与 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 上的 PIR 结构 $(P,I,R)$ 共同导出的弱排序。最佳 备选方案（距理想最优解的距离）是任意

$$a^\star \in \arg\min_{a_i\in\mathcal{A}} D_i.$$

使用 一个不确定集，我们将类型为 $M$ （U-ORESTE）的不确定 ORESTE 定义如下 s.

**定义8.5.2** （类型为 $M$（U-ORESTE）的不确定 ORESTE）。 设 $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C}=\{c_1,\dots,c_n\}$ 为有限准则集，且 $m,n\geq 2$。将准则划分为效益集与成本集：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\text{ben}} \dot\cup \mathcal{C}^{\text{cost}}.$$

固定一个不确定模型 $M$，使其满足 Dom($M$) $\neq\emptyset$，并给定一个可容许评分 $S_M$。

假设每个（$i$，$j$）都有不确定性能 $x_{ij}^{(M)} \in$ Dom($M$)，且每个 $j$ 都有不确定的准则重要性程度 $w_j^{(M)} \in$ Dom($M$)。

固定一个可容许评分 $S_M$，并定义清晰性能和重要性得分

$$y_{ij} := \begin{cases} S_M(x_{ij}^{(M)}), & c_j\in\mathcal{C}^{\text{ben}},\\ -S_M(x_{ij}^{(M)}), & c_j\in\mathcal{C}^{\text{cost}}, \end{cases} \qquad \beta_j := S_M(w_j^{(M)}).$$

因此，较大的 $y_{ij}$ 更好，而较大的 $\beta_j$ 表示更重要。

**步骤 1（根据投影得分确定序数秩）**。定义备选方案 $a_i$ 在准则 $c_j$ 下的绩效秩为

$$r_{ij} := 1 + \big|\{t\in\{1,\dots,m\}:\ y_{tj} > y_{ij}\}\big| \in \{1,\dots,m\},$$

并将准则 $c_j$ 的重要性秩定义为

$$s_j := 1 + \big|\{t\in\{1,\dots,n\}:\ \beta_t > \beta_j\}\big| \in \{1,\dots,n\}.$$

（因此，较小的 $r_{ij}$ 和较小的 $s_j$ 分别表示更高的可取性和重要性；允许并列。）

**步骤 2（Besson秩距离 / 全局偏好坐标）**。固定一个权衡参数 $\xi\in[0,1]$。定义 ORESTE 全局距离得分

$$D_{ij} := \sqrt{\xi\left(\frac{r_{ij}}{m}\right)^2 + (1-\xi)\left(\frac{s_j}{n}\right)^2} \in \left[0, \sqrt{\xi+(1-\xi)}\right] = [0,1],$$

以及备选方案 $a_i$ 的平均距离（全局得分）：

$$D_i := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} \in [0,1].$$

**步骤 3（弱排序）**。在 $\mathcal{A}$ 上定义弱预序为

$$a_i \succeq_{\mathrm{UO}} a_k \quad \Longleftrightarrow \quad D_i \le D_k \quad \text{(smaller distance is better)}.$$

**第4步（偏好强度和 PIR 结构）**。对于 $a_i,\ a_k \in \mathcal{A}$ 定义逐准则偏好强度

$$T_j(a_i, a_k) := \max\{D_{kj} - D_{ij},\, 0\} \in [0, 1],$$

平均偏好强度

$$T(a_i, a_k) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T_j(a_i, a_k) \in [0, 1],$$

以及净强度

$$\Delta T(a_i, a_k) := T(a_i, a_k) - T(a_k, a_i) \in [-1, 1].$$

固定阈值 $\mu \in (0, 1]$ 和 $\sigma \in (0, 1]$，并定义关系 $P,\ I,\ R$，其定义如下

$$a_i \, I \, a_k \iff |\Delta T(a_i, a_k)| < \mu \text{ and } T(a_i, a_k) < \sigma \text{ and } T(a_k, a_i) < \sigma,$$

$$a_i \, R \, a_k \iff |\Delta T(a_i, a_k)| < \mu \text{ and } \max\{T(a_i, a_k), T(a_k, a_i)\} \ge \sigma,$$

$$a_i \, P \, a_k \iff |\Delta T(a_i, a_k)| \ge \mu \text{ and } \Delta T(a_i, a_k) > 0,$$

（当 $|\Delta T(a_i,\ a_k)| \ge \mu$ 且 $\Delta T(a_i,\ a_k) < 0$时，$a_k P a_i$）。

**定理8.5.3** (U-ORESTE的良定义性)。 根据定义*8.5.2*，假设 $m$、 $n \ge 2$、$\mathrm{Dom}(M) \ne \emptyset$和 $S_M$ 均为可容许的。则：

*(i)* 排名 $r_{ij} \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $s_j \in \{1, \ldots, n\}$ 均为良定义（允许并列）。

*(ii)* $D_{ij}$ 和 $D_i$ 均为良定义，并满足 $0 \le D_{ij} \le 1$ 和 $0 \le D_i \le 1$。

*(iii)* 对所有 $a_i$、 $a_k$、 $T_j(a_i$、 $a_k)$ $T(a_i$、 $a_k) \in [0, 1]$ 以及 $\Delta T(a_i$、 $a_k) \in [-1, 1]$，它们均为良定义。

*(iv)* 弱排序 $\succeq_{\mathrm{UO}}$ 以及*PIR*关系$(P$、 $I$、 $R)$ 均为良定义。

证明。 (i) 由于所有$y_{ij}$ 和 $\beta_j$ 均为有限实数，因此集合 $\{t\colon\ \ y_{tj} > y_{ij}\}$ 和 $\{t\colon\ \ \beta_t > \beta_j\}$ 均为有限集，且其基数均有良定义。因此， $r_{ij} = 1 + |\{t\colon\ \ y_{tj} > y_{ij}\}| \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $s_j = 1 + |\{t\colon\ \beta_t > \beta_j\}| \in \{1, \ldots, n\}$。

(ii) 由于 $1 \le r_{ij} \le m$ 和 $1 \le s_j \le n$，因此有 $0 < r_{ij}/m \le 1$ 和 $0 < s_j/n \le 1$。由 $\xi \in [0, 1]$可知， $D_{ij}$中的被开方表达式属于 $[0, 1],$，因此 $D_{ij} \in [0, 1]$。那么， $D_i$是 $[0, 1],$中的 $n$个数的平均值，所以 $D_i \in [0, 1]$。

(iii) 由于 $D_{ij} \in [0, 1]$，我们有 $D_{kj} - D_{ij} \in [-1, 1]$，因此 $T_j(a_i,\ a_k)$ =最大值 $\{D_{kj} - D_{ij}, 0\} \in [0, 1]$。取平均后得到 $T(a_i,\ a_k) \in [0, 1]$。因此， $\Delta T(a_i,\ a_k)$ 是 $[0, 1],$中的两个数之差，所以它属于 $[-1, 1]$。

（iv）弱排序使用实数的比较 $D_i$，因此是良定义的。关系 $P, I, R$ 由涉及 $\Delta T$ 和 $T$ 以及固定阈值 $\mu, \sigma$的有限不等式定义，因此是良定义的。 □

相关 概念：不确定性感知模型下的 ORESTE 变体列于表8.6中 .

表8.6：不确定性感知模型下 ORESTE 的相关概念。

| $k$ | **相关 ORESTE 概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊ORESTE [1149] |
| 3 | 犹豫模糊ORESTE [1150] |
| 3 | 球形模糊ORESTE [1151] |
| 3 | 中智ORESTE [1152, 1153] |

# 第9章

# 规则归纳 / 学习 / 证据 / 序贯决策方法

本节从规则归纳、学习、证据聚合和序贯决策的视角，介绍决策方法。为方便起见，本章介绍的主要概念在表9.1中进行了比较。

表9.1：代表性规则归纳、学习、证据聚合和序贯决策方法的简要比较。

| 方法 | Type | 基本输入<br>结构 | 核心机制 | 主要<br>产出 | 决策<br>role |
|---|---|---|---|---|---|
| 决策<br>Tree | 模糊 | 模糊值属性<br>、模糊<br>划分或软<br>划分函数 | 递归地划分<br>实例空间<br>模糊测试和传<br>播隶属度<br>经过分支。 | 预测的<br>类别、值，<br>或基于叶节点的<br>隶属度 | 规则归纳-<br>/分类-<br>分类 |
| 决策<br>Tree | 不确定-<br>tain | 不确定值<br>特征通过<br>一个可接受映射<br>映射到 $\mathbb{R}$ | 将不确定特<br>征转换为清晰分数，<br>随后执行硬<br>或软树分裂<br>对可测量测试进行。 | 确定性<br>预测或<br>聚合的<br>软产出 | 规则诱导<br>／类别分<br>类 |
| DRSA | 模糊 | 有序决策<br>类别与模糊<br>优势度关系<br>准则上的 | 构建模糊下近似和<br>上近似<br>通过类并集的<br>模糊优势和<br>模糊量词。 | 模糊近似<br>值和<br>分级决策<br>规则 | 偏好<br>规则归纳-<br>tion |
| DRSA | 不确-<br>tain | 不确定值<br>决策表投-<br>影至清晰准-<br>准则得分 | 定义清晰支配关系<br>基于评分后的不确定<br>数据构建支配锥，并计<br>算类别的下近似和上近<br>类别的近似集合<br>并集。 | 近似<br>化系统<br>及<br>优势度<br>规则 | 偏好<br>规则归纳<br>tion |

续见下页。

表*9.1*（续）。

| 方法 | Type | 基本输入结构 | 核心机制 | 主要输出 | 决策role |
|---|---|---|---|---|---|
| 马尔可夫决-策过程-cess | 模糊 | 状态、动作，模糊转移，以及模糊奖励 | 传播模糊状态并评估折扣后的模糊回报，通常通过模糊贝尔曼型更新。 | 模糊价值函数和策略 | 序贯决策-制定 |
| 马尔可夫决-策过-cess | 不确-tain | 不确定转移-度和不确定奖励度 | 评分与归一化不确定转移转化为概率、得分奖励，并求解所诱导出的清晰马尔可夫决策过程。 | 价值函数和最优策略 | 序贯决策-制定 |
| 证据推理 | 模糊 | 模糊信念规则，匹配度，以及信念分布-在评价-等级 | 激活规则，构-建证据质量，并通过聚合ER/Dempster–Shafer式组合。 | 聚合信念分配-tion | 证据聚-聚合 / 评估 |
| 证据推理 | 不确定tain | 不确定信念度与不-确定可靠性得分计入 $[0,1]$ | 将不确定证-据转换为精确质量并将它们序-在证据推理下依次进行聚合的公式。 | 综合信念分布与不完备性程度 | 证据聚合 / 评估 |

**注。** 决策树主要是局部的、基于划分的预测模型；DRSA 是基于近似与支配的规则归纳框架；马尔可夫决策过程是在状态转移下的序贯优化模型；证据推理则是针对评价等级的证据融合框架。在不确定版本中，共同的结构原则是从 Dom($M$) 中的不确定值输入出发，通过可容许评分对其进行映射，然后应用良定义的清晰决策机制。

## 9.1 模糊决策树

决策树是一种基于规则的模型，通过特征测试划分数据并形成分支，以预测类别或值 [1154, 1155]。模糊决策树使用模糊隶属函数取代清晰划分，从而实现软规则、更平滑的边界，并增强对噪声的鲁棒性 [1156–1158]。

**定义 9.1.1**（模糊决策树（属性-值/模糊划分形式））。[1156–1158] 设 $X \neq \varnothing$为训练对象的有限集，并令

$$\mathcal{F}(X) := \{\, A : X \to [0,1] \,\}$$

表示 $X$的所有模糊子集所构成的族。对于 $A \in \mathcal{F}(X)$，将其（sigma-计数）模糊基数定义为

$$M(A) := \sum_{x \in X} A(x).$$

固定 $m \geq 1$ 个属性。对于每个属性 $i \in \{1, \ldots, m\}$，令 $X_i \subseteq \mathcal{F}(X)$ 为模糊属性值（语言值）的（有限）集合，并假设 $|X_i| \geq 1$。固定一个 $t$-范数 $T$ （例如 $T =$ 最小值），并定义模糊交集

$$(A \wedge_T B)(x) := T\big(A(x), B(x)\big) \qquad (x \in X).$$

模糊决策树是一棵有根有向树 $\mathcal{T}$，其节点是 $X$ 的模糊子集（即 $\mathcal{F}(X)$ 的元素），满足:

(a) $\mathcal{T}$的每个节点 $N$ 都满足 $N \in \mathcal{F}(X)$.

(b) 对于每个非叶结点 $N$，存在一个属性下标 $i \in \{1, \dots, m\}$，使得 $N$ 的子节点集合恰好为

$$\mathrm{ch}(N) = \{\, A \wedge_T N \;:\; A \in X_i \,\} \subseteq \mathcal{F}(X).$$

(c) 每个叶节点都分配一个或多个类标签（分类决策）。

**定义 9.1.2** （软/完备模糊决策树（隶属度传播语义））. 设 $U$ 为对象（实例）论域。针对（清晰或模糊）目标类 $C$ 的软（模糊）决策树 由一棵有根有向树构成，其节点 $v$ 对应于具有隶属度 $\mu_v$ 的模糊子集 $S_v \subseteq U:\ U \to [0,1]$，并且:

- 每个内部节点 $v$ 选择一个属性 $a$ 和一个判别器 （软划分） $\sigma_v:\ U \to [0,1]$ （例如，由切分点 $\alpha$ 和宽度 $\beta$决定的分段线性函数），并且对于二叉划分，通过以下方式定义子节点 $v_L, v_R$

$$\mu_{v_L}(o) := \mu_v(o)\,\sigma_v(o), \qquad \mu_{v_R}(o) := \mu_v(o)\,\big(1 - \sigma_v(o)\big) \qquad (o \in U).$$

- 每个叶节点 f $\ell$ 携带一个数值标签 $L_\ell \in \mathbb{R}$ （通常 $L_\ell \in [0,1]$ 用于类隶属度预测） .

对于一个输入 对象 $o \in U$，树输出（估计类隶属度）是叶节点聚合 on

$$\widehat{\mu}_C(o) := \frac{\sum_{\ell \in \mathrm{Leaves}} \mu_\ell(o)\, L_\ell}{\sum_{\ell \in \mathrm{Leaves}} \mu_\ell(o)},$$

通常约定分母为正（例如 $\mu_{\mathrm{root}}(o) = 1$）。

使用不确定集，我们将不确定决策树（U树）定义如下。

**定义 9.1.3** （不确定决策树（U树）作为可测划分规则）。 设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 是实例的可测空间， $Y$ 是标签空间（例如，用于分类的 $Y = \{1, \dots, K\}$ 或用于回归的 $Y = \mathbb{R}$）。固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，以及一个可容许评分 $S_M$。

假设具有不确定值特征

$$X_j : \Omega \to \mathrm{Dom}(M) \qquad (j = 1, \dots, d),$$

并设 $\mathcal{S} = \{S_v\}_{v \in V}$ 为有限有根有向树 $\mathcal{T}$ 的节点集，其根节点为 $r$。不确定决策树由以下内容指定:

- 一个有限根树 $\mathcal{T} = (V,\ E)$;

- 对于每个内部节点 $v \in V$，都有一个由索引 $j(v) \in \{1, \dots, d\}$ 和可测集 $B_v \subseteq \mathbb{R}$确定的划分规则，该规则产生两个子节点 $v_L$，$v_R$ 以及可测量测试

$$o \in S_{v_L} \iff S_M(X_{j(v)}(o)) \in B_v, \qquad o \in S_{v_R} \iff S_M(X_{j(v)}(o)) \notin B_v;$$

- 对每个叶节点 $\ell$，一个预测值 $h(\ell) \in Y$。

归纳得到的预测器 $H : \Omega \to Y$ 为

$$H(o) := h(\ell(o)),$$

其中，$\ell(o)$ 是从根节点出发并沿唯一的根到叶路径应用测试后到达的唯一叶节点。

**定义 9.1.4**（软不确定决策树（隶属度传播形式））。设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间。固定一个不确定模型 $M$ 和一个可容许评分 $S_M$。软不确定决策树 是一个有限根树 $\mathcal{T} = (V, E)$，满足：

- 一个根节点隶属度 $\mu_r : \Omega \to [0, 1]$（通常为 $\mu_r \equiv 1$）；
- 对于每个内部节点 $v$，一个特征索引 $j(v)$，以及一个可测的软划分函数

$$\sigma_v : \Omega \to [0, 1], \qquad \sigma_v(o) = \Sigma_v\big(S_M(X_{j(v)}(o))\big)$$

对于某个可测的 $\Sigma_v : \mathbb{R} \to [0, 1]$（例如，切分点附近的 Sigmoid 函数或三角形隶属度）；其子节点 $v_L$，$v_R$ 由隶属度传播定义

$$\mu_{v_L}(o) := \mu_v(o)\, \sigma_v(o), \qquad \mu_{v_R}(o) := \mu_v(o)\, \big(1 - \sigma_v(o)\big);$$

- 对于每个叶节点 $\ell$，一个数值标签 $L_\ell \in \mathbb{R}$（或 $\Delta^{K-1}$ 中的类别概率向量）。

树输出是叶节点聚合

$$\widehat{H}(o) := \begin{cases} \dfrac{\sum_{\ell \in \mathrm{Leaves}} \mu_\ell(o)\, L_\ell}{\sum_{\ell \in \mathrm{Leaves}} \mu_\ell(o)}, & \sum_\ell \mu_\ell(o) > 0, \\ 0, & \sum_\ell \mu_\ell(o) = 0, \end{cases}$$

（当分母为 0 时，将 0 替换为任意固定的默认输出）。

**定理 9.1.5**（　　不确定决策树的良定义性)。在定义 *9.1.3* 和 *9.1.4* 中，假设：

*(i)* $S_M$ 是可容许的（处处有限）；

*(ii)* 所有集合 $B_v \subseteq \mathbb{R}$ 和所有函数 $\Sigma_v : \mathbb{R} \to [0, 1]$ 都是可测的；

*(iii)* $\mathcal{T}$ 是有限的。

于是：

*(a)* 硬不确定决策树预测器 $H:\Omega \to Y$ 是良定义的。*(b)* 在软不确定决策树中，每个节点隶属度 $\mu_v$ 都是良定义的，并满足 $0 \le \mu_v \le 1$。

*(c)* 对于每个 $o \in \Omega$，软产出 $H(o)$ 按照所述分母约定，均被良定义为一个实数。

证明。 (a) 由于 $\mathcal{T}$ 是一棵有根树，每个实例 $o$ 都沿着一条从根节点到叶节点的唯一路径前进，并不断应用二元测试“$S_M(X_{j(v)}(o)) \in B_v$”。由于 $S_M(X_{j(v)}(o))$ 是有限实数，且 $B_v$ 是一个固定集合，因此每个内部节点处的测试结果都有定义。 $\mathcal{T}$ 的有限性意味着该路径会在有限步内终止于叶节点 $\ell(o)$。因此，对于所有 $o$， $H(o) = h(\ell(o))$ 都有定义。

(b) 按深度归纳。在根节点处， $\mu_r(o) \in [0,1]$。假设对于某个节点 $v$， $\mu_v(o) \in [0,1]$。由于 $\sigma_v(o) = \Sigma_v(S_M(X_{j(v)}(o))) \in [0,1]$，我们有 $\mu_{v_L}(o) = \mu_v(o)\sigma_v(o) \in [0,1]$，并且 $\mu_{v_R}(o) = \mu_v(o)(1-\sigma_v(o)) \in [0,1]$。因此，所有节点隶属度都有定义，且在 $[0,1]$ 中有界。

(c) 对于每个 $o$，叶节点的集合是有限的，且每个 $\mu_\ell(o) \in [0,1]$，因此和 $\sum_\ell \mu_\ell(o)$ 和 $\sum_\ell \mu_\ell(o) L_\ell$ 均为有限实数。若分母为正，则该比率是良定义的；若分母为 0，则定义会赋予一个固定的默认值，因此对于所有 $o$， $H(o)$ 都是良定义的。 □

表 9.2：不确定性感知模型下决策树的相关概念。

| $k$ | **相关决策树概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊决策树 [1159] |
| 3 | 犹豫模糊决策树 [1160,1161] |
| 3 | 中智决策树 [1162,1163] |

除不确定决策树外，还已知若干其他相关的决策树概念，包括提升决策树 [1164,1165], 决策超树 [1166], 粗糙决策树 [1167,1168], 有向决策树 [1169,1170], 完全决策树 [1171,1172], 语音决策树 [1173,1174], 以及多准则决策树 [1175,1176]。

## 9.2 模糊DRSA（模糊支配粗糙近似）

基于支配的粗糙集是一种面向偏好有序数据的粗糙集方法，它利用支配关系在多准则决策分析中近似决策类 [1177–1179]。DRSA在有序准则上使用支配关系来近似决策类，归纳出若–则决策规则并识别约简，而无需预先要求全局固定阈值 [1180, 1181]。模糊DRSA利用隶属度软化优势度与类边界，生成模糊下近似/上近似和分级决策规则，从而在实践中更好地刻画模糊偏好 [1182, 1183]。

**定义 9.2.1** （模糊DRSA（基于优势关系的粗糙集方法的模糊扩展））. [1182]设

$$S = \langle U,\, Q \cup \{d\},\, V,\, f \rangle$$

为一个（有限）决策表，其中 $U$ 是对象全集， $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ 是条件准则集， $d$ 是决策准则，且 $f: U \times (Q \cup \{d\}) \to V$ 是信息函数。假设决策属性诱导出一个有序的决策类族

$\mathrm{Cl}_1, \ldots, \mathrm{Cl}_k$, 索引越高，表示类别（弱意义上）越好。

固定模糊逻辑联结词：一个 $t$-范数 $T$、一个 $t$-余范数 $S$，以及一个蕴涵算子 $I$（通常是左连续 $t$-范数的 $R$-蕴涵算子）。

一个模糊*DRSA*模型由以下要素组成。

**(1) 模糊（逐准则）排序关系和模糊优势**。对于每个准则 $q \in Q$，令

$$R_q : U \times U \to [0,1]$$

为模糊预序（自反且 $T$-传递）。对于非空准则集 $P \subseteq Q$，定义模糊优势关系

$$D_P(u,v) := T_{q\in P}\big(R_q(u,v)\big) \in [0,1], \qquad u,v \in U.$$

（因此， $D_P(u,v)$表示“$u$相对于 $P$中的所有准则至少与 $v$一样好”的程度。）当 $P$ 固定时，记作 $D := D_P$。

**(2) 模糊决策类和模糊类并**。在模糊DRSA中，允许每个类别是一个模糊集

$$\mathrm{Cl}_t : U \to [0,1], \qquad \mathrm{Cl}_t(u) \text{ is the credibility that } u \text{ belongs to class } \mathrm{Cl}_t.$$

定义模糊向上并模糊向下并集（一个标准选择）如下：

$$\mathrm{Cl}_t^{\geq}(u) := \max_{s\geq t} \mathrm{Cl}_s(u), \qquad \mathrm{Cl}_t^{\leq}(u) := \max_{s\leq t} \mathrm{Cl}_s(u), \qquad u \in U,\ t = 1,\dots,k.$$

**（3）模糊化量词**。令 $\mathrm{qua}_\forall$ 和 $\mathrm{qua}_\exists$ 为用于对 $U$ 上的真度进行聚合的模糊量词。两种典型选择为：

$$(\mathrm{qua}_\forall, \mathrm{qua}_\exists) = (T, S) \quad (\text{finite-}U \text{ aggregation}) \qquad \text{or} \qquad (\mathrm{qua}_\forall, \mathrm{qua}_\exists) = (\inf, \sup) \quad (\text{general}).$$

如果 $(\mathrm{qua}_\forall,\ \mathrm{qua}_\exists) = (T,\ S)$，则解释为

$$\mathrm{qua}_\forall(a_v;\, v \in U) = T_{v\in U} a_v, \qquad \mathrm{qua}_\exists(a_v;\, v \in U) = S_{v\in U} a_v.$$

**（4）模糊DRSA下近似/上近似**。对于每个 $t \in \{1,\dots,k\}$，将并集的模糊下近似和上近似定义为 $U$ 上的模糊集，其隶属度属于 $[0,1]$:

$$\underline{\mathrm{apr}}_D^{\mathrm{qua}_\forall, I}\big(\mathrm{Cl}_t^{\geq}\big)(u) := \mathrm{qua}_\forall\Big(I\big(D(v,u),\, \mathrm{Cl}_t^{\geq}(v)\big)\,;\ v \in U\Big),$$

$$\overline{\mathrm{apr}}_D^{\mathrm{qua}_\exists, T}\big(\mathrm{Cl}_t^{\geq}\big)(u) := \mathrm{qua}_\exists\Big(T\big(D(u,v),\, \mathrm{Cl}_t^{\geq}(v)\big)\,;\ v \in U\Big),$$

$$\underline{\mathrm{apr}}_D^{\mathrm{qua}_\forall, I}\big(\mathrm{Cl}_t^{\leq}\big)(u) := \mathrm{qua}_\forall\Big(I\big(D(u,v),\, \mathrm{Cl}_t^{\leq}(v)\big)\,;\ v \in U\Big),$$

$$\overline{\mathrm{apr}}_D^{\mathrm{qua}_\exists, T}\big(\mathrm{Cl}_t^{\leq}\big)(u) := \mathrm{qua}_\exists\Big(T\big(D(v,u),\, \mathrm{Cl}_t^{\leq}(v)\big)\,;\ v \in U\Big).$$

我们将类型 $M$ 的不确定DRSA（U-DRSA）定义如下。

**定义 9.2.2**（类型 $M$ 的不确定DRSA（U-DRSA））. 设

$$\mathsf{DT} = \langle U,\, Q \cup \{d\},\, V,\, f \rangle$$

设其为一个有限决策表，其中 $U$ 是有限对象全集，$Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$ 是条件准则集，$d$ 是决策准则，且 $f: U \times (Q \cup \{d\}) \to V$ 是信息函数。

固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，以及一个可容许评分 $S_M$。

**(A) 不确定值准则及其清晰投影。** 假设每个条件准则$q \in Q$ 和决策准则 $d$ 的值都属于 $\mathrm{Dom}(M)$:

$$f(u,q) \in \mathrm{Dom}(M) \quad (q \in Q), \qquad f(u,d) \in \mathrm{Dom}(M) \quad (u \in U).$$

定义投影后的（清晰）准则值

$$g_q(u) := S_M\big(f(u,q)\big) \in \mathbb{R} \quad (q \in Q), \qquad g_d(u) := S_M\big(f(u,d)\big) \in \mathbb{R} \quad (u \in U).$$

**(B) 有序决策类及其并集。** 假设决策属性诱导出一个有序的决策类族

$$\mathrm{Cl}_1, \ldots, \mathrm{Cl}_K \subseteq U, \qquad \text{with higher index meaning a (weakly) better class.}$$

定义上向并集和下向并集

$$\mathrm{Cl}^{\geq t} := \bigcup_{s=t}^{K} \mathrm{Cl}_s, \qquad \mathrm{Cl}^{\leq t} := \bigcup_{s=1}^{t} \mathrm{Cl}_s, \qquad t = 1, \ldots, K.$$

**（C）准则上的支配关系。**对于任意非空子集 $P \subseteq Q$，定义（清晰）支配关系

$$D_P := \{(u,v) \in U \times U :\ g_q(u) \geq g_q(v)\ \ \forall q \in P\}.$$

等价地，$(u,\ v) \in D_P$表示 $u$在 $P$中的所有准则上支配 $v$。对于 $u \in U$，定义支配锥

$$D_P^+(u) := \{v \in U :\ (v,u) \in D_P\} \quad (\text{objects dominating } u),$$
$$D_P^-(u) := \{v \in U :\ (u,v) \in D_P\} \quad (\text{objects dominated by } u).$$

**（D）DRSA 对并集的下近似/上近似。**对于每个 $t \in \{1, \ldots, K\}$ 定义:

$$\underline{P}\big(\mathrm{Cl}^{\geq t}\big) := \{u \in U :\ D_P^+(u) \subseteq \mathrm{Cl}^{\geq t}\}, \qquad \overline{P}\big(\mathrm{Cl}^{\geq t}\big) := \{u \in U :\ D_P^-(u) \cap \mathrm{Cl}^{\geq t} \neq \varnothing\},$$
$$\underline{P}\big(\mathrm{Cl}^{\leq t}\big) := \{u \in U :\ D_P^-(u) \subseteq \mathrm{Cl}^{\leq t}\}, \qquad \overline{P}\big(\mathrm{Cl}^{\leq t}\big) := \{u \in U :\ D_P^+(u) \cap \mathrm{Cl}^{\leq t} \neq \varnothing\}.$$

近似的四元组

$$\Big(\underline{P}(\mathrm{Cl}^{\geq t}), \overline{P}(\mathrm{Cl}^{\geq t}), \underline{P}(\mathrm{Cl}^{\leq t}), \overline{P}(\mathrm{Cl}^{\leq t})\Big)_{t=1}^{K}$$

称为不确定*DRSA*近似系统，与($\mathsf{DT}$ $M, S_M, P$ ).

**定理 9.2.3**（U-DRSA 的良定义性）。在定义 *9.2.2* 下，假设 $U$ 是有限的，$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且 $S_M$ 是可容许的。那么，对于任意非空的 $P \subseteq Q$ 以及任意 $t \in \{1, \dots, K\}$:

*(i)* 支配关系 $D_P \subseteq U \times U$ 是良定义的预序（自反且传递）。*(ii)* 对所有 $u \in U$，支配锥 $D_P^+(u)$ 和 $D_P^-(u)$ 都是 $U$ 的良定义子集。*(iii)* 集合 $P$（闭包$^{\geq t}$）、$P$（闭包$^{\geq t}$）、$P$（闭包$^{\leq t}$）和 $P$（闭包$^{\leq t}$）都是 $U$ 的良定义子集。

证明。(i) 由于 $S_M$ 是可容许的，因此每个 $g_q(u) = S_M(f(u,q))$ 都是有限实数，所以比较$g_q(u) \geq g_q(v)$ 是良定义的。因此 $D_P$ 是良定义的。由于对所有 $q \in P$，$g_q(u) \geq g_q(u)$，故自反性成立，因此 $(u,u) \in D_P$。传递性：若 $(u,v) \in D_P$ 且 $(v,w) \in D_P$，则对每个 $q \in P$，$g_q(u) \geq g_q(v) \geq g_q(w)$，因此 $(u,w) \in D_P$。所以 $D_P$ 是预序。

(ii) 给定 $D_P$，锥体 $D_P^+(u) = \{v : (v, u) \in D_P\}$ 和 $D_P^-(u) = \{v : (u, v) \in D_P\}$ 通过在有限论域 $U$ 上进行集合构造来定义，因此是 $U$ 的良定义子集。

(iii) 每个近似集均通过对良定义集合 $D_P^+(u)$ $D_P^-(u)$ 及并集 $\mathrm{Cl}^{\geq t}$、$\mathrm{Cl}^{\leq t}$ 应用标准集合运算（子集检验、交集、空集判定）来定义，因此是良定义的。 □

## 9.3 模糊马尔可夫决策过程

马尔可夫决策过程对包含状态、动作、转移概率和奖励的序贯决策进行建模；动态规划（价值迭代/策略迭代）可得出使期望回报最大化的最优策略[1184, 1185]。当概率不精确时，模糊马尔可夫决策过程使用模糊集表示转移、奖励或状态；模糊贝尔曼更新可计算模糊价值函数和鲁棒策略 [1186, 1187]。

**定义 9.3.1**（模糊马尔可夫决策过程（FMDP））。[1186, 1187] 设（$S$，$\Sigma_S$）为一个（有限或可测）状态空间，且（$A$，$\Sigma_A$）为一个动作空间。对于每个 $s \in S$，令 $A(s) \subseteq A$ 为（非空的）可行动作集。固定折扣因子 $\gamma \in [0, 1)$。

一个模糊马尔可夫决策过程（在可能性/最大–最小意义下）是一个元组

$$\mathcal{M} = \big(S, \{A(s)\}_{s \in S}, \widetilde{P}, \widetilde{r}, \gamma\big),$$

其中:

1. **模糊 y 转移核（可能性核）**。对于每个 $(s,\ a) \in S \times A$（$s$），映射 g

$$\widetilde{P}(\,\cdot\,|s,a) : S \to [0,1], \qquad s' \mapsto \widetilde{P}(s'|s,a),$$

是一个正规模糊 ˜y集于 $S$（即$\sup_{s' \in S} P(s'|s,a) = 1$）。它在$(S, \Sigma_S)$上诱导出一个可能性测度，通过

$$\Pi(B \,|\, s,a) := \sup_{s' \in B} \widetilde{P}(s'|s,a), \qquad B \in \Sigma_S.$$

2. **模糊奖励**。对于每个$(s,a)\in S\times A(s)$，即时奖励是一个模糊集

$$\widetilde{r}(s,a)\in\mathcal{F}(\mathbb{R}),$$

通常限　于模糊数（正规、上半连续且支撑有界）。

3. **策略**。（确定性）平稳策略 是一个映射 $f:S\to A$，满足 $f(s)\in A(s)$。更一般地，（可能随机的）依赖历史的策略是一个族 $\pi=\{\pi_t\}_{t\ge 0}$，其中 $\pi_t(\cdot\,|h_t)$ 是给定历史 $h_t=(s_0,\ a_0,\ \ldots\ldots,\ s_t)$ 时关于 $A(s_t)$ 的概率分布。

**可能性状态演化（模糊状态 / 可能性分布）**。模糊状态（可能性分布）是 $\widetilde{x}\in\mathcal{F}(S)$，即一个映射 $\widetilde{x}:S\to[0,1]$，满足 $\sup_{s\in S}\widetilde{x}(s)=1$。在时刻 $t$ 选择行动 $a_t\in A(\cdot)$ 后，下一个模糊状态由最大–最小合成定义

$$\widetilde{x}_{t+1}(s')=\bigvee_{s\in S}\Big(\widetilde{x}_t(s)\wedge\widetilde{P}(s'|s,a_t)\Big),\qquad s'\in S,$$

其中 $\vee=$ 取最大值，$\wedge=$ 取最小值。

**折扣模糊回报**。令 $\oplus$ 和 $\odot$ 分别表示模糊加法和数乘（例如，可通过扎德扩张原理定义；当 $\widetilde{r}(s,a)$ 为模糊数时，也可等价地通过 $\alpha$-截集定义）：

$$(\widetilde{u}\oplus\widetilde{v})_\alpha=(\widetilde{u})_\alpha+(\widetilde{v})_\alpha,\qquad (c\odot\widetilde{u})_\alpha=c\,(\widetilde{u})_\alpha\quad(c\ge 0).$$

对于固定策略 $\pi$ 和初始模糊状态 $\widetilde{x}_0$，将折扣总模糊奖励（形式上）定义为

$$\widetilde{G}^{\pi}(\widetilde{x}_0):=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\gamma^t\odot\widetilde{r}(s_t,a_t),$$

~其中，$(s_t,a_t)$ 在 $\pi$ 和转移核 $P$ 下生成。（对于有界奖励和 $\gamma<1$，在标准的模糊算术选择下，该级数是良定义的，通常通过检查 $\alpha$-截集上的收敛性来验证。）

定义 不确定类型 $M$ 马尔可夫决策过程（U-MDP）的定义如下。

**定义 9.3.2**（类型为 $M$ （U-MDP）的不确定马尔可夫决策过程）。设 $S$ 为有限非空状态集，$A$ 为有限非空动作集。对于每个 $s\in S$，令 $A(s)\subseteq A$ 为非空可行动作集。固定折扣因子 $\gamma\in[0,1)$。

固定一个不确定模型 $M$，其 Dom（$M$）为 $\neq\emptyset$，且可容许得分为 $S_M^P$，$S_M^R$。类型为 不确定马尔可夫决策过程 $M$ 的对象是一个元组

$$\mathcal{M}_M=\big(S,\{A(s)\}_{s\in S},\,P_M,\,R_M,\,\gamma;\,S_M^P,S_M^R\big),$$

其中:

- **不确定转移度：**$P_M:\ S\times A\times S\to\mathrm{Dom}(M)$ 为每个满足 $a\in A(s)$ 的 $(s,a,s')$ 分配一个不确定度元组$P_M(s'|s,a)\in\mathrm{Dom}(M)$。

- **不确定奖励度：** $R_M$： $S\times A \to \mathrm{Dom}(M)$ 为每个满足 $a \in A(s)$ 的 $(s,a)$ 分配一个不确定度元组 $R_M(s,a) \in \mathrm{Dom}(M)$。

**通过评分和归一化诱导得到的（清晰）马尔可夫决策过程**。定义（严格为正的）转移得分

$$\alpha(s'|s,a) := S_M^P\big(P_M(s'|s,a)\big) \in (0,\infty), \qquad a \in A(s),$$

以及归一化常数

$$Z(s,a) := \sum_{t\in S} \alpha(t|s,a) \in (0,\infty).$$

定义诱导转移概率

$$p(s'|s,a) := \frac{\alpha(s'|s,a)}{Z(s,a)} \in (0,1), \qquad \sum_{s'\in S} p(s'|s,a) = 1.$$

定义诱导即时奖励

$$r(s,a) := S_M^R\big(R_M(s,a)\big) \in \mathbb{R}.$$

诱导得到的（清晰）马尔可夫决策过程为 $(S, \{A(s)\}, p, r, \gamma)$。

**策略和值函数**。（确定性）平稳策略是一个映射 $\pi : S \to A$，满足 $\pi(s) \in A(s)$。对于这样的 $\pi$，定义价值函数 $V^\pi : S \to \mathbb{R}$ 为折扣期望

$$V^\pi(s) := \mathbb{E}^\pi\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t\, r(S_t, \pi(S_t)) \;\middle|\; S_0 = s\right],$$

其中 $(S_t)_{t\ge 0}$ 按照 $p(\cdot|s,\ \pi(s))$ 演化。

最优价值函数为

$$V^\star(s) := \sup_\pi V^\pi(s),$$

并且最优策略 $\pi^\star$ 满足 $V^{\pi^\star} = V^\star$。

**命题 9.3.3**（概率良定义性）。 根据定义 *9.3.2*，对于每个（$s,a$），若满足 $a \in A$（$s$），则诱导转移概率 $p$（$\cdot|s,a$）良定义且满足

$$p(s'|s,a) \ge 0, \qquad \sum_{s'\in S} p(s'|s,a) = 1.$$

证明。 $\alpha(s'|s,a) = S_M^P(P_M(s'|s,a)) > 0$ 对每个 $s'$均成立。因此 $Z(s,a) = \sum_{t\in S}\alpha(t|s,a) > 0$，所以 $p(s'|s,a) = \alpha(s'|s,a)/Z(s,a)$ 良定义且非负。对 $s'$ 求和可得 $\sum_{s'} p(s'|s,a) = Z(s,a)/Z(s,a) = 1$。

□

**定理 9.3.4 (**折扣价值的良定义性与贝尔曼最优性)。 假设满足定义 *9.3.2* 的设定，且诱导奖励有界：存在 $R_{\max} < \infty$ 使得 $|r(s,a)| \le R_{\max}$ 对所有可行的 $(s,a)$均成立。则：

*(i)* 对每个平稳策略 $\pi$，价值函数 $V^\pi$ 均良定义且有界：

$$|V^\pi(s)| \le \frac{R_{\max}}{1-\gamma} \qquad (s \in S).$$

*(ii)* 贝尔曼期望算子 $T^\pi:\ \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$，

$$(T^\pi V)(s) := r(s,\pi(s)) + \gamma \sum_{s' \in S} p(s'|s,\pi(s))\, V(s'),$$

$i$是上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的 $\gamma$-压缩映射，并且具有唯一不动点，等于 $V^\pi$。

*(iii)* 贝尔曼最优算子 $T^\star:\ \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$，

$$(T^\star V)(s) := \max_{a \in A(s)} \left[ r(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} p(s'|s,a)\, V(s') \right],$$

同样是 $\gamma$-压缩映射，并且具有唯一不动点 $V^\star$。此外，存在一个最优确定性平稳策略 $\pi^\star$，它在 $T^\star$ 中取得最大化元。

证明。 (i) 由于 几乎必然地，折扣级数绝对有界于 $|r(S_t,\pi(S_t))| \le R_{\max}$ b y

$$\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R_{\max} = \frac{R_{\max}}{1-\gamma},$$

因此，定义 $V^\pi(s)$ 的期望是有限的，且该界成立。

(ii) 对任意 $V, W \in \mathbb{R}^S$ 和任意 $s \in S$，

$$|(T^\pi V)(s) - (T^\pi W)(s)| = \gamma \left| \sum_{s'} p(s'|s,\pi(s))\,(V(s') - W(s')) \right| \le \gamma \sum_{s'} p(s'|s,\pi(s))\, \|V-W\|_\infty = \gamma \|V-W\|_\infty.$$

取上确界 $s$ 得到 $\|T^\pi V - T^\pi W\|_\infty \le \gamma \|V-W\|_\infty$，因此 $T^\pi$ 是压缩映射。根据完备度量空间 $(\mathbb{R}^S, \|\cdot\|_\infty)$ 上的巴拿赫不动点定理， $T^\pi$ 有唯一的不动点。标准的马尔可夫决策过程论证表明，该不动点等于折扣价值函数 $V^\pi$。

(iii) 对任意 $V, W$ 和任意 $s$，

$$|(T^\star V)(s) - (T^\star W)(s)| \le \max_{a \in A(s)} \gamma \left| \sum_{s'} p(s'|s,a)(V(s') - W(s')) \right| \le \gamma \|V-W\|_\infty,$$

因此 $\|T^\star V - T^\star W\|_\infty \le \gamma \|V-W\|_\infty$，故 $T^\star$ 是一个压缩映射并具有唯一不动点 $V^\star$。由于 $A(s)$是有限的，$(T^\star V)(s)$中的最大值对每个 $s$均可达到；选取一个最大值点行动即定义一个确定性平稳策略 $\pi^\star$，而不动点恒等式 $V^\star = T^\star V^\star$ 蕴含最优性。 □

相关概念 不确定性感知模型下的马尔可夫决策过程列于表 9 .3.

表 9.3：不确定性感知模型下马尔可夫决策过程的相关概念 .

| $k$ | **相关的马尔可夫决策过程概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊马尔可夫决策过程 |
| 3 | 中智马尔可夫决策过程 [1188, 1189] |

## 9.4 模糊证据推理

经典证据推理将信念度赋予评价等级，基于登普斯特-谢弗演算使用证据推理聚合来组合多个准则，然后计算期望效用 [1190,1191]。模糊证据推理将每个准则表示为评价等级上的模糊信念度，使用证据推理规则跨准则组合证据，然后对效用进行去模糊化以便排序 [1192, 1193]。

**定义 9.4.1**（模糊证据推理（模糊证据推理））。 [1194,1195] 设 $\Theta = \{H_1, \dots, H_N\}$ 为一个有限的评价等级 （假设）集。设 $X_i$ 为第 $i$ 个前件属性（$i = 1, \dots, M$）的定义域。对每个 $i$，固定一个语言项集 $\mathcal{A}_i = \{A_{i,1}, \dots, A_{i,J_i}\}$，其中每个 $A_{i,j}$ 都由定义在 $X_i$ 上的模糊集表示，其隶属函数为 $\mu_{i,j} : X_i \to [0,1]$。

一个置信规则库 （带有置信结构的模糊规则库）是由一组规则 $\mathcal{R} = \{R_k\}_{k=1}^{L}$ 构成的，规则形式如下：

$$R_k : \quad \textbf{IF } x_1 \text{ is } A_1^k \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_M \text{ is } A_M^k \textbf{ THEN } \big\{(H_j, \beta_{k,j})\big\}_{j=1}^{N},$$

其中， $A_i^k \in \mathcal{A}_i$ 是规则 $k$ 中用于属性 $i$的前件语言项，且信念度 满足

$$\beta_{k,j} \in [0,1], \qquad \sum_{j=1}^{N} \beta_{k,j} \le 1 \quad (k = 1, \dots, L).$$

（该不等式允许后件信念分配存在不完备性 。）

对于每个属性 $i$，给定观测（可能是模糊的） $\widetilde{x}_i \in \mathcal{F}(X_i)$，将其与前件项 $A_i^k$ 之间的匹配度 定义为最大–最小相似度

$$\alpha_i^k := \max_{t \in X_i} \min\big(\mu_{\widetilde{x}_i}(t), \mu_{A_i^k}(t)\big) \in [0,1], \qquad i = 1, \dots, M, \ k = 1, \dots, L.$$

（如果投入是清晰的 $x_i \in X_i$，可以取 $\mu_{\widetilde{x}_i}(t) = \mathbb{1}_{\{x_i\}}(t)$，从而得到 $\alpha_i^k = \mu_{A_i^k}(x_i)$。）

令 $\omega_k \ge 0$ 表示可选的规则内在权重 （规则 $k$的重要性）。将规则 $k$ 的激活权重（归一化激活强度）定义为

$$\theta_k := \frac{\omega_k \prod_{i=1}^{M} \alpha_i^k}{\sum_{\ell=1}^{L} \omega_\ell \prod_{i=1}^{M} \alpha_i^\ell} \quad \text{so that} \quad \theta_k \ge 0, \ \sum_{k=1}^{L} \theta_k = 1.$$

**证据推理- 质量构造**。 对于每条规则 $k$，在 $\Theta \cup \{D\}$ b 上定义基本概率质量 y

$$m_k(H_j) := \theta_k \, \beta_{k,j} \qquad (j = 1, \dots, N),$$

$$m_k(D) := 1 - \sum_{j=1}^{N} m_k(H_j) = 1 - \theta_k \sum_{j=1}^{N} \beta_{k,j},$$

并将未分配的质量拆分为

$$\overline{m}_k(D) := 1 - \theta_k, \qquad \widetilde{m}_k(D) := \theta_k \Big(1 - \sum_{j=1}^{N} \beta_{k,j}\Big), \quad \text{so that } m_k(D) = \overline{m}_k(D) + \widetilde{m}_k(D).$$

**证据推理聚合**。初始化 $m^{(1)}(\cdot) = m_1(\cdot)$。对于 $k = 1,\ldots,L-1$，将 $m^{(k)}$ 和$m_{k+1}$ 按以下方式组合

$$m^{(k+1)}(H_j) = K_{k+1}\Big(m^{(k)}(H_j)m_{k+1}(H_j) + m^{(k)}(H_j)m_{k+1}(D) + m^{(k)}(D)m_{k+1}(H_j)\Big),$$

$$\widetilde{m}^{(k+1)}(D) = K_{k+1}\Big(\widetilde{m}^{(k)}(D)\widetilde{m}_{k+1}(D) + \widetilde{m}^{(k)}(D)\overline{m}_{k+1}(D) + \overline{m}^{(k)}(D)\widetilde{m}_{k+1}(D)\Big),$$

$$\overline{m}^{(k+1)}(D) = K_{k+1}\,\overline{m}^{(k)}(D)\,\overline{m}_{k+1}(D), \qquad m^{(k+1)}(D) = \widetilde{m}^{(k+1)}(D) + \overline{m}^{(k+1)}(D),$$

其中，归一化因子 $K_{k+1}$ 为

$$K_{k+1} := \Big(1 - \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{N} m^{(k)}(H_j)m_{k+1}(H_t)\Big)^{-1}.$$

**模糊证据推理输出（信念分布）**。模糊证据推理综合结果为信念分布 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_N,\beta_D)$，其定义如下

$$\beta_j := \frac{m^{(L)}(H_j)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)} \quad (j = 1,\ldots,N), \qquad \beta_D := \frac{\widetilde{m}^{(L)}(D)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)}.$$

此处，$\beta_D$ 量化聚合后剩余的（归一化）不完备性。该映射

$$\mathrm{ER} : \big\{(\theta_k, \beta_{k,1},\ldots,\beta_{k,N})\big\}_{k=1}^{L} \longmapsto (\beta_1,\ldots,\beta_N,\beta_D)$$

称为模糊证据推理。

利用不确定集，我们定义不确定证据推理如下。

**定义9.4.2**（类型为 $M$（U-ER）的不确定证据推理）。设 $\Theta = \{H_1,\ldots,H_N\}$ 为一个有限的评价等级（假设）集，其中 $N \geq 2$。设 $L \geq 1$ 为证据源的数量（例如准则、规则、专家）。

固定一个不确定模型 $M$，其$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，以及可容许评分 $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to [0,\quad 1]$.

对于每个证据来源 $\ell \in \{1,\ldots,L\}$，假设：

- uncertain belief degrees $b_{\ell j}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M)$ for grades $H_j$ $(j = 1,\ldots,N)$,

- 一个不确定的可靠性/激活度 $\theta_{(M)\,\ell}$ $\in$ Dom($M$)。

定义它们的清晰投影

$$\beta_{\ell j} := S_M\big(b_{\ell j}^{(M)}\big) \in [0,1], \qquad \theta_\ell := S_M\big(\theta_\ell^{(M)}\big) \in [0,1].$$

**(A) 一致性（允许不完全信念）**。假设对每个 $\ell$,

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_{\ell j} \le 1.$$

定义来源 $\ell$的不完备性（无知）：

$$\beta_{\ell D} := 1 - \sum_{j=1}^{N} \beta_{\ell j} \in [0,1].$$

**（B）基本概率质量**。 对每个 $\ell$，在 $\Theta \cup \{D\}$ 上按如下方式定义基本概率分配（BPA）

$$m_\ell(H_j) := \theta_\ell\, \beta_{\ell j} \quad (j = 1, \dots, N), \qquad m_\ell(D) := 1 - \sum_{j=1}^{N} m_\ell(H_j) = 1 - \theta_\ell \sum_{j=1}^{N} \beta_{\ell j}.$$

将 $m_\ell$(*D*)拆分为

$$\overline{m}_\ell(D) := 1 - \theta_\ell, \qquad \widetilde{m}_\ell(D) := \theta_\ell\, \beta_{\ell D}, \qquad m_\ell(D) = \overline{m}_\ell(D) + \widetilde{m}_\ell(D).$$

**（C）ER聚合（序贯组合）**。集合 $m^{(1)} := m_1$, $m^{(1)} := m_1$, $\widetilde{m}^{(1)} := \widetilde{m}_1$。对于$k = 1$, ..., $L - 1$, 将 $(m^{(k)},\ m^{(k)},\ \widetilde{m}^{(k)})$ 与 $(m_{k+1},\ m_{k+1},\ \widetilde{m}_{k+1})$ 通过

$$K_{k+1} := \left( 1 - \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{N} m^{(k)}(H_j)\, m_{k+1}(H_t) \right)^{-1},$$

$$m^{(k+1)}(H_j) := K_{k+1} \Big( m^{(k)}(H_j) m_{k+1}(H_j) + m^{(k)}(H_j) m_{k+1}(D) + m^{(k)}(D) m_{k+1}(H_j) \Big),$$

$$\overline{m}^{(k+1)}(D) := K_{k+1}\, \overline{m}^{(k)}(D)\, \overline{m}_{k+1}(D),$$

$$\widetilde{m}^{(k+1)}(D) := K_{k+1} \Big( \widetilde{m}^{(k)}(D) \widetilde{m}_{k+1}(D) + \widetilde{m}^{(k)}(D) \overline{m}_{k+1}(D) + \overline{m}^{(k)}(D) \widetilde{m}_{k+1}(D) \Big),$$

$$m^{(k+1)}(D) := \overline{m}^{(k+1)}(D) + \widetilde{m}^{(k+1)}(D).$$

**（D）最终信念分布**。 设聚合质量为 $m^{(L)}$，其中拆分为 $m^{(L)}(D)$ $\widetilde{m}^{(L)}(D)$。定义正规化信念度

$$\beta_j := \frac{m^{(L)}(H_j)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)} \quad (j = 1, \dots, N), \qquad \beta_D := \frac{\widetilde{m}^{(L)}(D)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)}.$$

向量 $(\beta_1, \dots, \beta_N, \beta_D)$ 称为*U-ER*综合结果。

**定理9.4.3**（U-ER的良定义性）。 在定义*9.4.2*下，假设：

*(i)* $S_M$： $\mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$ 是可容许的；

*(ii)* 对每个 $\ell$, $\sum_{j=1}^{N} \beta_{\ell j} \le 1$ （因此 $\beta_{\ell D} \in [0,1]$）；

*(iii)* 对于每个聚合步骤 $k \to k{+}1$，冲突 满足

$$\kappa_{k+1} := \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^{N} m^{(k)}(H_j)\, m_{k+1}(H_t) \;<\; 1;$$

*(iv)* 最终归一化分母为正：

$$1 - \overline{m}^{(L)}(D) > 0.$$

那么：

*(a)* 所有质量 $m_\ell(H_j)$ $m_\ell(D)$ $m_\ell(\Theta)$ $\widetilde{m}_\ell(D)$ 在 $[0,1]$中均良定义。

*(b)* 每个中间　　因素 $K_{k+1}$ 是良定义且有限的，并且所有聚合质量仍位于 $[0,1]$中。

*(c)* 最终信念度 $\beta_j$、$\beta_D$ 是良定义的，满足 $0 \le \beta_j$、$\beta_D \le 1$，并且

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j + \beta_D = 1.$$

证明。 (a) 由于 $\theta_\ell, \beta_{\ell j} \in [0,1]$、$m_\ell(H_j) = \theta_\ell \beta_{\ell j} \in [0,1]$。此外 $m_\ell(D) = 1 - \theta_\ell \sum_j \beta_{\ell j} \in [0,1]$，因为 $\sum_j \beta_{\ell j} \le 1$。该划分满足 $m_\ell(D) = 1 - \theta_\ell \in [0,1]$ 和 $\widetilde{m}_\ell(D) = \theta_\ell \beta_{\ell D} \in [0,1]$。

（b）根据假设，$\kappa_{k+1} < 1$，因此 $K_{k+1} = (1 - \kappa_{k+1})^{-1}$ 是良定义且有限的。每个更新公式都是非负项的有限和或乘积，再乘以 $K_{k+1}$，因此定义了有限的非负质量。（这些是标准的证据推理/Dempster式归一化组合，在相同条件下保持$\Theta \cup \{D\}$ 上的总质量为1。）

（c）由于 $1 - \overline{m}^{(L)}(D) > 0$，定义 $\beta_j$ 和 $\beta_D$ 的归一化是有效的。根据（b）可知非负性成立。最后，

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j + \beta_D = \frac{\sum_{j=1}^{N} m^{(L)}(H_j) + \widetilde{m}^{(L)}(D)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)} = \frac{1 - \overline{m}^{(L)}(D)}{1 - \overline{m}^{(L)}(D)} = 1,$$

因为 $m^{(L)}(D) = m^{(L)}(D) + \widetilde{m}^{(L)}(D)$，且 $\Theta \cup \{D\}$ 上的总质量等于1。 □

不确定性感知模型下证据推理的相关概念列于表9.4中。

表9.4：不确定性感知模型下的证据推理相关概念 .

| $k$ | **相关证据推理概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊证据推理 [1196, 1197] |
| 2 | 勾股模糊证据推理 [1198, 1199] |
| 3 | 犹豫模糊证据推理 [1200] |
| 3 | 球形模糊证据推理 [1201] |
| 3 | 图画模糊证据推理 [1202] |
| 3 | 中智证据推理 [1203, 1204] |
| $n$ | 多元生成证据推理 [1205] |

# 第10章

# 其他相关决策方法

本节介绍其他决策方法及相关工具。为便于查阅，本章介绍的主要概念在表10.1中进行了比较。

表10.1：具有代表性的其他相关决策方法的简要比较。

| 方法 | Type | 基本投入<br>结构 | 核心机制 | 主要输出-<br>put | 决策-<br>sion<br>role |
|---|---|---|---|---|---|
| 目标规划-<br>ming | 模糊 | 可行集，目标<br>函数，愿望<br>层级，以及<br>模糊容差 | 定义目标满足<br>隶属度和最大化<br>最大化共同满意<br>度在所有<br>目标中的 | 折中解<br>和满意<br>度 | 目标<br>导向<br>优<br>化 |
| 目标规划<br>ming | 不确定<br>tain | 可行集，真实值<br>目标，以及<br>不确定的目<br>标/容差<br>得分为精确<br>值 | 项目的不确定目标<br>和容差，<br>构建隶属度型<br>满意度函数，<br>并求解最大–最小<br>折衷模型 | U-GP 折<br>中解 | 基于目<br>标的<br>优<br>化 |
| 数据包络<br>分析 | 模糊 | 具有模糊<br>输入和模糊<br>产出 | 扩展DEA效率<br>分析，通过模糊<br>算术运算或 $\alpha$-截集<br>围绕经验<br>前沿面 | 模糊效率<br>得分或区间<br>效率 | 效率-<br>率<br>评估-<br>tion |
| 数据包络-<br>分析 | 不确定性-<br>tain | 具有不确定性的决策单元-<br>定输入/输出<br>度数评分为<br>正向清晰数据 | 将不确定观测<br>转换为清晰的<br>DEA数据，并求解<br>由此产生的 CCR型<br>效率规划 | 清晰效率<br>得分 | 效-<br>率<br>评估-<br>tion |
| 社会选择 | 模糊 | 个体，备选项集<br>合，以及模糊<br>偏好关系 | 将分级偏好聚合<br>为集体<br>模糊偏好和 se-<br>选出一个社会偏好<br>备选方案 | 集体选择<br>或集体偏好<br>erence | Col-<br>集体<br>决策-<br>制定 |

请见下一页。

表*10.1*（续）。

| 方法 | Type | 基本输入<br>结构 | 核心机制 | 主要结果<br>put | 决策<br>sion<br>role |
|---|---|---|---|---|---|
| 社会选择 | 不确定<br>tain | 不确定偏好<br>关系<br>得分计入 $[0,1]$<br>以及聚合<br>rule | 得分不确定的成对<br>偏好，聚<br>合为一个<br>集体关系，以及<br>应用一种基于得分的<br>社会选择规则 | 选定的备选-<br>tive | Col-<br>项<br>决策-<br>制定 |
| 决策表 | 模糊 | 模糊条件<br>状态，行动<br>状态，以及规则-<br>表格条目 | 将输入与模糊<br>规则列进行匹配并选择<br>或根据<br>分级触发强度 | 行动配置-<br>配置或规则<br>产出 | 基于规则的<br>—<br>决策<br>支撑 |
| 决策表 | 不确定-<br>tain | 不确定条件-<br>状态和<br>清晰或不确定的<br>行动值 | 不确定条<br>件状态得分，评估<br>通过 $t$-范数进行规则触发，<br>并选择行动<br>通过确定性平局<br>打破 | 行动配置<br>tion | 规则<br>基础<br>决策<br>支撑 |
| 决策Ma-<br>trix | 模糊 | 备选方案，模糊<br>状态/事件，以及<br>模糊评价 | 传递模糊支付-<br>通过模糊算术得出<br>法或 $\alpha$-截集计算<br>以获得综合特<br>征 | 模糊期望<br>评价与<br>相关指标 | 矩阵<br>基础的<br>评估<br>ment |
| 决策方<br>trix | 不确<br>tain | 备选方案，准则，<br>以及不确定<br>评价项 | 得分不确定项<br>转化为清晰矩阵，并<br>支撑集归一化，<br>加权和聚合操<br>作 | 评分决策<br>矩阵 | 矩阵-<br>基于<br>评估-<br>ment |
| 超滤子 | 模糊 | 模糊接受<br>子集上的度<br>论域的 | 为子集赋予分级接<br>受度，同时保持<br>单调<br>性、交集和<br>超滤子类型的二<br>二分法 | 模糊超滤子-<br>子 / 可接受<br>族 | 决断-<br>选择<br>结构 |
| 超滤子 | 不确-<br>tain | 不确定接受-<br>度在<br>子集上且带有一个<br>可容许评分 | 将不确定<br>子集接受转换为<br>评分接受，满足<br>超滤子公理<br>在清晰层面 | 不确定超<br>滤子和<br>诱导的清晰<br>超滤子 | 决定性<br>选择<br>结构 |
| SWOT分析<br>sis | 模糊 | 内部节点和外部因<br>素由模糊<br>被模糊所怨恨<br>数或隶属-<br>度 | 聚合内部节点–<br>外部因素对，<br>分配策略象-<br>限，并确定优先级<br>按接近程度排序的策略<br>或评分规则 | 优先排序的<br>SWOT分析策-<br>gies | 战略<br>规划 |
| SWOT分析<br>sis | 不确定<br>tain | 内部节点和外部<br>因素评估<br>不确定度<br>和重要性<br>重要性权重 | 不确定因素得分<br>因素，分配<br>SO/ST/WO/WT 象限<br>，并对因素<br>对按归一化内<br>互动强度 | 优先级排序的注释<br>策略 | 战略<br>规划 |

下页继续。

表*10.1*（续）。

| 方法 | Type | 基本输入<br>结构 | 核心机制 | 主要输出—<br>put | 决策—<br>sion<br>role |
|---|---|---|---|---|---|
| 成本—效益<br>分析 | 模糊 | 模糊效益型和<br>成本型现金流，可能是模糊的<br>模糊折现<br>率 | 计算模糊现值<br>以及模糊<br>效益成本指标<br>通过模糊算术-<br>metic或 $\alpha$-截集 | 模糊净现值或<br>模糊效益成本比 | Eco-<br>经济<br>评价-<br>tion |
| 成本—效益<br>分析 | 不确定<br>tain | 不确定收益<br>，<br>成本，以及贴现-<br>率程度得分<br>转化为清晰量化<br>ties | 将不确定<br>现金流转化为清晰<br>现值并评-<br>估项目（依据净现值）<br>或效益成本比 | NPV, BCR, and<br>项目排序 | Eco-<br>经济<br>评估-<br>tion |
| 决策曲线<br>分析 | 模糊 | 二元结局，<br>模糊预测<br>风险、阈值，<br>以及损害函数 | 使用阈值<br>超越度，来自<br>待计算的模糊风险<br>跨越各阈值的模糊净获益<br>阈值 | 模糊决策<br>曲线和最优策-<br>略<br>set | 阈值<br>基于<br>模型<br>评估<br>tion |
| 决策曲线<br>分析 | 不确定<br>tain | 二元结局，<br>不确定预测<br>风险，阈值<br>超越函数，<br>以及危害<br>函数 | 评估不确定<br>风险超越在每个<br>阈值处，并计算<br>竞争策略的净获益<br>策略 | 不确定决策<br>曲线与<br>最优策略<br>set | 阈值<br>基于<br>模型<br>评价-<br>tion |
| 理性<br>选择 | 模糊 | 备选方案和一个<br>模糊二元偏好-<br>偏好关系 | 选择备选方案<br>其偏好度<br>相对于每个可行<br>竞争者都超过一个<br>固定阈值 | 模糊选择<br>对应 | 基于偏好<br>的<br>选择 |
| 理性<br>选择 | 不确定的<br>tain | 备选方案，不<br>确定的二元偏好<br>关系，<br>阈值函数<br>性的，和截断值<br>层级 | 得分不确定的成对<br>偏好比<br>较通过一种<br>阈值泛函<br>并诱导出一种选择<br>对应 | 不确定选择<br>对应 | 偏好-<br>基于<br>选择 |

**注**。 目标规划和成本效益分析是面向优化与评价的方法；数据包络分析侧重于相对效率；社会选择和理性选择用于汇总或比较偏好；决策表和决策矩阵提供结构化的规则或数据表示；超滤子将决定性的接受结构形式化；SWOT分析支持战略优先级排序；决策曲线分析则评价基于阈值的决策策略。在不确定变体中，常见的构造是从 Dom($M$) 中的不确定值输入开始，通过可容许评分或阈值泛函对其进行映射，然后应用良定义的清晰决策机制。

## 10.1 模糊目标规划

目标规划是一种优化方法，它在给定约束下通过最小化相对多个目标值的加权偏差来寻求折中解 [1206, 1207]。模糊目标规划扩展了这一思想，将目标和约束表示为模糊集，然后最小化不满意度，从而在期望水平或要求不精确时实现稳健优化 [1208, 1209]。

**定义 10.1.1** （模糊目标规划（基于隶属度的目标规划））. [1208, 1209] 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个非空可行集，并设

$$f_i : X \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

是具有期望水平（目标）的客观（目标）函数 $g_i \in \mathbb{R}$。假设每个目标都有一个可容许（容差）偏差 $\Delta_i > 0$。用（对称）三角形式定义目标满意度隶属函数 $\mu_i : X \to [0, 1]$

$$\mu_i(x) := \begin{cases} 0, & f_i(x) \le g_i - \Delta_i, \\ \dfrac{f_i(x) - (g_i - \Delta_i)}{\Delta_i}, & g_i - \Delta_i \le f_i(x) \le g_i, \\ \dfrac{(g_i + \Delta_i) - f_i(x)}{\Delta_i}, & g_i \le f_i(x) \le g_i + \Delta_i, \\ 0, & f_i(x) \ge g_i + \Delta_i. \end{cases}$$

（也可根据决策者的偏好使用其他单侧或非线性隶属度剖面。）

模糊目标规划（*FGP*）模型 通过最大化共同满意度层级来选择折中解：

$$\max_{x \in X,\ \lambda \in [0,1]} \lambda \quad \text{subject to} \quad \lambda \le \mu_i(x) \ \ (i = 1, \ldots, p).$$

任一优化器 $x^\star$ 称为模糊目标规划解。

利用不确定集，我们将不确定目标规划定义如下。

**定义10.1.2** （类型为 $M$ 的不确定目标规划（U-GP））。 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空可行集，并设

$$f_i : X \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

为目标函数，且满足 $p \ge 1$。设定期望（目标）水平

$$g_i^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

以及（严格为正的）容差水平

$$\Delta_i^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (i = 1, \ldots, p),$$

连同不确定模型 $M$ 及可容许得分

$$S_M : \mathrm{Dom}(M) \to \mathbb{R}, \qquad S_M^+ : \mathrm{Dom}(M) \to (0, \infty).$$

定义投影目标值和容差

$$g_i := S_M(g_i^{(M)}) \in \mathbb{R}, \qquad \Delta_i := S_M^+(\Delta_i^{(M)}) \in (0, \infty).$$

通过三角形轮廓定义每个 $i$ 的（隶属度式）目标满意度 le

$$\mu_i(x) := \max\left\{0,\ 1 - \frac{|f_i(x) - g_i|}{\Delta_i}\right\} \in [0, 1], \qquad x \in X.$$

（因此， $\mu_i(x) = 1$ 在目标 $f_i(x) = g_i$ 处达到目标值，并随距离增加而线性下降至 0，距离为 $\Delta_i$。）

该不确定目标规划问题是

$$\max_{x \in X,\ \lambda \in [0,1]} \lambda \quad \text{subject to} \quad \lambda \le \mu_i(x) \ \ (i = 1, \ldots, p).$$

任何优化器 $x^\star$ 都称为*U-GP* 折衷解。

**定理10.1.3**（U-GP的良定义性与可行性）。根据定义*10.1.2*，假设：

*(i)* $X \neq \varnothing$；*(ii)* $S_M$ 是可容许的，且 $S_M^+$ 是可容许正型（即对于所有 $i$， $\Delta_i > 0$）；

*(iii)* 每个 $f_i$ 在 $X$上都是良定义的实值函数。

则：

*(a)* 每个隶属函数 $\mu_i$： $X \to [0, 1]$ 都是良定义的。

*(b) T he U-GP*可行集是非空的（因此该优化问题是良定义的 *).*

*(c)* 任意最优值均满足 $0 \le \lambda^\star \le 1$。

证明。(a) 固定 $i$ 和 $x \in X$。由于 $f_i(x)$ $g_i \in \mathbb{R}$，量 $|f_i(x) - g_i|$ 是有限的。因为 $\Delta_i > 0$，比率 $|f_i(x) - g_i|/\Delta_i$ 是良定义且非负的。因此， $1 - |f_i(x) - g_i|/\Delta_i$ 是一个实数，取 $\max\{0, \cdot\}$ 可得 $\mu_i(x) \ge 0$。此外，由于 $|f_i(x) - g_i|/\Delta_i \ge 0$，我们有 $1 - |f_i(x) - g_i|/\Delta_i \le 1$，所以 $\mu_i(x) \le 1$。因此， $\mu_i(x) \in [0, 1]$ 且 $\mu_i$ 是良定义的。

(b) 由于 $X \neq \varnothing$，任取 $\bar{x} \in X$。根据 (a)，对于所有 $i$， $\mu_i(\bar{x}) \in [0, 1]$。令 $\lambda := 0$。那么对于每个 $i$， $\lambda \le \mu_i(\bar{x})$ 都成立，并且 $\lambda \in [0, 1]$。因此 $(\bar{x},\ \lambda)$ 是可行的，所以可行集非空。

(c) 根据构造， $\lambda \in [0, 1]$ 得到强制满足，因此任何最优解都满足 $0 \le \lambda^\star \le 1$。 □

不确定性感知模型下目标规划的相关概念列于表 10.2。

作为不确定目标规划之外的相关概念，多目标规划 [1218, 1219]，交互式目标规划 [1220, 1221]，元目标规划 [1222, 1223]，加权目标规划 [1224,1225]，词典序目标规划 [1226,1227]，切比雪夫目标规划 [1228,1229]，群组目标规划 [1230]，分式目标规划 [1231, 1232]，以及多选择目标规划 [1233, 1234] 也已为人所知。

表10.2：不确定性感知模型下的目标规划相关概念 .

| $k$ | **相关目标规划概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊目标规划 |
| 2 | 直觉模糊目标规划 [1210, 1211] |
| 2 | 毕达哥拉斯模糊目标规划 [1212, 1213] |
| 3 | 中智目标规划 [1214, 1215] |
| 3 | 图形模糊目标规划 [1216] |
| 3 | 球形模糊目标规划 [1217] |

## 10.2 模糊DEA（模糊数据包络分析）

DEA利用线性规划评估决策单元的相对效率，同时将多个输入和输出与经验前沿面进行比较 [1235, 1236]。模糊DEA通过将输入、输出或数据不确定性建模为模糊数来扩展DEA，从而在总体上稳健地得出可能性效率范围 [1237, 1238]。

**定义 10.2.1** （模糊数据包络分析（模糊DEA / 模糊DEA））。[1239, 1240] 设整数$n \geq 1$（决策单元）、 $m \geq 1$（输入）和 $s \geq 1$（输出）。令 $\mathcal{J} := \{1, \ldots, n\}$ 为决策单元（DMU）的指标集。对于每个 $j \in \mathcal{J}$，决策单元 $j$ 消耗 $m$ 个输入并产出 $s$ 个输出。

**模糊观测。** 对于每个投入 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和决策单元 $j \in \mathcal{J}$，该投入是一个模糊数$\tilde{x}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$。对于每个产出 $r \in \{1, \ldots, s\}$ 和决策单元 $j \in \mathcal{J}$，该产出是一个模糊数 $\tilde{y}_{rj} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$。（因此，经典的清晰数据（$x_{ij}$,$y_{rj}$）被模糊投入产出变量取代。）

**底层清晰DEA映射（CCR，投入导向）。** 对于任意精确实现 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ 和 $Y = (y_{rj}) \in \mathbb{R}_+^{s \times n}$，定义决策单元 $p \in \mathcal{J}$ 的（投入导向）CCR效率如下

$$\theta_p(X, Y) := \min_{\theta, \lambda} \ \theta$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta \, x_{ip} \ (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \ (r = 1, \ldots, s), \quad \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

其中， $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n)$为强度变量。（通过添加 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$，可得到BCC/可变规模报酬等其他标准DEA变体。）

**模糊效率（扩展原理）。** 决策单元 $p$ 的模糊*CCR*效率是模糊数 ~ ~ $\tilde{\theta}_p \in \mathcal{F}((0, 1])$，它由模糊数据 $X = (\tilde{x}_{ij})$和 $Y = (\tilde{y}_{rj})$通过Zadeh的扎德扩张原理导出，即~ ~ $\tilde{\theta}_p := \text{Ext}(\theta_p)(X, Y)$。

~等价地（这也是模糊DEA实践中最常见的做法）， $\theta_p$ 由 $\alpha$-截集刻画：对每个 $\alpha \in [0, 1]$，定义 $\alpha$-截区间

$$(\tilde{x}_{ij})_\alpha = [x_{ij}^L(\alpha), x_{ij}^U(\alpha)], \qquad (\tilde{y}_{rj})_\alpha = [y_{rj}^L(\alpha), y_{rj}^U(\alpha)],$$

以及相应的可容许清晰数据集集合

$$\mathcal{D}_\alpha := \Big(\prod_{i,j}[x_{ij}^L(\alpha), x_{ij}^U(\alpha)]\Big) \times \Big(\prod_{r,j}[y_{rj}^L(\alpha), y_{rj}^U(\alpha)]\Big).$$

那么，模糊效率的 $\alpha$-截集为区间

$$(\tilde{\theta}_p)_\alpha = \big[\theta_p^L(\alpha), \theta_p^U(\alpha)\big], \qquad \theta_p^L(\alpha) := \inf_{(X,Y)\in\mathcal{D}_\alpha} \theta_p(X,Y), \quad \theta_p^U(\alpha) := \sup_{(X,Y)\in\mathcal{D}_\alpha} \theta_p(X,Y).$$

因此，对于每个 $\alpha$，模糊DEA通过将模糊DEA模型转换为在 $\alpha$-截区间上求解的清晰线性规划，得到的是区间效率得分，而非单一的清晰得分。

˜最后，可通过 $\alpha$-截集恢复 $\theta_p$ 的隶属函数，具体如下:

$$\mu_{\tilde{\theta}_p}(t) = \sup\big\{\alpha \in [0,1] \ : \ t \in [\theta_p^L(\alpha), \theta_p^U(\alpha)]\big\}.$$

˜**模糊DEA（作为一种方法）**。集合 $\{\theta_p\}_{p\in\mathcal{J}}$ 称为 $n$ 决策单元的模糊*DEA*评价。˜随后，应用选定的模糊数排序／去模糊化规则对 $\theta_p$进行排序／选择（或比较 $\alpha$-层级区间）。

使用不确定集，M型不确定DEA的定义如下 .

**定义10.2.2** （ $M$ 类型的不确定DEA（U-DEA），CCR投入导向）。 固定整数 $n \geq 1$ （决策单元）、$m \geq 1$ （输入）和 $s \geq 1$（输出）。令 $\mathcal{J}$:= $\{1,\ldots,n\}$ 对决策单元进行索引。固定一个不确定模型 $M$，其Dom($M$)为 $\neq \emptyset$，且有一个可容许正评分 $S_M$。

**不确定观测**。 对于每个投入 $i = 1,\ldots,m$ 和决策单元 $j \in \mathcal{J}$，假设存在一个不确定投入度 $x_{ij}^{(M)} \in$ Dom($M$)；对于每个产出 $r = 1,\ldots,s$ 和决策单元 $j \in \mathcal{J}$，假设存在一个不确定产出度$y_{rj}^{(M)} \in$ Dom($M$)。

通过评分定义诱导出的正向清晰数据:

$$x_{ij} := S_M(x_{ij}^{(M)}) \in (0,\infty), \qquad y_{rj} := S_M(y_{rj}^{(M)}) \in (0,\infty).$$

**CCR效率（包络形式）**。 对于固定的决策单元 $p \in \mathcal{J}$，将其（投入导向）CCR效率定义为最优值

$$\theta_p := \min_{\theta,\lambda} \ \theta$$

约束条件为

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta\, x_{ip} \quad (i=1,\ldots,m), \qquad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rp} \quad (r=1,\ldots,s), \qquad \lambda_j \geq 0 \ (j=1,\ldots,n), \qquad \theta \geq 0.$$

集合 $\{\theta_p\}_{p\in\mathcal{J}}$ 称为*U-DEA*（*CCR*）效率评估。（对于BCC/VRS模型，添加$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$。）

**定理10.2.3**（U-DEA的良定义性与可行性）。根据定义*10.2.2*，假设 $S_M$ 为可容许正型，因此所有诱导数据均满足 $x_{ij} > 0$ 和 $y_{rj} > 0$。那么，对每个 $p \in \mathcal{J}$:

*(i) CCR*可行集非空，因此 $\theta_p$ 作为扩展实数是良定义的。

*(ii)* 最优值满足 $0 \leq \theta_p \leq 1$。

*(iii)* 特别地， $\theta_p$ 是一个有限实数（因此 *U-DEA* 是良定义的）。

证明。(i) 可行性：对 $j \neq p$取 $\lambda_p := 1$ 和 $\lambda_j := 0$，并令 $\theta := 1$。于是对于每个投入 $i$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = x_{ip} \leq 1 \cdot x_{ip},$$

对于每个产出 $r$,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = y_{rp} \geq y_{rp}.$$

此外还有 $\lambda_j \geq 0$ 和 $\theta \geq 0$。因此，可行集是非空的。

(ii) 由于 $\theta \geq 0$是一个约束， $\theta_p \geq 0$。因为 $(\theta, \lambda) = (1, e_p)$ 是可行的，所以最小值满足 $\theta_p \leq 1$。

(iii) 结合 （i）和（ii），最优值存在且满足 $0 \leq \theta_p \leq 1$，因此它是有限的，并且是实 al. □

作为参照点，不确定性感知模型下数据包络分析的相关概念列于表10.3中。

表10.3：不确定性感知模型下数据包络分析的相关概念。

| $k$ | **相关数据包络分析概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊数据包络分析 [1241, 1242] |
| 2 | 双极模糊数据包络分析 [1243, 1244] |
| 2 | 勾股模糊数据包络分析 [1245] |
| 3 | 犹豫模糊数据包络分析 [1246] |
| 3 | 球形模糊数据包络分析 [1247, 1248] |
| 3 | 中智数据包络分析 [1249–1251] |
| $n$ | 分生数据包络分析 [1252–1254] |

此外，除了不确定数据包络分析之外，还有许多其他相关概念，包括两阶段数据包络分析 [1255, 1256], 三阶段数据包络分析 [1257, 1258], 四阶段数据包络分析 [1259], 全局数据包络分析[1260, 1261],粗糙数据包络分析 [1262, 1263],灰色数据包络分析 [1264, 1265],以及多准则数据包络分析 [1266, 1267]。

## 10.3 模糊社会选择

社会选择通过投票或福利规则将个体偏好聚合为集体决策，同时处理公平性、策略和一致性问题 [1268]。模糊社会选择使用分级偏好关系，将其聚合为集体模糊关系，然后通过去模糊化选出一个备选方案 [1269–1271]。

**定义 10.3.1**（模糊社会选择（通过模糊社会选择函数））。（参见 [1269–1271]）令 $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ 为一个有限备选方案集，其中 $|X| \geq 3$；令 $N = \{1, \dots, n\}$ 为一个有限个体集，其中 $n \geq 2$。固定一个非空域 $T$，其元素为 $X$ 上可容许的模糊偏好关系。

**（i）个体模糊偏好关系**。对于每个 $i \in N$，个体偏好是一个模糊二元关系

$$R_i : X \times X \longrightarrow [0,1],$$

其中 $R_i(x,\ y)$ 表示“$x$ 至少与 $y$ 同样受偏好”的程度。一个偏好剖面是 $n$-元组

$$R^N := (R_1, \dots, R_n) \in T^n.$$

（一种常见的选择是取 $T = H$，即模糊序集，也就是自反、连通且最大-最小传递的关系。）

**(ii) 模糊社会选择函数**。一个模糊社会选择函数（FSCF）是一种映射

$$f : T^n \longrightarrow X$$

它将一个单一集体选择 $f(R^N) \in X$ 指派给个体模糊偏好关系的每一个偏好组合 $R^N$。所得的集体备选方案 $f(R^N)$称为模糊社会选择。

**定义10.3.2**（类型 $M$的不确定偏好关系）。设 $X$ 为带有$|X| \geq 3$ 的有限备选方案集，并设 $M$ 为一个不确定模型。 $X$ 上类型为 $M$ 的不确定偏好关系是一个映射

$$R_M :\ X \times X \longrightarrow \mathrm{Dom}(M),$$

其中 $R_M(x,\ y)$表示“$x$ 至少与 $y$同样被偏好”的（不确定）程度。给定可容许评分 $S_M :\ \mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$，其诱导的赋分偏好关系为

$$r(x,y) := S_M\big(R_M(x,y)\big) \in [0,1].$$

我们将类型 $M$ 的不确定社会选择函数（U-SCF）定义如下。

**定义 10.3.3**（类型为 $M$ （U-SCF）的不确定社会选择函数）。设 $X$ 是一个有限的备选项集，满足 $|X| \geq 3$；设 $N = \{1, \dots, n\}$ 是投票者，满足 $n \geq 2$。固定一个不确定模型 $M$，其 $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\neq \emptyset$，并设可容许评分 $S_M$: $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\to [0,1]$。

设 $T_M$ 是 $X$ 上可容许不确定偏好关系的非空域。偏好剖面是一个 $n$ 元组

$$\mathbf{R} := (R_M^{(1)}, \dots, R_M^{(n)}) \in (T_M)^n.$$

**步骤 1（将不确定偏好聚合为集体评分关系）**。确定一个聚合算子

$$\mathrm{Agg} :\ [0,1]^n \to [0,1]$$

（例如加权平均、有序加权平均、最小值/最大值或任意单调聚合器）。对于每一对 $(x,\ y) \in X \times X$，定义集体评分关系

$$r^*(x,y) := \mathrm{Agg}\Big(S_M(R_M^{(1)}(x,y)), \ldots, S_M(R_M^{(n)}(x,y))\Big) \in [0,1].$$

**步骤 2（基于分数规则的社会选择）**。定义备选方案的集体支配分数$x \in X$ 为

$$\mathrm{Score}(x) := \sum_{y \in X \setminus \{x\}} r^*(x,y) \ \in [0, m-1].$$

不确定社会选择函数（U-SCF）是映射

$$f:\ (T_M)^n \longrightarrow X, \qquad f(\mathbf{R}) \in \arg\max_{x \in X}\ \mathrm{Score}(x),$$

若最大值点不唯一，则采用固定的平局处理约定。所选备选方案 $f(\mathbf{R})$ 称为不确定社会选择（U-社会选择）。

**定理 10.3.4** （U-社会选择的良定义性）。根据定义 *10.3.3*，假设：

*(i)* $T_M \neq \emptyset$ 和$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$；*(ii)* $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$ 是可容许的；*(iii)* $\mathrm{Agg}: [0,1]^n \to [0,1]$ 是良定义的；*(iv)* 固定一条确定性平局处理规则。

于是映射 $f: (T_M)^n \to X$ 是良定义的。

证明。 固定一个偏好组合 $\mathbf{R} \in (T_M)^n$。对每个 $(x,y)$ 以及每个投票者 $i$，根据定义有 $R_M^{(i)}(x,y) \in \mathrm{Dom}(M)$，因此 $S_M(R_M^{(i)}(x,y)) \in [0,1]$ 是良定义的。从而送入 Agg 的得分输入的 $n$-元组位于 $[0,1]^n$ 中，故$r^*(x,y) = \mathrm{Agg}(\cdots) \in [0,1]$ 对每个 $(x,y) \in X \times X$都是良定义的。

因此，对每个 $x \in X$，得分$(x) = \sum_{y \neq x} r^*(x,y)$ 是 $[0,1]$, 中若干数的有限和，因而是一个良定义的实数。由于 $X$ 是有限的，集合 $\{\text{得分}(x) :\ x \in X\}$ 取得最大值，故最大值点集$_{x \in X}$ 得分$(x) \neq \emptyset$。在固定的平局处理约定下，$f(\mathbf{R})$ 被唯一确定。因此 $f$ 在 $(T_M)^n$ 上是良定义的。 □

## 10.4 模糊决策表

决策表将条件状态的组合映射到行动，从而支持复杂系统中的透明、基于规则的决策、一致性检查和维护[1272]。模糊决策表通过引入模糊集和语言术语扩展了决策表，并通过分级匹配和 t-范数聚合处理不确定性[1273, 1274]。

**定义 10.4.1**（模糊决策表（FDT））。[1273, 1274] 令 $c \geq 1$ 且 $a \geq 1$。对于每个条件索引 $i \in \{1, \ldots, c\}$，令 $CS_i$ 为具有条件主体和条件域 $CD_i$（论域）的对象。对于每个动作索引 $j \in \{1, \ldots, a\}$，令 $AS_j$ 为具有动作主体和动作域 $AD_j$ 的对象。

**(1) 模糊条件状态**。对于每个 $i$，固定一个有限非空的语言型条件状态集

$$CT_i = \{\widetilde{C}_{i1}, \ldots, \widetilde{C}_{in_i}\}, \qquad n_i \geq 1,$$

~其中每个 $C_{ik}$ 都是定义在 $CD_i$ 上的模糊集，即

$$\widetilde{C}_{ik} : CD_i \to [0, 1].$$

记作 $CT := \{CT_1, \ldots, CT_c\}$。

**(2) 模糊动作状态（两种标准形式）**。

形式*1*（清晰执行标志，仅条件为模糊）。对于每个 $j$，令

$$AV_j := \{\text{true}\,(x), \text{false}\,(-), \text{nil}\,(\cdot)\},$$

并定义动作配置空间 $AV := \prod_{j=1}^{a} AV_j$。

形式 *2*（允许模糊/语言 言行动值）。对于每个 $j$，固定一个有限非空的动作状态集
*行动值,*

$$AT_j = \{\widetilde{A}_{j1}, \ldots, \widetilde{A}_{jm_j}\}, \qquad m_j \geq 1,$$

其中每个 $\widetilde{A}_{j\ell}$ 是一个模 ~糊集，定义在 $AD_j$ 上：$A_{j\ell} : AD_j \to [0, 1]$。等价地，也可以定义一个行动值集 t

$$AV_j := \{\, \widetilde{a} \mid \widetilde{a} \in \mathcal{F}(AD_j) \,\} \quad \text{or a designated linguistic subset of it,}$$

并再次设定 $AV := \prod_{j=1}^{a} AV_j$。

**(3) 模糊决策表作为单命中函数**。一个模糊决策表是一个（单值）映射

$$F : \; CT_1 \times \cdots \times CT_c \;\longrightarrow\; AV$$

使得每个可能的条件状态组合都映射到且仅映射到一个动作配置。等价地，将条件/行动组合视为元素，模糊决策表是从条件条目空间到动作条目空间的函数：

$$F : \; SPACE(C) \to SPACE(A),$$

其中 $SPACE(C) := CT_1 \times \cdots \times CT_c$ 和 $SPACE(A) := AV$（形式 1 或形式 2）。

**(4) 规则（列）解释**。表格中的每一列都对应一条规则

$$\textbf{IF } CS_1 \text{ is } \widetilde{C}_{1k_1} \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; CS_c \text{ is } \widetilde{C}_{ck_c} \textbf{ THEN } (AS_1, \ldots, AS_a) \text{ takes configuration } F(\widetilde{C}_{1k_1}, \ldots, \widetilde{C}_{ck_c}),$$

其中 查阅该表时，前件通过选定的 $t$-范数（例如最小值）进行评估 le.

使用 给定一个不确定集，我们将类型为 $M$ 的不确定决策表（U-DT）定义如下。

**De定义 10.4.2**（类型为 $M$（U-DT）的不确定决策表）。设 $c \geq 1$ 和 $a \geq 1$ .

**主体与域**。对于每个条件索引 $i \in \{1, \ldots, c\}$，令 $CS_i$ 为一个条件主体，其条件域为 $CD_i$（非空）。对于每个动作索引 $j \in \{1, \ldots, a\}$，令 $AS_j$ 为一个动作主体，其动作域为 $AD_j$。

**不确定条件状态（语言状态）**。固定一个不确定模型 $M$，使得 $\mathrm{Dom}(M)$ 为 $\neq \emptyset$，并取一个可容许评分 $S_M$。对于每个条件 $i$，固定一个有限非空的语言条件状态集

$$CT_i = \{C_{i1}^{(M)}, \ldots, C_{in_i}^{(M)}\}, \qquad n_i \geq 1,$$

其中每个状态都是 $CD_i$ 上的不确定集（隶属度映射）：

$$C_{ik}^{(M)} : \ CD_i \to \mathrm{Dom}(M).$$

其诱导的（得分）隶属度为

$$\mu_{ik}(t) := S_M\big(C_{ik}^{(M)}(t)\big) \in [0,1], \qquad t \in CD_i.$$

**行动值**。选择以下常见形式之一。

形式 *1*（清晰执行标志）。对于每个 $j$，令

$$AV_j := \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{nil}\}, \qquad AV := \prod_{j=1}^{a} AV_j.$$

形式 *2*（不确定/语言行动值）。对于每个 $j$，固定一个有限非空的动作状态集

$$AT_j = \{A_{j1}^{(M)}, \ldots, A_{jm_j}^{(M)}\}, \qquad m_j \geq 1,$$

其中每个 $A_{j\ell}^{(M)} : \ AD_j \to \mathrm{Dom}(M)$ 都是 $AD_j$ 上的不确定集。令 $AV_j := AT_j$ 和 $AV := \prod_{j=1}^{a} AV_j$。

**作为单命中映射的决策表**。定义条件条目空间

$$SPACE(C) := CT_1 \times \cdots \times CT_c.$$

一个不确定决策表（U-DT）是一种映射

$$F : \ SPACE(C) \longrightarrow AV,$$

so 每个条件状态组合恰好映射到一个动作配置 .

**咨询语义（分级匹配）**。固定一个 $t$-范数 $T\colon\ [0,1]^c \to [0,1]$（例如最小值或乘积）。对于观测输入 $o=(t_1,\ \ldots\ldots,\ t_c) \in CD_1 \times \cdots \times CD_c$ 以及规则条目（$C_{1k_1}^{(M)},\ \ldots\ldots,\ C_{ck_c}^{(M)}$）$\in SPACE(C)$，将其激活强度定义为

$$\alpha_{k_1,\ldots,k_c}(o) := T\big(\mu_{1k_1}(t_1), \ldots, \mu_{ck_c}(t_c)\big) \in [0,1].$$

一种标准的确定性选择规则是选择一个最大化元

$$(k_1^\star, \ldots, k_c^\star) \in \arg\max_{(k_1,\ldots,k_c)} \alpha_{k_1,\ldots,k_c}(o),$$

在固定的平局处理约定下，并输出该行动

$$\mathrm{Act}(o) := F\big(C_{1k_1^\star}^{(M)}, \ldots, C_{ck_c^\star}^{(M)}\big) \in AV.$$

**定理10.4.3**（U-DT及其咨询规则的良定义性）。根据定义*10.4.2*，假设：

*(i)* $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$ 且 $S_M\colon\ \mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$ 是可容许的；

*(ii)* 每个 $CT_i$ 都是有限且非空的，并且 $AV$ 是非空的；

*(iii)* $t$-范数 $T$ 是一个良定义映射 $[0,1]^c \to [0,1]$；

*(iv)* 为最大值点集固定了一种确定性平局处理约定。

则：

*(a)* 映射 $F\colon\ SPACE(C) \to AV$ 作为函数（单命中表）是良定义的。

*(b)* 对每个观测 $o \in CD_1 \times \cdots \times CD_c$，所有激活强度 $\alpha_{k_1,\ldots,k_c}(o)$ 在 $[0,1]$ 中都是良定义的。

*(c)* 咨询输出行动 $(o) \in AV$ 对每个观测 $o$ 都是良定义的。

证明。(a) 根据定义，$SPACE(C)$ 是非空集的笛卡尔积，因此非空；并且假设 $F$ 是映射到 $AV$ 的单值映射。

(b) 固定 $o=(t_1,\ \ldots,\ t_c)$。对于任意规则条目 $(k_1,\ \ldots,\ k_c)$，每个 $\mu_{ik_i}(t_i) = S_M(C_{ik_i}^{(M)}(t_i)) \in [0,1]$ 都由 $S_M$ 的可容许性而良定义。由于 $T$ 将 $[0,1]^c$ 映射到 $[0,1]$，$\alpha_{k_1,\ \ldots,\ k_c}(o) \in [0,1]$ 是良定义的。

(c) 所有指标 $(k_1,\ \ldots,\ k_c)$ 构成的集合是有限集，因为每个 $CT_i$ 都是有限的；因此，有限集 $\{\alpha_{k_1,\ldots,k_c}(o)\}$ 中的值可取到最大值，所以最大值点集非空。采用固定的平局打破规则后，会选出唯一的最大化元，然后通过将 $F$ 应用于该元素来定义 $\mathrm{Act}(o)$。 □

相关　不确定性感知模型下决策表的概念列于表10.4。

表10.4：不确定性感知模型下决策表的相关概念。

| $k$ | **相关决策表概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊决策表 |
| 2 | 直觉模糊决策表 [1275, 1276] |
| 3 | 中智决策表 [1277, 1278] |

## 10.5 模糊决策矩阵

决策矩阵以表格形式列出备选方案与准则或状态，记录收益或评价，并支持通过评分、加权、支配性检验或期望值计算来选择备选方案 [1279, 1280]。模糊决策矩阵用模糊数或模糊事件取代收益或评价，通过模糊算术或 $\alpha$-截集传播不确定性，并对备选方案进行稳健排序 [1281–1283]。

**定义 10.5.1**（模糊决策矩阵（具有模糊世界状态和模糊评价））。 设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 为一个概率空间。设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 是一个有限备选方案集，且 $m \geq 1$。

**（1）模糊世界状态**。 对于 $j = 1, \dots, m$，设 $S_j$ 是 $\Omega$ 上的一个模糊事件，即一个模糊集 $S_j \in \mathcal{F}(\Omega)$，其隶属函数为 $\mu_{S_j} : \Omega \to [0, 1]$，且其 $\alpha$-截集 $(S_j)_\alpha = \{\omega \in \Omega : \mu_{S_j}(\omega) \geq \alpha\}$ 属于 $\mathcal{A}$（对所有$\alpha \in (0, 1]$）。假设 $(S_1, \dots, S_m)$ 构成 $\Omega$ 的一个模糊划分：

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_{S_j}(\omega) = 1 \qquad (\forall\, \omega \in \Omega).$$

**（2）Zadeh 的概率**。 定义模糊事件 $A$ 的（Zadeh）概率为

$$P_Z(A) := \int_\Omega \mu_A(\omega)\, dP(\omega),$$

并集

$$p_{Zj} := P_Z(S_j) \qquad (j = 1, \dots, m).$$

**（3）模糊评价**。对于每个备选方案 $x_i$ 和每个模糊状态 $S_j$，令 $H_{i,\,j}$ 为一个模糊数，表示在 $S_j$ 发生时选择 $x_i$ 的评价（后果）。因此 $H_{i,\,j} \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$，其 $\alpha$-截集为一个区间

$$(H_{i,j})_\alpha = \big[h_{i,j}^L(\alpha),\, h_{i,j}^U(\alpha)\big] \qquad (\alpha \in (0, 1]).$$

**（4）模糊决策矩阵**。该模糊决策矩阵是数据结构

$$\mathcal{D}_F = \Big(X,\ (S_1, \dots, S_m),\ (p_{Z1}, \dots, p_{Zm}),\ (H_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}\Big),$$

通常以表格形式显示，其列为模糊状态 $S_j$（概率为 $p_{Zj}$），表项则为模糊评价 $H_{i,\,j}$。

**（5）诱导模糊特征（期望值和方差）**。使用模糊算术（例如通过$\alpha$-截集），模糊期望评价 $x_i$ 为

$$(F)\mathbb{E}H_i := \sum_{j=1}^{m} p_{Zj} \cdot H_{i,j},$$

使得对于每个 $\alpha \in (0,1]$,

$$\big((F)\mathbb{E}H_i\big)_\alpha = \left[\sum_{j=1}^{m} p_{Zj}\, h_{i,j}^{L}(\alpha),\ \sum_{j=1}^{m} p_{Zj}\, h_{i,j}^{U}(\alpha)\right].$$

一种常用（但忽略依赖关系）的模糊方差为

$$(F)\mathrm{var}^{t}(H_i) := \sum_{j=1}^{m} p_{Zj}\left(H_{i,j} - (F)\mathbb{E}H_i\right)^2.$$

考虑依赖关系的方差可通过对 $\alpha$-截进行优化来定义：对于 $\alpha \in (0,1]$,

$$(F)\mathrm{var}^{s}(H_i)_\alpha = \left[\mathrm{var}_i^{s,L}(\alpha),\ \mathrm{var}_i^{s,U}(\alpha)\right],$$

其中

$$\mathrm{var}_i^{s,L}(\alpha) = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} p_{Zj}\left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} p_{Zk} h_{i,k}\right)^2 \,\middle|\, h_{i,j} \in (H_{i,j})_\alpha,\ j=1,\dots,m\right\},$$

$$\mathrm{var}_i^{s,U}(\alpha) = \max\left\{\sum_{j=1}^{m} p_{Zj}\left(h_{i,j} - \sum_{k=1}^{m} p_{Zk} h_{i,k}\right)^2 \,\middle|\, h_{i,j} \in (H_{i,j})_\alpha,\ j=1,\dots,m\right\}.$$

**定义10.5.2**（类型为 $M$(U-DM) 的不确定决策矩阵）。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为有限备选方案集，$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ 为有限准则集，其中 $m,\ n \geq 1$。固定一个不确定模型 $M$，其 Dom($M$) $\neq \emptyset$，以及一个可容许评分 $S_M$。

一个 $M$ 类型的不确定决策矩阵是一个三元组

$$\widetilde{X}^{(M)} = \big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, X^{(M)}\big), \qquad X^{(M)} = \big(x_{ij}^{(M)}\big)_{m\times n}, \qquad x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M),$$

其中，$x_{ij}^{(M)}$ 编码了备选方案 $A_i$ 在准则 $C_j$下的不确定评价（性能/收益）。

由此得到的得分（清晰）决策矩阵为

$$X = \big(x_{ij}\big)_{m\times n}, \qquad x_{ij} := S_M\big(x_{ij}^{(M)}\big) \in \mathbb{R}.$$

如果 $S_M$ 是可容许正型，则 $X \in (0,\ \infty)^{m\times n}$。

**定义 10.5.3**（U-DM 上的基本变换）。设 $\widetilde{X}^{(M)}$ =($\mathcal{A}$、$\mathcal{C}$、$X^{(M)}$) 为一个 U-DM，且 $X = S_M(X^{(M)})$ 为其评分矩阵。

- A *weight vector* is any $w = (w_1, \dots, w_n)$ with $w_j \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

- 效益/成本导向是一个划分 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{效益型}} \dot\cup \mathcal{C}_{\text{成本型}}$，通常通过在 $\mathcal{C}_{\text{成本型}}$ 上用 $-x_{ij}$ 替换 $x_{ij}$，将其转换为“越大越好”。
- 归一化矩阵 归一化矩阵 $R = (r_{ij})$ 是任意变换 $R = \mathcal{N}(X)$，满足 $r_{ij}$ 为有限值（常见选择：最小-最大规范化、向量归一化、比率规范化）。

**定理10.5.4** (不确定决策矩阵的良定义性)。 根据定义*10.5.2*，假设$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$ 且 $S_M$ 可容许。那么：

*(i)* 评分决策矩阵 $X = (S_M(x_{ij}^{(M)}))$ 良定义且属于 $\mathbb{R}^{m\times n}$.

*(ii)* 对 $X$ 中的元素进行任意有限聚合（例如加权和 $\sum_j w_j x_{ij}$ 或两两差异 $x_{ij} - x_{kj}$）均良定义为实数。

*(iii)* 若 $S_M$ 为可容许正型，则所有形式如下的基于比率的规范化

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_p x_{pj}}, \qquad r_{ij} = \frac{\min_p x_{pj}}{x_{ij}}, \qquad r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_p x_{pj}^2}}$$

是良定义的（分母严格为正）。

证明。 (i) 由于 $x_{ij}^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M)$ 且 $S_M$可容许，因此每个 $x_{ij} = S_M(x_{ij}^{(M)})$ 都是有限实数。因此，$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是良定义的。

(ii) 实数的有限和与差是良定义的，因此任何有限聚合（包括使用 $w_j \geq 0$ 和 $\sum_j w_j = 1$ 的加权和）都是良定义的。

(iii) 如果 $S_M$是可容许正型，那么对于所有 $i,\ j,\ x_{ij} > 0$均成立。因此，对于每个固定的 $j$，$\max_p x_{pj} > 0$、$\min_p x_{pj} > 0$ 和 $\sum_p x_{pj}^2 > 0$ 均成立，所以所有显示的基于比率的规范化都是良定义的。 □

## 10.6 模糊超滤子

超滤子是集合上的极大滤子：对于每个子集，要么该子集属于超滤子，要么其补集属于超滤子，但二者不会同时属于超滤子 [1284]。超滤子与决策的关系在于，它通过对集体选择中的决定性联盟进行建模：在阿罗型公理下，能够决定社会结果的集合构成一个超滤子。模糊超滤子为每个子集赋予一个 $[0,1]$, 中的隶属度，同时保持单调性和交集运算，并具有极大顶层接受度（参见 [1285–1287]）。

**定义 10.6.1**（滤子与超滤子）。（参见 $[1284, 1288, 1289]$）设 $X$ 是一个非空集 .

$X$ 上的一个（经典）滤子是一个非空族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$，满足

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$ 和 $X \in \mathcal{F}$；
2.（向上封闭）如果 $A \in \mathcal{F}$ 和 $A \subseteq B \subseteq X$，那么 $B \in \mathcal{F}$；

3.（在有限交下闭）如果 $A,\ B \in \mathcal{F}$，那么 $A \cap B \in \mathcal{F}$。

$X$ 上的（经典）超滤子是 $X$ 上的滤子 $\mathcal{U}$，且在包含关系下极大：每当 $\mathcal{F}$ 是$X$上满足 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$的滤子时，便有 $\mathcal{F} = \mathcal{U}$。

等价地，$X$ 上的滤子 $\mathcal{U}$ 是超滤子，当且仅当它满足超滤子二分律：

$$\forall A \subseteq X, \qquad A \in \mathcal{U} \ \text{ or } \ X \setminus A \in \mathcal{U}.$$

**定义10.6.2**（主超滤子）。设 $X$ 为非空集，并固定一点 $x \in X$。主超滤子于 $x$是如下族

$$\mathcal{U}_x \ := \ \{A \subseteq X : \ x \in A\}.$$

等价地，$\mathcal{U}_x$ 是 $X$ 上满足如下条件的唯一超滤子

$$A \in \mathcal{U}_x \iff x \in A \qquad (\forall A \subseteq X).$$

因此，$\mathcal{U}_x$ 表达了策略“始终选择特定元素 $x$ ”，因为每个集合被接受，当且仅当它包含 $x$。

**定义10.6.3**（集合上的模糊超滤子）。（参见 [1285–1287]）设 $X$ 为非空集。$X$ 上的模糊超滤子 是一个映射

$$\widetilde{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1]$$

满足以下条件，对所有 $A,\ B \subseteq X$：

$\widetilde{\mathcal{U}}(X) = 1$ 且 $\widetilde{\mathcal{U}}(\varnothing) = 0$。

2.（单调性）若 $A \subseteq B$，则 $\widetilde{\mathcal{U}}(A) \le \widetilde{\mathcal{U}}(B)$。

3.（交运算即交集）$\widetilde{\mathcal{U}}(A \cap B) = \min\{\widetilde{\mathcal{U}}(A),\ \widetilde{\mathcal{U}}(B)\}$。

4.（超滤子极大性）$\max\{\widetilde{\mathcal{U}}(A),\ \widetilde{\mathcal{U}}(X \setminus A)\} = 1$。

**定义10.6.4 (**主模糊超滤子**)**。[1290] 设 $X$ 为非空集，并固定 $x \in X$。$x$ 处的主模糊超滤子是模糊超滤子

$$\widetilde{\mathcal{U}}_x : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,1], \qquad \widetilde{\mathcal{U}}_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

特别是，

$$\widetilde{\mathcal{U}}_x(A) = 1 \iff x \in A,$$

因此 $\widetilde{\mathcal{U}}_x$ 以模糊值形式编码了“固定元素 $x$ 被（完全）选中”。

**定义10.6.5**（类型为 $M$的不确定超滤子）。设 $X$ 为非空集，并固定一个不确定模型$M$，其 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$。固定一个可容许评分 $S_M$：$\mathrm{Dom}(M) \to [0,1]$。

一个类型为 $M$ 的不确定超滤子（相对于 $S_M$）是一个映射

$$\mathcal{U}_M : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

其评分接受映射

$$u : \mathcal{P}(X) \to [0,1], \qquad u(A) := S_M\big(\mathcal{U}_M(A)\big)$$

对所有 $A, B \subseteq X$ 均满足：

(U1) **（归一化）** $u(X)=1$ 且 $u(\varnothing)=0$。

(U2) **（单调性）** $A\subseteq B \Rightarrow u(A)\le u(B)$。

(U3) **（交集 =）** $u(A\cap B)=$最小值$\{u(A)\ u(B)\}$。

(U4) **（层级1上的超滤子二分律）**最大值$\{u(A)\ u(X\setminus A)\}=1$。

**定理10.6.6**（良定义性与诱导的清晰超滤子）。 设 $\mathcal{U}_M:\ \mathcal{P}(X)\ \to \mathrm{Dom}(M)$ 满足定义*10.6.5*。那么：

(i) 得分的　　接受映射 $u=S_M\circ\mathcal{U}_M$ 是良定义的，并且满足 $u(A)\in[0,1]$ 对所有 $A\subseteq X$均成立。

(ii) 族

$$\mathcal{F}_1:=\{A\subseteq X:\ u(A)=1\}$$

是 $X$上的一个（经典）超滤子。

证明。(i) 由于 $S_M$是可容许的，因此对于每个 $d\in\mathrm{Dom}(M)$，都有 $S_M(d)\in[0,1]$；故对所有 $A$，$u(A)=S_M(\mathcal{U}_M(A))\in[0,1]$。

(ii) 首先，$\varnothing\notin\mathcal{F}_1$，因为根据 (U1)，$u(\varnothing)=0$，并且 $X\in\mathcal{F}_1$，因为 $u(X)=1$。若 $A\in\mathcal{F}_1$ 且 $A\subseteq B$，则根据 (U2)，$u(B)\ge u(A)=1$，因此 $u(B)=1$，且 $B\in\mathcal{F}_1$（向上封闭）。若 $A$，$B\in\mathcal{F}_1$，则根据 (U3)，

$$u(A\cap B)=\min\{u(A),u(B)\}=\min\{1,1\}=1,$$

因此 $A\cap B\in\mathcal{F}_1$（对有限交封闭）。所以 $\mathcal{F}_1$ 是一个滤子。

为证明极大性，设 $A\subseteq X$。由 (U4)，$\max\{u(A)\ u(X\setminus A)\}=1$，因此 $u(A)=1$或 $u(X\setminus A)=1$，即 $A\in\mathcal{F}_1$ 或 $X\setminus A\in\mathcal{F}_1$。因此 $\mathcal{F}_1$ 满足超滤子二分律，故为一个经典超滤子。 □

**定义 10.6.7**（主不确定超滤子）。 设 $X$ 为非空集，固定 $x\in X$，并固定一个具有可容许评分 $S_M$的不确定模型 $M$。假设存在两个度元组 $d^1,d^0\in\mathrm{Dom}(M)$，使得

$$S_M(d^1)=1,\qquad S_M(d^0)=0.$$

定义 $\mathcal{U}_{M,x}:\ \mathcal{P}(X)\ \to \mathrm{Dom}(M)$ 为

$$\mathcal{U}_{M,x}(A):=\begin{cases} d^1, & x\in A,\\ d^0, & x\notin A.\end{cases}$$

那么 $\mathcal{U}_{M,x}$ 称为 $x$处的主不确定超滤子。

**命题 10.6.8**（主不确定超滤子的良定义性）。 根据定义 *10.6.7*，$\mathcal{U}_{M,x}$是一个类型为 $M$的不确定超滤子。

证明. 令 $u(A)=S_M(\mathcal{U}_{M,x}(A))\in\{0,1\}$。则 $u(X)=1$, $u(\varnothing)=0$。如果 $A\subseteq B$且 $u(A)=1$，那么$x\in A\subseteq B$，因此 $u(B)=1$；否则 $u(A)=0\le u(B)$，从而证明了单调性。此外，$u(A\cap B)=1$ 当且仅当 $x\in A$且 $x\in B$，也就是说，当且仅当 $u(A)=u(B)=1$，因此 $u(A\cap B)=\min\{u(A)\ u(B)\}$。最后，对于任意 $A$，$x\in A$ 或$x\in X\setminus A$ 必有其一，因此 $\max\{u(A)\ u(X\setminus A)\}=1$。由此，(U1)–(U4) 成立。 □

不确定性感知模型下超滤子的相关概念列于表 10.5。

除不确定超滤子外，还有若干其他相关概念，包括弱超滤子[1299, 1300], 软超滤子 [1288, 1289], 和超软超滤子 [1301]。

表 10.5：不确定性感知模型下超滤子的相关概念。

| $k$ | **相关超滤子概念** |
|---|---|
| 2 | 直觉模糊超滤子 [1291–1293] |
| 3 | 中智超滤子 [1294–1297] |
| 3 | 图像模糊超滤子 [1298] |
| $n$ | 多因子超滤子 [1297] |

## 10.7 模糊SWOT分析

SWOT分析用于识别优势、劣势、机会和威胁，对内部和外部因素进行归类，并为规划决策制定策略 [1302, 1303]。模糊SWOT分析使用模糊数或语言术语表示SWOT因素，对不确定性进行聚合，并通过模糊排序确定策略优先级 [1304, 1305]。SWOT分析通过梳理内部和外部因素、生成战略备选方案、依据权重/分数确定选项优先级，并在不确定性下透明地说明选择理由，从而支撑决策。

**定义10.7.1** （模糊SWOT分析（FSWOT））。[1304, 1305] 设 $I = \{I_1, \ldots, I_{n_i}\}$ 为内部因素的集合，$E = \{E_1, \ldots, E_{n_e}\}$ 为外部因素的集合。固定SWOT坐标尺度

$$\mathcal{X} := [-10, 10] \quad (\text{internal axis}), \qquad \mathcal{Y} := [-10, 10] \quad (\text{external axis}),$$

其中 $x < 0$ 表示劣势， $x > 0$ 优势， $y < 0$ 威胁， $y > 0$ 机遇。

一项模糊*SWOT*分析是一种通过以下数学构件将因素集（$I$， $E$）映射为优先级排序策略列表的过程。

**（1）因素模糊化**。每个内部因素 $I_u$ 由一个隶属函数 $\mu_{I_u} : \mathcal{X} \to [0, 1]$, 表示，每个外部因素 $E_v$ 则由 $\mu_{E_v}$: $\mathcal{Y} \to [0, 1]$表示。常见的参数化形式为三角形式$I_u \equiv (x_u^p,\ x_u^m,\ x_u^o)$和 $E_v \equiv (y_v^p,\ y_v^m,\ y_v^o)$，其中

$$\mu_{I_u}(x) = \mathrm{tri}(x; x_u^p, x_u^m, x_u^o), \qquad \mu_{E_v}(y) = \mathrm{tri}(y; y_v^p, y_v^m, y_v^o),$$

其中，对于 $a < b < c$,

$$\mathrm{tri}(t; a, b, c) := \begin{cases} 0, & t < a, \\ \dfrac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b, \\ \dfrac{c-t}{c-b}, & b \le t \le c, \\ 0, & t > c. \end{cases}$$

**（2）聚合曲面（模糊 SWOT 曲面）**。固定一个 t-范数 $T$： $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ （通常为 $T$ = 最小值）。对于每一对（$I_u$， $E_v$），定义聚合隶属度曲面

$$\mu_{u,v} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, 1], \qquad \mu_{u,v}(x, y) := T\big(\mu_{I_u}(x), \mu_{E_v}(y)\big).$$

**(3) $\alpha$-截集去模糊化与模糊面积**。 对于选定的 $\alpha \in (0, 1]$, ， 定义 $\alpha$-截集区域（模糊面积）

$$A_{u,v}(\alpha) := \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \mu_{u,v}(x, y) \ge \alpha\}.$$

该集合表示 $\alpha$ 不确定性水平下 $I_u$ 与 $E_v$ 之间的交互。

**(4) 象限划分（SO/ST/WO/WT）**。设

$$Q_{SO} = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\},\quad Q_{ST} = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \leq 0\},$$

$$Q_{WO} = \{(x, y) : x \leq 0,\ y \geq 0\},\quad Q_{WT} = \{(x, y) : x \leq 0,\ y \leq 0\}.$$

若 $A_{u,\ v}(\alpha)$ 与多个象限相交，则将其所属象限定义为面积最大的象限：

$$\mathrm{quad}_{u,v}(\alpha) \in \arg \max_{Q \in \{Q_{SO}, Q_{ST}, Q_{WO}, Q_{WT}\}} \mathrm{Area}\big(A_{u,v}(\alpha) \cap Q\big).$$

**(5) 基于理想点接近度的优先级排序（一种标准选择）**。假设$A_{u,\ v}(\alpha)$ 具有正面积。设其质心（重心）为

$$(x_{u,v}(\alpha), y_{u,v}(\alpha)) := \frac{1}{\mathrm{Area}(A_{u,v}(\alpha))} \iint_{A_{u,v}(\alpha)} (x, y)\, dx\, dy.$$

定义正理想点和负理想点

$$z^+ = (10, 10), \qquad z^- = (-10, -10),$$

欧几里得距离

$$d^+_{u,v}(\alpha) := \big\|(x_{u,v}(\alpha), y_{u,v}(\alpha)) - z^+\big\|_2, \qquad d^-_{u,v}(\alpha) := \big\|(x_{u,v}(\alpha), y_{u,v}(\alpha)) - z^-\big\|_2,$$

以及接近度系数

$$\mathrm{cc}_{u,v}(\alpha) := \frac{d^-_{u,v}(\alpha)}{d^-_{u,v}(\alpha) + d^+_{u,v}(\alpha)} \in [0, 1].$$

较大的$\mathrm{cc}_{u,v}(\alpha)$表示层级 $\alpha$上的配对（$I_u, E_v$）具有更高的优先级。

**（6）策略提取**。一个（清晰）策略候选项是一个有序三元组

$$\sigma = (I_u, E_v, \mathrm{quad}_{u,v}(\alpha)),$$

可解释为根据所选象限由内部因素 $I_u$ 与外部因素 $E_v$ 生成的策略。层级 $\alpha$ 的优先级排序后的策略列表通过按$\mathrm{cc}_{u,v}(\alpha)$（或另一选定的排序泛函）对候选项进行分类而得到。

**（7）多-$\alpha$ 综合（可选）**。对于 $\alpha_1$，……， $\alpha_K \in$ （$0, 1$] 以及权重 $w_k \geq 0$，且 $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$，定义最终分数

$$\mathrm{Score}_{u,v} := \sum_{k=1}^{K} w_k\, \mathrm{cc}_{u,v}(\alpha_k),$$

并按得分$_{u,\ v}$对策略进行排序。

**定义10.7.2**（类型为 $M$（U-SWOT）的不确定SWOT分析）。 设 $I = \{I_1, \ldots, I_{n_i}\}$ 为内部因素，$E = \{E_1, \ldots, E_{n_e}\}$ 为外部因素。固定一个不确定模型 $M$，其Dom($M$)为 $\neq \emptyset$，并给定一个可容许评分 $S_M$。

假设每个内部因素 $I_u$ 和外部因素 $E_v$ 均以不确定度进行评估

$$\iota_u^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (u = 1, \ldots, n_i), \qquad \epsilon_v^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M) \qquad (v = 1, \ldots, n_e).$$

设内部和外部带符号得分为

$$x_u := S_M(\iota_u^{(M)}) \in \mathbb{R}, \qquad y_v := S_M(\epsilon_v^{(M)}) \in \mathbb{R}.$$

解释（约定）：

$$x_u > 0 : \text{ strength}, \quad x_u < 0 : \text{ weakness}, \qquad y_v > 0 : \text{ opportunity}, \quad y_v < 0 : \text{ threat}.$$

（如果偏好不同的符号约定，则用仿射重缩放替换 $x_u, y_v$。）

为每个因素固定一个非负重要性权重：

$$\alpha_u \geq 0 \ (u = 1, \ldots, n_i), \qquad \beta_v \geq 0 \ (v = 1, \ldots, n_e),$$

并且，为方便归一化，假设 $\sum_u \alpha_u = 1$ 和 $\sum_v \beta_v = 1$。

**（1）策略候选项（配对）**。每对（$I_u$， $E_v$）都会生成一个候选策略标记

$$\sigma_{uv} := (u, v).$$

**（2）象限（SO/ST/WO/WT）指派**。定义

$$\mathrm{quad}(u, v) := \begin{cases} SO, & x_u \geq 0,\ y_v \geq 0, \\ ST, & x_u \geq 0,\ y_v < 0, \\ WO, & x_u < 0,\ y_v \geq 0, \\ WT, & x_u < 0,\ y_v < 0. \end{cases}$$

**（3）配对优先级评分**。定义（非负）交互幅度

$$\kappa_{uv} := \alpha_u \, \beta_v \, |x_u| \, |y_v| \ \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

归一化以得到可比较的优先级评分:

$$\mathrm{Score}_{uv} := \begin{cases} \dfrac{\kappa_{uv}}{\sum_{p=1}^{n_i} \sum_{q=1}^{n_e} \kappa_{pq}}, & \sum_{p,q} \kappa_{pq} > 0, \\ \dfrac{1}{n_i n_e}, & \sum_{p,q} \kappa_{pq} = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{Score}_{uv} \in [0, 1].$$

**（4）U-SWOT 输出**。U-SWOT 输出是带注释策略的优先级排序列表

$$\Big\{ \big(\sigma_{uv},\ \mathrm{quad}(u, v),\ \mathrm{Score}_{uv}\big) \Big\}_{u,v}$$

按得分$_{uv}$ 递减排序（允许并列）。

**定理10.7.3**（U-SWOT 的良定义性）。 根据定义*10.7.2*，假设$\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$ 且 $S_M$可容许。则：

*(i)* 带符号得分 $x_u, y_v$ 是良定义的实数。

*(ii)* 对于每个$(u, v)$，象限标签$\mathrm{quad}(u, v) \in \{SO, ST, WO, WT\}$都是良定义的。

*(iii)* 得分 $\kappa_{uv} \geq 0$ 和得分$_{uv} \in [0, 1]$ 都是良定义的，并且

$$\sum_{u=1}^{n_i} \sum_{v=1}^{n_e} \mathrm{Score}_{uv} = 1.$$

*(iv)* 因此，优先级排序后的策略列表（按得分$_{uv}$排序）是良定义的。

证明。 (i) 由于 $\iota_u^{(M)}, \epsilon_v^{(M)} \in$Dom($M$) 且 $S_M$是可容许的，因此 $x_u = S_M(\iota_u^{(M)})$ 和 $y_v = S_M(\epsilon_v^{(M)})$ 是有限实数。

(ii) 每个象限条件都是实数（$x_u \geq 0$、 $y_v \geq 0$ 等）比较的布尔组合，因此四种案例中恰有一种适用；所以 quad($u$， $v$) 是良定义的。

(iii) 根据假设， $\alpha_u$， $\beta_v \geq 0$，所以 $\kappa_{uv} = \alpha_u \beta_v |x_u||y_v| \geq 0$ 是良定义的。若 $\sum_{p,\ q} \kappa_{pq} > 0$，则 Score $_{uv}$ =$\kappa_{uv}$/ $\sum_{p,\ q} \kappa_{pq}$ 是良定义的，且属于 $[0, 1]$,，对 ($u$， $v$) 求和得 1。若 $\sum_{p,\ q} \kappa_{pq} = 0$，则定义将 Score $_{uv} = 1$/($n_i n_e$) 设为相应值，它同样属于 $[0, 1]$ ，且总和为 1。

(iv) 候选项集合是有限的，因此按实数得分 Score$_{uv}$ y 排序可得到良定义排序（允许并列）。

□

不确定性感知模型下的 SWOT分析 相关概念列于表10.6中 .

表10.6：不确定性感知模型下的 SWOT分析 相关概念。

| $k$ | **相关 SWOT分析 概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊SWOT分析 |
| 2 | 直觉模糊SWOT分析 [1306] |
| 3 | 犹豫模糊SWOT分析 [1307, 1308] |
| 3 | 中智SWOT分析 [1309–1311] |

除不确定SWOT分析外，还提出了若干相关概念，包括TOWS矩阵 [1312, 1313], SWOT-层次分析法 [1314, 1315], ANP-SWOT [1316, 1317], 量化SWOT[1318, 1319], SWOT-QSPM [1320, 1321], 和SOAR [1322, 1323]。

## 10.8 模糊成本效益分析

成本效益分析比较一段时间内的货币化收益和成本，对现金流进行贴现，计算净现值，并为项目选择决策提供指导 [1324, 1325]。模糊成本效益分析将不确定的收益、成本或贴现率建模为模糊数，通过 $\alpha$-截集进行聚合，并对备选方案进行稳健的总体排序 [1326–1328]。

**定义 10.8.1**（模糊成本效益分析（模糊成本效益分析））. [1326–1328] 固定一个有限规划期$T \in \mathbb{N}$，并令 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$。令 $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ 表示 $\mathbb{R}_+$ 上的模糊数集合（正规、凸、上半连续、紧支撑）。

考虑一个项目（或设计备选方案） $x$。对每个时刻 $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$，用模糊数对（不确定的）效益现金流与成本现金流进行建模

$$\widetilde{B}_t(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+), \qquad \widetilde{C}_t(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+).$$

令折现率为清晰值 $r \in [0, \infty)$ 或模糊值 $\widetilde{r} \in \mathcal{F}([0, \infty))$。定义（清晰）折扣因子$d_t(r) := (1 + r)^{-t}$，并且当 $r$ 为模糊时，借助扩展原理（等价地， $\alpha$-截集）处理 $d_t(\widetilde{r})$。

**（1）收益与成本的模糊现值**。 使用模糊算术（例如通过扎德扩张原理；等价地通过 $\alpha$-截集），定义模糊现值

$$\widetilde{\mathrm{PW}}_B(x) := \bigoplus_{t=0}^{T} \widetilde{B}_t(x) \ \odot\ d_t(r), \qquad \widetilde{\mathrm{PW}}_C(x) := \bigoplus_{t=0}^{T} \widetilde{C}_t(x) \ \odot\ d_t(r),$$

当 $r$ 为清晰值时；并在 $r$ 为模糊时，将 $d_t(r)$替换为 $d_t(\widetilde{r})$。此处 $\oplus$ 和 $\odot$分别表示模糊加法和数乘。

**$\alpha$-截集刻画（清晰的 $r$）**。 若 $r$为清晰值且所有现金流均为非负模糊数，则对每个 $\alpha \in (0, 1]$, 记$(\widetilde{B}_t(x))_\alpha = [B_t^L(\alpha;\ x)\ B_t^U(\alpha;\ x)]$ 以及$(\widetilde{C}_t(x))_\alpha = [C_t^L(\alpha;\ x)\ C_t^U(\alpha;\ x)]$,

$$\big(\widetilde{\mathrm{PW}}_B(x)\big)_\alpha = \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{B_t^L(\alpha; x)}{(1+r)^t},\ \sum_{t=0}^{T} \frac{B_t^U(\alpha; x)}{(1+r)^t}\right], \quad \big(\widetilde{\mathrm{PW}}_C(x)\big)_\alpha = \left[\sum_{t=0}^{T} \frac{C_t^L(\alpha; x)}{(1+r)^t},\ \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t^U(\alpha; x)}{(1+r)^t}\right].$$

**（2）模糊效益成本比（模糊成本效益函数／效益成本比）**。 假定$\mathrm{PW}_C(x)$在$\widetilde{\ }$意义下严格为正，即对所有 $\alpha \in (0, 1]$, $\inf(\mathrm{PW}_C(x))_\alpha > 0$。定义模糊效益成本比（亦称模糊成本效益函数）

$$\widetilde{\mathrm{BCR}}(x) := \widetilde{\mathrm{PW}}_B(x) \ \oslash\ \widetilde{\mathrm{PW}}_C(x),$$

其中 $\oslash$为模糊除法。对于非负的 $\alpha$-截集区间$(\widetilde{\mathrm{PW}}_B(x))_\alpha = [PW_B^L(\alpha;\ x)\ PW_B^U(\alpha;\ x)]$与$(\widetilde{\mathrm{PW}}_C(x))_\alpha = [PW_C^L(\alpha;\ x)\ PW_C^U(\alpha;\ x)]$ 以及 $PW_C^L(\alpha;\ x) > 0$, 可得

$$\big(\widetilde{\mathrm{BCR}}(x)\big)_\alpha = \left[\frac{PW_B^L(\alpha; x)}{PW_C^U(\alpha; x)},\ \frac{PW_B^U(\alpha; x)}{PW_C^L(\alpha; x)}\right].$$

传统上，效益成本比 $> 1$ 表示成本效益；模糊成本效益分析保留这一规则，但通过模糊比较/排序来解释。

**（3）决策规则（一种数学上标准的选项）**。令 $Z$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的模糊数，并将事件 $\{Z \geq z_0\}$ 的可能性和必然性定义为

$$\Pi(\widetilde{Z} \geq z_0) := \sup_{z \geq z_0} \mu_{\widetilde{Z}}(z), \qquad N(\widetilde{Z} \geq z_0) := 1 - \sup_{z < z_0} \mu_{\widetilde{Z}}(z).$$

对于置信水平 $\eta \in [0,1]$，若满足以下条件，则接受项目 $x$

$$N\big(\widetilde{\mathrm{BCR}}(x) \geq 1\big) \geq \eta \quad \text{(conservative)}, \qquad \text{or} \qquad \Pi\big(\widetilde{\mathrm{BCR}}(x) \geq 1\big) \geq \eta \quad \text{(optimistic)}.$$

要对多个备选方案进行排序，可使用任意固定的模糊数排序泛函（例如重心去模糊化）比较 $\widetilde{\mathrm{BCR}}(x)$。

**(4) 互斥备选方案的增量模糊成本效益分析**。给定两个备选方案 $x$ （挑战方案）和 $y$ （保留方案），定义增量模糊现值

$$\Delta\widetilde{\mathrm{PW}}_B := \widetilde{\mathrm{PW}}_B(x) \ominus \widetilde{\mathrm{PW}}_B(y), \qquad \Delta\widetilde{\mathrm{PW}}_C := \widetilde{\mathrm{PW}}_C(x) \ominus \widetilde{\mathrm{PW}}_C(y),$$

以及增量比率

$$\Delta\widetilde{\mathrm{BCR}} := \Delta\widetilde{\mathrm{PW}}_B \oslash \Delta\widetilde{\mathrm{PW}}_C.$$

然后，若（按照所选的模糊比较方式） $\Delta\mathrm{BCR} > 1$，则选择 $x$ 而非 $y$；通过迭代进行两两淘汰，最终得出最终选择。

**定义10.8.2** （类型为 $M$ （不确定性成本效益分析）的成本效益分析）。 固定一个有限规划期$T \in \mathbb{N}$和一个有限项目（备选方案）集合 $\mathcal{X}$。固定一个不确定模型 $M$，其定义域为 $\mathrm{Dom}(M) \neq \emptyset$，且可容许得分为 $S_M^{\$}$， $S_M^{+}$。

对于每个项目 oject $x \in \mathcal{X}$以及每个时刻 $t = 0$，1，.....， $T$，假设不确定收益度和成本度 s

$$B_t^{(M)}(x) \in \mathrm{Dom}(M), \qquad C_t^{(M)}(x) \in \mathrm{Dom}(M),$$

并假设不确定折现率度 $r^{(M)} \in \mathrm{Dom}(M)$。通过评分定义诱导出的（清晰）非负现金流和折现率：

$$B_t(x) := S_M^{\$}\big(B_t^{(M)}(x)\big) \in [0,\infty), \qquad C_t(x) := S_M^{\$}\big(C_t^{(M)}(x)\big) \in [0,\infty),$$

$$r := S_M^{+}(r^{(M)}) - 1 \ \in [0,\infty).$$

（等价地，也可以直接定义 $S_M^{r}$：$\mathrm{Dom}(M) \to [0,\infty)$；上述形式可确保 $1 + r > 0$。）

定义折扣因子

$$d_t(r) := (1+r)^{-t} \in (0,1] \qquad (t = 0, \ldots, T).$$

**（1）现值**。定义收益和成本的现值（PW）：

$$\mathrm{PW}_B(x) := \sum_{t=0}^{T} B_t(x)\, d_t(r), \qquad \mathrm{PW}_C(x) := \sum_{t=0}^{T} C_t(x)\, d_t(r).$$

**（2）净现值和效益成本比**。定义

$$\mathrm{NPV}(x) := \mathrm{PW}_B(x) - \mathrm{PW}_C(x) \in \mathbb{R},$$

并且，若 $\mathrm{PW}_C(x) > 0$，则定义效益成本比

$$\mathrm{BCR}(x) := \frac{\mathrm{PW}_B(x)}{\mathrm{PW}_C(x)} \in [0, \infty).$$

**（3）决策规则（两种标准选项）**。

- 可行性／接受：当 $\mathrm{NPV}(x) \geq 0$（或等价地，当 $\mathrm{PW}_C(x) > 0$ 时，$\mathrm{BCR}(x) \geq 1$），接受 $x$。
- 排序：按 $\mathrm{NPV}(x)$（或 $\mathrm{BCR}(x)$）递减对项目排序。

**定理10.8.3**（不确定性成本效益分析的良定义性）。在定义*10.8.2*下，假设：

*(i)* $S_M^{\$}$ 是可容许货币型（在$\mathrm{Dom}(M)$上有限），且 $S_M^{+}$ 是可容许正型；*(ii)* $T < \infty$ 和 $\mathcal{X}$ 均为有限。

那么，对每个项目 $x \in \mathcal{X}$：

*(a)* $\mathrm{PW}_B(x)$ 和$\mathrm{PW}_C(x)$ 均为良定义的有限非负实数。*(b)* $\mathrm{NPV}(x)$为良定义的有限实数。

*(c)* 若$\mathrm{PW}_C(x) > 0$，则$\mathrm{BCR}(x)$ 为良定义且有限。

此外，若至少存在一个 $x$ 满足$\mathrm{PW}_C(x) > 0$，则在该子集上按$\mathrm{BCR}$ 排序是良定义的（并列情况除外）。

证明。(a) 对每个 $t$，由 $S_M^{\$}$的可容许性可得 $B_t(x)$ $C_t(x) \in [0, \infty)$。此外，$r \geq 0$意味着 $1 + r > 0$，因此 $d_t(r) = (1 + r)^{-t} \in (0, 1]$ 是良定义的。因此，每一项 $B_t(x)d_t(r)$和 $C_t(x)d_t(r)$均为有限非负数。由于 $T$ 为有限数，定义$\mathrm{PW}_B(x)$和$\mathrm{PW}_C(x)$的和均为有限非负数。

(b) 净现值$(x)$ 是两个有限实数之差，因此是有限的。

(c) 如果 $\mathrm{PW}_C(x) > 0$，那么除以 $\mathrm{PW}_C(x)$ 是有效的，并会得到有限实数效益成本比$(x) \geq 0$。

最后，在子集 $\{x$ 上按效益成本比排序：$\mathrm{PW}_C(x) > 0\}$ 是良定义的，因为它比较的是实数（且允许并列）。 □

相关概念　　不确定性感知模型下成本效益分析的要点列于表10.7。

表10.7：不确定性感知模型下成本效益分析的相关概念 s.

| $k$ | **相关成本效益分析概念** |
|---|---|
| 1 | 模糊成本效益分析 |
| 2 | 直觉模糊成本效益分析 |
| 3 | 中智成本效益分析（参见 [1329]） |
| 3 | 球形模糊成本效益分析 [1330, 1331] |

## 10.9 模糊决策曲线分析

决策曲线分析通过净获益评估模型在不同阈值概率下的表现，权衡真阳性与假阳性，从而确定具有临床应用价值的决策策略 [1332, 1333]。模糊决策曲线分析通过使用模糊风险估计或阈值扩展了决策曲线分析，在保留基于净获益的策略比较的同时，对预测中的不确定性进行建模。

Let

$$\mathcal{FN}_{[0,1]}$$

表示支撑在区间 $[0,1]$ 上的一类固定模糊数。因此，每个 $\tilde{p} \in \mathcal{FN}_{[0,1]}$ 都是 $[0,1]$ 上的模糊集，其隶属函数为 $\mu_{\tilde{p}}$：$[0,1] \to [0,1]$，并被解释为模糊预测风险/模糊概率。

**定义 10.9.1**（模糊决策曲线分析（FDCA））。设

$$\Omega = \{1, \dots, N\}$$

为有限案例集（患者、对象或决策单元），并设

$$y_i \in \{0,1\} \qquad (i \in \Omega)$$

表示真实的二元结局，其中 $y_i = 1$ 表示“事件/疾病存在”，$y_i = 0$ 表示“事件/疾病不存在”。

假设给定的预测策略 $S$ 对每个案例 $i \in \Omega$ 都提供一个模糊预测风险

$$\tilde{p}_i^{(S)} \in \mathcal{FN}_{[0,1]}.$$

固定一个阈值概率

$$t \in (0,1),$$

并令

$$H : [0,1) \to [0,\infty)$$

为给定的检测伤害函数（可能为 $H \equiv 0$）。

对每个案例 $i$，定义阈值 $t$ 处的模糊治疗建议度 为

$$r_i^{(S)}(t) := \Pi\big(\tilde{p}_i^{(S)} \geq t\big) := \sup_{u \in [t,1]} \mu_{\tilde{p}_i^{(S)}}(u) \in [0,1].$$

因此 $r_i^{(S)}(t)$是病例 $i$ 的模糊预测风险达到或超过的可能性度 $t$.

定义相应的模糊加权真阳性计数和假阳性计数b y

$$\mathrm{TP}_F^{(S)}(t) := \sum_{i=1}^{N} y_i \, r_i^{(S)}(t), \qquad \mathrm{FP}_F^{(S)}(t) := \sum_{i=1}^{N} (1 - y_i) \, r_i^{(S)}(t).$$

策略 $S$ 在阈值 $t$ 处的模糊净获益 定义为

$$\mathrm{NB}_F^{(S)}(t) := \frac{1}{N} \, \mathrm{TP}_F^{(S)}(t) - \frac{1}{N} \, \mathrm{FP}_F^{(S)}(t) \, \frac{t}{1-t} - H(t).$$

映射

$$\mathrm{NB}_F^{(S)} : (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \mathrm{NB}_F^{(S)}(t),$$

称为策略 $S$的模糊决策曲线 。

若 $\mathscr{S}$ 是有限个竞争策略族，则阈值 $t$ 处的***FDCA*** 最优策略集 为

$$\mathrm{Opt}_F(t) := \arg\max_{S \in \mathscr{S}} \mathrm{NB}_F^{(S)}(t).$$

如果策略 $S_1$ 在阈值区域 $T \subset$ (0，1)上支配 $S_2$ ，则称之为

$$\mathrm{NB}_F^{(S_1)}(t) \geq \mathrm{NB}_F^{(S_2)}(t) \quad \text{for all } t \in T,$$

且至少对一个 $t \in T$，不等式严格成立。

**命题 10.9.2 (**FDCA 的良定义性)。 假设对于固定策略 $S$，

$$\tilde{p}_i^{(S)} \in \mathcal{FN}_{[0,1]} \qquad (i = 1, \ldots, N),$$

满足 $t \in (0,\ 1)$，且 $H(t) < \infty$。那么：

1. $r_i^{(S)}(t) \in [0,1]$ 对每个 $i$ 都是良定义的；
2. $\mathrm{TP}_F^{(S)}(t)$ 和 $\mathrm{FP}_F^{(S)}(t)$ 都是良定义的实数，并满足

$$0 \leq \mathrm{TP}_F^{(S)}(t) \leq N, \qquad 0 \leq \mathrm{FP}_F^{(S)}(t) \leq N;$$

3. $\mathrm{NB}_F^{(S)}(t) \in \mathbb{R}$ 是良定义的；
4. 如果 $\mathscr{S}$ 是有限且非空的，则 $\mathrm{Opt}_F(t) \neq \varnothing$。

证明。 由于每个 $\tilde{p}_i^{(S)}$ 都是 $[0,1]$, 上的模糊数，因此其隶属函数 $\mu_{\tilde{p}_i^{(S)}}$：$[0,1] \to [0,1]$ 定义良好。因此

$$r_i^{(S)}(t) = \sup_{u \in [t,1]} \mu_{\tilde{p}_i^{(S)}}(u)$$

是良定义的，且属于 $[0,1]$, ，从而证明了 (1)。

由于 $y_i \in \{0,1\}$ 和 $0 \le r_i^{(S)}(t) \le 1$，中的每一项

$$\mathrm{TP}_F^{(S)}(t) = \sum_{i=1}^{N} y_i \, r_i^{(S)}(t)$$

and

$$\mathrm{FP}_F^{(S)}(t) = \sum_{i=1}^{N} (1 - y_i) \, r_i^{(S)}(t)$$

属于 $[0,1]$。因此，这两个和都是 $[0,N]$ 中良定义的实数，从而证明了（2 ）.

由于 $t \in (0,1)$，因子 $t/(1-t)$ 是有限实数。结合 $H(t) < \infty$，可得

$$\mathrm{NB}_F^{(S)}(t) = \frac{1}{N}\,\mathrm{TP}_F^{(S)}(t) - \frac{1}{N}\,\mathrm{FP}_F^{(S)}(t)\frac{t}{1-t} - H(t)$$

是一个良定义的实数。因此，（3）成立。

最后，如果 $\mathscr{S}$ 有限且非空，那么集合

$$\left\{\mathrm{NB}_F^{(S)}(t) : S \in \mathscr{S}\right\} \subset \mathbb{R}$$

是有限且非空的，因此能够取到其最大值。于是

$$\mathrm{Opt}_F(t) = \arg\max_{S \in \mathscr{S}} \mathrm{NB}_F^{(S)}(t) \neq \varnothing.$$

这就证明了（4）。 □

**命题 10.9.3 (归约到经典 DCA).** 假设每个模糊预测风险都退化为一个清晰单元素集：

$$\tilde{p}_i^{(S)} = \chi_{\{p_i^{(S)}\}}, \qquad p_i^{(S)} \in [0,1].$$

*Then*

$$r_i^{(S)}(t) = \mathbf{1}\big[p_i^{(S)} \ge t\big],$$

因此

$$\mathrm{TP}_F^{(S)}(t) = \#\{\, i : \; y_i = 1, \; p_i^{(S)} \ge t \,\},$$
$$\mathrm{FP}_F^{(S)}(t) = \#\{\, i : \; y_i = 0, \; p_i^{(S)} \ge t \,\}.$$

因此，$\mathrm{NB}_F^{(S)}(t)$ 恰好归约为通常的决策曲线净获益

$$\mathrm{NB}^{(S)}(t) = \frac{\mathrm{TP}^{(S)}(t)}{N} - \frac{\mathrm{FP}^{(S)}(t)}{N}\frac{t}{1-t} - H(t).$$

证明。 若 $\tilde{p}_i^{(S)} = \chi_{\{p_i^{(S)}\}}$，则

$$\mu_{\tilde{p}_i^{(S)}}(u) = \begin{cases} 1, & u = p_i^{(S)}, \\ 0, & u \neq p_i^{(S)}. \end{cases}$$

因此

$$r_i^{(S)}(t) = \sup_{u \in [t,1]} \mu_{\tilde{p}_i^{(S)}}(u) = \begin{cases} 1, & p_i^{(S)} \ge t, \\ 0, & p_i^{(S)} < t, \end{cases}$$

这恰好就是 $\mathbf{1}[p_i^{(S)} \ge t]$。其余陈述只需代入 $\mathrm{TP}_F^{(S)}(t)$、$\mathrm{FP}_F^{(S)}(t)$ 和 $\mathrm{NB}_F^{(S)}(t)$ 的定义即可立即得出。

□

现在，我们通过将模糊／概率决策曲线分析扩展到一般的不确定模型 $M$，来定义 不确定决策曲线分析 (UDCA)。

**定义 10.9.4** （ $M$型不确定决策曲线分析（UDCA））。 设 $M$ 为一个度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^k$$

的某个整数 $k \geq 1$对应的不确定模型。

Let

$$\Omega = \{1, \ldots, N\}$$

为有限案例集，并设

$$y_i \in \{0,1\} \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

表示真实的二元结局，其中 $y_i = 1$ 表示事件/疾病存在， $y_i = 0$ 表示其不存在。

设 $\mathscr{S}$为有限非空的候选决策策略族。对于每个策略 $S \in \mathscr{S}$，假设每个案例 $i \in \Omega$ 均被赋予一个不确定预测风险

$$\rho_i^{(S)} \in \mathrm{Dom}(M).$$

固定一个阈值概率

$$t \in (0,1),$$

并令

$$H : (0,1) \to [0,\infty)$$

为给定的检测伤害函数。

进一步假设给定了一个依赖于模型的阈值超越泛函

$$\mathrm{Exc}_M : \mathrm{Dom}(M) \times (0,1) \longrightarrow [0,1]$$

。对于 $d \in \mathrm{Dom}(M)$ 和 $t \in (0,1)$，其值

$$\mathrm{Exc}_M(d,t)$$

可解释为不确定预测风险 $d$ 达到或超过治疗阈值$t$的程度。

对于每种策略 $S \in \mathscr{S}$、病例 $i \in \Omega$ 和阈值 $t \in (0,\ 1)$，定义不确定治疗推荐度

$$r_{i,M}^{(S)}(t) := \mathrm{Exc}_M(\rho_i^{(S)}, t) \in [0,1].$$

定义不确定真阳性计数和不确定假阳性计数的 $S$ 在阈值 $t$ 定义为

$$\mathrm{TP}_M^{(S)}(t) := \sum_{i=1}^{N} y_i \, r_{i,M}^{(S)}(t), \qquad \mathrm{FP}_M^{(S)}(t) := \sum_{i=1}^{N} (1 - y_i) \, r_{i,M}^{(S)}(t).$$

策略 $S$ 在阈值 $t$ 处的不确定净获益定义为

$$\mathrm{NB}_M^{(S)}(t) := \frac{1}{N}\,\mathrm{TP}_M^{(S)}(t) - \frac{1}{N}\,\mathrm{FP}_M^{(S)}(t)\,\frac{t}{1-t} - H(t).$$

映射

$$\mathrm{NB}_M^{(S)} : (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \mathrm{NB}_M^{(S)}(t),$$

称为策略 $S$的不确定决策曲线。

阈值 $t$ 处策略之间的诱导偏好关系为

$$S_1 \succeq_{M,t} S_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{NB}_M^{(S_1)}(t) \geq \mathrm{NB}_M^{(S_2)}(t).$$

在阈值 $t$ 处的*UDCA*最优策略集

$$\mathrm{Opt}_M(t) := \arg\max_{S \in \mathscr{S}} \mathrm{NB}_M^{(S)}(t).$$

若策略 $S_1$ 在阈值区域 $T \subset (0,\ 1)$内支配 $S_2$，则称

$$\mathrm{NB}_M^{(S_1)}(t) \geq \mathrm{NB}_M^{(S_2)}(t) \quad \text{for all } t \in T,$$

且至少有一个 $t \in T$ 满足严格不等式。

**Th定理 10.9.5 (**UDCA的良定义性)。 设 $M$ 是一个不确定模型，并且

$$\mathfrak{U}_{\mathrm{DCA}} = \big(\Omega,\, (y_i)_{i=1}^N,\, \mathscr{S},\, (\rho_i^{(S)})_{i,S},\, \mathrm{Exc}_M,\, H\big)$$

是定义 *10.9.4* 中的一个 *UDCA*实例。假设：

*(A1)* $N \geq 1$，$\Omega = \{1, \ldots, N\}$，且对于所有 $i \in \Omega$，都有 $y_i \in \{0,1\}$；

*(A2)* $\mathscr{S}$ 是有限且非空的；

*(A3)* 对于每个 $S \in \mathscr{S}$ 和 $i \in \Omega$，

$$\rho_i^{(S)} \in \mathrm{Dom}(M);$$

*(A4)*

$$\mathrm{Exc}_M : \mathrm{Dom}(M) \times (0,1) \to [0,1]$$

是一个全映射；

*(A5)*

$$H : (0,1) \to [0,\infty)$$

是一个全映射。

那么，对于每个 $y$ 阈值 $t \in (0,1)$ 以及每个策略 $S \in \mathscr{S}$，以下对象均定义良好 *d:*

*(i)* 不确定治疗推荐度

$$r_{i,M}^{(S)}(t) = \mathrm{Exc}_M(\rho_i^{(S)}, t) \in [0,1] \qquad (i = 1, \dots, N);$$

*(ii)* 不确定的真阳性计数和假阳性计数

$$\mathrm{TP}_M^{(S)}(t),\ \mathrm{FP}_M^{(S)}(t) \in [0, N];$$

*(iii)* 不确定的净获益

$$\mathrm{NB}_M^{(S)}(t) \in \mathbb{R};$$

*(iv)* 诱导偏好关系$\succeq_{M,t}$ 在 $\mathscr{S}$上，它是一个全预序；

*(v)* 最优策略集

$$\mathrm{Opt}_M(t) = \arg\max_{S \in \mathscr{S}} \mathrm{NB}_M^{(S)}(t),$$

它是非空的。

因此，类型为 $M$ 的不确定决策曲线分析是良定义的。

证明。 固定 $t \in$ （0，1）和 $S \in \mathscr{S}$。

由（A3），对于每个 $i \in \Omega$,

$$\rho_i^{(S)} \in \mathrm{Dom}(M).$$

由于 $t \in$ （0，1）且$\mathrm{Exc}_M$ 根据（A4）是完全的，因此该值

$$r_{i,M}^{(S)}(t) = \mathrm{Exc}_M(\rho_i^{(S)}, t)$$

是良定义的，且属于 $[0,1]$。这证明了（i）。

接下来，由于根据（A1）有 $y_i \in \{0,1\}$，且 $r_{i\ M,}^{(S)}$ (*t*) $\in [0,1]$，因此

$$\mathrm{TP}_M^{(S)}(t) = \sum_{i=1}^{N} y_i\, r_{i,M}^{(S)}(t)$$

and

$$\mathrm{FP}_M^{(S)}(t) = \sum_{i=1}^{N} (1 - y_i)\, r_{i,M}^{(S)}(t)$$

属于 $[0,1]$。因此这两个和都是良定义的实数，并且

$$0 \le \mathrm{TP}_M^{(S)}(t) \le N, \qquad 0 \le \mathrm{FP}_M^{(S)}(t) \le N.$$

因此(ii)成立。

由于 $t \in$ (0，1)，该量

$$\frac{t}{1-t}$$

是一个有限实数。此外， $H(t) \in [0,\infty)$ 由 (A5) 定义。因此

$$\mathrm{NB}_M^{(S)}(t) = \frac{1}{N}\,\mathrm{TP}_M^{(S)}(t) - \frac{1}{N}\,\mathrm{FP}_M^{(S)}(t)\frac{t}{1-t} - H(t)$$

是一个良定义的实数。这证明了(iii)。

现定义

$$S_1 \succeq_{M,t} S_2 \iff \mathrm{NB}_M^{(S_1)}(t) \geq \mathrm{NB}_M^{(S_2)}(t).$$

因为 $\geq$ 在 $\mathbb{R}$ 上是自反的、传递的且完全的，诱导关系$\succeq_{M,\ t}$ 在 $\mathscr{S}$ 上也是自反的、传递的且完全的。因此它是一个全预序。这证明了(iv)。

最后，由于 $\mathscr{S}$ 根据(A2)是有限且非空的，集合

$$\left\{\mathrm{NB}_M^{(S)}(t) : S \in \mathscr{S}\right\} \subset \mathbb{R}$$

是有限且非空的，因此它能取得最大值。所以

$$\mathrm{Opt}_M(t) = \arg\max_{S\in\mathscr{S}} \mathrm{NB}_M^{(S)}(t) \neq \varnothing.$$

这就证明了 (v)，因此 UDCA 是良定义的。 □

**命题10.9。** **6** (归约到经典 DCA)。 假设 $M$ 是清晰概率模型 *wit* $h$

$$\mathrm{Dom}(M) = [0,1],$$

并令阈值超越泛函为

$$\mathrm{Exc}_M(p,t) := \mathbf{1}[p \geq t] \qquad (p \in [0,1],\ t \in (0,1)).$$

那么，对于每个策略 $S$，我们有

$$r_{i,M}^{(S)}(t) = \mathbf{1}[\rho_i^{(S)} \geq t],$$

从而

$$\mathrm{TP}_M^{(S)}(t) = \#\{\, i :\ y_i = 1,\ \rho_i^{(S)} \geq t \,\},$$

$$\mathrm{FP}_M^{(S)}(t) = \#\{\, i :\ y_i = 0,\ \rho_i^{(S)} \geq t \,\}.$$

因此，$\mathrm{NB}_M^{(S)}\ (t)$ 恰好简化为常用的经典决策曲线净获益公式。

证明。 由 $\mathrm{Exc}_M$ 的定义直接可得，并代入定义 10.9.4 中的公式即可。 □

## 10.10 模糊理性选择

理性选择根据一致的偏好关系，选出最受偏好的可行备选方案；这假设决策者能够连贯地比较选项，并选择效用最大化结果 [1334, 1335]。模糊理性选择通过使用模糊偏好度扩展了理性选择，允许进行模糊或部分比较，并选择在足够程度上优于竞争方案的备选方案 [1336–1338]。

**定义 10.10.1** （模糊理性选择）。 [1339, 1340] 设 $X$ 为一个有限非空的备选方案集，并令

$$\mathcal{P}^*(X) := \{A \subseteq X : \ A \neq \varnothing\}$$

表示 $X$的所有非空子集构成的族。

一个定义在 $X$ 上的模糊偏好关系是一个映射

$$r : X \times X \longrightarrow [0, 1],$$

其中， $r(a, b)$表示 $a$ 至少与 $b$同样好的程度。

对于每个 $a \in X$，将其1/2上等高集定义为

$$R_{1/2}(a) := \{\, x \in X : \ r(a, x) \geq \tfrac{1}{2} \,\}.$$

由 $r$ 诱导的选择对应是映射

$$C_r : \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

由.....给出

$$C_r(A) := \{\, a \in A : \ A \subseteq R_{1/2}(a) \,\} = \{\, a \in A : \ r(a, x) \geq \tfrac{1}{2} \text{ for all } x \in A \,\}, \qquad A \in \mathcal{P}^*(X).$$

选择函数

$$C : \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

若存在一个模糊偏好关系 $r : \ X \times X \to [0, 1]$ ，使得

$$C(A) = C_r(A) \qquad \text{for all } A \in \mathcal{P}^*(X).$$

在这种情况下， $r$ 称为对 $C$进行理性化。

现在，我们将模糊理性选择从模糊度域$[0, 1]$ 扩展到度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0, 1]^k$的一般不确定模型 $M$，以此定义不确定理性选择。

定义 10.10.2 （类型为 $M$ 的不确定二元偏好关系）。设 $X$ 为一个有限非空的备选方案集合， $M$ 为一个度域为

$$\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0, 1]^k$$

对于某个整数 $k \geq 1$。

一个 $M$ 上的 $X$ 不确定二元偏好关系类型是一种映射

$$R_M : X \times X \longrightarrow \mathrm{Dom}(M).$$

对于 $a, \ b \in X$，其值

$$R_M(a, b) \in \mathrm{Dom}(M)$$

编码 根据模型 $M$， $a$ 至少与 $b$一样好的不确定度。

**定义 10.10.3** （阈值泛函和诱导上轮廓集）。 设 $R_M\colon X \times X \to \mathrm{Dom}(M)$ 是一个不确定二元偏好关系。固定一个全映射

$$\Theta_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [0,1]$$

以及一个阈值水平

$$\lambda \in (0,1].$$

对于每个 $a \in X$，定义 $a$ 的（$\Theta_M, \lambda$）-上轮廓集为

$$U_{M,\Theta,\lambda}(a) := \big\{x \in X :\ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda\big\}.$$

因此，$x \in U_{M,\Theta,\lambda}$（$a$）表示，在通过阈值泛函 $\Theta_M$ 对不确定比较 $R_M$（$a, x$）进行评估后，备选方案 $a$ 被判定在至少 $\lambda$ 的水平上优于 $x$ 。

**定义 10.10.4** （由不确定偏好关系诱导的选择对应）。 设

$$\mathcal{P}^*(X) := \{A \subseteq X :\ A \neq \varnothing\}$$

为 $X$ 的所有非空子集构成的族。在定义 10.10.3 的假设下，定义

$$C_{M,\Theta,\lambda} : \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

by

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) := \{\, a \in A :\ A \subseteq U_{M,\Theta,\lambda}(a) \,\} \qquad (A \in \mathcal{P}^*(X)).$$

等价地,

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) = \Big\{a \in A :\ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda \text{ for all } x \in A\Big\}.$$

这个集合称为由 诱导的不确定选择对应。

**定义 10.10.5** （不确定理性选择函数）。一个映射

$$C : \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

称为类型为 的不确定理性选择函数，如果存在

- 一个不确定二元偏好关系

$$R_M : X \times X \to \mathrm{Dom}(M),$$

- 总阈值泛函

$$\Theta_M : \mathrm{Dom}(M) \to [0,1],$$

- 以及一个阈值水平 $\lambda \in (0,1]$,

使得

$$C(A) = C_{M,\Theta,\lambda}(A) \qquad \text{for all } A \in \mathcal{P}^*(X).$$

在这种情况下，我们称 $C$ 被理性化，其依据是三元组

$$(R_M, \Theta_M, \lambda).$$

**定理10.10.6**（不确定理性选择的良定义性）。设 $X$ 是一个有限非空集，$M$是一个不确定模型，并设

$$R_M : X \times X \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

是一个不确定二元偏好关系。假设

$$\Theta_M : \mathrm{Dom}(M) \longrightarrow [0,1]$$

是一个全映射，且 $\lambda \in (0,1]$。

则诱导映射

$$C_{M,\Theta,\lambda} : \mathcal{P}^*(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

定义为

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) = \Big\{ a \in A : \ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda \ \textit{for all}\ x \in A \Big\}$$

是良定义的。更确切地说，对于每个 $A \in \mathcal{P}^*(X)$，

*1.* $C_{M,\ \Theta,\ \lambda}$（$A$）$\subseteq A$；*2.* $C_{M,\ \Theta,\ \lambda}$（$A$）是唯一确定的；*3.* $C_{M,\ \Theta,\ \lambda}$（$A$）$\in \mathcal{P}$（$X$）。

因此，$C_{M,\ \Theta,\ \lambda}$ 是 $X$上的良定义集值选择对应。

此外，如果满足以下存在条件：

$$\forall A \in \mathcal{P}^*(X)\ \exists a \in A\ \forall x \in A,\ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda,$$

*then*

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) \neq \varnothing \qquad \textit{for all}\ A \in \mathcal{P}^*(X),$$

因此，$C_{M,\ \Theta,\ \lambda}$ 在通常的取非空值意义下是真正的选择函数。

证明。任取 $A \in \mathcal{P}^*(X)$。由于 $A \subseteq X$ 和 $A \neq \varnothing$，每个元素 $a \in A$ 以及每个 $x \in A$ 都属于 $X$。因此，因为

$$R_M : X \times X \to \mathrm{Dom}(M),$$

该量

$$R_M(a,x) \in \mathrm{Dom}(M)$$

为每一对 $(a,\ x) \in A \times A$ 定义。

由于 $\Theta_M$ 在 $\mathrm{Dom}(M)$ 上是完全的，其值

$$\Theta_M(R_M(a,x)) \in [0,1]$$

对每个（$a,\ x$）$\in A \times A$都有定义。因为 $\lambda \in$（$0,1]$, 该陈述

$$\Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda$$

对于每一对这样的对象，都具有确定的真度。

因此，集合

$$\Big\{a \in A : \ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda \text{ for all } x \in A\Big\}$$

通过与有限集 $A$ 分离，该集合是良定义的。根据构造，该集合的每个元素都属于 $A$，因此

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) \subseteq A.$$

这证明了（1）。

定义条件仅取决于已确定的数据

$$A, \ R_M, \ \Theta_M, \ \lambda,$$

因此，所得子集 $C_{M,\ \Theta,\ \lambda}(A)$ 是唯一确定的。这证明了（2）。

由于 $C_{M,\Theta,\lambda}(A) \subseteq A \subseteq X$，因此

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) \in \mathcal{P}(X).$$

这证明了 (3)。

因此，$C_{M,\Theta,\lambda}$ 是从 $\mathcal{P}^*(X)$ 到 $\mathcal{P}(X)$ 的良定义映射。

对于最后一个结论，假设存在条件

$$\forall A \in \mathcal{P}^*(X) \ \exists a \in A \ \forall x \in A, \ \Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda.$$

固定 $A \in \mathcal{P}^*(X)$。那么存在某个 $a^\star \in A$ 使得

$$\Theta_M(R_M(a^\star, x)) \geq \lambda \qquad \text{for all } x \in A.$$

根据 $C_{M,\Theta,\lambda}(A)$ 的定义，这意味着

$$a^\star \in C_{M,\Theta,\lambda}(A).$$

因此 $C_{M,\ \Theta,\ \lambda}(A) \neq \varnothing$。由于 $A$ 是任意的，该结论对所有非空可行集 $A$ 均成立。 □

**命题 10.10.7** （约化为模糊理性选择）。设 $M$ 为具有以下性质的模糊模型

$$\mathrm{Dom}(M) = [0,1].$$

*Take*

$$\Theta_M(u) := u \qquad (u \in [0,1]),$$

并设

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

那么，对于每个模糊二元关系

$$r : X \times X \to [0,1],$$

所诱导的不确定选择对应变为

$$C_{M,\Theta,\lambda}(A) = \{\, a \in A : \ r(a,x) \geq \tfrac{1}{2} \ \textit{for all } x \in A \,\},$$

这恰好是标准的 $1/2$-截集模糊理性选择规则。

证明。 在 $\mathrm{Dom}(M) = [0,1]$ 和 $\Theta_M(u) = u$ 的条件下，我们有

$$\Theta_M(R_M(a,x)) \geq \lambda \iff r(a,x) \geq \frac{1}{2}.$$

将其代入定义 10.10.4，即可得到所述公式。 □

# 第11章

# 决策应用

本章将简要回顾决策的应用领域。

## 11.1 计算机科学与工程的应用

本节介绍了　　计算机科学与工程领域中具有代表性的决策应用。

- 软件需求优先级排序与发布规划：软件需求优先级排序与发布规划根据值、成本、风险和依赖关系对功能进行排序，以选择最优的发布内容（参见 [1341]）。相关分析采用了模糊多属性决策 [1342,1343] 和多人决策 [1344]。

- IT服务管理（ITSM）改进优先级排序：ITSM改进优先级排序根据事件减少、客户影响、工作量、风险、合规性和投资回报率（ROI）对流程和工具改进计划进行排序（参见 [1345]）。相关分析采用了模糊集和中智集 [1346,1347]。

- 网络安全控制优先级排序与风险处置规划：根据风险降低程度、成本和可行性对安全控制措施进行排序，从而有效指导风险处置计划、预算编制和实施次序，以应对不断演变的威胁（参见 [1348]）。相关分析采用了模糊决策 [1349,1350] 和中智决策 [1351,1352]。

- 云迁移和系统架构备选方案选择：根据成本、延迟、安全性、可扩展性、合规性和运营复杂度评估云迁移及架构方案，以选择最合适的设计。相关分析采用了模糊逻辑 [1353]。

## 11.2 制造业的应用

Th本节介绍决策在制造业中的代表性应用。

- 生产计划和装配线平衡：生产计划和装配线平衡会安排任务并将工作量分配至各工位，以尽量缩短周期时间、降低成本并减少瓶颈（参见[1354]）。相关案例采用模糊决策 [1355,1356] 和中智决策 [1357,1358]进行了分析。

- 维护策略选择（预防性、预测性、基于状态）：维护策略选择通过平衡可靠性、停机时间、成本型、风险和资源约束，选择预防性、预测性或纠正性策略（参见 [1359]）。案例已使用模糊多准则决策进行分析 [1360,1361]。

- 电网与工业资产中的优先级排序：电网与工业资产中的优先级排序根据可靠性影响、风险、成本型、紧迫性和安全约束，对维护与投资措施进行排序。案例已使用模糊多准则决策进行分析 [1362]。

- 项目选择与投资组合优化（包括研发投资组合）：项目选择与投资组合优化在预算和风险约束下选择并平衡项目，以最大化战略价值和回报（参见 [1363]）。分析已采用多种方法开展，包括模糊多准则决策 [1364,1365], 模糊 MULTIMOORA [1366], 模糊TOPSIS [1367–1369], 中智多准则决策 [1370], 中智层次分析法 [1371], 和中智 TOPSIS [1372]。

## 11.3 金融应用

本节介绍决策在金融领域中的典型应用。

- 信用评分与贷款审批（金融决策）：信用评分与贷款审批利用财务和行为指标评估借款人风险，并据此给出评价，以决定信用额度和审批结果（参见 [1373]）。相关分析采用了模糊决策、 [1374,1375],直觉模糊决策、 [1376], 以及中智决策 [1377,1378]。

## 11.4 商业应用

本节介绍决策在商业领域中的典型应用。

- 供应商选择与采购评估：供应商选择与采购评估根据成本、质量、交付、风险、可持续性和战略契合度对供应商进行排序，并运用多准则分析支撑采购决策（参见 [1379]）。研究人员已探讨了多种分析方法，包括模糊多准则决策、 [1380,1381], 模糊层次分析法、 [1382], 模糊TOPSIS [1383,1384], 和中智 TOPSIS [1385–1387]。

- 物流枢纽/仓库选址：物流枢纽/仓库选址是在多项准则下，权衡成本、服务覆盖范围、需求邻近度、产能、风险和可持续性目标，从而选出最优设施选址（参见 [1388]）。相关研究探讨了采用模糊多准则决策 [1389], 模糊TOPSIS [1390], 和模糊 BWM [1391]等方法进行分析。

- 供应链中的运输方式与路线选择：通过平衡整个供应链中的成本、在途时间、可靠性、产能、排放和风险来选择运输方式与路线。相关研究采用了模糊多准则决策方法 [1392,1393] 和模糊层次分析法 [1394–1396], 等方法。

- 人力资源选拔、绩效评估和分配决策：通过评价技能、经验、绩效度量、可用性和适配度来选择和分配人员，并在不确定性下平衡公平性、成本和组织目标。已有研究报告了采用模糊层次分析法等方法进行的分析 [1397,1398]。

- 营销策略选择（预算分配和营销活动优先级排序）：通过比较各渠道和营销活动的投资回报率、覆盖范围、时机、风险及预算约束，选择营销策略并确定支出优先级。相关分析采用了模糊网络分析法 [1399,1400], 模糊层次分析法 [1401],和模糊 DEMATEL [1402]。

## 11.5 医学应用

本节介绍决策在医学领域中的代表性应用。

- 医学诊断：综合症状、病史、检查和影像资料，推断疾病发生的可能性、确认病因，并在不确定性下指导治疗决策（参见 [1403]）。已有多项研究采用模糊决策 [1404,1405], 、直觉模糊决策 [87,1406],和中智决策 [1407,1408]等框架开展。

- 治疗方案选择与临床决策支持：根据患者数据和准则对治疗备选方案进行排序，在存在不确定性、约束和权衡的情况下，为临床医生提供透明的建议。已有研究报告了采用模糊PROMETHEE等方法进行的分析 [1409]。

- 在需求和住院时长不确定的情况下进行病床/重症监护室分配与激增需求规划：通过预测不确定的需求和住院时长来分配病床和重症监护室产能，并优化人员配置、资源、分诊和激增需求响应（参见 [1410]）。已有研究报告了采用模糊多准则决策 [1411] 和模糊层次分析法 [1412,1413]进行的分析。

## 11.6 社会科学的应用

本节介绍决策在社会科学领域的代表性应用。

- 环境影响评价与缓解方案选择：在不确定情况下，通过比较影响的严重程度、可能性、成本、合规性和利益相关者的优先级，评估环境影响并选择缓解方案。已有研究采用模糊层次分析法 [1414]等方法开展分析。

- 可再生能源选址（风能/太阳能）与技术选择：通过评估资源潜力、电网接入条件、土地约束、环境影响、成本和不确定性，选择风能/太阳能场址（参见 [1415]）。已有研究采用模糊多准则决策方法 [1416,1417]进行分析。

- 天气预测：通过结合观测数据和模型，对未来不同时空的温度、降水、风况及不确定性进行估计（参见 [1418]）。相关研究采用了模糊多准则决策方法 [1419] 和中智多准则决策方法 [1420]。

- 智能手机选择：在各种约束下，通过比较价格、性能、摄像头、电池、显示屏、软件支持、耐用性及用户偏好来选择智能手机。相关研究采用了模糊多准则决策 [1421], 模糊 WASPAS [1422], 模糊层次分析法 [31], 和模糊 TOPSIS [1423], 等方法。

# 第12章

# 讨论：新决策方法

本章将考察几种新的决策方法。为方便起见，本章介绍的主要概念列于表12.1进行比较。

表12.1：本章介绍的新决策方法的简要比较。

| 方法 | Type | 基本结构 | 核心机制 | 主要的 put | 决策 role |
|---|---|---|---|---|---|
| 统一决策结构（UDS） | 清晰元框架 | 备选方案，准则，评价域，决策数据，权重，预处理、核，以及决策映射 | 《流程》原始评价数据通过 Prep → Ker → Dec，以生成一个可接受决策对象 | 得分，排序，选择集，或分类/分类-分类 | 方法-统一决策架构 ture |
| 统一的 Un-不确定的决策结构（UUDS） | 不确-定元-框架 | 备选方案，准则、不确-定性代数，不确定评-价、权重，以及表示-不变算子 | 应用不确定性-感知预处理，核构造，以及决策映射以不依赖表示的方式方式 | 表示无关不变得分、排序，选择集，或分类/类-别 | 不确定性-统一决策架构 ture |
| 迭代多准则决策（I-MCDM） | 层级评分方法 | 准则树、叶节点得分和内部节点多准则决策评分算子（运算符），具有局部权重 | 递归聚合子准则得分，向上传递，直到得到根得分获得 | 最终分数向量和诱导的排序 | 层次结构的 MCDM |
| 迭代多属性决策（I-MADM） | 层级层次 at-属性聚合 | 属性树，原子属性得分，以及内部节点多属性决策算子使用局部权重 | 递归组合低层属性得分汇入高层属性得分 | 最终根节点评分与排序 | 层次的 MADM |
| 迭代多重客观决策 (I-MODM) | 层次化 cal opti-化 | 可行集，目标目标树、叶节点目标、聚合运算符，以及一个求解器 | 递归地聚合目标，得到最终标量目标，然后求解它 | 最终标量客观且解集 | 层级 chical MODM |

下页续。

表*12.1*（续）。

| 方法 | Type | 基本结构 | 核心机制 | 主要结put | 决策role |
|---|---|---|---|---|---|
| 解析层次超网络过程（AHNP） | 超网络优先级化 | 有向超-网络，成对-比较矩-阵、局部优先-级，以及一个超-超矩阵 | 计算佩龙优先级向量（定义于超弧上）并从平稳优先级分布中推导全局优先级 | 全局优先级向量和排序 | 基于网络的优先化 |
| 解析型超超网络工作流程(ASHNP) | 超网络优先级排序tion | 有向 $n$-超超网络，两两比较矩阵超节点上的以及超超超矩阵 | 将 AHNP 从普通节点扩展至 $n$-超节点，并计算稳态全局优先级 | 全局优先级向量和排序超节点 | 层级型网络优先级tion |
| 解析递归超超网络网络过程(ARSHNP) | 递归超模糊网络优先级tion | 有向递归超超网络，基于支撑的成对矩阵，以及递归超超矩阵 | 展平递归结构通过支撑集结构，计算局部优先级，并提取全局优先级——通过平稳向量 | 全局优先级向量和排序 | 递归层级先验化 |
| SuperHyperDecision-决策（SHDM） | 可达性-基础的决策系统 | 工作论域在 $\mathcal{P}^n(D)$ 中，超超组合规则、种子集和预序 | 生成最小的通过可达闭集迭代后果扩展并选择极大可达状态 | 极大可达状态集可达状态决策状态 | 基于可达性-的选择 |
| 不确定SuperHyperDecision-制定（USHDM） | 不确定可达性基于决策系统 | SHDM 结构以及一个不确定性结构和不确定的赋值映射 | 结合可达状态生成与不确定性值评估和由评分诱导的极大性 | 极大元素集不确定决策结果 | 不确定性感知可达性基础选择 |

**注。** UDS 和 UUDS 是通用的决策架构，而非单一的具体方法。I-MCDM、I-MADM 和 I-MODM 是在准则、属性或目标构成的树上进行递归层次聚合的方案。AHNP、ASHNP 和 ARSHNP 是基于网络的优先级排序模型，运用平稳超矩阵的思想处理日益丰富的结构。SHDM 和 USHDM 是基于闭包和可达性的决策系统，其最终决策取自极大可达状态；后者还纳入了不确定性。

## 12.1 统一决策结构

统一决策结构是一个框架，它通过预处理、决策核和决策映射对决策数据进行映射，从而在不同方法中产出得分、排序、选择或分类。

**定义 12.1.1**（决策任务和可接受输出）。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限非空的备选方案集。在 $\mathcal{A}$ 上的决策输出是以下对象之一：

1.（评分）一个映射 $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$；

2.（排序） $\mathcal{A}$上的全预序 $\succeq$ （自反、传递且完全）；

3.（选择）非空子集 $\mathcal{A}^\star \subseteq \mathcal{A}$;

4.（分类／分类）一个映射 $\sigma:\ \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ 至类别 $\mathcal{K} = \{K_1 \succ K_2 \succ$构成的有限有序集 $\cdots \succ K_L\}$。

用 $\mathfrak{O}(\mathcal{A})$ 表示所有此类可容许输出的（互不相交的）集合。

**定义12.1.2**（统一决策结构（UDS））。 一个统一决策结构 （UDS）是一个元组

$$\mathsf{UDS} := \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, (\mathbb{E}_j)_{j=1}^n,\ X,\ w,\ \mathsf{Prep},\ \mathsf{Ker},\ \mathsf{Dec}\Big)$$

满足:

1.（备选项集合 与准则） $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 和 $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ 是有限非空集 s.

2.（评价域）对于每个准则 $C_j$, $\mathbb{E}_j$ 是一个非空集（例如 $\mathbb{R}$、区间尺度或顺序尺度）。

3.（决策数据）评价映射是一个全函数

$$X : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to \bigsqcup_{j=1}^{n} \mathbb{E}_j, \qquad X(A_i, C_j) =: x_{ij} \in \mathbb{E}_j.$$

4.（权重）权重向量为 $w = （w_1,\ \ldots,\ w_n）\in [0,1]^n$，其中

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

5.（预处理算子）Prep是对映射的规定（可能取决于 $w$ 和/或完整矩阵（$x_{ij}$））， 用于生成处理后表示 Prep（$X$, $w$） $\in \mathcal{D}$, 其中 $\mathcal{D}$ 是一个固定的数据空间。此步骤可能包括归一化、效益/成本转换、尺度变换、参考剖面构造等。

6.（决策核）Ker : $\mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ 是一个全函数，它将处理后的数据映射为一个证据对象$z \in \mathcal{Z}$ （例如效用向量、到理想解距离向量、超越矩阵、支配矩阵、流等）。

7.（决策映射）Dec : $\mathcal{Z} \to \mathfrak{O}(\mathcal{A})$ 是一个全函数，它将证据转换为可容许的产出（得分/排序/选择/分类）。

所诱导的决策程序是复合映射

$$\mathsf{DM}_{\mathsf{UDS}} := \mathsf{Dec} \circ \mathsf{Ker} \circ \mathsf{Prep}.$$

**定理 12.1.3** (UDS 的良定义性)。 定理 *12.1.2* 中的每个UDS 都会诱导出一个唯一的决策程序

$$\mathsf{DM}_{\mathsf{UDS}}:\ (X, w) \longmapsto \mathsf{DM}_{\mathsf{UDS}}(X, w) \in \mathfrak{O}(\mathcal{A}),$$

即，产出存在，且由$(X, w)$唯一确定。

证明。 根据定理 12.1.2，Prep 是从输入 $(X, w)$ 到 $\mathcal{D}$ 的全映射，Ker 是从$\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{Z}$ 的全映射，而 Dec 是从 $\mathcal{Z}$ 到 $\mathfrak{O}(\mathcal{A})$ 的全映射。因此，复合 Dec $\circ$ Ker $\circ$ Prep 是从 $(X, w)$ 到 $\mathfrak{O}(\mathcal{A})$ 的全函数。函数值唯一，因此诱导的产出也是唯一的。

□

## 12.2 统一不确定决策结构

统一不确定决策结构通过加入不确定性代数和表示不变算子扩展了 UDS，从而能够根据模糊/粗糙/灰色/中智评价作出与方法无关的决策。

**定义 12.2.1**（具有表示等价性的不确定性代数）。 不确定性代数是一个元组

$$\mathbb{U} = (U, \sim, \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}},\ \mathrm{sc})$$

其中：

1. $U$ 是由不确定值组成的非空集（例如模糊数、粗糙区间、灰数、中智三元组、直觉主义对、语言术语等）。

2. $\sim$ 是 $U$ 上的等价关系，用于编码表示相等性（例如，两个不同的参数化描述相同的隶属函数）。

3. 每个 $\omega_\alpha$ 是决策流程中使用的、作用于 $U$ 的（可能为多元的）运算，并且相容性成立：若对所有自变量均有 $u_k \sim u_k'$，则

$$\omega_\alpha(u_1,\dots,u_p) \sim \omega_\alpha(u_1',\dots,u_p') \quad \text{(whenever both sides are defined)}.$$

4. sc：$U \to \mathbb{R}^q$ 是一个在等价类上为常数的得分（清晰化）映射：

$$u \sim v \implies \mathrm{sc}(u) = \mathrm{sc}(v).$$

**定义 12.2.2**（统一不确定决策结构（UUDS））。 一个统一不确定决策结构（UUDS）是一个元组

$$\mathsf{UUDS} := \Big(\mathcal{A}, \mathcal{C}, (\mathbb{U}_j)_{j=1}^n,\ \widetilde{X},\ w,\ \widetilde{\mathsf{Prep}},\ \widetilde{\mathsf{Ker}},\ \widetilde{\mathsf{Dec}}\Big)$$

使得：

1. $\mathcal{A} = \{A_1,\dots,A_m\}$ 与 $\mathcal{C} = \{C_1,\dots,C_n\}$ 均为有限非空。

2. 对每个 $j$，$\mathbb{U}_j = (U_j,\ \sim_j,\ \{\omega_{\alpha,j}\}_{\alpha\in\mathcal{I}_j},\ \mathrm{sc}_j)$ 在定理 12.2.1 的意义下是一个不确定性代数。

3. 不确定评价映射是完全的：

$$\widetilde{X} : \mathcal{A}\times\mathcal{C} \to \bigsqcup_{j=1}^n U_j, \qquad \widetilde{X}(A_i, C_j) =: \tilde{x}_{ij} \in U_j.$$

4. 权重满足 $w_j \in [0,1]$ 和 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$。

5. 预处理算子 $\widetilde{\mathsf{Prep}}$ 将 $(X, w)$ 映射到处理后空间 $\mathcal{D}$，并且是 表示不变的：如果对所有 $(i,j)$ 都有 $\tilde{x}_{ij} \sim_j \tilde{x}'_{ij}$，那么

$$\widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}, w) = \widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}', w).$$

6. 核 $\widetilde{\mathsf{Ker}} : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ 是完全且表示不变的（相对于由所有已用运算的 $\sim_j$-兼容性所导出的 $\mathcal{D}$ 上的诱导等价关系 $\widetilde{\sim}$）。

7. 决策映射 $\widetilde{\mathsf{Dec}} : \mathcal{Z} \to \mathfrak{O}(\mathcal{A})$ 是完全的，且仅通过等价类不变量（通常通过评分映射 $\mathrm{sc}_j$ 或其聚合）依赖于不确定对象。

由此得到的不确定决策程序为

$$\mathsf{DM}_{\mathsf{UUDS}} := \widetilde{\mathsf{Dec}} \circ \widetilde{\mathsf{Ker}} \circ \widetilde{\mathsf{Prep}}.$$

**定理 12.2.3 (UUDS的良定义性)。** 设 UUDS 如定理*12.2.2*所述。则：

1. 对每个输入$(X, w)$，产出决策者$_{\mathsf{UUDS}}(X, w)$ 都存在且唯一。

2. 产出具有表示无关性：若对于所有$(i, j)$， $X$ 和 $X'$ 满足 $\tilde{x}_{ij} \sim_j \tilde{x}'_{ij}$ ，则

$$\mathsf{DM}_{\mathsf{UUDS}}(\widetilde{X}, w) = \mathsf{DM}_{\mathsf{UUDS}}(\widetilde{X}', w).$$

证明。 (1) 根据定理12.2.2，Prep是从输入$(X, w)$到 $\mathcal{D}$的完全映射，Ker是从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{Z}$的完全映射，而Dec是从 $\mathcal{Z}$ 到 $\mathfrak{O}(\mathcal{A})$的完全映射。因此，复合映射存在且是一个函数；故其值唯一。

(2) 假设逐元素成立。根据定理12.2.2(5)中的表示不变性要求，

$$\widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}, w) = \widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}', w).$$

应用表示不变核定理12.2.2(6)可得

$$\widetilde{\mathsf{Ker}}\Big(\widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}, w)\Big) = \widetilde{\mathsf{Ker}}\Big(\widetilde{\mathsf{Prep}}(\widetilde{X}', w)\Big).$$

最后，Dec 仅依赖于等价类不变量（例如，在 $\sim_j$-类别上为常值的评分映射），因此应用 Dec 会保持相等性，并得到 $\mathsf{DM}_{\mathsf{UUDS}}(X, w) = \mathsf{DM}_{\mathsf{UUDS}}(X', w)$。□

## 12.3 迭代多准则决策

迭代多准则决策通过层次准则树递归组合多准则决策评分算子，将叶准则得分聚合为最终的根节点得分，并据此对备选方案进行排名。

**定义12.3.1** （多准则决策评分算子）。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选方案的有限非空集，并设 $k \in \mathbb{N}$。一个（清晰）多准则决策评分算子 的元数为 $k$ ，是一个全函数

$$\mathcal{M} : \mathbb{R}^{m \times k} \times \Delta_k \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

其中 $\Delta_k := \{\, w \in [0,1]^k : \sum_{\ell=1}^{k} w_\ell = 1 \,\}$ 是权重单纯形。给定性能矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m \times k}$和权重 $w \in \Delta_k$，向量 $\mathcal{M}(X, w) = (u(A_1) \ldots, u(A_m))^\top$ 被解释为 $\mathcal{A}$上的得分 。

（示例：加权和、TOPSIS得分、VIKOR指标、MOORA得分、TODIM值、PROMETHEE净流等，前提是它们为每个备选方案产出实值评分。）

**定义12.3.2** （准则树）。 准则树是一个有限有根树 $T = (V, E, r)$。对于节点 $v \in V$，令 $\mathsf{Ch}(v) \subseteq V$ 为 $v$的（有限）子节点集合。如果 $\mathsf{Ch}(v) = \varnothing$，则该节点为叶节点；否则为内部节点。高度 $\mathsf{ht}(T)$ 是从根到叶节点的有向路径上边的最大数量。

**定义12.3.3**（迭代多准则决策（I-MCDM））。设 $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为备选项，且 $T = (V,\ E,\ r)$ 为准则树。一个迭代多准则决策（I-MCDM）实例是一个集合

$$\text{I-MCDM} := \Big(\mathcal{A},\, T,\, \{u_\ell\}_{\ell \in L},\, \{\mathcal{M}_v, w^{(v)}\}_{v \in V \setminus L}\Big),$$

其中：

1. $L \subseteq V$ 是叶节点的集合。每个叶节点 $\ell \in L$ 都配备一个基础（原子）得分

$$u_\ell : \mathcal{A} \to \mathbb{R}.$$

（等价地，$u_\ell$ 可由原始测量值/语言评价经任意固定的预处理与清晰化得到；本定义仅要求所得映射 $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$。）

2. 每个内部节点 $v \in V \setminus L$（具有 $k_v := |\mathsf{Ch}(v)|$）配备有

$$\mathcal{M}_v :\ \mathbb{R}^{m \times k_v} \times \Delta_{k_v} \to \mathbb{R}^m \quad \text{(an MCDM scoring operator)}$$

以及一个关于其子节点的权重向量 $w^{(v)} \in \Delta_{k_v}$。

**递归语义（“$\cdots$的多准则的多准则”）**。对每个节点 $v \in V$，递归定义评分函数 $u_v :\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 如下：

(S1) 若 $v$ 是叶节点，则设 $u_v := u_v$ 如上所述（基础分数）。

(S2) 若 $v$ 是内部节点，则将其子节点枚举为 $\mathsf{Ch}(v) = \{c_1, \ldots, c_{k_v}\}$，并按下式构造子得分矩阵 $X^{(v)} \in \mathbb{R}^{m \times k_v}$

$$X^{(v)}_{i\ell} := u_{c_\ell}(A_i) \qquad (i = 1, \ldots, m,\ \ell = 1, \ldots, k_v).$$

然后按下式定义父节点得分向量

$$\big(u_v(A_1), \ldots, u_v(A_m)\big)^\top := \mathcal{M}_v\Big(X^{(v)},\, w^{(v)}\Big).$$

最终 *I-MCDM* 得分 为根节点处的 $u_r :\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$。可通过 $A_i \succeq A_k \iff u_r(A_i) \geq u_r(A_k)$ 得到最终排序。

**定理12.3.4**（I-MCDM 的良定义性）。设I-MCDM 如定理*12.3.3*所述。假设 $T$ 是有限的，并且每个 $\mathcal{M}_v$ 都是其指定定义域上的全函数。那么：

*1.* 对每个节点 $v \in V$，递归定义的映射 $u_v :\ \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ 存在且唯一 *e.*

*2.* 特别地， 最终分数 $u_r$ 以及诱导排序由实例数据唯一确定 .

证明。 由于 $T$是一棵有限根树，节点可按距叶深度（等价地，按到叶节点距离递减）构成良基序。按照此序进行归纳。

基础步骤（ 叶节点）。如果 $v$ 是叶节点，则 $u_v$ 作为实例的一部分给出，因此存在且唯一。

归纳步骤（内部节点）。假设对于所有子节点 $c \in \mathsf{Ch}(v)$，函数 $u_c$ 均存在且唯一。那么子得分矩阵 $X^{(v)}$ 便唯一确定，因为每个元素 $X^{(v)}_{i\ell} = u_{c_\ell}(A_i)$都唯一确定。由于 $\mathcal{M}_v$ 具有完全性且 $w^{(v)} \in \Delta_{k_v}$ 是固定的，向量 $\mathcal{M}_v(X^{(v)},\ w^{(v)}) \in \mathbb{R}^m$ 存在且唯一，因此定义了唯一的函数 $u_v$。

由于节点数量有限，每个节点都能在有限步内到达，因此所有 $u_v$ 都存在且唯一。将此结论应用于根节点 $r$，可得 $u_r$ 存在且唯一，进而得到唯一的诱导排序。 □

## 12.4 迭代多属性决策

迭代多属性决策沿属性层次结构组合多属性决策评分算子，递归地将低层属性得分聚合为根得分，以便对备选方案进行排序。

**定义 12.4.1** （属性/目标树）。 使用一棵有限根树 $T = (V,\ E,\ r)$来表示嵌套的属性 或目标。对于每个节点 $v \in V$，令 $\mathsf{Ch}(v)$ 表示其子节点的（有限）集合。叶节点是满足 $\mathsf{Ch}(v) = \varnothing$ 的节点。

**定义 12.4.2** （MADM评分算子）。 令 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案的有限非空集，并令 $k \in \mathbb{N}$。元数为 $k$ 的*MADM*评分算子 是一个全函数

$$\mathcal{M} :\ \mathbb{R}^{m\times k} \times \Delta_k \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad \Delta_k := \Big\{ w \in [0,1]^k :\ \sum_{\ell=1}^{k} w_\ell = 1 \Big\}.$$

给定属性绩效矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m\times k}$ 和权重 $w \in \Delta_k$，$\mathcal{M}(X,\ w)$ 为每个备选方案返回一个实值得分。

**定义 12.4.3** （迭代多属性决策（I-MADM））。 令 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 为备选方案，令 $T = (V,\ E,\ r)$ 为一棵属性树。一个迭代多属性决策 （I-MADM）实例是一组

$$\text{I-MADM} := \Big( \mathcal{A},\ T,\ \{u_\ell\}_{\ell\in L},\ \{\mathcal{M}_v, w^{(v)}\}_{v\in V\setminus L} \Big),$$

其中， $L \subseteq V$是叶节点的集合，满足：

1. 每个叶节点 $\ell \in L$ （一个原子属性）都有一个基础分数

$$u_\ell : \mathcal{A} \to \mathbb{R}.$$

2. 每个内部节点 $v \in V \setminus L$ （含有 $k_v := |\mathsf{Ch}(v)|$ ）都有一个MADM评分算子

$$\mathcal{M}_v : \mathbb{R}^{m\times k_v} \times \Delta_{k_v} \to \mathbb{R}^m$$

以及其子节点上的权重向量 $w^{(v)} \in \Delta_{k_v}$ 。

**递归语义**。递归地为所有节点 $v \in V$定义得分 $u_v$： $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ：

1. 若 $v$ 是叶节点，则给定 $u_v$ （基础属性评分）。
2. 若 $v$是内部节点，其子节点为$v = \{c_1, \ldots, c_{k_v}\}$，则通过 $X_{i\ell}^{(v)} = u_{c_\ell}(A_i)$构造 $X^{(v)} \in \mathbb{R}^{m \times k_v}$，并设

$$(u_v(A_1), \ldots, u_v(A_m))^\top := \mathcal{M}_v(X^{(v)}, w^{(v)}).$$

最终的 I-MADM 得分是根节点处的 $u_r$ ，据 $A_i \succeq A_k \iff u_r(A_i) \geq u_r(A_k)$进行排序。

**定理12.4.4 (I-MADM 的良定义性)。** 根据定理*12.4.3*，若 $T$ 是有限的且每个 $\mathcal{M}_v$ 都是完全定义的，则对每个节点 $v \in V$，得分 $u_v$ 都存在且唯一；特别地， $u_r$ 是唯一的。

证明。 从叶节点到根节点进行归纳。叶节点评分是给定的。假设子节点得分 $u_c$ 已被唯一确定，则矩阵 $X^{(v)}$ 也被唯一确定。 $\mathcal{M}_v$ 的完全性意味着 $\mathcal{M}_v(X^{(v)}, w^{(v)}) \in \mathbb{R}^m$存在且唯一，因此唯一地定义了 $u_v$ 。 $T$ 的有限性确保归纳最终到达根节点。 □

## 12.5 迭代多目标决策

迭代多目标决策沿层次化目标树组合目标聚合算子，递归地产生最终的标量目标，然后对其求解以获得最优决策。

**定义12.5.1** （多目标决策目标聚合算子）。设 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ 是非空的可行决策集。元数为 $k$ 的多目标决策目标聚合算子是一个全函数

$$\mathcal{G}: (\mathbb{R}^{\mathcal{X}})^k \times \Delta_k \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{X}},$$

其中（$\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$）$^k$表示 $\mathcal{X}$上的 $k$元实值函数元组。给定目标函数 $f_1$，……， $f_k$： $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$以及权重 $w \in \Delta_k$、 $\mathcal{G}$（$f_1$，……， $f_k$； $w$），该函数返回一个聚合目标 $F$： $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$（按指定进行最小化或最大化）。

**定义12.5.2** （迭代多目标决策（I-MODM））。设 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ 是非空可行集，且 $T =$ （$V$， $E$， $r$）是一个目标树。一个迭代多目标决策（I-MODM）实例是一个集合

$$\text{I-MODM} := \Big(\mathcal{X},\, T,\, \{f_\ell\}_{\ell \in L},\, \{\mathcal{G}_v, w^{(v)}\}_{v \in V \setminus L},\, \text{Solve}\Big),$$

其中 $L$是叶节点集合，满足：

1. 每个叶节点 $\ell \in L$ 都有一个原子目标 $f_\ell$： $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$。
2. 每个内部节点 $v$ （满足 $k_v := |\text{Ch}(v)|$ ）都有一个目标聚合算子

$$\mathcal{G}_v: (\mathbb{R}^{\mathcal{X}})^{k_v} \times \Delta_{k_v} \to \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$$

以及权重 $w^{(v)} \in \Delta_{k_v}$。

3. 求解是一种固定的优化规则，它将标量目标 $F\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 映射到非空解集$\mathcal{X}^\star(F) \subseteq \mathcal{X}$（例如最小值点或最大值点），前提是此类解集存在。

**递归语义**。 递归定义聚合目标函数 $F_v\colon \ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 对所有 $v \in V$递归定义：

1. 如果 $v$ 是叶节点，则令 $F_v := f_v$。

2. 如果 $v$是内部节点，且 $\mathsf{Ch}(v) = \{c_1, \dots, c_{k_v}\}$，则令

$$F_v := \mathcal{G}_v(F_{c_1}, \dots, F_{c_{k_v}}; w^{(v)}).$$

Th最终标量目标在根节点处为 $F_r$ ，而 I-MODM 的产出是解集 t

$$\mathcal{X}^\star := \mathsf{Solve}(F_r) \subseteq \mathcal{X}.$$

**定理12.5.3** (I-MODM 的良定义性)。 根据定理*12.5.2*，如果 $T$ 是有限的，每个 $\mathcal{G}_v$ 都是完全的，并且 求解$(F_r)$有定义（即回报一个非空集），那么：

*1.* 每个聚合目标 $F_v$ 均存在，且对所有 $v \in V$ 都唯一；

*2.* 最终目标 $F_r$ 是唯一的；因此，产出解集 $\mathcal{X}^\star$ 被唯一确定。

证明。 从叶节点向上归纳。叶节点唯一确定目标 $F_v$ 。假设对于所有子节点 $c \in \mathsf{Ch}(v)$，目标 $F_c$ 均被唯一确定，则 $\mathcal{G}_v$ 的全定义性保证存在唯一函数 $F_v = \mathcal{G}_v(F_{c_1}, \dots, F_{c_{k_v}}; w^{(v)})$。由于 $T$ 有限，递推必在根节点处终止，从而得到唯一的 $F_r$。将固定规则 Solve 应用于这个唯一的 $F_r$ ，即可得到唯一确定的产出集。□

## 12.6 解析超超网络过程（ASHNP）

本节将探讨如何利用超图和超超图扩展网络分析法（ANP）。超图是对图的推广：其顶点由非空顶点子集构成的超边连接，使单条边能够连接多个顶点，从而刻画 [1424–1426]等高阶关系。超网络是一种（加权）超图：它由节点和超边构成，并在超边上定义权重/属性函数，用以表示具有相应优势或置信度的多节点交互 [1427]。 $n$-超超图的顶点取自某个基集的第 $n$ 次迭代幂集；其边是由这类超顶点构成的非空族，用于刻画 [215, 1428–1432]层级结构。诸如有向超超图 [1433, 1434] 和元超超图 [1435–1437] 等相关概念也已为人所知。 $n$-超超网络是一种加权 $n$-超超图：其超节点取自第 $n$ 次幂集，超节点之上定义加权超边，以编码层级交互及其优势 [1438, 1439]。我们还将在附录中讨论一种能够推广图和超图等任意结构的概念；需要时请参阅。

解析超网络过程（AHNP）将网络分析法扩展到有向超网络；通过两两比较得到局部优先级，并将其汇总为超超矩阵，其平稳分布可提供全局节点权重。ASHNP 将 AHNP 推广到由迭代幂集构成的 n-超节点；超超弧编码层级交互；特征向量优先级构建超超矩阵，从而得出全局重要性排序。

**定义 12.6.1**（迭代幂集与迭代非空幂集）。（参见 [1440]）设 $H$ 为一个集合，令$\mathcal{P}(H)$表示其（普通）幂集。

(1) 迭代幂集。对 $n \in \mathbb{N}_0$，将迭代幂集算子 $\mathcal{P}^n(H)$ 定义为

$$\mathcal{P}^0(H) := H, \qquad \mathcal{P}^{n+1}(H) := \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^n(H)\big) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(2) 迭代非空幂集。设 $\mathcal{P}_*(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ 为集合 $X$ 的非空幂集。对 $n \in \mathbb{N}_0$，将$\mathcal{P}_*^n(H)$ 定义为

$$\mathcal{P}_*^0(H) := H, \qquad \mathcal{P}_*^{n+1}(H) := \mathcal{P}_*\big(\mathcal{P}_*^n(H)\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}_*^n(H)\big) \setminus \{\varnothing\} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

**定义 12.6.2**（超图 [1425, 1441]）**.** 一个 （有限）超图 是有序对 $H = (V(H),\ E(H))$，其中

- $V(H)$ 是顶点的有限非空集；
- $E(H) \subseteq \mathcal{P}(V(H)) \setminus \{\varnothing\}$ 是超边的有限集。

因此，每条超边 $e \in E(H)$ 都是 $V(H)$ 的非空子集（允许一条边连接任意数量的顶点）。

**定义 12.6.3**（$n$-超超图 [215, 1442]）。令 $V_0$ 为有限非空的基集 顶点集，并令$n \in \mathbb{N}_0$。使用前一定义中的迭代幂集，$V_0$ 上的 $n$-超超图 是一个有序对

$$\mathbf{SHG}^{(n)} = (V, E)$$

使得

$$\varnothing \neq V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0) \quad \text{and} \quad E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}.$$

$V$ 的元素称为 $n$-超顶点，而 $E$ 的元素称为 $n$-超边。

特殊情况。对于 $n = 0$，可得到基集的某个子集上的普通超图：$V \subseteq V_0$ 和$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$。对于 $n = 1$，顶点是 $V_0$ 的子集，边则是这类子集构成的非空族。

注。由于 $E \subseteq \mathcal{P}(V) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(V_0)) = \mathcal{P}^{n+1}(V_0)$，每条 $n$-超边都可以（典范地）视为 $V_0$ 的第（$n+1$）次迭代幂集中的一个元素。

**Defi定义 12.6.4**（超网络 [1443, 1444]）。（加权）超网络是一个三元组 e

$$\mathcal{N} = (V, \mathcal{E}, w)$$

其中

- $V$ 是一个有限非空的节点集；
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$ 是一个有限的超边集；

- $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是定义在超边上的权重/属性函数（无权情形省略 $w$ ）。

一个有向超网络 可以通过将 $\mathcal{E}$ 替换为一组有序对来建模

$$\mathcal{E} \subseteq \big(\mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}\big) \times \big(\mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}\big),$$

其中每条有向超边的形式为$(T, H)$（尾部/头部），或采用任何等价的头尾划分形式。可选的节点标记和超边标记 $\ell_V :\ V \to L_V$ 以及 $\ell_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to L_{\mathcal{E}}$ 可添加以编码类型。

**定义 12.6.5 (**$n$-超超网络 [1444–1446]**).** 设 $V_0$ 为一个有限非空基节点集，并设$n \in \mathbb{N}_0$。一个 $n$-超超网络 是一个三元组

$$\mathcal{N}^{(n)} = (V, \mathcal{E}, w)$$

其中

- $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$ 是有限非空的 $n$-超节点集；
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$ 是有限的 $n$-超超边集；
- $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个可选的权重函数。

等价地， $n$-超超网络是赋有超边权重函数的 $n$-超超图。此外， $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(V) \subseteq \mathcal{P}^{n+1}(V_0)$ 自动成立。

**定义 12.6.6** （正互反成对比较矩阵）。 若矩阵 $M = (m_{pq}) \in \mathbb{R}_{>0}^{k \times k}$满足正互反，则称其为正互反矩阵。

$$m_{pp} = 1, \qquad m_{pq} = \frac{1}{m_{qp}} \quad (p \neq q).$$

**引理 12.6.7** （佩龙优先向量）。 设 $M \in \mathbb{R}_{>0}^{k \times k}$是一个正矩阵（特别地，定理 *12.6.6* 中的任意矩阵都是正矩阵）。则存在特征值 $\lambda_{\max} > 0$ 和特征向量 $v \in \mathbb{R}_{>0}^{k}$ ，使得 $Mv = \lambda_{\max} v$。此外， $v$ 在相差一个正标量因子的意义下是唯一的。因此，归一化向量

$$p(M) := \frac{v}{\mathbf{1}^{\top} v} \in \Delta_k, \qquad \Delta_k := \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k} :\ \mathbf{1}^{\top} x = 1\},$$

由 $M$ 唯一确定。

证明。 这是正矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理的一个标准后果：正矩阵存在一个与其谱半径对应的唯一正特征向量（相差一个尺度变换）。通过 $\mathbf{1}^{\top} v$ 归一化即可唯一确定尺度。

□

**引理 12.6.8** （本原列随机矩阵的唯一平稳分布）。 设 $W \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times m}$ 为列随机矩阵，即 $\mathbf{1}^{\top} W = \mathbf{1}^{\top}$，并假设 $W$ 是本原的（存在 $t \in \mathbb{N}$ ，使得 $W^t$ 的所有元素均严格为正）。那么存在唯一的向量 $\pi \in \Delta_m$ ，使得

$$W\pi = \pi,$$

并且对于每个 $x \in \Delta_m$ ，都有 $W^k x \to \pi$ ，其 $k \to \infty$。

证明。 由佩龙–弗罗贝尼乌斯定理可知，本原性意味着特征值 1 是单特征值，并且有唯一的正右特征向量。将其归一化，使其分量和为 1，即可得到唯一的 $\pi \in \Delta_m$。由本原随机矩阵的佩龙分解可知，对于所有 $x \in \Delta_m$， $W^k x \to \pi$ 均收敛。 □

**定义 12.6.9**（有向超网络）。 有向超网络 是一个三元组

$$\mathcal{H} = (V, \mathcal{E}, \gamma),$$

其中 $V$ 是节点的有限非空集， $\mathcal{E}$ 是有向超弧的有限集

$$e = (T_e, H_e), \qquad \varnothing \neq T_e \subseteq V,\ \varnothing \neq H_e \subseteq V,$$

且 $\gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是可选的超弧权重（若无权重，则省略 $\gamma$）。直观而言，尾集 $T_e$ 会影响头集 $H_e$。

**定义 12.6.10**（解析超网络过程（AHNP））。 设 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ 是一个有限的决策元素集（准则、子准则、备选方案，或它们的任意组合），这些元素被表示为有向超网络 $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E}, \gamma)$ 的节点，其中 $V = \mathcal{A}$。

一个 解析超网络过程（*AHNP*）实例由以下部分组成：

1. 定义在 $V = \mathcal{A}$上的有向超网络 $\mathcal{H} = (V,\ \mathcal{E},\ \gamma)$。
2. 对于每条超弧 $e = (T_e,\ H_e) \in \mathcal{E}$ 以及每个头节点 $h \in H_e$，一个正互反矩阵

$$M^{(e,h)} \in \mathbb{R}_{>0}^{|T_e| \times |T_e|}$$

   其元素用于比较尾节点相对于 $T_e$ 头节点 $h$的相对影响。

3. 采用固定规则，为每个满足 $h \in H_e$的 $(e,\ h)$ 分配一个非负的弧—头混合权重$\alpha_{e,\ h} \geq 0$。（例如，$\alpha_{e,\ h}$ 可设为与 $\gamma(e)$成正比，然后按头节点进行归一化。）

**局部优先级**。对于每个 $(e,\ h)$，定义局部优先向量

$$p^{(e,h)} := p\Big(M^{(e,h)}\Big) \in \Delta_{|T_e|}$$

如定理12.6.7所述。按 $T_e$中的尾节点对 $p^{(e,h)}$ 编索引。

**全局影响（超超矩阵）**。定义原始影响矩阵 $S = (s_{ih})_{i,\ h \in V} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times m}$如下：

$$s_{ih} := \sum_{\substack{e = (T_e, H_e) \in \mathcal{E} \\ h \in H_e,\ i \in T_e}} \alpha_{e,h}\, p^{(e,h)}(i),$$

其中， $p^{(e,h)}(i)$表示与 $i \in T_e$对应的分量。

为得到列随机超超矩阵 $W = (w_{ih})$，对每一列 $h$设定：

$$w_{ih} := \begin{cases} \dfrac{s_{ih}}{\sum_{u \in V} s_{uh}}, & \text{if } \sum_{u \in V} s_{uh} > 0, \\ \delta_{ih}, & \text{if } \sum_{u \in V} s_{uh} = 0, \end{cases}$$

其中 $\delta_{ih}$ 是克罗内克δ（为避免零列而采用的自环回退）。

**最终p　优先级和产出**。 将AHNP优先向量 $\pi \in \Delta_m$ 定义为如下任意解

$$W\pi = \pi.$$

如果一个特定子集 $V_{\text{alt}} \subseteq V$ 表示备选方案，则按 $\pi$限制到 $V_{\text{alt}}$ 的值降序对备选方案进行排序（如需要，可在 $V_{\text{alt}}$ 上重新正规化）。

**定理12.6.11**（　　AHNP的良定义性）。 假设一个*AHNP*实例如定理*12.6.10*所述。则　　*:*

*1.* 所有局部优先向量 $p^{(e,h)}$ 均良定义且唯一。

*2.* 超超矩阵 $W$ 良定义且为列随机的。

*3.* 若 $W$ 是本原的，则平稳优先向量 $\pi \in \Delta_m$ 存在且唯一，并且对每个 $x \in \Delta_m$都有 $W^k x \to \pi$ 。

证明。 (1) 每个 $M^{(e,h)}$ 均为正互反，因而为正；应用定理12.6.7。

(2) 元素 $s_{ih}$ 是非负项的有限和，因而良定义且非负。列归一化定义了 $w_{ih} \geq 0$ ，并确保对每个 $h$有 $\sum_i w_{ih} = 1$ ；若原始列和为0，则回退列 $\delta_{ih}$ 的和也为1。因此 $\mathbf{1}^\top W = \mathbf{1}^\top$。

(3) 若 $W$ 是本原的，则应用定理 12.6.8，可得 $\pi$ 的存在性/唯一性以及幂的收敛性。

□

**定义 12.6.12** （解析超超网络过程（ASHNP））。 固定一个有限非空基节点集 $V_0$和一个整数 $n \in \mathbb{N}_0$。设 $V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$为 $n$-超节点的有限非空集。设 $\mathcal{H}^{(n)} = (V, \mathcal{E}, \gamma)$为超节点集 $V$ 上的有向超网络（在定理 12.6.9 的意义下），其超弧具有形式 $e = (T_e, H_e)$，其中 $\varnothing \neq T_e, H_e \subseteq V$。

一个解析超超网络过程（*ASHNP*）实例由以下部分组成：

1. 有向超超网络 $\mathcal{H}^{(n)} = (V, \mathcal{E}, \gamma)$。

2. 对每个 $e = (T_e, H_e) \in \mathcal{E}$ 以及每个头超节点 $h \in H_e$，一个正互反矩阵

$$M^{(e,h)} \in \mathbb{R}_{>0}^{|T_e| \times |T_e|}$$

比较 $T_e$ 中的超节点相对于头超节点 $h$。

3. 为每个 $(e,\ h)$ 分配的非负混合权重 $\alpha_{e,\ h} \geq 0$ ，其中 $h \in H_e$。

**计算**。定义　　局部优先级 $p^{(e,h)} := p(M^{(e,h)})$，构建原始影响矩阵 $S = (s_{ih})_{i,\ h\in V}$，方法是

$$s_{ih} := \sum_{\substack{e=(T_e,H_e)\in\mathcal{E}\\ h\in H_e,\ i\in T_e}} \alpha_{e,h}\, p^{(e,h)}(i),$$

并按列归一化（采用相同的零列回退），得到指标集 $V$ 上的列随机超超矩阵 $W$。定义 ASHNP优先向量 $\pi \in \Delta_{|V|}$ 为 $W\pi = \pi$，并据此对指定的备选超节点进行排序。

**定理12.6.13** (ASHNP 的良定义性)。 假设存在一个如定理*12.6.12*所述的 *ASHNP* 实例。那么：

*1.* 所有局部优先向量 $p^{(e,h)}$ 均良定义且唯一。

*2.* 超超矩阵 $W$ 良定义且为列随机矩阵。

*3.* 如果 $W$ 是本原的，那么平稳优先向量 $\pi \in \Delta_{|V|}$ 存在且唯一，并且对于每个 $x \in \Delta_{|V|}$，$W^k x \to \pi$。

证明。 与定理12.6.11的证明相同，因为该构造仅取决于节点集的有限性以及成对比较矩阵的正性和互反性。$V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0)$这一事实只改变节点的解释方式，而不改变代数。

□

## 12.7 解析递归超超网络过程（ARSHNP）

递归超超图允许超顶点来自迭代幂集，而边则是取自深度-k 幂集宇宙的递归集合对象，用以刻画嵌套的多层级超关系，且不存在隶属循环 [1447–1449]。递归超超网络是一种加权递归超超图：它为递归超超边附加非负权重/属性，从而能够量化超节点之间层级化、嵌套交互的优势或置信度。解析递归超超网络过程（ARSHNP）将 AHNP 扩展至递归超超网络：对支撑集进行两两比较，以得出局部优先级，并将其汇总为列随机超矩阵，其平稳向量可提供全局节点重要性。

**定义12.7.1** （原子化约定）。 在下文中，节点集 $V$ 被视为由原子（非集合原子）组成的集合：在下文的递归构造中，$V$ 的元素不会通过隶属关系 $\in$ 进行分解。等价地，可以将 $V$ 替换为带标签副本

$$\mathsf{At}(V) := \{(0, v) \mid v \in V\},$$

并在 At($V$) 上进行处理。无论采用哪种方式，所有递归集合构造都基于这些原子构建。

**定义 12.7.2** （深度-$k$ 幂集论域）。 （参见 $[1450, 1451]$）令 $V$ 为一个非空的原子集，并令 $k \in \mathbb{N}_0$。定义 $(S_i)_{i\ge 0}$ 为

$$S_0 := V, \qquad S_i := \mathcal{P}\Big(\bigcup_{j=0}^{i-1} S_j\Big) \quad (i \ge 1),$$

并将深度至 $k$ 的对象宇宙定义为

$$\mathsf{Obj}(V,k) := \bigcup_{i=0}^{k} S_i.$$

由 $V$ 生成的$k$ 层幂集论域是

$$2_{V,k} \;:=\; \mathcal{P}\big(\mathsf{Obj}(V,k)\big).$$

**引理 12.7.3 (**有限深度与典范支撑)。 设 $V$ 是一个原子集，且 $k \in \mathbb{N}_0$。每个$x \in \mathsf{Obj}(V,k)$ 都具有有限的结构深度 $\mathsf{d}(x) \in \{0,1,\dots,k\}$，并且具有良定义的支撑 $\mathsf{Supp}(x) \subseteq V$。

**(i)** 原子。对于 $v \in V$，定义

$$\mathrm{d}(v) := 0, \qquad \mathrm{Supp}(v) := \{v\}.$$

**(ii)** 集合对象。对于 $x \in \mathsf{Obj}(V,k) \setminus V$**(**因此 $x$ 是一个对象集**)**，定义

$$\mathrm{d}(x) := 1 + \max\Big(\{\,\mathrm{d}(y) \mid y \in x\,\} \cup \{0\}\Big), \qquad \mathrm{Supp}(x) := \bigcup_{y \in x} \mathrm{Supp}(y).$$

于是$\mathrm{d}(x) \le k$。此外，只要 $x \neq \varnothing$，$\mathrm{Supp}(x) \neq \varnothing$ 。

证明。 按构造， $S_0 = V$ 由原子组成，因此深度为 0。若对某个 $i \ge 1$ 有 $x \in S_i$ ，则$x \subseteq \bigcup_{j=0}^{i-1} S_j$，故每个 $y \in x$ 都对某个 $j(y) \le i-1$ 位于 $S_{j(y)}$ 中。因此该递推是良基的，并且在定义 $\mathsf{d}(x)$ 之前，对所有 $y \in x$ ，$\mathsf{d}(y)$ 均已有定义。对满足 $x \in S_i$ 的最小 $i$ 施行归纳法，可得 $\mathsf{d}(x) \le i \le k$。若$x \neq \varnothing$，则它包含某个 $y$，且 $\mathsf{Supp}(y) \neq \varnothing$；因此 $\mathsf{Supp}(x) = \bigcup_{y \in x} \mathsf{Supp}(y) \neq \varnothing$。 □

**定义 12.7.4** （递归集合的支撑）。 对任意 $X \in 2_{V,\,k}$ （从而 $X \subseteq \mathsf{Obj}(V,\,k)$），将其支撑定义为

$$\mathrm{Supp}(X) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Supp}(x) \subseteq V,$$

其中，$\mathsf{Supp}(x)$ 如定理 12.7.3 所述。

**定义 12.7.5** （$k$-递归超图）。 （参见 [1450,1451]）设 $V$为有限非空原子集，且设 $k \in \mathbb{N}_0$。 $k$-递归超图 是一个有序对

$$H = (V, E)$$

使得

$$E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\varnothing\},$$

其中，$2_{V,\,k}$ 是定理 12.7.2 中的深度-$k$ 幂集论域。对于 $k = 0$，有 $2_{V,\,0} = \mathcal{P}(V)$，因此$E \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$，且 $H$ 是普通超图。

**定义 12.7.6** （（$n,\ k$）-递归超超图）。 设 $V_0$ 为有限非空基集，且设$n,\ k \in \mathbb{N}_0$。定义迭代幂集如下:

$$\mathcal{P}^0(V_0) := V_0, \qquad \mathcal{P}^{n+1}(V_0) := \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^n(V_0)\big).$$

一个 （$n,\ k$）-递归超超图 是一个有序对

$$\mathrm{RSHG}^{(n,k)} = (V, E)$$

使得

$$\varnothing \neq V \subseteq \mathcal{P}^n(V_0) \quad (\text{finite}), \qquad E \subseteq 2_{V,k} \setminus \{\varnothing\} \quad (\text{finite}),$$

其中，$2_{V,\,k}$ 按照定理 12.7.2 由 $V$ 生成。此外， $V$ 按照定理 12.7.1 的含义解释为原子集。

**定义 12.7.7** （（$n$，$k$）-递归超超网络）。设 $V_0$ 是有限非空基集，且设 $n$，$k \in \mathbb{N}_0$。令 RSHG$^{(n,k)}$ =(*V*，*E*) 为定理 12.7.6 中的（$n$，$k$）-递归超超图。（$n$，$k$）-递归超超网络 是一个三元组

$$\mathcal{N}^{(n,k)} = (V, E, w)$$

其中，$w$： $E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是可选的权重/属性函数（如果未加权，则省略 $w$）　　.

**定理 12.7.8** （递归超超网络的良定义性）。设 $\mathcal{N}^{(n,k)}$ =(*V*、*E*、*w*) 如定理 *12.7.7* 中所述。则：

*1.* 对于每条递归超超边 $e \in E$，其支撑 Supp（$e$） $\subseteq V$ 是良定义的　　*d.*

*2.* 展平后的 （普通）加权超网络

$$\underline{\mathcal{N}} := (V, \underline{E}, \underline{w})$$

是良定义的，其中

$$\underline{E} := \{\mathrm{Supp}(e) \mid e \in E\} \subseteq \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}, \qquad \underline{w}(F) := \sum_{\substack{e \in E \\ \mathrm{Supp}(e) = F}} w(e) \quad (F \in \underline{E}).$$

证明。(1) 由于 $e \in 2_{V,\,k}$，有 $e \subseteq$ Obj(*V*，*k*)，因此根据定理 12.7.3，对每个 $x \in e$ 都定义了 Supp(*x*)。于是 Supp(*e*) $= \bigcup_{x \in e}$Supp(*x*) 是良定义的，且是 $V$ 的子集。若 $e \neq \varnothing$，则根据定理 12.7.3，某个元素的支撑非空，因此 Supp(*e*) $\neq \varnothing$。

(2) 因此，每个 Supp(*e*) 都属于 $\mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$，所以 $\underline{E}$ 是良定义且有限的。对于每个 $F \in E$， $w$(*F*) 都是非负实数的有限和，因此是良定义的。 □

**定义 12.7.9** （正互反矩阵和佩龙优先级）。设 $r \in \mathbb{N}$。矩阵 $M =$ (*m*$_{pq}$) $\in \mathbb{R}^{r \times r}_{>0}$ 是正互反 的，当且仅当

$$m_{pp} = 1, \qquad m_{pq} = \frac{1}{m_{qp}} \ (p \neq q).$$

设 $\Delta_r := \{x \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} \colon \mathbf{1}^\top x = 1\}$。对于这样的 $M$，令 *p*(*M*) $\in \Delta_r$ 表示归一化的佩龙（主）右特征向量；经归一化后，它存在且唯一（佩龙–弗罗贝尼乌斯）。

**定义 12.7.10** （有向递归超超网络）. 一个有向递归超超网络 是一个三元组

$$\overrightarrow{\mathcal{N}}^{(n,k)} = (V, \overrightarrow{E}, \gamma),$$

其中 $V$ 如定理 12.7.7所述，

$$\overrightarrow{E} \subseteq \big(2_{V,k} \setminus \{\varnothing\}\big) \times \big(2_{V,k} \setminus \{\varnothing\}\big)$$

是有向递归超超弧 $e =$ (*T*$_e$, *H*$_e$)的有限集，且 $\gamma \colon \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}_{>0}$ 为可选的弧权重。将尾支撑 与头支撑 定义为

$$\underline{T_e} := \mathrm{Supp}(T_e) \subseteq V, \qquad \underline{H_e} := \mathrm{Supp}(H_e) \subseteq V,$$

根据定理 12.7.3 和定理 12.7.4，它们是非空的。

**定义12.7.11** （解析递归超超网络过程（ARSHNP））。 设 $\overrightarrow{\mathcal{N}}_{(n,k)}=(V,\overrightarrow{E},\gamma)$ 为一个有向递归超超网络。一个 *ARSHNP* 实例由以下内容组成：

1. 对于每条弧 $e=(T_e,\ H_e)\in\overrightarrow{E}$ 以及每个头节点 $h\in H_e$，构造一个正互反两两比较矩阵

$$M^{(e,h)}\in\mathbb{R}_{>0}^{|T_e|\times|T_e|}$$

比较 $T_e$ 相对于头节点 $h$的尾节点。

2. 对每个 $(e,\ h)$，指定非负混合权重 $\alpha_{e,\ h}\geq 0$ ，其中满足 $h\in H_e$ （例如，与 $\gamma(e)$ 成正比，并按每个头节点进行归一化）。

**局部优先级**。对于每个 $(e,\ h)$，定义 $p^{(e,h)}:=p(M_{(e,\ h)})\in\Delta_{|T_e|}$，并按$T_e$中的节点为其分量编索引。

—

**递归超超矩阵**。定义 $S=(s_{ih})_{i,\ h\in V}\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{|V|\times|V|}$ 如下：

$$s_{ih}:=\sum_{\substack{e\in\overrightarrow{E}\\ h\in T_e,\ i\in T_e}}\alpha_{e,h}\,p^{(e,h)}(i).$$

按列归一化 $S$ ，以得到列随机矩阵 $W=(w_{ih})$：

$$w_{ih}:=\begin{cases}\dfrac{s_{ih}}{\sum_{u\in V}s_{uh}}, & \text{if } \sum_{u\in V}s_{uh}>0,\\ \delta_{ih}, & \text{if } \sum_{u\in V}s_{uh}=0,\end{cases}$$

其中 $\delta_{ih}$ 为克罗内克δ。

**全局优先级**。任意 $\pi\in\Delta_{|V|}$ 满足

$$W\pi=\pi$$

称为*ARSHNP*优先级向量。若某个指定子集 $V_{\text{alt}}\subseteq V$ 表示备选方案，则按其在 $\pi$ 中的对应分量进行排序（如需要，可在 $V_{\text{alt}}$ 上重新归一化）。

**定理12.7.12** （ARSHNP的良定义性）。 设*ARSHNP*实例与定理*12.7.11*中相同。则：

*1.* 对所有弧 $e\in\overrightarrow{E}$，尾部/头部支撑集 $T_e$、$H_e$ 均为 $V$的良定义非空子集 .

*2.* 每个局部优先向量 $p^{(e,h)}$ 都是良定义且唯一的。

*3.* 矩阵 $W$ 是良定义、非负且列随机的。

*4.* 至少存在一个 $\pi\in\Delta_{|V|}$ 使得 $W\pi=\pi$。此外，如果 $W$是本原的，那么这个 $\pi$是唯一且严格为正的。

证明。 (1) 由于 $T_e$，$H_e \in 2_{V,\ k}\backslash\{\varnothing\}$，根据定理 12.7.4 定义了支撑集 Supp($T_e$)， Supp($H_e$)。由 $T_e$， $H_e \neq \varnothing$ 和定理 12.7.3 可知其非空。

(2) 每个 $M^{(e,h)}$ 都是正互反的，因此为正。根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，它有唯一的归一化佩龙向量，因此 $p^{(e,h)}$ 良定义且唯一。

(3) 每个 $s_{ih}$ 都是非负实数的有限和，因此良定义且 $s_{ih} \geq 0$。列归一化使每个 $h$ 都满足 $w_{ih} \geq 0$ 和 $\sum_{i\in V} w_{ih} = 1$；备用列 $\delta_{ih}$ 的和也为 1。因此 $W$ 是列随机的。

(4) 由于 $W$ 是列随机的， $\|W\|_1 = 1$，因此其谱半径满足 $\rho(W) \leq 1$。此外， $\mathbf{1}^\top W = \mathbf{1}^\top$ 意味着 1 是 $W^\top$ 的特征值，因此 1 也是 $W$ 的特征值。因此， $\rho(W) = 1$；根据非负矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理， $W$ 存在对应特征值 1 的非负右特征向量。将其归一化，使其和为 1，可得 $\pi \in \Delta_{|V|}$，且满足 $W\pi = \pi$。如果 $W$ 是本原的，则佩龙特征向量在尺度变换意义下唯一且严格为正；经过归一化后，它便唯一且严格为正。

□

## 12.8 超超决策

超超决策定义了取自n次幂集的分层决策状态，通过集值组合规则生成可达集，并在预序下选择极大结果。

**定义 12.8.1** （超超决策系统（层级 $n$））. 固定一个整数 $n \geq 1$ 以及原子决策项的非空集 $D$。设 Ω $\subseteq \mathcal{P}^n(D)$ 为一个非空工作论域 （通常为有限），并固定元数 $k \geq 1$。

一个 层级-$n$ 超超组合 是一个集值映射

$$\star:\ \Omega^k \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}.$$

给定非空种子 $S_0 \subseteq \Omega$，定义直接后承算子 $T_\star:\ \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ 如下

$$T_\star(S) := S \ \cup \bigcup\Big\{\star(X_1,\dots,X_k) \ \Big|\ X_1,\dots,X_k \in S\Big\}, \qquad S \subseteq \Omega,$$

并定义可达（最小 $\star$-闭）集包含 $S_0$ 如下

$$S^* := \bigcup_{t=0}^{\infty} T_\star^t(S_0), \qquad T_\star^0(S_0) := S_0,\ \ T_\star^{t+1}(S_0) := T_\star\big(T_\star^t(S_0)\big).$$

令 $\succeq$ 为一个 Ω 上的预序（自反且传递）。超超决策结果集合为

$$\mathrm{Opt}_{\star,\succeq}(S_0) := \mathrm{Max}_{\succeq}(S^*) := \big\{X \in S^* \ \big|\ \forall Y \in S^*:\ X \succeq Y\big\}.$$

**定理 12.8.2** (超超决策的良定义性)。 假设定理 *12.8.1*成立，此外，Ω 是有限集。那么：

1. $T_\star:\ \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ 是良定义且单调的（即 $S \subseteq S' \Rightarrow T_\star(S) \subseteq T_\star(S')$）。

*2.* 可达集 $S^*$ 存在、非空，满足 $S_0 \subseteq S^* \subseteq \Omega$，并且是包含 $S_0$的Ω 的最小 $T_\star$-闭子集：

$$T_\star(S^*) = S^*, \qquad (\forall S \subseteq \Omega)\ \big(S_0 \subseteq S\ \&\ T_\star(S) \subseteq S\big) \Rightarrow S^* \subseteq S.$$

此外，这个链在有限步后会稳定：存在 $N \le |\Omega|$，使得 $T_\star^N(S_0) = S^*$。

*3.* 对于 $\succeq$ 上的每个预序，结果集 $\mathrm{Opt}_{\star,\succeq}(S_0)$ 都是良定义且非空的。

证明。 (1) 设 $S \subseteq \Omega$。对于任意 $(X_1,\dots,X_k) \in S^k$，根据定义，值 $\star(X_1,\dots,X_k)$ 是 Ω 的非空子集，因此

$$\bigcup\{\star(X_1,\dots,X_k) \mid X_1,\dots,X_k \in S\} \subseteq \Omega.$$

因此 $T_\star(S) \subseteq \Omega$，所以 $T_\star$ 是良定义的。若 $S \subseteq S'$，则 $S^k \subseteq (S')^k$，故对 $S^k$ 取并集所得集合包含于对 $(S')^k$ 取并集所得集合中，从而 $T_\star(S) \subseteq T_\star(S')$。

(2) 根据 (1)，序列 $S_0 \subseteq T_\star(S_0) \subseteq T_\star^2(S_0) \subseteq \cdots$ 递增，因此 $S^*$ 作为其并集是良定义的，且由于包含 $S_0$而非空。显然 $S^* \subseteq \Omega$，因为每次迭代都是 Ω 的子集。为证明 $T_\star(S^*) = S^*$，利用单调性：对于所有 $t$，都有 $T_\star(T_\star^t(S_0)) = T_\star^{t+1}(S_0) \subseteq S^*$，因此 $T_\star(S^*) \subseteq S^*$。反过来，由于 $T_\star$ 具有扩张性（根据定义，$S \subseteq T_\star(S)$），所以 $S^* \subseteq T_\star(S^*)$，从而两者相等。极小性由此得证：任何包含 $S_0$ 的 $T_\star$-闭 $S$，根据归纳法，都包含所有迭代项 $T_\star^t(S_0)$，因此也包含它们的并集 $S^*$。若 Ω 有限，则递增链至多经过 $|\Omega|$ 次严格增长后稳定，因此对某个 $N \le |\Omega|$，有 $T_\star^N(S_0) = S^*$。

(3) 由于 Ω 是有限的，$S^*$ 是有限且非空的。有限非空集上的每个预序都至少有一个极大元。因此，$\mathrm{Max}_{\succeq}(S^*)$ 非空且良定义。 □

## 12.9 不确定超超决策

不确定超超决策通过以不确定度为可达状态赋值，并采用由评分诱导的预序来扩展这一框架，从而在不确定性下得到表示不变的极大结果。

**定义 12.9.1** （由不确定模型诱导的不确定性结构）。 设 $M$ 是一个度域为 $\mathrm{Dom}(M) \subseteq [0,1]^\lambda$的不确定模型。固定以下任一项：

(i) $\mathrm{Dom}(M)$ 上的预序 $\preceq_M$，或 (ii) 一个评分映射 $\mathrm{sc}_M\colon \mathrm{Dom}(M) \to \mathcal{S}$到一个预序集 $(\mathcal{S}, \preceq_{\mathcal{S}})$。

定义不确定性结构

$$\mathbb{U}_M = (U, \sim, \mathcal{S}, \preceq_{\mathcal{S}}, \mathrm{sc})$$

by

$$U := \mathrm{Dom}(M), \qquad \sim := \text{equality on } U,$$

and:

- If (i) is chosen, set $\mathcal{S} := U$, $\preceq_{\mathcal{S}} := \preceq_M$, and $\mathrm{sc} := \mathrm{id}_U$.

- 如果选择 (ii)，则设 $\mathrm{sc} := \mathrm{sc}_M$。

则任意U-集 $\mathcal{U} = (X, \mu_M)$通过以下方式在 $X$ 上诱导一个预序

$$x \succeq y \iff \mathrm{sc}(\mu_M(x)) \succeq_{\mathcal{S}} \mathrm{sc}(\mu_M(y)).$$

**定义 12.9.2**（不确定超超决策（USHDM））**.** 一个不确定超超决策（USHDM）实例是一个元组

$$\mathsf{USHDM} := \big(D, n, \Omega, k, \star, S_0, \mathbb{U}, \mathrm{Val}\big)$$

其中$(D, n, \Omega\ k, \star, S_0)$满足定理 12.8.1，$\mathbb{U} = (U, \sim, \mathcal{S}, \preceq_{\mathcal{S}})$是一个不确定性结构，且$\mathrm{Val} : \Omega \to U$ 是一个不确定评价映射。可达集 $S^*$ 的计算方式与定理 12.8.1中完全相同，且不确定超超决策结果定义为

$$\mathrm{Opt}^{\mathrm{unc}}_{\star,\mathrm{Val}}(S_0) := \mathrm{Max}_{\succeq_{\mathrm{Val}}}(S^*),$$

其中 $\succeq_{\mathrm{Val}}$ 是诱导预序。

**定理 12.9.3**（USHDM的良定义性与表示不变性）**.** 假设定理 *12.9.2*成立，且Ω 是有限的。则：

*1.* 集合$\mathrm{Opt}^{\mathrm{unc}}_{\star,\mathrm{Val}}(S_0)$ 是良定义且非空的。

*2.* *(*表示不变性*)* 若 $\mathrm{Val}, \mathrm{Val}' : \Omega \to U$ 满足 $\mathrm{Val}(X) \sim \mathrm{Val}'(X)$ 对所有 $X \in \Omega$，则

$$\mathrm{Opt}^{\mathrm{unc}}_{\star,\mathrm{Val}}(S_0) = \mathrm{Opt}^{\mathrm{unc}}_{\star,\mathrm{Val}'}(S_0).$$

证明。 (1) 根据定理 12.8.2(2)，可达集 $S^*$ 是 Ω 的有限非空子集。$\succeq_{\mathrm{Val}}$ 是预序（预序的拉回），因此根据定理 12.8.2(3) 中相同的有限性论证，$\mathrm{Max}_{\succeq_{\mathrm{Val}}}(S^*)$ 存在且非空。

(2) 若对所有 $X$，$\mathrm{Val}(X) \sim \mathrm{Val}'(X)$，则根据 sc 的类不变性，$\mathrm{sc}(\mathrm{Val}(X)) = \mathrm{sc}(\mathrm{Val}'(X))$。因此，$\succeq_{\mathrm{Val}}$和 $\succeq_{\mathrm{Val}'}$ 在 Ω 上重合，所以它们在相同的 $S^*$ 上的极大集也重合，从而证明了该结论。 □

# 第13章

# 结论

本书全面综述了不确定决策方法，尤其关注不确定性建模、权重偏好诱导、结构与因果分析、补偿式与基于参照的排序方案、超越排序程序，以及相关的基于规则或序贯决策框架所发挥的作用。我们还探讨了如何以系统的方式将多种不确定性范式——包括模糊、直觉模糊、中智、多元生成、粗糙、软集及其他广义结构——纳入决策过程。

总体而言，本综述表明，不确定决策并非单一方法，而是一个广泛的方法体系，其中不确定性的表征与决策机制的选择必须以相互一致的方式进行设计。具体而言，合适框架的选择取决于问题结构、可用信息的类型、准则间的交互，以及决策情境，例如个体、群体、动态型、多阶段或多情景情境。

我们预计，未来研究将沿多个方向推进。首先，需要开展更多计算与实验研究，在共同的基准测试情境下比较不同不确定决策方法的稳定性、鲁棒性、可解释性和计算复杂度。其次，应在工程设计、制造业、金融、医学、物流和社会决策分析等实际领域开展更多以案例研究为导向的调查，从而在真实决策环境中评估这些方法的理论优势。第三，值得探索的研究方向包括与机器学习、智能优化、专家系统以及更广泛的决策支持框架进行更深入的整合，尤其是在必须处理不确定、不完整、不一致或多源信息的情境中。

更一般地说，未来的研究还可以侧重于开发统一的数学框架，以比较、推广并关联现有的不确定决策方法。这类工作有助于阐明当前模型之间的关系，并支持设计理论基础扎实且具有实际适用性的新方法。

# 免责声明

### 经费支持

本研究　　在没有获得外部组织或项目任何经费支持的情况下开展　　.

### 致谢

我们谨向在整个研究过程中提供宝贵见解、支持和鼓励的所有人表示诚挚的感谢。同时，我们也感谢对此感兴趣的读者，以及所参照文献的作者；他们的学术贡献对本研究产生了深远影响。最后，我们由衷感谢促成本研究成果传播的出版商和审稿人。

### 数据可用性

由于本研究纯属理论与数学研究，未使用任何实证数据或计算分析。鼓励研究人员在未来的研究中，以数据导向或实验方法拓展这些发现。

### 伦理声明

由于本研究不涉及人类参与者或动物实验，因此无需伦理审批。

### 利益冲突

作者声明 th　　他们声明，对于本书的内容或出版，不存在任何相关利益冲突　　.

### 代码可用性

本研究未开发任何代码或软件。

## 临床试验

本研究未涉及任何临床试验。

## 参与同意

不适用。

## 生成式人工智能和人工智能辅助工具的使用

我使用生成式人工智能和人工智能辅助工具完成英语语法检查等任务，并且不会以任何违反伦理标准的方式使用这些工具。

## 免责声明（其他）

本文提出了一些尚未经过实证验证的理论观点和框架。鼓励读者探索其实际应用，并进一步完善这些概念。尽管我们已尽力确保内容准确，并恰当标注引文，但任何错误或疏漏均非有意为之。本文所表达的视角和解释仅代表作者观点，并不一定反映其所属机构的立场。

# 附录 A

# 图结构与不确定图结构

在本附录中，我们简要考察图结构 和不确定图结构。图结构是一种统一的、基于关联的框架，由一个顶点集和一组边对象组成，其中每条边都与一个非空有限关联顶点集相关联。不确定图结构则是在图结构中配备不确定度映射，该映射为每个顶点和边赋予一个来自所选不确定性模型的度元组，从而支持分级和多分量描述。

## A.1 图结构：统一的基于关联的模型

图结构的定义如下。

**定义 A.1.1**（迭代宇宙（用于嵌套／超超图实体））。 设 $X_0$ 为一个非空集（“原子”实体）。定义迭代幂集如下：

$$\mathcal{P}^{(0)}(X_0) := X_0, \qquad \mathcal{P}^{(i+1)}(X_0) := \mathcal{P}\big(\mathcal{P}^{(i)}(X_0)\big) \quad (i \geq 0),$$

并定义深度为 $n$ 的论域如下：

$$\Omega^{(n)}(X_0) := \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{P}^{(i)}(X_0).$$

因此 $\Omega^{(0)}(X_0) = X_0$ （普通顶点），而 $\Omega^{(n)}(X_0)$（$n \geq 1$）包含集值实体和嵌套实体，从而支持超阶/高阶顶点类型。

**定义 A.1.2**（深度为 $n$ 的图结构）。 固定一个基集 $X_0 \neq \emptyset$ 和一个整数 $n \geq 0$。一个深度为 $n$ 、定义在 $X_0$ 上的图结构是一个元组

$$\mathsf{GS} = \big(V, E, \mathrm{Inc}, \mathrm{Tail}, \mathrm{Head}\big)$$

满足：

- **顶点集：** $V \subseteq \Omega_{(n)}(X_0)$ 是由顶点（实体）组成的非空集。 $V$ 的元素可以是原子（$\in X_0$），也可以是嵌套的（集合值），具体取决于 $n$。

- **边集：** $E$ 是由边对象构成的集合（可能为空），且与 $V$ 不相交。
- **关联：**关联算子：$E \to \mathcal{P}^{+}$ 有限$(V)$ 为每条边 $e \in E$ 指定其（有限、非空）关联顶点集 关联算子$(e) \subseteq V$。
- **可选 方向数据：**尾，头：$E \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(V)$ 是映射，使得对于每个 $e \in E$,

$$\mathrm{Tail}(e) \cap \mathrm{Head}(e) = \emptyset, \qquad \mathrm{Tail}(e) \cup \mathrm{Head}(e) = \mathrm{Inc}(e).$$

（如果不需要方向，可对所有 $e$ 设定 $\mathrm{Tail}(e) = \mathrm{Head}(e) = \emptyset$。）

**注 A.1.3**（标准图概念作为特例）。在定义 A.1.2 中，通过施加额外约束，可以得到许多熟悉的对象：

- **（无向）简单图：** $n = 0$，对于所有 $e \in E$，Inc$(e)$ 的基数为 2，且尾 $=$ 头 $= \emptyset$。
- **有向图：** $n = 0$，$|\mathrm{Inc}(e)| = 2$，并且对所有 $e$，$|\mathrm{Tail}(e)| = |\mathrm{Head}(e)| = 1$（因此每条边都有唯一的尾和头）。
- **超图：** $n = 0$，Inc$(e) \in \mathcal{P}^{+}$ fin$(V)$ 任意（不限制为大小 2）。
- **有向超图：** $n = 0$，Tail$(e)$，Head$(e)$ 非空（通常如此）、互不相交，且 Tail$(e)\cup$Head$(e) =$Inc$(e)$。
- **超超图（嵌套顶点）：** $n \geq 1$，其中 $V \subseteq \Omega^{(n)}(X_0)$，允许顶点为集合（或集合的集合等）；边仍是通过 Inc 关联这些顶点的集合。
- **$r$-正则图（性质）：**在无向图的情况下，定义

$$\deg(v) := \big|\{\, e \in E : \ v \in \mathrm{Inc}(e) \,\}\big| \quad (v \in V),$$

并且要求对所有 $v \in V$，均有 $\deg(v) = r$。

因此，定义 A.1.2 可视为类图对象的一种通用“关联演算”。

## A.2 不确定图结构

下面给出不确定图结构的定义。在本小节中，设 $M$ 为一个不确定模型，其度域 Dom$(M) \subseteq [0,1]^k$ 非空（如先前在不确定集框架中所定义）。

**定义 A.2.1**（类型为 $M$ 的不确定图结构）。设 GS $=$（$V$，$E$，关联算子，尾，头）为一个图结构。一个不确定图结构，其类型为 $M$ 是一个二元组

$$\mathsf{UGS}_M = \big(\mathsf{GS}, \mu_M\big),$$

其中

$$\mu_M : V \cup E \longrightarrow \mathrm{Dom}(M)$$

是一种不确定 度隶属度映射，为每个顶点和每条边分配 Dom$(M)$ 中的一个度元组 .

**可选（取决于模型）的一致性**。根据预期的专业化类型（模糊、直觉模糊、中智、多元生成等），还可以施加将边度与关联顶点度联系起来的约束。例如，在模糊情形下 Dom$(M) = [0,1]$，常见的约束是$\mu_M(e) \leq \min\{\mu_M(u), \mu_M(v)\}$ 对于与 $\{u,v\}$ 关联的无向边 $e$。在这一一般定义层面，这类约束并未被固定；它们会根据所选模型 $M$ 及应用语义进行选择。

**注 A.2.2** （底层清晰结构及向不确定集的约化）。 存在一个显然的 遗忘投影

$$\pi:\ \mathsf{UGS}_M = \big((V,E,\mathrm{Inc},\mathrm{Tail},\mathrm{Head}),\mu_M\big)\ \longmapsto\ (V,E,\mathrm{Inc},\mathrm{Tail},\mathrm{Head}),$$

它会舍弃不确定性度数，并返回底层的图结构。若 $E=\emptyset$，则 $\mathsf{UGS}_M$通过限制 $\mu_M|_V\colon V\to\mathrm{Dom}(M)$，可归约为 $V$上的一个不确定集。

**定理 A.2.3 (**良定义性与存在性)。 固定深度 $n\geq 0$、基集 $X_0\neq\emptyset$和不确定模型 $M$，满足$\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset$。

*(i)* 对于每个定义在 $X_0$上、深度为 $n$ 的图结构GS，都存在一个类型为 $M$的不确定图结构$\mathsf{UGS}_M=(\mathsf{GS}\ \mu_M)$。

*(ii)* $\mathsf{UGS}_M$ 的定义是良定义的：也就是说，对于任意选取的映射 $\mu_M\colon V\cup E\to\mathrm{Dom}(M)$，有序对 $\big(\mathsf{GS}\ \mu_M\big)$ 都是类型为 $M$的有效不确定图结构。

*(iii)* 每个经典图类对象（图、有向图、超图、超超图等）都可以通过选取满足备注 *A.1.3* 中相应约束的 GS，并令 $\mu_M$ 为常值（或在适当情况下为清晰值），嵌入为$\mathsf{UGS}_M$ 的一个特例。

证明。 (i) 由于 $\mathrm{Dom}(M)\neq\emptyset$，任取一个固定的度元组 $d_0\in\mathrm{Dom}(M)$。通过常值映射 $\mu_M(z):=d_0$ for all $z\in V\cup E$，定义 $\mu_M\colon V\cup E\to\mathrm{Dom}(M)$。于是，$\mu_M$ 是一个类型正确且陪域为 $\mathrm{Dom}(M)$ 的函数，因此 $\mathsf{UGS}_M=(\mathsf{GS}\ \mu_M)$ 满足定义 A.2.1。

(ii) 令 $\mu_M\colon V\cup E\to\mathrm{Dom}(M)$ 为任意函数。定义 A.2.1 仅要求 GS 是一个图结构，且 $\mu_M$ 将每个顶点/边映射到度域 $\mathrm{Dom}(M)$ 中。根据假设，这两项要求均成立，因此 $\big(\mathsf{GS}\ \mu_M\big)$ 是一个有效的不确定图结构。

（iii）任取任一经典结构（例如图、有向图、超图或嵌套顶点超超图）。选择 $n$ 和 $X_0$，使其顶点对象位于$\Omega^{(n)}(X_0)$中，并通过将注记A.1.3中的适当约束施加于关联算子,尾, 头，将其编码为图结构GS。最后，应用（i）得到$\mathsf{UGS}_M=(\mathsf{GS}\ \mu_M)$（例如使用常数 $\mu_M$），从而在不确定图结构框架内将经典对象实现为一种特例。

□

# 附录（表格目录）

1.1 经典（清晰）集与模糊集之间的简要比较.7 1.2 代表性集合扩展及每个元素所存储的规范信息. . . . . 8 1.3 不确定决策科学 中方法的紧分类体系（按任务、投入结构和典型输出分类） .10 2.1 按度域 Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ [20]的维数 $k$ 编制的不确定集族（不确定集）目录.25 2.2 按度域Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ 的维数 $k$ 编制的不确定图族（不确定图）目录（参见 [218]）.26 2.3 按度域Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$ 的维数 $k$ 编制的不确定性决策族（不确定决策模型）目录（参见 [20]）.29 3.1 按度域Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$的维数 $k$ 编制的不确定性感知多属性决策族目录.34 3.2 按Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$的度域维度 $k$ 分组的相关不确定性感知型多属性决策家族（示例）.38 3.3 按度域Dom($M$) $\subseteq [0,1]^k$的维数 $k$ 编制的不确定性感知群体决策 （群体决策）族紧目录.42 3.4 动态模糊决策的相关不确定性模型变体.46 3.5 多目标决策（MODM）的相关不确定性模型变体. . . . 50 3.6 模糊伦理决策的相关不确定性模型变体.53 3.7 模糊共识决策的相关不确定性模型变体.57 3.8 模糊战略决策的相关不确定性模型变体.61 3.9 模糊多专家决策的相关不确定性模型变体.64 3.10 模糊多阶段决策的相关不确定性模型变体.70 3.11 模糊多层决策的相关不确定性模型变体.77 3.12 模糊多智能体决策的相关不确定性模型变体.84 3.13 模糊多情景决策的相关不确定性模型变体. . . . . 91 4.1 模糊权重提取方法的简要比较.93 4.2 层次分析法的相关不确定性模型变体（按度域维度 $k$分类）. . 98 4.3 不确定性感知模型下LOPCOW的相关概念.102 4.4 不确定性感知模型下SIWEC的相关概念.107 4.5 不确定性感知模型下判断矩阵的相关概念.109 4.6 不确定性感知模型下网络分析法的相关概念.114 4.7 不确定性感知模型下序数优先方法（OPA）的相关概念. . . 118 4.8 不确定性感知模型下PIPRECIA的相关概念.122 4.9 SWARA的相关不确定性模型变体（按度域维度 $k$分类）. 125 4.10 不确定性感知模型下CILOS的相关概念.131 4.11 不确定性感知模型下最佳-最差法的相关概念. 141 4.12 不确定性感知模型下CRITIC的相关概念.146 4.13 不确定性感知模型下MEREC的相关概念. 149

5.1 四种结构/因果决策建模框架的简要比较.155 5.2 不确定性感知模型下 DEMATEL 的相关概念.159 5.3 不确定性感知模型下解释结构模型的相关概念 . . . . . 165 5.4 不确定性感知模型下 MICMAC 的相关概念.171 5.5 按不确定性编码分类的认知图变体紧凑目录（以便于使用的度域维度 $k$ 编索引）.174 6.1 本章讨论的代表性决策矩阵方法的简要比较.175 6.2 COPRAS 及代表性不确定性感知变体（按度域维度 $k$分类）.180 6.3 不确定性感知模型下 MACBETH 的相关概念.184 6.4 CoCoSo 及代表性不确定性感知变体（按度域维 $k$数分类）.188 6.5 不确定性感知模型下 SAW 的相关概念.193 6.6 不确定性感知模型下 RAFSI 的相关概念.197 6.7 不确定性感知模型下 RATMI 的相关概念.202 6.8 不确定性感知模型下 RANCOM 的相关概念.205 6.9 不确定性感知模型下 AROMAN 的相关概念.212 6.10 不确定性感知模型下多属性效用理论的相关概念.216 6.11 不确定性感知模型下 SMART 的相关概念.220 6.12 不确定性感知模型下 TODIM 的相关概念.227 6.13 不确定性感知模型下灰色关联分析的相关概念.231 6.14 不确定性感知模型下 ARAS 的相关概念.235 6.15 不确定性感知模型下 WASPAS 的相关概念.238 6.16 不确定性感知模型下 MOORA 的相关概念.241 6.17 不确定性感知模型下偏好选择指数的相关概念.245 6.18 不确定性感知模型下值域的相关概念.248 6.19 不确定性感知模型下 MOOSRA 的相关概念.250

7.1 具有代表性的参考距离、基于边界和折中指标方法的简要比较.251 7.2 不确定性感知模型下 TOPSIS 的相关概念.255 7.3 不确定性感知模型下 MARCOS 的相关概念.259 7.4 不确定性感知模型下 CODAS 的相关概念.263 7.5 不确定性感知模型下 EDAS 的相关概念.266 7.6 不确定性感知模型下 VIKOR 的相关概念.270 7.7 不确定性感知模型下 MABAC 的相关概念.273 7.8 不确定性感知模型下 MAIRCA 的相关概念.276

8.1 代表性超越决策方法的简要比较.277 8.2 不确定性感知模型下 ELECTRE 的相关概念.282 8.3 不确定性感知模型下 FlowSort 的相关概念.286 8.4 不确定性感知模型下 PROMETHEE 的相关概念.289 8.5 不确定性感知模型下 QUALIFLEX 的相关概念.292 8.6 不确定性感知模型下 ORESTE 的相关概念.296

9.1 代表性规则归纳、学习、证据聚合和序贯决策方法的简要比较.297 9.2 不确定性感知模型下决策树的相关概念.301 9.3 不确定性感知模型下马尔可夫决策过程的相关概念.308 9.4 不确定性感知模型下证据推理的相关概念.312

10.1 具有代表性的其他相关决策方法的简要比较.313

10.2 不确定性感知模型下目标规划的相关概念.318 10.3 不确定性感知模型下数据包络分析的相关概念 . . . . . 320 10.4 不确定性感知模型下决策表的相关概念 .326 10.5 不确定性感知模型下超滤子的相关概念.331 10.6 不确定性感知模型下 SWOT分析的相关概念.334 10.7 不确定性感知模型下成本效益分析的相关概念 . . . . . 338 12.1 本章介绍的新决策方法的简要比较 . . . . . 353

*

# 附录（图目录）

1.1 概念图：将不确定集范式与决策技术相结合，以获得新颖且具有实际意义的结果.2.1 中智集的概念图示。对于每个 $x \in X$，其隶属状态由三元组 $\big(T_A(x)\ I_A(x)\ F_A(x)\big)$ 描述，分别表示真度、不确定度和假度. 9

21

*

# 参考文献

[1] Lotfi A Zadeh。模糊集。Information and control，8(3):338–353，1965年。[2] Krassimir T Atanassov。关于直觉模糊集理论。第283卷。施普林格，2012年。[3] Said Broumi、Assia Bakali 和 Ayoub Bahnasse。中智集：综述。Infinite Study，2018年。[4] Said Broumi、Mohamed Talea、Assia Bakali 和 Florentin Smarandache。单值中智图。Journal of New theory，10:86–101，2016年。[5] Humberto Bustince 和 P Burillo。Vague集是直觉模糊集。Fuzzy sets and systems，79(3):403–405，1996年。[6] Vicenç Torra 和 Yasuo Narukawa。关于犹豫模糊集与决策。载于2009年IEEE国际模糊系统会议，页1378–1382。IEEE，2009年。[7] Bui Cong Cuong。图像模糊集。Journal of Computer Science and Cybernetics，30:409，2015年。[8] R Radha、Stanis Arul Mary 和 Florentin Smarandache。四分区中智毕达哥拉斯软集。International Journal of Neutrosophic Science (IJNS)第14卷，2021年，页11，2021年。[9] Mithun Datta、Kalyani Debnath 和 Surapati Pramanik。具有区间隶属度的五分区中智软集。Neutrosophic Sets and Systems，79(1):37，2025年。[10] Florentin Smarandache。多元生成论、多属性集、逻辑、概率与统计学。Infinite Study，2017年。[11] Jayanta Ghosh 和 Tapas Kumar Samanta。超模糊集与超模糊群。Int. J. Adv. Sci. Technol，41 37，2012年 27: – 。[12] Takaaki Fujita。《通过图化、超图化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》。Biblio Publishing，2025年。[13] Takaaki Fujita 和 Smarandache Florentin。《各科学领域中中智应用的综述与介绍》。国际中智科学协会（NSIA）出版社，2025年。[14] Florentin Smarandache 和 NM Gallup。直觉模糊集向中智集的推广。载于国际粒计算会议，页8–42。Citeseer，2006年。[15] Florentin Smarandache 和 Maissam Jdid。中智理论与多元生成理论及其应用概述。Infinite Study，2023年。[16] Florentin Smarandache。中智集是直觉模糊集、不一致直觉模糊集（图像模糊集、三元模糊集）、毕达哥拉斯模糊集、球形模糊集和q阶正交对模糊集的推广，而中智化则是后悔理论、灰色系统理论和三支决策的推广（再探）。Journal of New Theory，29:1–31，2019年。[17] Florentin Smarandache。多属性集：清晰集、模糊集、直觉模糊集和中智集的扩展（再探）。Infinite study，2018年。[18] Florentin Smarandache 和 Nivetha Martin。用于新型多属性决策的多祖n-超超图。Infinite Study，2020年。[19] Nivetha Martin、R Priya 和 Florentin Smarandache。多属性决策中的广义多祖集。载于《应用数学中的中智与多元生成库存模型》，页519–546。IGI Global Scientific Publishing，2025年。[20] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。模糊集、直觉模糊集、中智集与外延集的动态综述。国际中智科学协会（NSIA），2025年。[21] Miguel Ortiz-Barrios、Natalia Jaramillo-Rueda、Andrea Espeleta-Aris、Berk Kucukaltan 和 Llanos Cuenca。基于直觉模糊数的综合模糊决策方法：在临床实验室灾害准备中的应用。Expert Systems with Applications，263:125712，2025年。[22] Hongxing Li 和 Vincent C Yen。模糊集与模糊决策。CRC press，1995。[23] Zeshui Xu 和 Na Zhao。直觉模糊决策中的信息融合：综述。Information Fusion，28:10–23，2016年。

[24] Esra Çakır 和 Mehmet Ali Taş。圆形直觉模糊决策及其应用。Expert Systems with Applications，225:120076，2023年。[25] Emrah Ayhan、Hakan Gökhan Gündoğdu、Ahmet Aytekin、Ahmet Furkan Karakaya、Vladimir Simic 和 Dragan Pamucar。提升非政府组织的可持续性与有效性：用于确定最有效公司治理策略的集成中智决策模型。人工智能工程应用，156:111245，2025年。[26] Mihaela Colhon 等。用于确定年轻人积极性的中智决策模型。论文集，第十六卷：中智理论与应用；中智统计学；多元生成集进展；逻辑与思维；物理学与宇宙学，页61，2025年。[27] Nivetha Martin、Florentin Smarandache 等。基于多元生成矛盾的一种新型决策方法。Neutrosophic systems with applications，10:12–24，2023年。[28] S Sudha、Nivetha Martin 和 Florentin Smarandache。多元生成多准则决策方法的研究现状。Neutrosophic Sets and Systems，第56卷/2023：信息科学与工程国际期刊，10(10):389，2024年。[29] S Sudha、Nivetha Martin、M Clement J oe Anand、PG Palanimani、T Thirunamakkani 和 B Ranjitha。MACBETH-MAIRCA多元生成决策：面向环境可持续性的生产者延伸责任可行策略。Infinite Study，2023年。[30] M Keerthi、G Dhanalakshmi 等。使用模糊TOPSIS、模糊层次分析法和模糊综合评价技术的餐厅排名系统。载于2024年第3届自动化、计算与可再生系统国际会议（ICACRS），页1561–1565。IEEE，2024年。[31] Shankha Shubhra Goswami 和 Dhiren Kumar Behera。融合模糊AHP与PROMETHEE决策方法评估市场上最佳智能手机型号。Decision，48(1):71–96，2021年。[32] Xiaer Xiahou、Jialong Chen、Bangyi Zhao、Zixuan Yan、Peng Cui、Qiming Li 和 Zhou Yu。数据中心物理基础设施安全韧性评价模型研究：一种基于网络分析法的方法。《Buildings》，12(11):1911，2022年。[33] Arijit Ghosh、Neha Ghorui、Sankar Prasad Mondal、Suchitra Kumari、Biraj Kanti Mondal、Aditya Prasad Das 和 Mahananda Sen Gupta。六边形模糊多准则决策方法在电动汽车充电站选址中的应用。Mathematics，2021年。[34] Reza Shakoor Shahabi、Mohammad Hossein Basiri、Ali Nouri Qarahasanlou、Adel Mottahedi 和 Fereshte Dehghani。基于模糊多属性决策的模型：伊朗采矿项目投资风险优先级排序。《国际模糊系统杂志》，24:3189–3207，2022年。[35] Narges Banaeian、Hossein Mobli、Behnam Fahimnia、Izabela Ewa Nielsen 和 Mahmoud Omid。运用模糊群体决策方法进行绿色供应商选择：农食行业案例研究。《计算机与运筹学》，89 347，2018年 337: – 。[36] Hassan Ali 和 Jingwen Zhang。数量折扣条件下全球绿色供应商选择与订单分配的模糊多目标决策模型。Expert Syst. Appl.，225:120119，2023年。[37] Bing Wu、Tingting Cheng、Tsz Leung Yip 和 Yang Wang。基于模糊逻辑的动态决策系统：内河交通分隔制中的智能导航策略。《海洋工程》，197:106909，2020年。[38] Vinay Kukreja。用于逆向强化学习解优先级排序的混合模糊AHP–TOPSIS方法。《复杂与智能系统》，9:493–513，2022年。[39] Yeni Kustiyahningsih、Eza Rahmanita、Bain Khusnul Khotimah 和 Jaka Purnama。基于梯形模糊数和新度量的二型模糊ANP与TOPSIS方法。《智能信息学进展国际期刊》，2024年。[40] Irem Otay、Sezi Cevik Onar、Başar Öztayşi 和 Cengiz Kahraman。采用多专家毕达哥拉斯模糊BWM与TOPSIS方法评估智慧城市中的可持续能源系统。Expert Syst. Appl.，250:123874，2024年。[41] Sumera Naz、Aqsa Tasawar、Areej Fatima、Shariq Aziz Butt 和 Zhoe Comas-González。一种高效的二元组语言立方q阶正交对模糊CILOS-TOPSIS方法：巴基斯坦流域管理水文地理区域评价。《超级计算杂志》，81，2024年。[42] Sepideh Basirat、Sadaf Raoufi、Danial Bazmandeh、Sayeh Khamoushi 和 Mahmoudreza Entezami。采用模糊SWARA方法对健康旅游中的基于人工智能的准则进行排序。Computer and Decision Making: An International Journal，2025年。[43] Awadhesh Yadav、Ravi Kant 和 Veepan Kumar。制造业中缓解工业4.0采纳风险的解的评价与排序：一种混合球形模糊FUCOM-MABAC方法。《国际计算机集成制造杂志》，2025年。[44] Ouiame El Fadli、Hala Hmamed 和 Ahmed Lagrioui。采用两阶段模糊PIPRECIA框架，全面评估海上风力涡轮机的关键选择因素。2025年第13届智能电网国际会议（icSmartGrid），页119–124，2025年。[45] Sinem Sezen 和 Vildan Özkır。基于模糊OPA与RAFSI方法的纺织业订单分配模型与供应商评估。《智能决策与粒计算杂志》，2025年。

[46] Majidah Majidah, Dadan Rahadian, Anisah Firli, Suhal Kusairi, Serkan Eti, Serhat Yüksel, and Hasan Dinçer. 面向可持续银行业的计算智能：一种新型费马模糊 LOPCOW–EDAS 框架。《国际高级计算机科学与应用杂志》，2025年。[47] Ali Katranci, Nilsen Kundakci, and Kevser Arman. 用于可持续废弃物处置技术选择的模糊 SIWEC 和模糊 RAWEC 方法。《运筹学视野》，2025年。[48] Maryam Eghbali-Zarch, Reza Tavakkoli-Moghaddam, K. Dehghan-Sanej, and Amin Kaboli. 利用模糊 IDOCRIW 和 WASPAS 方法确定建筑与拆除废弃物管理有效策略的优先级。《工程、建筑与建筑管理》，2021年。[49] Alok Yadav, Anish Kumar Sachdeva, Rajiv Kumar Garg, Karishma Mohamed Rafik Qureshi, Bhavesh G. Mewada, Mohamed Rafik N. Qureshi, and Mohamed Mansour. 通过碳捕集和生命周期评价实现制造业供应链净零排放：结合 BWM-模糊 DEMATEL 的综合框架。Sustainability，2024年。[50] Nishtha Agarwal and Nitin Seth. 运用德尔菲法和模糊解释结构模型分析印度汽车产业供应链韧性驱动因素及业务成果。Global Journal of Flexible Systems Management, 25:763 – 783，2024年。[51] Ilyas Masudin, Intan Lestari, Amelia Khoidir, and Dian Palupi Restuputri. 印度尼西亚食品制造业中小企业的可持续采购障碍：ISM–模糊 MICMAC 分析。Logistics，2025年。[52] Yihan Wang, Fusheng Yu, Władysław Homenda, Witold Pedrycz, Yuqing Tang, Agnieszka Maria Jastrzębska, and Fang Li. 基于趋势模糊粒化的自适应模糊认知图，用于长期时间序列预测。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，30:5166–5180，2022年。[53] Rizky Alfiansyah. 使用模糊 SAW 方法构建优良油棕种子选择决策支持系统。《福尔摩沙应用科学杂志》，2025年。[54] Yong Qin, Zeshui Xu, and Xinxin Wang. 一种基于新评分函数的犹豫模糊 SMART 方法，用于教师信息素养评估。《经济研究》，36:357 – 382，2022年。[55] Chandan Deep Singh and Rajdeep Singh. 使用模糊 MAUT 技术对影响制造业绩效的因素进行排序。《国际工业与系统工程杂志》，2023年。[56] Tatiane Roldão Bastos, André Andrade Longaray, Catia Maria dos Santos Machado, Leonardo Ensslin, Sandra Rolim Ensslin, and Ademar Dutra. 模糊-MACBETH 混合方法：运用模糊理论对定性量表进行数学处理。International Journal of Computational Intelligence Systems，16，2023年。[57] Ömer Faruk Görçün, Vladimir Simić, Pradip Kundu, Aşır Özbek, and Hande Küçükönder. 基于区间值直觉模糊 COPRAS 模型的工业用户电动汽车选择。《环境、发展与可持续性》，2024年。[58] Johan Krisnanto Runtuk, Steven Christanto, and Poh Kiat Ng. 优化供应商选择：模糊 VIKOR 与模糊 MOORA 在基于绩效的决策中的比较研究。IEEE Access，13:8456–8468，2025年。[59] Mohammad Fattahian Dehkordi, Seyed Morteza Hatefi, and Jolanta Tamosaitienė. 一种集成模糊香农熵与模糊 ARAS 模型的方法，用于不确定条件下基于风险指标的水资源管理。Sustainability，2025年。[60] HaoLun Wang, Wei Zhao, and Junqiang Zheng. 一种基于 Softmax 函数和 Frank 运算的改进型 Q-rung 正交对模糊 WASPAS 方法，用于社区团购平台投资决策。Journal of Soft Computing and Decision Analytics，2024年。[61] Zhixin Fang, Xin Yao, and Man Seok Song. 运用结合爱因斯坦聚合的圆形直觉模糊 COCOSO 智能算法优化球员位置安排。《科学报告》，15，2025年。[62] Aliya Fahmi, A. Khan, Thabet Abdeljawad, Mohammed Hassan, Aiman Mukheimer, and Rajermani Thinakaran. 运用复三角模糊 TODIM 方法分析阿富汗—美国战争引发的全球经济变化。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，2025年。[63] Yahya Dorfeshan, Seyed Meysam Mousavi, Vahid Mohagheghi, and Behnam Vahdani. 基于 MULTIMOORA、MOOSRA 和 TPOP 方法的新型区间二型模糊决策方法，用于确定项目关键路径。《计算机与工业工程》，120:160–178，2018年。[64] Adel Fahad Alrasheedi, Arunodaya Raj Mishra, Dragan Stevan Pamucar, Sarita Devi, and Fausto Cavallaro. 区间值直觉模糊 AROMAN 方法及其在可持续废水处理技术选择中的应用。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，46:7199 – 7222，2024年。[65] Mahdi Bitarafan, Kambod Amini Hosseini, Sarfaraz Hashemkhani Zolfani, and Keramatollah Ziari. 城市地区抗震韧性评估：一种新型模糊 RANCOM 方法。《环境、发展与可持续性》，28:2483 – 2520，2025年。[66] Irvanizam Irvanizam, Mahyuddin K. M. Nasution, Tulus Tulus, and Erna Budhiarti Nababan. 一种结合 MEREC-RAFSI 与球形模糊数的混合决策支持框架，用于遴选银行金融援助受助者。IEEE Access，13:33101–33123，2025年。[67] Fawaz M. Abdullah, Abdulrahman M. Al-Ahmari, and Saqib Anwar. 一种集成模糊 DEMATEL 与模糊 TOPSIS 的方法，用于分析智能制造技术。《流程》，2023年。

[68] Marmar Mehrparvar, J. Majak, and K Karjust. 比较模糊层次分析法与模糊 VIKOR 方法在自主型自动驾驶汽车系统风险准则优先级排序中的应用。《爱沙尼亚科学院学报》，2024年。[69] Mengwei Zhao, Guiwu Wei, Xudong Chen, and Yu Wei. 一种基于累积前景理论的直觉模糊 MABAC 方法，用于多属性群决策。《国际智能系统杂志》，36:6337 – 6359，2021年。[70] Raiha Imran and Kifayat Ullah. 圆形直觉模糊 EDAS 方法：汽车工业领域决策的新范式。《工程与管理科学辑刊》，2025年。[71] Jeevitha Kannan, Vimala Jayakumar, and Mahalakshmi Pethaperumal. 先进的基于模糊理论的决策：用于物流专家遴选的线性丢番图模糊 CODAS 方法。《运筹学视野》，2024年。[72] Muhmmet Aydin, Gokhan Camliyurt, Muhammet Gul, Sukru Ilke Sezer, Erkan Çelik, and Emre Akyuz. 一种用于评估货船救生艇性能效能的区间二型模糊 MARCOS 建模。《海洋工程》，2025年。[73] Yin Liu, Haidong Zhang, and Yanping He. 基于前景-TOPSIS 的三支决策与毕达哥拉斯模糊 ELECTRE 方法。《国际模糊系统杂志》，2025年。[74] Rangga Primadasa, Elisa Kusrini, Agus Mansur, Aditya Akbar Riadi, and Ilyas Masudin. 中小企业可持续供应链双元性与绿色竞争优势之间的相互关系：模糊 PROMETHEE-ISM-MICMAC 的集成。Process Integration and Optimization for Sustainability，9:1297 – 1325，2025年。[75] Benting Wan, Xiaolu Zhang, Meifang Xiong, and Zhenwu Wang. 基于 Dombi 算子的区间值 q-犹豫正交对模糊 QUALIFLEX 决策分析法。《Discrete Dynamics in Nature and Society》，2022年。[76] Qiaohong Zheng, Xinwang Liu, and Weizhong Wang. 一种用于失效模式与影响分析风险分析的扩展区间二型模糊 ORESTE 方法。《国际模糊系统杂志》，23:1379 – 1395，2021年。[77] Avaneesh Singh, Rajarshi Singh, Gautam Kumar, and Shruti Soni. 使用模糊决策树进行电力系统故障诊断。2022年 IEEE学生工程与系统会议（SCES），第1–5页，2022年。[78] Hans-Jürgen Zimmermann. 模糊集理论及其应用。Springer Science & Business Media，2011年。[79] Azriel Rosenfeld. 模糊图。载于《模糊集及其在认知与决策过程中的应用》，第77–95页。爱思唯尔，1975年。[80] YS Yun. 三维三角模糊数与梯形模糊集之间的参数运算。《代数与应用数学杂志》，21(2)，2023年。[81] San-Chyi Chang. 三角模糊数下模糊产品数量的模糊生产库存。Fuzzy Sets and Systems，107(1):37–57，1999年。[82] Duško Tešić, Darko Božanić, and Mohammad Khalilzadeh. 利用模糊逻辑提升多准则决策：一种融入三角模糊数的先进排序II法，用于定义相互关系。《智能管理决策杂志》，3(1):56–67，2024年。[83] Minsi Xiao, Lidan Qian, Bing Yang, Guangcong Zeng, and Sili Ren. 基于蒙特卡洛模拟-三角模糊数耦合模型的农业土壤重金属风险评估。《环境地球化学与健康》，46(2):62，2024年。[84] Krassimir Atanassov and George Gargov. 直觉模糊逻辑的基本要素：第一部分。Fuzzy Sets and Systems，95(1):39–52，1998年。[85] Tapas Kumar Mondal and SK Samanta. 广义直觉模糊集。《模糊数学杂志》，10(4):839–862，2002年。[86] Harish Garg and Gagandeep Kaur. 立方直觉模糊集及其基本性质。Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing，33(6)，2019年。[87] Harish Garg and Gagandeep Kaur. 立方直觉模糊集的新型距离度量及其在模式识别和医学诊断中的应用。Granular Computing，5(2):169–184，2020年。[88] Abd Ulazeez MJS Alkouri and Zeyad A Alshboul. 使用双极复直觉模糊集进行环境影响评价。Soft Computing，29(8):3795–3809，2025年。[89] Chiranjibe Jana and Madhumangal Pal. 双极直觉模糊软集在决策问题中的应用。《国际模糊系统应用杂志》（IJFSA），7(3):32–55，2018年。[90] Zeeshan Ali, Walid Emam, Tahir Mahmood, and Haolun Wang. 基于复直觉模糊集的阿基米德-海伦平均算子及其在决策问题中的应用。Heliyon，10(3)，2024年。[91] Muhammad Azam, Muhammad Sajjad Ali Khan, and Shilin Yang. 一种在复直觉模糊集环境下评估信息安全管理的决策方法。Journal of Mathematics，2022(1):9704466，2022年。[92] Yuanna Liu and Wen Jiang. 区间值直觉模糊集的一种新距离测度及其在决策中的应用。Soft Computing，24(9):6987–7003，2020年。

[93] V Lakshmana Gomathi Nayagam 和 Geetha Sivaraman。区间值直觉模糊集的排序。Applied Soft Computing，11(4):3368–3372，2011年。[94] Haibin Wang、Florentin Smarandache、Yanqing Zhang 和 Rajshekhar Sunderraman。单值中智集。Infinite Study，2010年。[95] Florentin Smarandache。中智学：中智概率、集合与逻辑：分析综合与综合分析。American Research Press，1998年。[96] Florentin Smarandache。逻辑学的统一领域：中智逻辑。载于《哲学》，第1–141页。American Research Press，1999年。[97] S Gomathi、M Karpagadevi、S Krishnaprakash、A Revathy 和 Said Broumi。用于高级决策的立方球形中智集。《中智集与系统》，73(1):24，2024年。[98] Adil Darvesh、Khalid Naeem 和 Syed Bilal Hussain Shah。利用Bonferroni加权平均法审查不同参数值下的中智立方模糊数据：一种稳健的多准则决策方法。Decision Making Advances，3 265，2025 1 245( ): – 。[99] Irvanizam Irvanizam 和 Denny Helzami。基于多属性群体决策的双极中智ARAS方法，用于评估伊斯兰银行分行的服务质量。载于《中智范式：决策与统计分析的进展——处理中智不确定性的中智原理》，第319–348页。施普林格，2025年。[100] Aliya Fahmi、Aziz Khan 和 Thabet Abdeljawad。利用广义双极中智集进行群体决策的新方法。PLOS ONE，20(6):e0317746，2025年。[101] M Sivakumar、Rabıyathul Basarıya、Abdul Rajak、M Senthil、T Vetriselvi、G Raja 和 R Rajavarman。变革阿拉伯语文本分析：将应用语言学与社交媒体上的m极中智集情绪变化和抑郁相结合。《国际中智科学杂志》(IJNS)，25(2)，2025年。[102] Muhammad Saeed、Muhammad Saqlain 和 Asad Mehmood。相似度量在决策中的应用：基于体育领域的 m 极区间值中智集，第 38 卷。Infinite Study，2020 年。[103] Nguyen Tho Thong、Florentin Smarandache、Nguyen Dinh Hoa、Le Hoang Son、Luong Thi Hong Lan、Cu Nguyen Giap、Dao The Son 和 Hoang Viet Long。一种基于广义动态区间值中智集的新型动态多准则决策方法。Symmetry，12(4):618，2020年。[104] Xiaobin Guo。用于虚拟现实艺术交互设计的超超中智统计模型。《中智集与系统》，86(1):58，2025年。[105] Florentin Smarandache。超不确定集、超集与超超不确定集/逻辑/概率/统计。Infinite Study，2017年。[106] Takaaki Fujita 和 Iqbal M Batiha。关于超中智清晰集与超超中智清晰集的注记。Neutro- sophic Sets & Systems，96，2026年。[107] Faisal Al-Sharqi、Ashraf Al-Quran 等。区间复中智软集上的相似度测度及其在不确定情形下决策与医学诊断中的应用。《中智集与系统》，51:495–515，2022年。[108] RK Saini、F Smarandache、Moh Kasim 和 Ashik Ahirwar。利用二型区间值语言复中智集对农食系统进行决策建模。《中智集与系统》，87:948–969，2025年。[109] Yanna Deng。偏移中智倒置评估模型（ON-UAM）：衡量基础教育信息化性能的新方法。《中智集与系统》，87:751–762，2025年。[110] Florentin Smarandache。区间值中智超集、中智下集与中智偏移。论文集。第IX卷：论中智理论及其在代数中的应用，第117页，2022年。[111] Florentin Smarandache。中智超集、中智下集与中智偏移。中智上/下/外逻辑、概率与统计亦同。Infinite Study，2016年。[112] E Lincy 和 V Maheswari。中智上图中的有效支配能量。《中智集与系统》，94(1):1，2025年。[113] Florentin Smarandache。单值中智超集、中智下集与中智偏移上的算子。论文集，9:112，2022年。[114] Vinoth Dhatchinamoorthy 和 Ezhilmaran Devarasan。基于中智超集与下集方法对生物特征图像进行全局与自适应阈值处理的分析。Symmetry，15(5):1102，2023年。[115] K Akalyadevi、C Antony Crispin Sweety 和 AR Sudamani Ramaswamy。球形中智图着色。载于《AIP会议论文集》。AIP Publishing LLC，2022年。[116] S Gomathi、S Krishnaprakash、M Karpagadevi 和 Said Broumi。立方球形中智集。《国际中智科学杂志》，21(4):172–72，2023年。[117] Marimuthu Dharmalingam、GS Mahapatra、I Silambarasan、R Vijaykrishnaraj、R Selvakumar 等。定义在某些代数结构上的n-超球形中智集。《中智集与系统》，91(1):45，2025年。

[118] V Muthukumaran、M Sathish Kumar、I Silambarasan、R Udhayakumar 和 Said Broumi。n-超球形中智矩阵研究。《中智集与系统》，第344页，2024年。[119] Florentin Smarandache。标准与非标准中智理论的进展。Infinite Study，2019年。[120] Florentin Smarandache。多元生成论、多元生成集、逻辑、概率与统计。ArXiv预印本 arXiv:1808 03948，2018年。[121] Prem Kumar Singh 等。利用直觉多元生成图进行暗数据分析。《国际中智科学杂志》，16(2):80–100，2021年。[122] Prem Kumar Singh 等。用于处理多值属性数据及其语境的单值多元生成图。《国际中智科学杂志》，15:98–112，2021年。[123] Zdzisław Pawlak。粗糙集。《国际计算机与信息科学杂志》，11:341–356，1982年。[124] Zdzislaw Pawlak、S. K. Michael Wong、Wojciech Ziarko 等。粗糙集：概率与确定性方法。《国际人机研究杂志》，29(1):81–95，1988年。[125] Said Broumi、Florentin Smarandache 和 Mamoni Dhar。粗糙中智集。Infinite Study，32:493–502，2014年。[126] Zdzisław Pawlak。粗糙集：数据推理的理论方面，第9卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[127] Zdzislaw Pawlak。粗糙集理论及其在数据分析中的应用。《控制论与系统》，29(7):661–688，1998年。[128] Yiyu Yao。概率粗糙集模型中的两个语义问题。Fundamenta Informaticae，108(3-4):249–265，2011年。[129] Wojciech Ziarko。概率粗糙集。载于《粗糙集、模糊集、数据挖掘与粒计算：第十届国际会议 RSFDGrC 2005》，加拿大里贾纳，2005年8月31日至9月3日，论文集，第一部分10，第283–293页。施普林格，2005年。[130] R Raghavan 和 BK Tripathy。多粒度粗糙集的一些拓扑性质。《应用科学研究进展》，2(3):536–543，2011年。[131] Yiyu Yao 和 Jilin Yang。粒状粗糙集与粒阴影集：Pawlak近似空间中的三支近似。《国际近似推理杂志》，142:231–247，2022年。[132] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《粗糙集扩展与不确定性模型手册》。国际中智科学协会（NSIA）出版社，2026年。[133] Pradip Kumar Maji、Ranjit Biswas 和 A Ranjan Roy。软集理论。《计算机与应用数学》，45(4-5):555–562，2003年。[134] Dmitriy Molodtsov。软集理论——初步成果。《计算机与应用数学》，37(4-5):19–31，1999年。[135] Florentin Smarandache。新型软集：“超软集、不定软集、不定超软集和树软集”：改进版本。Infinite Study，2023年。[136] Florentin Smarandache。将软集扩展为超软集，进而扩展为多元生成超软集。《中智集与系统》，22(1):168–170，2018年。[137] Abdullah Ali Salamai。用于能源项目综合风险评估的超超软框架。《中智集与系统》，77:614–624，2025年。[138] Florentin Smarandache。超超软集与模糊扩展超超软集的基础：一种新视角。Neutrosophic Systems with Applications，11:48–51，2023年。[139] M Myvizhi、Ahmed A Metwaly 和 Ahmed M Ali。用于改进空气污染分析的树软方法：案例研究。《中智集与系统》，68(1):17，2024年。[140] Florentin Smarandache。树软集与超软集及树软集的模糊扩展。《工程中的超软集方法》，2024年。[141] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《软集理论及其扩展的动态综述》。国际中智科学协会（NSIA）出版社，2026年。[142] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。 $u$-结构与函子结构的统一框架：管理超、超、超超、树与森林不确定上/下/外模型。《中智集与系统》，91 380，2025 337: – 。[143] John N Mordeson 和 Premchand S Nair。模糊图与模糊超图，第46卷。Physica，2012年。[144] P. R. Kavyasree 和 B. Surender Reddy。应用于线性空间的N-立方集。《克拉古耶瓦茨数学杂志》，2022年。[145] Gundeti Soujanya 和 B. Surender Reddy。N-立方图像模糊线性空间。《印度科学与技术杂志》，2024年。[146] Young Bae Jun、Seok Zun Song 和 Seon Jeong Kim。N-超集。Mathematics，2018年。[147] Witold Pedrycz。影集：模糊集的表示与处理。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)，28(1):103–109，1998年。

[148] Mingjie Cai、Qingguo Li 和 Guangming Lang。动态模糊集的影集。《Granular Computing》，2 94，2016 85 : – 。[149] Gianpiero Cattaneo 和 Davide Ciucci。影集及相关代数结构。《Fundamenta Informaticae》，55(3-4):255–284，2003年。[150] Krassimir T Atanassov。圆形直觉模糊集。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，39 5986，2020年 5 5981( ): – 。[151] Muhammad Akram、A Nagoor Gani 和 A Borumand Saeid。Vague超图。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，26(2):647–653，2014年。[152] Juanjuan Lu、Linli Zhu 和 Wei Gao。双极模糊影响图及其化学应用。《Engineering Letters》，31(4)，2023年。[153] Wen-Ran Zhang。双极模糊集与关系：用于认知建模和多智能体决策分析的计算框架。NAFIPS/IFIS/NASA '94。北美模糊信息处理学会双年会第一届国际联合会议论文集。《The Industrial Fuzzy Control and Intellige》，第305–309页，1994年。[154] Bindu Nila 和 Jagannath Roy。运用基于D数的毕达哥拉斯模糊 DEMATEL 方法分析物流4.0的关键成功因素。《Decision Making Advances》，2(1):92–104，2024年。[155] Muhammad Ihsan、Muhammad Saeed 和 Atiqe Ur Rahman。基于毕达哥拉斯模糊软专家集的多属性决策应用。《International Journal of Information and Decision Sciences》，16(4):383–408，2024年。[156] Tapan Senapati 和 Ronald R. Yager。费马模糊集。《Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing》，11:663 – 674，2019年。[157] S. Jeevaraj。区间值费马模糊集的排序及其应用。《Expert Syst. Appl.》，185:115613，2021年。[158] Chen Shouyu 和 Guo Yu。可变模糊集及其在防洪工程系统综合风险评估中的应用。《Fuzzy Optimization and Decision Making》，5(2):153–162，2006年。[159] Wen-chuan Wang、Dong-mei Xu、Kwok-wing Chau 和 Guan-jun Lei。基于可变模糊集理论和模糊二元比较法的河流水质评估。《Water resources management》，28(12):4183–4200，2014年。[160] Yunhai Fang、Xilai Zheng、Hui Peng、Huan Wang 和 Jia Xin。可变模糊集用于水质评估的相对隶属度计算新方法。《Ecological indicators》，98:515–522，2019年。[161] Vasile Patrascu。一种基于五值逻辑的知识表示新方法。arXiv预印本 arXiv:1502.05562，2015年。[162] Vasile Patrascu。五值表示框架下双极模糊集的相似度、基数和熵。arXiv预印本 arXiv:1506.02060，2015年。[163] Yong-Uk Cho、Young-Bae Jun 和 Seok-Zun Song。伪MV代数的双模糊理想。《JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTING》，22(1/2):475，2006年。[164] Tadeusz Gerstenkorn 和 Jacek Mańko。双模糊概率集。《Fuzzy sets and systems》，71(2):207–214，1995年。[165] Sankar Das、Ganesh Ghorai 和 Madhumangal Pal。图像模糊容差图及其应用。《Complex & Intelligent Systems》，8(1):541–554，2022年。[166] Chao Wang、Minghu Ha 和 Xiaowei Liu。用于投票的三元模糊集数学模型。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，29(6):2381–2386，2015年。[167] Vicenç Torra。犹豫模糊集。《International journal of intelligent systems》，25(6):529–539，2010年。[168] Muhammad Akram、Danish Saleem 和 Talal Al-Hawary。球形模糊图及其在决策中的应用。《Mathematical and Computational Applications》，25(1):8，2020年。[169] Fatma Kutlu Gündoğdu 和 Cengiz Kahraman。球形模糊集与球形模糊TOPSIS方法。《Journal of intelligent & fuzzy systems》，36(1):337–352，2019年。[170] M Murali Krishna Rao 和 B Venkateswarlu。 γ半环的三极模糊内理想。《Asia Pacific Journal of Management》，5(2):192–207，2018年。[171] M Murali Krishna Rao、B Venkateswarlu 和 Y Adi Narayana。半环上的三极模糊软理想和三极模糊软内理想。《Italian journal of pure and applied Mathematics》，2019年。[172] M Murali Krishna Rao。 γ半群的三极模糊内理想。《Ann. Fuzzy Math. Inform》，15(2):199–206，2018年。[173] Shawkat Alkhazaleh。中智Vague集理论。《Critical Review》，10:29–39，2015年。[174] Ashraf Al-Quran、Hazwani Hashim 和 Lazim Abdullah。结合区间中智Vague集与 DEMATEL 及新语言变量的混合方法。《Symmetry》，12(2):275，2020年。[175] Satham Hussain、Jahir Hussain、Isnaini Rosyida 和 Said Broumi。四分中智软图。载于《Handbook of Research on Advances and Applications of Fuzzy Sets and Logic》，第771–795页。IGI Global，2022年。[176] Ilanthenral Kandasamy。双值中智集、其最小生成树及聚类算法。《Journal of Intelligent systems》，27(2):163–182，2018年。

[177] Qaisar Khan、Peide Liu 和 Tahir Mahmood。双值中智集的若干广义骰子测度及其应用。《Mathematics》，6(7):121，2018年。[178] Bin Zhu 和 Zeshui Xu。关于对偶犹豫模糊集的一些结果。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，26(4):1657–1668，2014年。[179] José Carlos R Alcantud、Gustavo Santos-García、Xindong Peng 和 Jianming Zhan。对偶扩展犹豫模糊集。《Symmetry》，11(5):714，2019年。[180] Florentin Smarandache。模糊集是双重细化不确定性中智集以及一般意义上细化中智集的一个子类。《Neutrosophic Sets & Systems》，58，2023年。[181] Pritpal Singh 等。模糊集理论：一种处理人类感知中的无意识和模糊性的新方法。《Full Length Article》，5(1):52–2，2023年。[182] Florentin Smarandache。模糊集（as）是四分割中智集（qns）的一个特例。《Nidus idearum Scilogs》，XII：播种与培育，第16页，2023年。[183] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。对跖图里亚姆中智图。《Neutrosophic Optimization and Intelligent Systems》，5:1–13，2024年。[184] Takaaki Fujita。粗糙图里亚姆中智有向图与粗糙五分区中智有向图综述。《Neutrosophic Optimization and Intelligent Systems》，5:48–79，2025年。[185] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。毕达哥拉斯、费马及复数图里亚姆中智图。《SciNexuses》，2:39–63，2025年。[186] Prem Kumar Singh、Naveen Surathu、Ghattamaneni Surya Prakash 等。基于图里亚姆的社交网络四路未知画像刻画。《Full Length Article》，10(2):27–7，2024年。[187] Rama Mallick 和 Surapati Pramanik。五分区中智集及其性质。《Neutrosophic Sets and Systems》，35:49，2020年。[188] Radha R. 和 Stanis Arul Mary。五分区中智勾股集。《International Research Journal on Advanced Science Hub》，2021年。[189] Suman Das、Rakhal Das 和 Binod Chandra Tripathy。粗糙五分区中智集上的拓扑。《Iraqi Journal of Science》，2022年。[190] Jiarong Jia。用于工艺与艺术博物馆公共数字文化服务水平评价的三值中智偏移。《Neutrosophic Sets and Systems》，88(1):44，2025年。[191] Takaaki Fujita、Arif Mehmood 和 Arkan A. Ghaib。单值、双值、三值、四值和五值中智图。《Neutrosophic Systems with Applications》，26(2):文章2，2026年。[192] Takaaki Fujita。三值中智集、四值中智集、五值中智集和双值不确定软集。《Neutrosophic Systems with Applications》，25(5):3，2025年。[193] Hongxin Wang。中医学生的职业认同形成：运用三值中智集的教育视角。《Neutrosophic Sets and Systems》，88:83–92，2025年。[194] Takaaki Fujita。高级分区中智集：六分区、七分区、八分区、九分区和十分区结构的形式化。《Abhath Journal of Basic and Applied Sciences》，4(2):40–60，2025年。[195] Mumtaz Ali、Le Hoang Son、Irfan Deli 和 Nguyen Dang Tien。双极中智软集及其在决策中的应用。《J. Intell. Fuzzy Syst.》，33:4077–4087，2017年。[196] Waheed Ahmad Khan、Khurram Faiz 和 Abdelghani Taouti。双极图像模糊集及其关系与应用。《Songklanakarin Journal of Science & Technology》，44(4)，2022年。[197] M Sarwar Sindhu、Tabasam Rashid 和 Agha Kashif。基于双极图像模糊集的投资选择方法。《 International Journal of Fuzzy Systems 》，23(7):2335–2347，2021年。[198] Fang Sun、Mifeng Ren、Yujing Shi 和 Xuanbai Feng。用于新能源发电系统数字监控和远程操作维护平台设计质量评价的四值中智偏移。《Neutrosophic Sets and Systems》，88:940–953，2025年。[199] T Mythili、V Jeyanthi、D Maheswari 和 WF Al Omeri。七分区中智软矩阵及其在医学诊断中的应用。《Neutrosophic Sets and Systems》，97:456–479，2026年。[200] S Broumi 和 Tomasz Witczak。七分区中智软集。《International Journal of Neutrosophic Science》，18(4):270–290，2022年。[201] Raed Hatamleh、Nasir Odat、Abdallah Al-Husban、Arif Mehmood Khattak、Alaa M Abd El-latif、Husham M At- taalfadeel、Walid Abdelfattah 和 Ahmad M Abdel-Mageed。描绘爱情：运用机器学习研究大学生浪漫情感的七分区中智研究。《European Journal of Pure and Applied Mathematics》，18(3):6484–6484，2025年。[202] Wenwen Meng。基于人工智能的跨境电子商务人才培养质量评价五值中智偏移。《Neutrosophic Sets and Systems》，88(1):54，2025年。

[203] Yuan Sun. 运用五值中智集评估数字时代基础教育信息化的绩效。《中智集与系统》，88(1):18，2025年。[204] G Muhiuddin、Mohamed E Elnair、Satham Hussain S 和 Durga Nagarajan。基于TOPSIS方法的双极四分中智环境决策模型。《中智集与系统》，85(1):51，2025年。[205] Kalyan Sinha 和 Pinaki Majumdar。双极四分单值中智粗糙集，第38卷。Infinite Study，2020年。[206] Giovanni Panti。多值逻辑。载于《不确定性与不精确性的量化表示》，第25–74页。施普林格，1998年。[207] Fujita Takaaki 和 Arif Mehmood。迭代多重模糊集、迭代多重中智集、迭代多重软集和多重真生集。《中智计算与机器学习》。ISSN 2574-1101，41:1–30，2025年。[208] Muhammad Arshad、Muhammad Saeed 和 Atiqe Ur Rahman。细化模糊集上的凸性与凹性及其若干性质。《不确定性论述与应用》，1(1):140–150，2024年。[209] Florentin Smarandache。n值细化中智逻辑及其在物理学中的应用。Infinite Study，4 146，2013 143: – 。[210] Irfan Deli。细化中智集与细化中智软集：理论与应用。载于《广义与混合集结构及其软计算应用研究手册》，第321–343页。IGI Global，2016年。[211] Florentin Smarandache。多重中智集导论。Infinite Study，2023年。[212] Johanna Estefanía Calle Imbaquingo、Karen Milagros Díaz Salambay、Jordy Alexis Vargas Yumbo 和 Kevin Christo- pher Carrasco Azogue。基于祖传逻辑的跨文化教育：应用Ayni方法多重中智方法论，加强瓦奥拉尼社区的混合方法论。《中智集与系统》，92:263–283，2025年。[213] Florentin Smarandache。《Nidus Idearum》。Scilogs，XIII：结构／中智结构／反结构。Infinite Study，2024年。[214] Deva Nithyanandham、Felix Augustin、David Raj Micheal 和 Nagarajan Deivanayagam Pillai。基于能量的双极直觉模糊有向图决策系统，用于新冠疫苗选择。《应用软计算》，147:110793，2023年。[215] Florentin Smarandache。将超图扩展为n-超超图和多元生成n-超超图，并将超代数扩展为n元（经典／中智／反）超代数。Infinite Study，2020年。[216] Said Broumi、Assia Bakali、Mohamed Talea 和 Florentin Smarandache。孤立双极单值中智图。载于《信息系统设计与智能应用：第四届印度国际会议（2017）论文集》，第816–822页。施普林格，2018年。[217] Said Broumi、Mohamed Talea、Assia Bakali 和 Florentin Smarandache。区间值中智图。《Critical Review》，XII，2016:5–33，2016年。[218] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《超图与超超图理论及其应用（IV）：不确定图论》，《超图与超超图理论及其应用》第IV卷。国际中智科学协会（NSIA）出版社，1.0版，2026年。[219] Hamza Zafar 和 Muhammad Asif。n结构在模糊图论中的应用。《模糊智能杂志》，1(01):31–40，2025年。[220] Takaaki Fujita。一般真生软粗糙图及若干相关图类。《通过图化、超化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第437页，2024年。[221] N Vinoth Kumar 和 G Geetha Ramani。乘积直觉模糊图。《国际计算机应用杂志》，28(1):31–33，2011年。[222] Hossein Rashmanlou、Sovan Samanta、Madhumangal Pal 和 Rajab Ali Borzooei。具有范畴性质的直觉模糊图。《模糊信息与工程》，7(3):317–334，2015年。[223] Zehui Shao、Saeed Kosari、Muhammad Shoaib 和 Hossein Rashmanlou。模糊图的若干概念及其在医学诊断中的应用。《物理学前沿》，8:357，2020年。[224] Muhammad Akram、MG Karunambigai、K Palanivel 和 S Sivasankar。平衡双极模糊图。《纯数学高级研究杂志》，6(4):58–71，2014年。[225] Muhammad Akram。双极模糊图。《信息科学》，181(24):5548–5564，2011年。[226] Sundas Shahzadi 和 Muhammad Akram。双模糊图着色。《意大利纯粹与应用数学杂志》，36:429–444，2016年。[227] Muhammad Akram 和 Karamat H Dar。区间值双模糊图。载于《2010年国际代数会议论文集：代数结构进展》，第1–10页。世界科学出版社，2012年。[228] Eman A AbuHijleh。复值犹豫模糊图。《模糊信息与工程》，15(2):149–161，2023年。[229] Xinyu Guo、Bingjie Tian 和 Xuedong Tian。Hfgnn-proto：基于犹豫模糊图神经网络的原型网络，用于小样本文本分类。《电子学》，11(15):2423，2022年。[230] Sk Amanathulla、Biswajit Bera 和 Madhumangal Pal。平衡图像模糊图及其应用。《人工智能评论》，54(7):5255–5281，2021年。

[231] Waqar Arif、Waheed Ahmad Khan、Asghar Khan 和 Hossein Rashmanlou。图像模糊图的若干指标及其应用。《计算与应用数学》，42:1–23，2023年。[232] Kaviyaa. V 和 Ramya M. 球形模糊图在交通领域的应用。《国际应用科学与工程技术研究期刊》，2022年。[233] M Ramya、S Murali、R Radha 和 R Princy。费马四分区中智图的不同乘积类型注记。《中智集与系统》，97:237–264，2026年。[234] V Divya 和 J Jesintha Rosline。费马四分区中智模糊图。《可靠性：理论与应用》，20(3 (86)):816–828，2025年。[235] Sumera Naz、Muhammad Akram、Samirah Alsulami 和 Faiza Ziaa。区间值q阶正交对偶犹豫模糊环境下的决策分析。《国际计算智能系统杂志》，14(1):332–357，2021年。[236] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。Turiyam中智竞争图的简要探索。Infinite Study，2024年。[237] Said Broumi、D Ajay、P Chellamani、Lathamaheswari Malayalan、Mohamed Talea、Assia Bakali、Philippe Schweizer 和 Saeid Jafari。区间值五分区中智图及其在多准则决策中的应用。《工程科学运筹学：理论与应用》，5(3):68–91，2022年。[238] M Myvizhi、Ahmed Abdelhafeez、Mohamed Refaat Abdellah、Mohamed Eassa、Mohamed S Sawah、Hussam Elbehiery 等。具有七分区结构的单值中智图。《中智集与系统》，80 748，2025 728: – 。[239] R Muthuraj、K Krithika 和 S Revathi。多重模糊图上的各种乘积。《比率数学》，44:231，2022年。[240] Florentin Smarandache。《Nidus Idearum》。Scilogs，I：中智学，第1卷。Infinite Study，2016年。[241] Erfan Babaee Tirkolaee、Abbas Mardani、Zahra Dashtian、Mehdi Soltani 和 Gerhard-Wilhelm Weber。一种结合模糊决策与多目标规划的新型混合方法，用于两级供应链设计中的可持续可靠供应商选择。《清洁生产期刊》，250:119517，2020年。[242] Esra Cakr 和 Mehmet Ali Ta。圆形直觉模糊决策及其应用。《Expert Syst. Appl.》，225:120076，2023年。[243] B.P. Joshi、Akhilesh Singh、Nagendra Kumar、Rakhi Kamra、Shweta Goyal 和 Sunil Semwal。直觉模糊决策及其在绿色能源领域应用的系统性文献综述。2024年计算、通信与材料进展国际会议（ICACCM），第1–5页，2024年。[244] Jun Ye。基于Vague集的多准则模糊决策改进方法。《计算机辅助设计》，39(2):164–169，2007年。[245] Khaleed Alhazaymeh、Yousef Al-Qudah、Nasruddin Hassan 和 Abdul Muhaimin Nasruddin。立方Vague集及其在决策中的应用。《熵》，22(9):963，2020年。[246] Thirumalai Nallasivan Parthasarathy、Chakkarapani Sumathi Thilagasree、T. Jayakumar、Vladimir Simic 和 Dra- gan Stevan Pamucar。用于城市固体废物处置技术选择的分层增强型区间值q阶正交图像双极模糊决策方法。《International Journal of Environmental Science and Technology》，22:13049–13068，2025年。[247] Ezhilarasan Natarajan 和 Felix Augustin。一种用于评估孕妇高风险并发结核病的双极模糊决策系统。《Heliyon》，10，2024年。[248] Harish Garg 和 Nancy。基于TOPSIS和聚类方法及新距离测度的单值中智决策算法。《AIMS数学》，2020年。[249] A. M. M. Jaradat、Yousef Al Al-Qudah、Abdullah Alsoboh、Faisal Al Al-Sharqi 和 Abdullrahman A. Al-Maqbali。可能性单值中智集的一种新方法及其在决策环境中的应用。《分析与应用国际期刊》，2025年。[250] Rajeev Kumar、Abdullah Baz、Hosam Alhakami、Wajdi Alhakami、Mohammed Baz、Alka Agrawal 和 Raees Ahmad Khan。用于估算软件可用安全性的犹豫模糊决策分析混合模型。《IEEE Access》，8:72694–72712，2020年。[251] Guiwu Wei 和 Nian Zhang。一种基于Shapley值的VIKOR方法进行多准则犹豫模糊决策。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，26(2):1065–1075，2014年。[252] Juan juan Peng、Xin Ge Chen、Xiao Kang Wang、Jian Qiang Wang、Qingqing Long 和 Lv Yin。图像模糊决策理论与方法：系统性综述。《International Journal of Systems Science》，54 2675，2023 2663 : – 。[253] Arsalan Tanveer、Huaming Song、Abdul Raheem Daud、Muhammad Irfan 和 Muhammad Faheem。识别并确定城市电动车辆障碍的优先级，以推动可持续城市发展：一种球形模糊决策方法。《能源》，2025年。[254] Hasan Dincer 和 Yasar Gökalp。采用量子球形模糊决策建模，优化医院储能系统管理。《Computer and Decision Making: An International Journal》，2024年。

[255] Abrar Almjally、Mudassir Khan、Muhammad Ismail 和 Asghar Khan。基于三支决策模型的宽带技术选择：三极模糊信息下的方法。A. almjally 等。《国际模糊系统杂志》，页码1–19，2025年。[256] Osamah Shihab Albahri、Abdullah Hussein Alamoodi、Dragan Pamucar、Vladimir Simic、Juliana Chen、Moamin A Mahmoud、Ahmed Shihab Albahri 和 Iman Mohamad Sharaf。利用区间中智模糊决策框架选择用于肥胖管理的基于智能手机的移动应用程序。《人工智能工程应用》，137：109191，2024年。[257] Takaaki Fujita。拓展多元生成超超结构的视野：在决策、控制和神经系统中的应用。《通过图化、超图化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，第416页，2025年。[258] Lu Luo 和 Cong Wang。提升英语专业学生智慧教室的教学质量评估：一种集成双值中智决策模型。《中智集与系统》，76(1)：26，2024年。[259] Xiyue Tang 和 Guiwu Wei。基于对偶犹豫毕达哥拉斯模糊信息的多属性决策。《认知计算》，11(2)：193–211，2019年。[260] Harish Garg 和 Rishu Arora。对偶犹豫模糊软集聚合算子及其在决策中的应用。《认知计算》，10(5)：769–789，2018年。[261] Nivetha Martin、Pradhyumna Kumar Singh、Davron Aslonqulovich Juraev 和 Gabriel XG Yue。多准则决策中的 Turiyam TOPSIS。《决策与运筹研究杂志》，10(3)，2025年。[262] Surapati Pramanik。单值五划分中智数环境下用于多准则群体决策的 SVPNN-ARAS策略。《塞尔维亚管理学杂志》，2023年。[263] Yi-Ming Li、Majid Khan、Adnan Khurshid、Muhammad Gulistan、Ateeq ur Rehman、Mumtaz Ali、Shahab Abdulla 和 Aitazaz Ahsan Farooque。基于五划分中智立方集聚合算子的空气污染决策模型设计。《复杂与智能系统》，页码1–18，2023年。[264] Serkan Eti、Fatih Karaman、Serhat Yüksel、Hasan Dinçer 和 İpek Yaylalı。提出基于最佳准则法的比较加权评价：一种用于航空燃油效率的多重模糊框架。《科学报告》，16，2025年。[265] Ankita Ankita 和 Deepak Kumar。细化单值中智数据的可靠性评估及其在多准则决策中的应用。《中智集与系统》，94(1)：6，2025年。[266] Hossein Sayyadi Tooranloo、Seyed Mahmood Zanjirchi 和 Mahtab Tavangar。细化中智环境下的 ELECTRE 多属性决策方法。《中智集与系统》，31：8，2020年。[267] Ruipu Tan 和 Wende Zhang。基于新熵和细化单值中智集的决策方法及其在台风灾害评估中的应用。《应用智能》，51：283–307，2020年。[268] Ralph Steuer、Yue Qi 和 Markus Hirschberger。多准则决策。John Whiley，1986年。[269] Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Zenonas Turskis。经济学中的多准则决策（MCDM）方法：综述。Technological and Economic Development of Economy，17(2)：397–427，2011年。[270] Ta-Chung Chu 和 Yichen Lin。模糊多准则决策的扩展。《计算机与应用数学》，57(3)：445–454，2009年。[271] Murat Çolak 和 İhsan Kaya。采用集成模糊多准则决策模型对可再生能源方案进行优先级排序：土耳其的实际案例。《可再生能源与可持续能源评论》，80：840–853，2017年。[272] Selman Karagoz、Muhammet Deveci、Vladimir Simic、Nezir Aydin 和 Ufuk Bolukbas。用于确定授权拆解中心选址的新型基于直觉模糊多准则决策的 CODAS 方法：伊斯坦布尔案例研究。《废物管理与研究》，38(6)：660–672，2020年。[273] Gülçin Büyüközkan 和 Fethullah Gocer。一种用于有效危险废弃物管理的直觉模糊多准则决策方法。载于《环境管理中的智能系统：理论与应用》，第21–40页。施普林格，2016年。[274] Chan Gu 和 Bo Tang。利用犹豫双极模糊多准则决策为工业机器人选择最佳机器学习模型。《国际先进计算机科学与应用杂志》(IJACSA)，15，2024年。[275] Xiulu Liang。用于评估游泳分析技术的犹豫双极模糊多准则决策框架。《Informatica》，49(22)，2025年。[276] JiaYan Zhu 和 Zeng Jiao。通过选择合适的运动项目，利用毕达哥拉斯模糊多准则决策模型评估体育领域的职业幸福感。《科学报告》，15(1)：22326，2025年。[277] Rishikesh Chaurasiya 和 Divya Jain。基于毕达哥拉斯模糊集的多准则决策新算法及其应用。《伊朗科技杂志：电气工程辑》，47(3)：871–886，2023年。[278] Serhat Aydın。一种基于新费马模糊理论的模糊多准则决策方法。《国际信息技术与决策杂志》，20(03)：881–902，2021年。[279] Hakan Aydoğan 和 Vildan Ozkir。一种用于选择与排序问题的费马模糊多准则决策方法：案例研究。Expert Systems with Applications，237：121628，2024年。

[280] Ahmed M Ali、Ahmed Abdelhafeez、Tamer HM Soliman 和 Khaled ELMenshawy。用于选择新冠肺炎治疗策略的概率犹豫模糊多准则决策方法。《决策：管理与工程应用》，7(1)：131–144，2024年。[281] Jeonghwan Jeon、Krishnan Suvitha、Noreen Izza Arshad、Samayan Kalaiselvan、Samayan Narayanamoorthy、Massimil- iano Ferrara 和 Ali Ahmadian。采用概率犹豫模糊多准则决策方法评估印度针对 COVID-19 疫情的干预策略。《社会经济规划科学》，89：101711，2023年。[282] Vikas Arya 和 Satish Kumar。一种基于 TODIM-VIKOR 与熵加权法的图片模糊多准则决策方法。《认知计算》，13(5)：1172–1184，2021年。[283] Guo Cao。一种基于分式规划的绿色供应商选择多准则图片模糊决策模型。《国际计算机、通信与控制杂志》，15(1)，2020年。[284] Thi-Ly Nguyen、Phi-Hung Nguyen、Hong-Anh Pham、Thi-Giang Nguyen、Duc-Thinh Nguyen、Thi-Hoai Tran、Hong-Cham Le 和 Huong-Thuy Phung。一种将数据包络分析与球形模糊多准则决策方法相结合的新方法，用于钢铁行业的可持续供应商选择。Mathematics，10(11)：1897，2022年。[285] Phi-Hung Nguyen、Jung-Fa Tsai、Thanh-Tuan Dang、Ming-Hua Lin、Hong-Anh Pham 和 Kim-Anh Nguyen。一种用于对政府针对 COVID-19 疫情的干预策略进行优先级排序的混合球形模糊多准则决策方法：越南案例研究。Mathematics，9(20)：2626，2021年。[286] Fei Wang。用于直播销售的单值中智多准则决策新型评分函数与标准系数。《信息科学》，654：119836，2024年。[287] Karam M Sallam 和 Ali Wagdy Mohamed。用于评估陆上风能发电及生态可持续性的方法：中智多准则决策方法。Neutrosophic Systems with Applications，4：53–61，2023年。[288] M Anandhkumar、S Prathap、R Ambrose Prabhu、P Tharaniya、K Thirumalai 和 B Kanimozhi。四划分中智模糊矩阵的行列式理论及其在多准则决策问题中的应用。《中智集与系统》，79(1)：13，2025年。[289] P Tharini、C Mary、P Tharaniya、S Prathap、S Ramkumar 和 G Dhanavel。区间值四划分中智模糊矩阵的代数性质及其在多准则决策问题中的应用。《中智集与系统》，80(1)：15，2025年。[290] Yuan Huang 和 Jie Yu。一种用于大学英语混合式教学质量评价的集成多元生成多准则决策方法。《中智集与系统》，79(1)：35，2025年。[291] Maohua Yang、Jiajia Yu 和 Yuhe Wang。一种用于评估建设项目招投标信用状况的创新多元生成多准则决策框架，可处理相互矛盾的信息。《中智集与系统》，80(2)：306–320，2025年。[292] Yong Deng、Felix TS Chan、Ying Wu 和 Dong Wang。一种基于多准则数据融合的新型语言多准则决策方法。Expert Systems with Applications，38(6)：6985–6993，2011年。[293] Yi-Xi Xue、Jian-Xin You、Xufeng Zhao 和 Hu-Chen Liu。一种用于机器人评估与选择、考虑权重信息不完整的集成语言多准则决策方法。《国际生产研究杂志》，54 5467，2016 18 5452( ): – 。[294] Qun Wu、Xinwang Liu、Jindong Qin、Ligang Zhou、Abbas Mardani 和 Muhammet Deveci。一种基于企业财务绩效的投资组合选择集成广义 TODIM 模型。Knowledge-Based Systems，249：108794，2022年。[295] Payam Shojaei 和 Ana Bolvardizadeh。伊朗绿色供应商选择的粗糙多准则决策模型：大学建设项目案例。《建成环境项目与资产管理》，10(3)：437–452，2020年。[296] Bojan Matić、Stanislav Jovanović、Milan Marinković、Siniša Sremac、Dillip Kumar Das 和 Željko Stević。一种用于沥青生产厂排序与选择的新型集成区间粗糙多准则决策模型。Mathematics，9 269，2021 3( ): 。[297] Mohammad Ali Beheshtinia 和 Sedighe Omidi。一种用于银行业绩效评估的混合多准则决策方法。Kybernetes，46(8)：1386–1407，2017年。[298] Yu-Ping Ou Yang、How-Ming Shieh、Jun-Der Leu、Gwo-Hshiung Tzeng 等。一种结合 DEMATEL 与网络分析法的创新混合多准则决策模型及其应用。《国际运筹学杂志》，5(3)：160–168，2008年。[299] Jishu Jana 和 Sankar Kumar。软矩阵博弈：一种犹豫模糊多准则决策方法。《美国数学与管理科学杂志》，40(2)：107–119，2021年。[300] Yuhua He。一种利用超软集评估英语语言文学教学质量的多准则决策方法。《中智集与系统》，80(1)：19，2025年。[301] Gülay Demir。医疗保健领域物联网技术的战略评估：灰色多准则决策方法。《Spectrum of Decision Making and Applications》，2(1)：375–388，2025年。[302] Elif Tekin 和 Gülçin Büyüközkan。灰色多准则决策研究综述：近期进展与应用。载于《智能与模糊系统国际会议》，第806–813页。施普林格，2025年。[303] Lydia Castronovo、Giuseppe Filippone、Mario Galici、Gianmarco La Rosa 和 Marco Elio Tabacchi。用于本体模糊化的模糊多准则群体决策方法。《电子学》，14(18)：3596，2025年。

[304] Yubo Hu 和 Zhiqiang Pang. 一种基于概率犹豫模糊环境下相关系数的新型多准则群体决策技术及其在孤儿药临床综合评价中的应用. PLOS ONE, 19 0303042, 2024 5( ):e .[305] Mehdi Rajabi Asadabadi. 分层多准则决策方法. Knowledge-Based Systems, 162 123, 2018 115: – .[306] Fatih Ecer 和 Ali Ebadi Torkayesh. 一种用于可持续循环供应商选择的分层模糊决策方法. 《 IEEE 工程管理汇刊》 , 71:1130–1144, 2022 年 .[307] Dalibor Gottwald, Jan Chocholác, Merve Kayacı Çodur, Marjana Cubranić Dobrodolac, 和 Kübra Yazir. 基于Z数的多准则决策方法，用于交通运输领域高等教育机构的人员选拔. Mathematics, 2024年.[308] Mahammadali Nuraddin Nuriyev. 基于Z数的混合多准则决策方法，用于能源资源排序与选择. International Journal of Energy Economics and Policy, 10:22–30, 2020年.[309] Paul Hansen 和 Franz Ombler. 一种利用备选方案两两排序对加性多属性价值模型评分的新方法. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 15(3-4):87–107, 2008年.[310] Jakub Fusiak, Andreas Wolkenstein, 和 Verena S Hoffmann. 评估患者对医学决策的偏好——不同方法的比较. Frontiers in Digital Health, 7:1641765, 2025年.[311] Vasileva Olga, Kiyaev Vladimir, 和 Azarov Artur. 改进海港作业计划质量：采用聚合指标随机化方法. 载于 International Conference on Intelligent Information Technologies for Industry, 第517–522页. 施普林格, 2019年.[312] Yudaeva Maria, Hovanov Nikolai, 和 Kolesov Dmitrii. 基于不精确信息对俄罗斯蓝筹股进行双重随机估计. 载于 International Joint Conference SOCO’14-CISIS’14-ICEUTE’14: Bilbao, 西班牙, 2014年6月25日至27日, 会议论文集, 第155–164页. 施普林格, 2014年.[313] James D McCaffrey. 使用多属性质量全局推断（MAGIQ）技术进行软件测试. 载于 2009 年第六届国际信息技术会议：新一代 , 第 738–742 页 . IEEE, 2009 年 .[314] Yannis Siskos, Evangelos Grigoroudis, 和 Nikolaos F Matsatsinis. UTA方法. 载于《多准则决策分析：前沿综述》, 第315–362页. 施普林格, 2005年.[315] Risto Lahdelma 和 Pekka Salminen. 随机多准则可接受性分析（SMAA）.《多准则决策分析趋势》, 第285–315页, 2010年.[316] Lesley Millar, Loretta Burston, 和 John McCallum. 联合价值层次与国家失禁管理战略中的价值测量. 载于澳大利亚评估学会2008年国际评估会议, 2008年.[317] Hengjie Zhang, Yucheng Dong, 和 Enrique Herrera-Viedma. 针对具有个体关切与满意度的异质大规模群体决策构建共识. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 26(2):884–898, 2017年.[318] Shaojian Qu, Yuanming Li, 和 Ying Ji. 不确定情境下大规模群体决策的混合整数鲁棒最大专家共识模型. Applied Soft Computing, 107:107369, 2021年.[319] Alireza Alinezhad, Javad Khalili, 等.《多属性决策的新方法与应用（MADM）》, 第277卷. 施普林格, 2019年.[320] Edmundas Kazimieras Zavadskas, Zenonas Turskis, 和 Simona Kildienė. 多准则决策/多属性决策方法综述的前沿调查. Technological and Economic Development of Economy, 20(1):165–179, 2014年.[321] Bing Wu, Tsz Leung Yip, Lei Xie, 和 Yang Wang. 一种基于模糊多属性决策的中国繁忙水道海上风电场选址方法.《海洋工程》, 168:121–132, 2018年.[322] Shu-Jen Chen 和 Ching-Lai Hwang.《模糊多属性决策：方法与应用》, 第375卷. Springer Science & Business Media, 2012年.[323] Seyed Mohammadreza Miri Lavasani, Jin Wang, Zaili Yang, 和 Jamie Finlay. 在模糊环境下应用多属性决策, 为海上油井选择最佳屏障. Expert Systems with Applications, 39(3):2466–2478, 2012年.[324] Sha Fu, Ye-zhi Xiao, 和 Hang-jun Zhou. 考虑决策者风险偏好的区间值直觉模糊多属性群体决策方法及其应用.《科学报告》, 12(1):11597, 2022年.[325] Yang Gao, Dong-sheng Li, 和 Hua Zhong. 一种基于直觉模糊多属性决策环境下三支决策的新型目标威胁评估方法.《人工智能工程应用》, 87:103276, 2020年.[326] Hua Zhao, Zeshui Xu, Hai Wang, 和 Shousheng Liu. 基于最小偏差法的犹豫模糊多属性决策. Soft Computing, 21(12):3439–3459, 2017年.[327] Nian Zhang, Yifan Zhou, Jin Liu, 和 Guiwu Wei. 基于后悔理论的毕达哥拉斯犹豫模糊多属性决策VIKOR方法.《人工智能工程应用》, 126:106857, 2023年.[328] Harish Garg, Muhammad Munir, Kifayat Ullah, Tahir Mahmood, 和 Naeem Jan. 基于改进交互聚合算子的T球形模糊多属性决策算法. Symmetry, 10(12):670, 2018年.

[329] HaoLun Wang 和 Wei Zhao. 一种具有组合权重的正则t-球形模糊多属性群体决策模型的新型ARAS-H方法. Computer and Decision Making: An International Journal, 1:280–319, 2024年.[330] Shumaila Javeed, Mubashar Javed, Atif J ameel, 和 Tapan Senapati. 一种基于Hamacher-Muirhead均值算子的图形模糊多属性决策方法. Granular Computing, 9(3):64, 2024年.[331] Juan Juan Peng, Xin Ge Chen, Xiao Kang Wang, Jian Qiang Wang, Qing Qi Long, 和 Lv Jiang Yin. 图形模糊决策理论与方法：系统综述. International Journal of Systems Science, 54(13):2663–2675, 2023年.[332] Surapati Pramanik, Rama Mallick, 和 Anindita Dasgupta. 印度研究人员在中智环境下多属性决策领域的代表性贡献：综述. Infinite Study, 2018年.[333] Kalyan Mondal 和 Surapati Pramanik. 基于灰色关联分析的粗糙中智多属性决策.《中智集与系统》, 7(2015):8–17, 2015年.[334] Shio Gai Quek, Ganeshsree Selvachandran, Florentin Smarandache, J Vimala, Son Hoang Le, Quang-Thinh Bui, 和 Vassilis C Gerogiannis. 多元论集合的熵测度及其在多属性决策中的应用. Mathematics, 8(6):965, 2020年.[335] Payam Shojaei, Amin Nikbakht, Mohammad Mehdi Lalegani, 和 Samira Mashayekhpour. 通过粗糙多属性决策框架确定克服初创企业障碍的关键成功因素优先级：伊朗初创企业案例研究. foresight, 27(5):929–955, 2025年.[336] Partha Pratim Dey, Surapati Pramanik, 和 Bibhas C Giri. 基于灰色关联投影法的中智软集多属性决策.《中智集与系统》, 11(1):13, 2016年.[337] Mohammed M Khalaf. 基于m极模糊软集决策准则确定适用于图像加密的S盒最优备选方案. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 28(1):15, 2020年.[338] Yupeng Li, Meng Liu, Jin Cao, Xiaolin Wang, 和 Na Zhang. 考虑意见动态的多属性群体决策. Expert Systems with Applications, 184:115479, 2021年.[339] Maurice P Asuquo, Jin Wang, Lihong Zhang, 和 Geraint Phylip-Jones. 应用多属性群体决策（MAGDM）模型，为海洋与海上机械作业选择合适的维护策略.《海洋工程》, 179:246–260, 2019年.[340] Azadeh Dabbaghi. 灰色多属性决策方法在技术吸引力评估中的应用：上游产业案例研究. Independent Journal of Management & Production, 11(7):2872–2887, 2020年.[341] Vahid Nourani 和 Hessam Najafi. 一种基于Z数的水环境系统管理多属性决策算法.《神经计算与应用》, 35:6405–6421, 2022年.[342] Isa Masoumi, Saeed Naraghi, F. Rashidi-Nejad, 和 Shiba Masoumi. 应用模糊多属性决策选择并排序采矿后土地利用方案. Environmental Earth Sciences, 72:221–231, 2014年.[343] Junling Zhang, Xiaowen Qi, 和 Changyong Liang. 应对大型基础设施项目绿色承包商选择的复杂性：考虑群体态度特征和属性间相互依赖的犹豫模糊语言多属性决策方法. Complexity, 2018(1):4903572, 2018年.[344] Shuli Liu 和 Xinwang Liu. 一种结合前景理论、基于抽样调查的在线购物问题语言多属性决策方法. Group Decision and Negotiation, 25(4):749–774, 2016年.[345] Emrah Koksalmis 和 Özgür Kabak. 推导群体决策中的决策者权重：客观方法综述. Information Fusion, 49:146–160, 2019年.[346] Diego García-Zamora, Álvaro Labella, Weiping Ding, Rosa M Rodríguez, 和 Luis Martínez. 大规模群体决策：系统综述与批判性分析 . IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 9(6):949–966, 2022 年 .[347] Anna Blom Kemdal 和 Henry Montgomery. 个人决策中的观点与情绪. 载于《决策》, 第86–103页. Routledge, 2002年.[348] Kausik Lakkaraju, Sara E Jones, Sai Krishna Revanth Vuruma, Vishal Pallagani, Bharath C Muppasani, 和 Biplav Srivastava. 用于金融咨询的大语言模型：个人决策中的公平性与效能研究. 载于第四届ACM人工智能金融国际会议论文集, 第100–107页, 2023年.[349] Cengiz Kahraman, Da Ruan, 和 Ibrahim Doan. 用于设施选址的模糊群体决策.《信息科学》, 157:135–153, 2003年.[350] Ying-Ming Wang 和 Taha MS Elhag. 一种用于桥梁风险评估的模糊群体决策方法. Computers & Industrial Engineering, 53(1):137–148, 2007年.[351] Raquel Urena, Francisco Javier Cabrerizo, Juan Antonio Morente-Molinera, 和 Enrique Herrera-Viedma. GDM-R：一种支持模糊群体决策过程的R语言新框架.《信息科学》, 357:161–181, 2016年.[352] Fatih Emre Boran, Serkan Genç, Mustafa Kurt, 和 Diyar Akay. 一种采用TOPSIS方法进行供应商选择的多准则直觉模糊群体决策方法. Expert Systems with Applications, 36(8):11363–11368, 2009年.[353] Zeshui Xu. 一种基于距离测度的区间值直觉模糊群体决策方法.《信息科学》, 180(1):181–190, 2010年.

[354] Dejian Yu、Deng-Feng Li 和 José M Merigó。双重犹豫模糊群体决策方法及其在供应商选择中的应用。《国际机器学习与控制论杂志》，7(5):819–831，2016年。[355] Xuejiao Zhang、Yu Yang、Qian Chen 和 Jing Wang。一种用于可持续人机协作的语言犹豫模糊群体决策方法。《PLOS ONE》，20(10):e0333758，2025年。[356] Jun Ye。基于相似度量的单值中智环境下完全未知权重的多属性群体决策方法。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，27(6):2927–2935，2014年。[357] Amirhossein Nafei、Shu-Chuan Chen、Harish Garg、Chien-Yi Huang、Florentin Smarandache 和 Seyed Mohammad-taghi Azimi。在中智群体决策框架中采用动态指数距离改进工业自动化选择。《运筹学会杂志》，76(12):2474–2493，2025年。[358] Mouhamed Bayane Bouraima、Yanjun Qiu、Ertugrul Ayyildiz 和 Aslihan Yildiz。采用混合球形模糊群体决策方法，对可持续区域交通基础设施策略进行优先级排序。《神经计算与应用》，35(24):17967–17986，2023年。[359] Sarbast Moslem 和 Francesco Pilla。利用基于欧几里得距离的聚合方法应对最后一公里交付挑战：球形模糊群体决策方法。《交通工程》，14:100212，2023年。[360] HU Leigang、LI Wuzhou、ZHANG Jiaqiang 和 GAO Fu。不确定条件下设备维修等级的粗糙群体决策方法。《系统工程与电子技术》，42(12)，2020年。[361] Guodond Cong、Jinlong Zhang、Tao Chen Huazhong 和 Kin-Keung Lai。一种用于IT离岸外包风险评估的变精度模糊粗糙群体决策模型。《全球信息管理杂志》（JGIM），16(2):18–34，2008年。[362] Ajoy Kanti Das 和 Carlos Granados。采用加权平均评价值的模糊软群体决策高级方法。SN Computer Science，2(6):471，2021年。[363] Yong Liu、Jun-liang Du 和 Yu-hong Wang。一种改进的灰色群体决策方法。Applied Soft Computing，76:78–88，2019年。[364] Gao Yan、Chenchen Liu 和 Zhuyan Shao。灰色多属性群体决策影响因素分析。载于《2009年IEEE灰色系统与智能服务国际会议（GSIS 2009）》，第1081–1086页。IEEE，2009年。[365] Assaad E Azzi。多群体决策机构中的群体代表性与程序公正。Social Justice Research，6(2):195–218，1993年。[366] AY Sun、O Osidele、RT Green 和 H Xie。地理空间数据融合与用于地表水质管理的多群体决策支持。载于AGU秋季会议摘要集，第2010卷，第IN21A–1322页，2010年。[367] Meiqin Wu、Sining Ma 和 Jianping Fan。一种基于前景理论和glds方法的球形Z数多属性群体决策模型。《复杂与智能系统》，10:8501–8524，2024年。[368] Abdul Malek Yaakob 和 Alexander E. Gegov。一种基于交互式TOPSIS、使用Z数的群体决策方法。International Journal of Computational Intelligence Systems，9:311–324，2016年。[369] Nor Hanimah Kamis、Francisco Chiclana 和 Jeremy Levesley。一种基于影响驱动反馈系统的偏好相似度网络聚类共识群体决策模型。Information Fusion，52:257–267，2019年。[370] Nor Hanimah Kamis、Francisco Chiclana 和 Jeremy Levesley。一种基于偏好相似度网络结构等价聚类的共识群体决策模型。Applied Soft Computing，67:706–720，2018年。[371] Zhi-ping Lu 和 Cheng-yu Lu。一种基于偏好距离法的多阶段群体决策问题快速聚合模型。载于《2011年管理与服务科学国际会议》，第1–4页。IEEE，2011年。[372] Shenghai Zhou、Jingcheng Yang、Yishan Ding 和 Xuanhua Xu。一种基于区间模糊数的多阶段交互式群体决策方法的马尔可夫链近似。Soft Computing，21(10):2701–2708，2017年。[373] David Boix-Cots、Francesc Pardo-Bosch 和 Pablo Pujadas。基于权重的多准则群体决策方法系统综述：分析与分类方案。Information Fusion，96:16–36，2023年。[374] Shahzaib Ashraf、Tahir Mahmood、Saleem Abdullah 和 Qaisar Khan。图片模糊环境下多准则群体决策问题的不同方法。《巴西数学学会通报（新系列）》，50(2):373–397，2019年。[375] David Ben-Arieh 和 Zhifeng Chen。语言群体决策：意见聚合与共识度量。Fuzzy Optimization and Decision Making，5(4):371–386，2006年。[376] Zhen Zhang 和 Zhuolin Li。基于个性化个体语义的语言群体决策一致性控制与共识达成。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems，52 5635，2021 9 5623( ): – 。[377] Cleotilde Gonzalez、Polina Vanyukov 和 Michael K Martin。利用微观世界研究动态决策。Computers in Human Behavior，21(2):273–286，2005年。[378] Jared M Hotaling、Pegah Fakhari 和 Jerome R Busemeyer。动态决策。《国际社会与行为科学百科全书》，8:708–713，2015年。

[379] Daniel O Aikhuele、Desmond Eseoghene Ighravwe 和 Daniel Akinyele。基于可靠性属性，采用混合模糊动态决策模型评估可再生能源技术。《智能电网与可持续能源技术及经济》，4(1):16，2019年。[380] Rufei Ma、Shousheng Liu、Zeshui Xu、Yan Zhang 和 Yan Ni。兵棋推演的模糊动态路线选择模型与算法研究。《国际机器学习与控制论杂志》，15(7):2863–2880，2024年。[381] Ching-Lai Hwang、Young-Jou Lai 和 Ting-Yun Liu。一种新的多目标决策方法。《计算机与运筹学》，20:889–899，1993年。[382] Minh-Hieu Le 和 Wene Lu。一种综合多目标决策方法，用于探究制药跨国企业的竞争力。Annals of Operations Research，341:401–426，2022年。[383] Tarek H. M. Abou-El-Enien 和 Shereen Fathy El-Feky。模糊多层级多目标决策问题的折中解。《美国计算与应用数学杂志》，8:1–14，2018年。[384] Young-Jou Lai 和 Ching-Lai Hwang。模糊多目标决策。载于《模糊多目标决策：方法与应用》，第139–262页。施普林格，1996年。[385] Pauline M. L. Chan、Yim-Fun Hu 和 Ray E. Sheriff。在异构移动环境中实现模糊多目标决策算法。2002年IEEE无线通信与网络会议论文集。WCNC 2002（目录号02TH8609），1:332–336，第1卷，2002年。[386] Robert C Ford 和 Woodrow D Richardson。伦理决策：实证文献综述。《商业伦理学杂志》，13(3):205–221，1994年。[387] Dennis P Wittmer。伦理决策。载于《行政伦理手册》，第481–507页。Routledge，2019年。[388] Jingguang Tian、Desheng Hu、Xiaohan Shi、Jiajun He、Xingfeng Li、Yuan Gao、Tomoki Toda、Xinkang Xu 和 Xinhui Hu。结合共识决策与标签校正的半监督多模态情绪识别。载于《第一届多模态与负责任情感计算国际研讨会论文集》，2023年。[389] Ulises Charles-Rodriguez、Suha Damag、Lorian Hardcastle、Diane Lorenzetti、Jennifer Markides、Pamela Roach、Ma-linda .S. Smith、Matthew Wildcat 和 Aleem Bharwani。共识决策模型与方法。《国际教育组织与领导力杂志》，2026年。[390] Wei Yang 和 Yifan Lian。一种具有有限折衷阈值的新型语言直觉模糊共识决策方法。Expert Systems with Applications，289:127897，2025年。[391] Wei Yang 和 Luxiang Zhang。社交网络中群体决策问题的多时段直觉模糊共识达成模型。《复杂与智能系统》，10(5):7213–7234，2024年。[392] Navneet Bhushan 和 Kanwal Rai。战略决策。载于《战略决策：应用层次分析法》，第3–10页。施普林格，2007年。[393] Kathleen M Eisenhardt。作为战略决策的策略。《麻省理工斯隆管理评论》，40(3):65，1999年。[394] Konstantin Solodukhin。基于形式化战略地图的模糊战略决策模型。载于“远东会议”国际科学会议（ISCFEC 2018），第596–600页。Atlantis Press，2019年。[395] Zhengyuan Jia、Lihua Gong 和 Jia Han。模糊控制在中小企业战略决策中的应用。载于《2009年测量技术与机电一体化自动化国际会议》，第2卷，第602–605页。IEEE，2009年。[396] Elena Tsiporkova 和 Veselka Boeva。多准则多专家决策环境下的多步备选方案排序。《信息科学》，176(18):2673–2697，2006年。[397] Francisco Herrera 和 Luis Martínez。一种基于语言二元组的模型，用于处理多专家决策中的多粒度层次语言语境。《IEEE 系统、人类与控制论汇刊 B辑（控制论）》，31(2):227–234，2001年。[398] Jiahao Zeng、Min An 和 Andrew Hin Cheong Chan。一种基于多专家判断的模糊推理决策方法，用于建设项目风险分析。载于第二十一届年会论文集。建筑管理研究人员协会（ARCOM），英国伦敦，第841–52页，2005年。[399] Regivan H. N. Santiago、Benjamín René Callejas Bedregal、Gracaliz Pereira Dimuro、Javier Fernández、Humberto Bustince 和 Habib M. Fardoun。抽象齐次函数与一致影响／扰动的多专家决策。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，30:3447–3459，2022年。[400] Attaullah、Shahzaib Ashraf、Noor Rehman、Asghar Khan、Muhammad Naeem 和 Choonkil Park。基于$q$-rung正交对犹豫模糊粗糙聚合信息的改进VIKOR方法：在多专家决策中的应用。《AIMS数学》，2022年。[401] Majid Khan、Muhammad Gulistan、Mumtaz Ali 和 Wathek Chammam。广义中智立方关联算子及其在多专家决策方法中的应用。Symmetry，12(4):496，2020年。[402] Dr V Kamal Nasir 等。一种针对中智模糊指派问题的多专家多准则方法。Neutrosophic Sets and Systems，90(1):54，2025年。

[403] Régis Sabbadin、Hélene Fargier 和 Jérôme Lang。《迈向多阶段决策的定性方法》。International Journal of Approximate Reasoning，19(3-4):441–471，1998。[404] Oksana Mulesa、Vitaliy Snytyuk 和 Ivan Myronyuk。《多阶段决策过程中的最优备选方案选择模型》。EUREKA: Physics and Engineering，6:43–50，2019。[405] Huchang Liao、Zeshui Xu 和 Jiuping Xu。《犹豫模糊多阶段多准则决策方法》。Kybernetes，43(9-10):1447–1468，2014。[406] BRIAN GLUSS。《模糊多阶段决策、模糊状态与终端调节器及其与非模糊二次状态和终端调节器的关系》。International Journal of control，17(1):177–192，1973。[407] Vedna Sharma 和 Surender Singh Samant。《用于心脏相关疾病预测与建议的多层决策框架》。System research and information technologies，2023年。[408] Eva Olivia Leontien Lantsoght、Yuguang Yang 和 Cor van der Veen。《用于准备验证荷载和破坏试验的多层决策策略》。Engineering Structures，2022年。[409] Yizhong Chen、Hongwei Lu、Jing Li、Pengdong Yan 和 He Peng。《结合水足迹分析与共享社会经济路径的跨区域水资源管理多层决策》。Water Resources Management，35:481–503，2021年。[410] Chuanneng Sun、Songjun Huang 和 Dario Pompili。《基于大语言模型的多智能体决策：挑战与未来方向》。IEEE Robotics and Automation Letters，10:5681–5688，2025年。[411] Roxana Radulescu、Patrick Mannion、Diederik M. Roijers 和 Ann Nowé。《多目标多智能体决策：基于效用的分析与综述》。Autonomous Agents and Multi-Agent Systems，34，2019年。[412] Dylan J. Foster、Dean Phillips Foster、Noah Golowich 和 Alexander Rakhlin。《多智能体决策的复杂性：从博弈学习到部分监控》。载于年度计算学习理论会议，2023年。[413] Ana Rosalía Huamán Reyna、Iago Pachêco Gomes、Luis Alberto Rosero、Valdir Grassi Junior 和 Denis Fernando Wolf。《城市自动驾驶多情景决策综述》。IEEE Access，14:2753–2769，2026年。[414] Chang Wan、Wenqiang Li、Si-Eng Ling、Chuanxiao Li 和 Guang Yang。《基于TOPSIS的深孔钻参数优化多情景群体决策》。Arabian Journal for Science and Engineering，47:15779–15795，2022年。[415] Jitesh J. Thakkar。《层次分析法（AHP）》。Multi-Criteria Decision Making，2021年。[416] Eddie W. L. Cheng、Heng Li 和 Danny Chi Kuen Ho。《层次分析法（AHP）》。Measuring Business Excellence，6:33–37，2002年。[417] Klaus D. Goepel。《层次分析法在线软件工具（AHP-OS）的实现》。《国际层次分析法杂志》，2018年。[418] Aulia Ishak、R. Ginting 和 Wang Wanli。《使用模糊层次分析法和TOPSIS评价电子商务服务质量》。IOP会议系列：材料科学与工程，1041，2021年。[419] Chia-Chi Sun。《融合模糊层次分析法与模糊TOPSIS方法的绩效评价模型》。Expert Systems with Applications，37(12):7745–7754，2010年。[420] Mohsen Varmazyar 和 Behrouz Movahhed Nouri。《员工招聘的模糊层次分析法方法》。Decision Science Letters，3:27–36，2014年。[421] Hualing Bi、Yuanyuan Gu、Fuqiang Lu 和 Shamim Mahreen。《基于GIS-模糊层次分析法-MABAC的电动汽车充电站扩建选址》。Journal of Cleaner Production，2025年。[422] Christian Manuel Moreno Rocha、Daina Arenas Buelvas、Itzjak Vega Machado 和 Juan Pacheco Peña。《用于制定哥伦比亚可再生能源选择策略的数据集：从区域潜力出发，评估层次分析法和模糊层次分析法，迈向可持续未来》。Data in Brief，59，2025年。[423] Vinay Kukreja。《运用模糊AHP-TOPSIS方法对教学方案进行优先排序，以解决智力错误问题》。J. Eng. Educ. Transform.，2022年。[424] Subrata Jana、Bibhas Chandra Giri、Anirban Sarkar、Chiranjibe Jana、Željko Stević 和 Marko Radovanović。《模糊层次分析法在金融指数优先级选择中的应用：投资者视角》。ECONOMICS-Innovative and Economics Research Journal，12(1):1–27，2024年。[425] Zeshui Xu 和 Huchang Liao。《直觉模糊层次分析法》。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，22(4):749–761，2013。[426] Rehan Sadiq 和 Solomon Tesfamariam。《利用直觉模糊层次分析法（IF-AHP）进行不确定条件下的环境决策》。Stochastic Environmental Research and Risk Assessment，23(1):75–91，2009年。[427] Esra Ilbahar、Ali Karaşan、Selcuk Cebi 和 Cengiz Kahraman。《一种采用毕达哥拉斯模糊层次分析法与模糊推理系统进行职业健康与安全风险评估的新方法》。Safety science，103:124–136，2018年。[428] Ertugrul Ayyildiz 和 Alev Taskin Gumus。《基于毕达哥拉斯模糊层次分析法的危险品运输风险评估方法：伊斯坦布尔案例》。Environmental Science and Pollution Research，28:35798–35810，2021年。

[429] Basar Öztaysi、Sezi Cevik Onar、Eda Boltürk 和 Cengiz Kahraman。《犹豫模糊层次分析法》。载于2015年IEEE国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE），第1–7页。IEEE，2015年。[430] Canan Acar、Ahmet Beskese 和 Gül Tekin Temur。《使用犹豫模糊层次分析法对不同氢气生产方案进行可持续性分析》。International Journal of Hydrogen Energy，43(39):18059–18076，2018年。[431] Fatma Kutlu Gündoğdu 和 Cengiz Kahraman。《一种新型球形模糊层次分析法及其在可再生能源中的应用：F. Kutlu Gündoğdu，C. Kahraman》。Soft Computing，24(6):4607–4621，2020年。[432] Sarbast Moslem。《一种用于可持续城市交通解决方案的简约球形模糊层次分析法》。人工智能工程应用，128:107447，2024年。[433] Nisa Cizmecioglu、Huseyin Selcuk Kilic、Zeynep Tugce Kalender 和 Gulfem Tuzkaya。《通过区间值中智层次分析法选择最佳软件项目管理模型》。载于智能与模糊系统国际会议，第388–396页。施普林格，2021年。[434] Bayron Pinda Guanolema、Luis German Castro Morales、Dailin Peña Suárez 和 Mario Javier Cabezas Arellano。《利用中智层次分析法和TOPSIS设计社会项目评价模型》。《中智集与系统》，44(1):19，2021年。[435] J Cecilia Yon-Delgado、M Rosario Yon-Delgado、Nazario Aguirre-Baique、Ronald Gamarra-Salinas、Z Elaine Ponce-Bardales 和 G GianinnaYon-Delgado。《用于包容性高等教育项目选择的中智多源层次分析模型》。International Journal of Neutrosophic Science（IJNS），21(1)，2023年。[436] Ariel Romero Fernández、Gustavo Álvarez Gómez、Sary del Rocío Álvarez Hernández、William Roberto Álvarez Arboleda 和 Adonis Ricardo Rosales García。《多元生成环境中的投资项目选择》。Infinite Study，2021年。[437] Mohammadmahdi Abbaspour、Hamed Fazlollahtabar 和 Dragan Stevan Pamucar。《不确定条件下结合大数据的手机选择粗糙层次分析法与神经网络模型》。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，49:1414–1427，2025年。[438] Taylan Terzioglu 和 Gul Polat。《在建筑施工项目中采用粗糙层次分析法-数据包络分析法选择模板系统：案例研究》。《Buildings》，2022年。[439] Muhammad Riaz、Shaista Tanveer、Dragan Stevan Pamucar 和 Dong Qin。《采用球形模糊软层次分析法-逼近理想解排序法进行环境缓解系统的拓扑数据分析》。Mathematics，2022年。[440] Hsiang-Yu Chung、Kuei-Hu Chang 和 Jr-Cian Yao。《在模糊信息环境中运用新型软模糊层次分析法 - 逼近理想解排序法解决环境保护供应商选择问题》。Syst.，11:293，2023年。[441] Ricardo Bañuelas 和 Jiju Antony*。《修正层次分析法：纳入不确定性和管理方面》。《国际生产研究杂志》，42(18):3851–3872，2004年。[442] Hakan Ahmet Nefeslioglu、Ebru Akcapinar Sezer、Candan Gokceoglu 和 Z Ayas。《用于自然灾害评估决策支持系统的修正层次分析法（M-AHP）方法》。计算机与地球科学，59:1–8，2013。[443] N Das Chakladar 和 Samik Chakraborty。《用于非传统加工工艺选择的TOPSIS-AHP组合方法》。机械工程师学会会刊B辑：工程制造期刊，222(12):1613–1623，2008年。[444] Wawan Firgiawan、Nuralamsah Zulkarnaim 和 Sugiarto Cokrowibowo。《采用SAW、TOPSIS、SAW-AHP和TOPSIS-AHP对学费（UKT）进行比较研究》。载于IOP会议系列：材料科学与工程。IOP Publishing，2020年。[445] Ya Qin、Siti Rahayu Mohd Hashim 和 Jumat Sulaiman。《一种用于课堂教学质量评价的区间层次分析法技术》。教育科学，12(11):736，2022年。[446] Tomoe Entani。《面向决策者群体的区间层次分析法》。载于IFSA/EUSFLAT会议，第155–160页，2009年。[447] Ngoc-Ai-Thy Nguyen、Chia-Nan Wang、Le-Thanh-Hieu Dang、Le-Thanh-Tuyen Dang 和 Thanh-Tuan Dang。《基于灰色层次分析法和灰色复杂比例评估框架的冷链物流服务提供商选择：越南案例研究》。Axioms，11(4):154，2022年。[448] Fang Jin、Peide Liu 和 Xin Zhang。《基于灰色层次分析法的知识管理绩效评价研究》。载于第八届ACIS软件工程、人工智能、网络与并行/分布式计算国际会议（SNPD 2007），第3卷，第444–449页。IEEE，2007年。[449] Ebru Altan 和 Zeynep Işık。《精益建造中的数字孪生：中智层次分析法-收益、机会、成本与风险分析方法》。《工程、建筑与建筑管理》，31(12):5029–5056，2024年。[450] Roberto Sarmiento 和 Karla Ximena Vargas-Berrones。《绿色举措实施建模：层次分析法-最佳最差排序法方法》。Cogent工程，5(1):1432120，2018年。[451] Cynthia F Hadley、Bertram Schoner 和 William C Wedley。《在层次分析法中比较锚定与非锚定准则权重的现场实验》。Journal of Multi-Criteria Decision Analysis，6(3):140–149，1997年。

[452] Alessio Ishizaka、Craig Pearman 和 Philippe Nemery。层次分析排序法：一种基于层次分析法的排序问题方法。《国际生产研究杂志》，50(17):4767–4784，2012年。[453] Jana Krejčí 和 Alessio Ishizaka。FAHPsort：层次分析排序法的模糊扩展。《国际信息技术与决策杂志》，17(04):1119–1145，2018年。[454] Eugene Rex Jalao、Teresa Wu 和 Dan Shunk。面向不精确偏好的随机层次分析法决策方法。《信息科学》，270:192–203，2014年。[455] Huiru Zhao 和 Nana Li。使用随机层次分析法和模糊TOPSIS方法评估坚强智能电网的可持续性绩效。《Sustainability》，8(2):129，2016年。[456] Shailendra Kumar、Mohd Suhaib 和 Mohammad Asjad。通过主成分分析-模糊层次分析法-K均值缩小工业4.0实践的障碍。《Journal of Advances in Management Research》，18(2):200–226，2021年。[457] Alessio Ishizaka、Francesco Lolli、Rita Gamberini、Bianca Rimini、Elia Balugani 等。AHP-K-GDSS：一种基于层次分析法的群体决策新排序方法。载于第16届建模与应用仿真国际会议（MAS 2017），于国际多学科建模与仿真系列会议（I3M 2017）举行，页码1–5。CAL-TEK Srl，2017年。[458] William C Wedley。不完全层次分析法矩阵的一致性预测。《Mathematical and Computer Modelling》，17(4-5):151–161，1993年。[459] Bojan Srđević 和 Zorica Srđević。层次分析法中的不完整判断：基于转换的方法、聚合策略及其对决策结果的影响。《算法》，19(1):2，2025年。[460] Niam Yaraghi、Pooya Tabesh、Peiqiu Guan 和 Jun Zhuang。不同不确定性水平下层次分析法与蒙特卡罗层次分析法的比较。《IEEE工程管理汇刊》，62(1):122–132，2014年。[461] Tsuen-Ho Hsu 和 Frank FC Pan。蒙特卡罗层次分析法在牙科质量属性排序中的应用。《Expert Systems with Applications》，36(2):2310–2316，2009年。[462] Zhu Gao、Dan Zhang、Jipeng Mao、Yukun Zhu、Dongliang Yao、Mengfei Lin、Liuyi Pan、Xiaoling Wang 和 Lu Chen。通过综合质量评价优化猕猴桃品种选择：一种平衡生化属性与感官属性的熵权层次分析法方法。《园艺科学》，357:114618，2026年。[463] Guochao Qian、Weiju Dai、Dexu Zou、Haoruo Sun、Hanting Zhang 和 Jian Hao。基于熵权层次分析法的换流变压器风险评估模型。《能源》，18(7):1757，2025年。[464] Gülcin Büyüközkan、Esin Mukul 和 Elif Kongar。通过SWOT分析和集成犹豫模糊语言层次分析法-MABAC方法选择健康旅游战略。《社会经济规划科学》，页码100929，2020年。[465] Gabriela Díaz 和 José Luis Galdón Salvador。基于二元组模糊语言模型和层次分析法的组织数字化成熟度水平测量群体决策模型。《Syst.》，11:341，2023年。[466] Deniz Durdu。使用SPC-LOPCOW-AROMAN混合方法评估财务绩效：以BIST可持续发展指数成分企业为例。《Knowledge and Decision Systems with Applications》，2025年。[467] Yasir Yasin、Muhammad Riaz 和 Kholood Mohammad Alsager。机器学习与爱因斯坦-乔凯积分、LOPCOW及模糊测度的协同作用：用于可持续固体废物管理。《AIMS数学》，2025年。[468] Fatih Ecer、Ilkin Yaran Ögel、Raghunathan Krishankumar 和 Erfan Babaee Tirkolaee。q阶模糊LOPCOW-VIKOR模型：评估无人机在农业食品4.0时代实现精准农业中的作用。《Artificial Intelligence Review》，页码1–34，2023年。[469] Sundararajan Dhruva、Raghunathan Krishankumar、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Kattur Soundarapandian Ravichandran 和 Amir H. Gandomi。为医疗中心选择合适的云服务商：结合费马模糊集、LOPCOW和CoCoSo的个性化决策框架。《Informatica》，35:65–98，2024年。[470] Fatih Ecer、İlkin Yaran Ögel、Raghunathan Krishankumar 和 Erfan Babaee Tirkolaee。q阶模糊LOPCOW-VIKOR模型：评估无人机在农业食品4.0时代实现精准农业中的作用。《Artificial Intelligence Review》，56(11):13373–13406，2023年。[471] Sundararajan Dhruva、Raghunathan Krishankumar、Kattur Soundarapandian Ravichandran、Arturas Kaklauskas、Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Pankaj Gupta。食品来源废物处理方法的选择：使用q阶模糊数据、LOPCOW和COPRAS技术的集成决策模型：S. Dhruva等。《清洁技术与环境政策》，27(10):5069–5093，2025年。[472] Raghunathan Krishankumar、Fatih Ecer、Selçuk Korucuk、Ahmet Aytekin 和 Abhishek Yadav。通过概率犹豫模糊LOPCOW和WISP方法评估零碳措施。《Applied Soft Computing》，页码114216，2025年。[473] Muhammet Deveci、Ilgin Gokasar、Yu Chen、Weizhong Wang、Ali Eren Karaismailoğlu 和 Jurgita Antucheviciene。通过决策支持模型分析发展中国家可持续交通中的绿色能源。《可再生能源》，244:122643，2025年。[474] Vladimir Simic、Svetlana Dabic-Miletic、Erfan Babaee Tirkolaee、Željko Stević、Ali Ala 和 Arash Amirteimoori。用于智能可持续仓库管理系统中基于工业4.0的物料搬运技术优先级排序的中智LOPCOW-ARAS模型。《Applied Soft Computing》，143:110400，2023年。

[475] Adis Puska、Miroslav Nedeljkovic、Dragan Stevan Pamucar、Darko Bozanić 和 Vladimir Simic。在农产品销售渠道案例研究中应用新的简单权重计算（SIWEC）方法。《MethodsX》，13，2024年。[476] Do Duc Trung、Mehmet Özcalici、Nazli Ersoy、Duong Van Duc、Nguyen Chi Bao 和 Nguyen Hoai Son。SIWEC-R：对SIWEC方法的排名敏感改进。《Teknomekanik》，2025年。[477] Andjelka Stilic、Jurica Bosna、Adis Puska 和 Miroslav Nedeljkovic。通过模糊SIWEC-TOPSIS框架考察植物园的旅游价值评估。《动物学与植物园学报》，2025年。[478] Galip Cihan Yalçın、Karahan Kara、Emre Kadir Özekenci、Vladimir Simić 和 Dragan Stevan Pamucar。利用基于球形模糊SIWEC-SPC的决策支持模型，评估经合组织国家融合可持续性与经济多元化的多维贸易绩效。《应用软计算》，185:113934，2025年。[479] Wei Liu 和 Lei Li。群体决策中决策者偏好判断矩阵最优聚合方法研究。《IEEE Access》，7:78803–78816，2019年。[480] Elizabeth E Noble 和 Pedro P Sanchez。关于AHP决策者一致性两两比较判断矩阵信息含量的注记。《理论与决策》，34(2):99–108，1993年。[481] Ruan Aiqing 和 Xu Xiaofeng。灰色判断矩阵群体决策聚合方法研究。载于2009年IEEE灰色系统与智能服务国际会议（GSIS 2009），页码1075–1080。IEEE，2009年。[482] Tan Yuye、Song Weidong、Li Tieyi 和 XIA Hong。基于模糊判断矩阵赋权的采矿方法优化多目标决策。《采矿与安全工程学报》，31(4):551，2014年。[483] Zhang Yao 和 Fan Zhiping。基于不完全语言判断矩阵的多属性决策方法。《Journal of Systems Engineering and Electronics》，19(2):298–303，2008年。[484] Arunodaya Raj Mishra。直觉模糊信息测度及其在乡镇发展评价中的应用。《伊朗模糊系统学报》，13(3):49，2016年。[485] Dejian Yu。乘法犹豫模糊环境下的群体决策。《国际模糊系统杂志》，16(2)，2014年。[486] ying xian chang、shi chao zhang、Xin Liu、dong lan liu、meng qian sun、fu hui zhao 和 hong lei yao。基于概率犹豫模糊多属性决策的电力数据安全风险评估方法。载于2024年第八届高性能编译、计算与通信国际会议论文集，页码65–70，2024年。[487] Lei Fu、Yiling Lei、Ling Zhu、Yuqi Yan 和 Jiufang Lv。将感性工学与犹豫模糊质量功能展开相结合进行红木家具设计。《BioResources》，19(3)，2024年。[488] Xin Wang、Kebin Shi、Quan Shi、Heng Zhang 和 Liqiang Bai。基于直觉模糊集的地下洞室岩爆风险预测。《科学报告》，15(1):21028，2025年。[489] Yingying Deng 和 Chengmeng Sun。结合感知工程与粒子群优化-支持向量机的飞桥游艇评价与设计。《国际电子航行与海事经济学报》，24:72–87，2025年。[490] Mohamed Abdel-Basset、Mai Mohamed、Yongquan Zhou 和 Ibrahim Hezam。基于中智层次分析法的多准则群体决策。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，33(6):4055–4066，2017年。[491] Venkata Prasanna Nagari 和 Vinoth Subbiah。用于决策和印度教师绩效评估的中智AHP框架：年度最佳教师选择案例研究。载于《AIP会议论文集》。AIP Publishing LLC，2026年。[492] Thomas L. Saaty。依赖与反馈下的决策：网络分析法——复杂性的组织与优先级排序。1996年。[493] Javad Seyedmohammadi 和 Mir Naser Navidi。应用基于地理信息系统的模糊推理系统和网络分析法确定农业土地适宜性潜力。《Environmental Monitoring and Assessment》，194，2022年。[494] Peyman Yariyan、Mohammadtaghi Avand、Rahim Ali Abbaspour、Ali Torabi Haghighi、Romulus Costache、Omid Ghorbanzadeh、Saeid Janizadeh 和 Thomas Blaschke。使用改进的网络分析法与统计模型进行洪水易发性制图。《地理信息学、自然灾害与风险》，11:2282–2314，2020年。[495] Ali Bouamrane、Oussama Derdous、Hamza Bouchahed、Asma Bouamrane、Noura Dahri 和 Habib Abida。使用蒙特卡洛和模糊ANP集成方法改进洪水易发性评估：以阿尔及利亚贝贾亚市为例。《水文科学杂志》，70:2016–2027，2025年。[496] Z Ayağ 和 RG Özdemir。通过模糊ANP实现ERP软件选择的智能方法。《国际生产研究杂志》，45(10):2169–2194，2007年。[497] Chayma Farchi、Fadwa Farchi、Badr Touzi 和 Ahmed Mousrij。利用人工神经网络与模糊网络分析法对摩洛哥采矿业进行全面的可持续绩效评估。《工程会议论文集》，112(1):82，2026年。

[498] Hoang Phuong Nguyen、Nguyen Dang Khoa Pham 和 Duc Chuan Nguyen。模糊层次分析法的实施：一项多专家分析。载于《第五届计算与通信网络国际会议论文集：ICCCN 2025》，第10卷，第10卷，第242页。Springer Nature，2026年。[499] Huchang Liao、Xiaomei Mi、Zeshui Xu、Jiuping Xu 和 Francisco Herrera。直觉模糊网络分析法。《IEEE Transactions on Fuzzy Systems》，26(5):2578–2590，2018年。[500] Sara Saeedi、Mohammadreza Malek、Mahmoodreza Delavar 和 Amin Tayybi。用于不确定环境下空间多准则决策的直觉模糊网络分析法（if-anp）。Integr Gen Fig Work Week，第14–19页，2008年。[501] Zhenxing Peng、Lina He、Yushi Xie、Wenyan Song、Jue Liu、Xinguo Ming 和 Mark Goh。一种毕达哥拉斯模糊 ANP-QFD-灰色关联分析方法，用于确定可持续供应链设计需求的优先级。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，42(4):3893–3907，2022年。[502] Tutku Tuncalı Yaman。毕达哥拉斯模糊网络分析法（ANP）及其在仓库选址问题中的应用。载于《2020年第15届计算机科学与信息系统会议（FedCSIS）》，第137–140页。IEEE，2020年。[503] Funda Samanlioglu 和 Zeki Ayağ。基于犹豫模糊 ANP-PROMETHEE II 的概念选择。《Journal of Industrial and Production Engineering》，38(7):547–560，2021年。[504] An Zhang、Minghao Li 和 Wenhao Bi。多无人机编队形状的确定：采用需求满足度和基于球形模糊ANP的TOPSIS方法。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，46(1):149–166，2024年。[505] Abdullah Kargın。广义集值中智五元数上的 ANP 方法。Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi，8(4):1544–1571，2025年。[506] Amany A Slamaa、Haitham A El-Ghareeb 和 Ahmed Aboelfetouh Saleh。通过中智ANP进行迁移系统架构决策的路线图，以及企业资源规划系统的基准。《IEEE Access》，9 48604，2021年 48583: – 。[507] Gholamreza Dehdasht、Rosli Mohamad Zin、M Salim Ferwati、Mu’azu Mohammed Abdullahi、Ali Keyvanfar 和 Ronald McCaffer。油气建设项目中的DEMATEL-ANP风险评估。《Sustainability》，9(8):1420，2017年。[508] Gülçin Büyüközkan 和 Sezin Güleryüz。一种用于土耳其可再生能源资源选择的集成DEMATEL-ANP方法。《国际生产经济学杂志》，182:435–448，2016年。[509] Abdulla Abdulaziz Al Subaie、Mohd Nishat Faisal、Belaid Aouni 和 Lamay Bin Sabir。ISO 21500与可持续性导向的ANP-BOCR框架在大型项目分包商选择中的应用。《Project Management Journal》，54 490，2023年 5 474( ): – 。[510] Mohamed Abdel-Basset、Mai Mohamed 和 Florentin Smarandache。一种用于供应商选择问题的混合中智群ANP-TOPSIS框架。《Symmetry》，10(6):226，2018年。[511] Madjid Tavana、Faramak Zandi 和 Michael N Katehakis。一种基于模糊群ANP–TOPSIS的混合框架，用于从CIRM视角评估电子政务准备度。《Information & Management》，50(7):383–397，2013。[512] K Shahroudi 和 H Rouydel。采用多准则决策方法（ANP-TOPSIS）评估伊朗汽车行业的供应商。《International Journal of Applied Operational Research》，2(2)，2012年。[513] Lianhui Li 和 Hongguang Wang。一种基于粗糙分析网络过程和证据理论的制造企业绿色供应商评估方法。《信息》，9(7):162，2018年。[514] Xuerui Li、Suihuai Yu 和 Jianjie Chu。云制造中制造服务的最优选择：一种基于粗糙分析网络过程和粗糙 TOPSIS 的新型混合多准则决策方法。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，34 4056，2018年 6 4041( ): – 。[515] Saad Ahmed Javed 和 Junliang Du。什么是序数优先法？《Management Science and Business Decisions》，3(1):12–26，2023年。[516] Amin Mahmoudi 和 Saad Ahmed Javed。通过区间序数优先法分析群体决策中的不确定性。《Group Decision and Negotiation》，32(4):807–833，2023年。[517] Amin Mahmoudi、Saad Ahmed Javed 和 Abbas Mardani。通过模糊序数优先法进行绿色韧性供应商选择：后新冠时代的决策。《Operations Management Research》，15(1):208–232，2022年。[518] Priyanka Majumder 和 Valerio Antonio Pamplona Salomon。结合灰色关联分析的直觉模糊序数优先法。《Mathematics》，12(19):3156，2024年。[519] Vijay Lahri、Nitesh Kumar Singh 和 Naveen Virmani。运用模糊序数优先法确定电动汽车领域可持续电池供应商选择准则的优先级。《国际工业工程与运营管理期刊》，8(1):66–88，2026年。[520] Mohamed Abdel-Basset、Mai Mohamed、Ahmed Abdel-Monem 和 Mohamed Abd Elfattah。面向多属性决策问题的序数优先法新扩展：设计与分析。《复杂与智能系统》，8(6):4955–4970，2022年。

[521] Nabil M AbdelAziz、Khalid A Eldrandaly、Safa Al-Saeed、Abduallah Gamal 和 Mohamed Abdel-Basset。基于地理信息系统和物联网技术的多准则决策方法在灾害风险管理中的应用：方法与案例研究。《决策：管理与工程应用》，7(1):1–36，2024年。[522] Linlin Xie、Ziyi Yu 和 Xianbo Zhao。大型城市综合体项目施工安全风险评估：一种区间序数优先法。《工程、建筑与建筑管理》，2025年。[523] Cliford Septian Candra。通过灰色序优先法评估印度尼西亚电动汽车普及的障碍。《International Journal of Grey Systems》，2(1):38–56，2022年。[524] Mahsa Sadeghi、Amin Mahmoudi、Xiaopeng Deng 和 Leila Moslemi Naeni。面向活力型建筑生态系统的企业区块链解决方案：灰色序优先法。《Grey Systems: Theory and Application》，14(1):115–143，2024年。[525] Jun-Liang Du、Si-Feng Liu、Saad Ahmed Javed、Mark Goh 和 Zhen-Song Chen。通过集成粗糙集与序数优先法提升质量功能展开：电动汽车制造案例研究。《IEEE工程管理汇刊》，71:7541–7552，2023年。[526] Sadik Kucuksari、Dragan Pamucar、Muhammet Deveci、Nuh Erdogan 和 Dursun Delen。一种用于电动汽车购买的新型粗糙序数优先决策支持系统。《信息科学》，647:119443，2023年。[527] Stefan Popović、Dejan Viduka、Ana Bavić、Violeta Dimić、Dejan Djukic、Vojkan R. Nikolić 和 Aleksandar Stokić。人工智能算法选择的优化：PIPRECIA-S模型与多准则分析。《电子学》，2025年。[528] Setiawansyah Setiawansyah、Sanriomi Sintaro、Very Hendra Saputra 和 Ahmad Ari Aldino。结合灰色关联分析（GRA）与简化枢轴成对相对准则重要性评估（PIPRECIA-S）确定最佳员工。《Bulletin of Informatics and Data Science》，2024年。[529] Ayse Kübra Kanmaz 和 Irfan Ertugrul。模糊 PIPRECIA 与 CRADIS 集成方法在电动汽车选择中的应用。《Pamukkale Journal of Eurasian Socioeconomic Studies》，2024年。[530] R Rajalakshmi 和 K Mary。陆上风力发电机型号选择过程的比较分析与敏感性分析。《Palestine Journal of Mathematics》，14(3)，2025年。[531] Hakan Turan。通过费马模糊 PIPRECIA 方法评估新乡5.0模型的重要性权重。《International Journal of Lean Six Sigma》，第1–61页，2026年。[532] Selçuk Korucuk 和 Ahmet Aytekin。采用图片模糊 PIPRECIA 方法确定生产计划软件选择准则的优先级：奥尔杜省案例。《Journal of process management and new technologies》，13 106，2025年 3 4 97( - ): – 。[533] Merve Güler 和 Esin Mukul。一种用于评估数字营销渠道的犹豫模糊多属性决策方法。载于《2025年第17届先进计算智能国际会议（ICACI）》，第219–224页。IEEE，2025年。[534] S Sudha 和 Nivetha Martin。在物流选择准则排序中比较多重生成中智PIPRECIA与中智层次分析法。载于《第二届应用与计算数学最新趋势国际会议：ICRTACM-2021》。AIP Publishing LLC，2023年。[535] Akbar Esfahanipour 和 Benyamin Yektaparast。智能合约风险评估：一种中智多准则方法。载于《科学与技术中的现代超软计算趋势》，第399–436页。IGI Global Scientific Publishing，2025年。[536] Vuk Mirčetić、Gabrijela Popović 和 Svetlana Vukotić。运用PIPRECIA-S方法揭示欧盟魅力型领导者的特征。《Journal of process management and new technologies》，12:99–109，2024年。[537] Maja Stanujkić、Vuk Mirčetić、Dragiša Stanujkić、Darjan Karabašević、Gabrijela Popović、Muzafer Saračević 和 Pavle Brzaković。一种基于PIPRECIA-S、CRITIC和WISP方法的采矿业人员选拔新型混合多准则决策模型。《Acta Montanistica Slovaca》，2025年。[538] Alptekin Ulutaş、Gabrijela Popovic、Dragisa Stanujkic、Darjan Karabasevic、Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Zenonas Turskis。一种基于新型灰色 PIPRECIA 和灰色OCRA方法的人员选拔新型混合多准则决策模型。《Mathematics》，8(10):1698，2020年。[539] S Madhavi、Ramalingam Praveen、N Jagadish Kumar 和 SM Udhaya Sankar。一种基于灰色 PIPRECIA 和灰色OCRA方法的动态多准则决策模型，用于缓解无线传感器网络中的非合作节点攻击。《Peer-to-Peer Networking and Applications》，16(5):2607–2629，2023年。[540] M Radović、Ž Stević、D Mijić、A Govedarica-Lučić、R Bodiroga 和 G Vico。采用区间模糊粗糙PIPRECIA方法评估水果生产准则。《Journal of Operational and Strategic Analytics》，2(4):266–274，2024年。[541] Alhamzah Alnoor、Yousif Raad Muhsen、Nor Azura Husin、XinYing Chew、Maslina Binti Zolkepli 和 Noridayu Manshor。融合Z云粗糙模糊PIPRECIA与CoCoSo，评估农业决策支持工具。《国际模糊系统杂志》，27(1):190–203，2025年。[542] Jawad Ali、Muhammad I. Syam 和 Ahmad N. Al-kenani。结合复杂犹豫模糊划分麦克劳林对称平均聚合算子与SWARA方法的决策算法。《科学报告》，15，2025年。

[543] Pratibha Rani 和 Arunodaya Raj Mishra。基于单值中智 SWARA-TOPSIS 的群体决策：可再生能源系统优先级排序。《Computer and Decision Making: An International Journal》，2025年。[544] Sabahudin Vrtagić、Edis Softić、Marko Subotić、Željko Stević、Milan Dordevic 和 Mirza Ponjavic。基于多准则决策模型的道路路段排序：一种改进的模糊 SWARA（IMF SWARA）。《Axioms》，10(2):92，2021年。[545] Sepideh Basirat、Sadaf Raoufi、Danial Bazmandeh、Sayeh Khamoushi 和 Mahmoudreza Entezami。使用模糊 SWARA 方法对健康旅游中的人工智能相关准则进行排序。《Computer and Decision Making: An International Journal》，2:530–545，2025年。[546] Ömer Faruk Görçün、Ahmet Aytekin、Selçuk Korucuk 和 Erfan Babaee Tirkolaee。评估可持续能源发电系统的可再生能源：区间值 q-阶正交对模糊 SWARA-TOPSIS。《Expert Systems with Applications》，第129735页，2025年。[547] Lei Hu、Qianyi Yu、Chiranjibe Jana、Vladimir Simic 和 Bandar Bin-Mohsin。用于体育赛事管理的直觉模糊 SWARA-AROMAN 决策框架。《IEEE Access》，12:57711–57726，2024年。[548] Salih Bakkal 和 Özlem Arslan。一种区间值直觉模糊 SWARA 方法。载于《智能与模糊系统：以人为本、韧性与可持续产业中的人工智能》，INFUS 2025会议论文集，第2卷，第2卷，第317页。Springer Nature，2025年。[549] Pratibha Rani、Arunodaya Raj Mishra、Abbas Mardani、Fausto Cavallaro、Dalia Štreimikienė 和 Syed Abdul Rehman Khan。用于太阳能电池板选择绩效评估的毕达哥拉斯模糊 SWARA–VIKOR 框架。《Sustainability》，12(10):4278，2020年。[550] Huai-Wei Lo、Ling-Yu Wang、Adam Kao-Wen Weng 和 Sheng-Wei Lin。使用改进的毕达哥拉斯模糊 SWARA–TOPSIS 方法评估供应商中断风险。《Journal of Soft Computing and Decision Analytics》，2 187，2024 1 169( ): –。[551] S Korucuk 和 A Aytekin。使用区间值费马模糊 SWARA 评估伊斯坦布尔企业的物流灵活性。《J. Intell. Manag. Decis》，2(4):192–201，2023年。[552] I Badi、MB Bouraima、Q Su、YJ Qiu 和 QP Wang。使用费马模糊 SWARA 方法对发展中国家的减贫战略进行优先级排序。《Opport. Chall. Sustain》，4(1):33–40，2025年。[553] Pratibha Rani、Arunodaya Raj Mishra、Raghunathan Krishankumar、Abbas Mardani、Fausto Cavallaro、Kattur Soundarapandian Ravichandran 和 Karthikeyan Balasubramanian。用于可持续供应商选择的犹豫模糊 SWARA-复比例评估方法（HF-SWARA-COPRAS）。《Symmetry》，12(7):1152，2020年。[554] Pooja Khanna、Pragya、Ritika Gauba 和 Sachin Kumar。教育4.0：用于研究机会智能选择的犹豫模糊 SWARA 评估方法。载于《第三届计算、通信与网络安全国际会议论文集：IC4S 2021》，第895–908页。施普林格，2022年。[555] Hilal Singer 和 Şükrü Özşahin。采用球形模糊 SWARA 方法识别并确定影响热解过程的因素优先级。《Biomass and Bioenergy》，202:108213，2025年。[556] Mehmet Ali Taş、Esra Çakır 和 Ziya Ulukan。用于绿色供应商选择的球形模糊 SWARA-MARCOS 方法。《3C Tecnologia》，第115–133页，2021年。[557] Ahmet Aytekin、Hilal Öztürk Küçük、Makbule Aytekin、Vladimir Simic 和 Dragan Pamucar。使用中智 SWARA-CRADIS 方法评估矿物油公司的国际市场进入策略。《Applied Soft Computing》，174:112976，2025年。[558] Pratibha Rani 和 Arunodaya Raj Mishra。基于单值中智 SWARA-TOPSIS 的群体决策：可再生能源系统优先级排序。《Computer and Decision Making: An International Journal》，2:425–439，2025年。[559] Alptekin Ulutaş、Ieva Meidute-Kavaliauskiene、Ayse Topal 和 Ezgi Demir。采用多元生成 SWARA 方法评估基于协作和非基于协作的物流风险。《Logistics》，5(4):82，2021年。[560] 多元生成 SWARA-TOPSIS。采用不同归一化技术的食品加工方法决策。《Advances in Decision Making》，第69页，2022年。[561] Elya Rosiana、Annisa Kesy Garside 和 Ikhlasul Amallynda。将粗糙 SWARA 与 COPRAS 相结合，用于第三方物流服务提供商的绩效评估。《Jurnal Teknik Industri》，22(1):31–42，2021年。[562] Harish Garg、J Vimala、S Rajareega、D Preethi 和 Luis Perez-Dominguez。复直觉模糊软 SWARA-COPRAS 方法：ERP软件选择应用。《AIMS Math》，7(4):5895–5909，2022年。[563] Sanjucta Saha Sithi、Mst Anjuman Ara、Ahnaf Tahmid Dhrubo、Abid Hasan Rony 和 Md Abdus Shabur。采用三重底线和 SWARA-TOPSIS 方法选择纺织业的可持续供应商。《Discover Sustainability》，6(1):344，2025年。[564] Serap Akcan 和 Mehmet Ali Taş。采用 SWARA-TOPSIS 集成方法评估绿色供应商，以降低生态风险因素。《Environmental Monitoring and Assessment》，191(12):736，2019年。[565] Tuğba Eyceyurt Batir 和 Adem Babacan。新冠肺炎时期伊斯兰银行资产规模与绩效之间的关系：采用 SWARA-AHP-COPRAS 方法的应用。《Journal of Central Banking Theory and Practice》，14(2):195–224，2025年。

[566] TUĞBA EYCEYURT BATIR 和 ADEM BABACAN。伊斯兰银行资产规模与绩效之间的关系：新冠肺炎时期 SWARA-AHP-COPRAS 方法的应用。《Journal of Central Banking Theory and Practice》，14(2)，2025年。[567] Qingpeng Cao、Moses Olabhele Esangbedo、Sijun Bai 和 Caroline Olufunke Esangbedo。用于承包商选择多准则决策问题的灰色 SWARA-FUCOM 权重法：浮式太阳能电力系统安装案例研究。《能源》，12(13):2481，2019年。[568] Salim Kurnaz。军用直升机飞行员选拔标准的评估方法：一种新型灰色 SWARA 方法。《维尔纽斯格迪米纳斯技术大学航空期刊》，2023年。[569] Zunaira Rasool、Shahid Hussain Gurmani、Shafiullah Niazai、Rana Muhammad Zulqarnain、Tmader Alballa 和 Hamid en Abd El-Wahed Khalifa。采用语言型 T 球形模糊 Hamacher 聚合算子的集成 CRITIC-EDAS 模型及其在群体决策中的应用。《科学报告》，15，2025年。[570] Jiayi Guan、Guang Chen、Jin Huang、Zhijun Li、Lu Xiong、Jing Hou 和 Alois Knoll。用于高速公路自动驾驶的离散软演员-评论家决策策略及样本过滤器。《IEEE车辆技术汇刊》，72:2593–2598，2023年。[571] Sumera Naz、Aqsa Tasawar、Areej Fatima、Shariq Aziz Butt 和 Zhoe Comas Gonzalez。一种高效的二元组语言型立方 q-阶正交对模糊 CILOS-TOPSIS 方法：巴基斯坦流域管理水文地理区域评估：S. Naz 等。《超级计算杂志》，81(1):103，2025年。[572] Kevser Arman、Nilsen Kundakcı 和 Ali Katrancı。使用 IDOCRIW 和 CRADIS 方法评估欧盟成员国和候选国的数字创新绩效。《Spectrum of Decision Making and Applications》，2025年。[573] Jingya Wang、Jiusi Wen、Vukasin Pajić 和 Milan Andrejić。优化越库配送中心选址：基于 CI-DEA–IDOCRIW–MABAC 的多步骤方法，以提高供应链效率——案例研究。《Mathematics》，2024年。[574] Thirumalai Nallasivan Parthasarathy、Samayan Narayanamoorthy、Chakkarapani Sumathi Thilagasree、Palanivel Ruba-vathi Marimuthu、Soheil Salahshour、Massimiliano Ferrara 和 Ali Ahmadian。一种改进的模糊 IDOCRIW-CoCoSo 多属性决策算法，用于确定电动汽车电池回收方法。《工程成果》，2024年。[575] Ulinnuha Nashirudin、Rudy Hartanto 和 Silmi Fauziati。使用模糊 BWM 决策框架评估智慧城市。2025 4 502，2025 497第电子表示与算法国际会议（ICERA），第 – 页。[576] Reza Saadatzadeh、Hossein Dehghani Poodeh 和 Peyman Hajizade。基于集成德尔菲-模糊与 BWM 决策方法，识别并评估影响商用炸药行业新产品商业化的因素。《管理战略与工程科学》，2024年。[577] Maghsoud Amiri、Mohammad Hashemi-Tabatabaei、Mohammad Ghahremanloo、Mehdi Keshavarz-Ghorabaee、Ed-mundas Kazimieras Zavadskas 和 Audrius Banaitis。一种用于评估和选择供应链管理中可持续供应商的新型模糊 BWM 方法。《国际可持续发展与世界生态学杂志》，28(2):125–142，2021年。[578] Yunyu Li、Jingwen Deng、Yongsheng Wang、Hao Liu、Longfan Peng、Hepeng Zhang、Yabin Liang 和 Qian Feng。基于模糊 BWM 和模糊综合评价的桥梁状况评估。《应用科学》，15 2904，2025 6( ): 。[579] Shahbaz Khan、Abid Haleem 和 Mohd Imran Khan。使用模糊 BWM 方法评估清真供应链管理中的风险。载于《供应链论坛：国际期刊》，第57–73页。泰勒与弗朗西斯，2021年。[580] Weifeng Liu、Yingxue Du 和 Juan Chang。一种用于推导准则权重向量的新型直觉模糊最佳-最差法及其应用。《Artificial Intelligence Review》，56(10):11071–11093，2023年。[581] Priyanka Majumder、Dayarnab Baidya 和 Mrinmoy Majumder。应用新型直觉模糊 BWAHP 过程分析水处理厂的效率。《神经计算与应用》，33(24):17389–17405，2021年。[582] Ubaid ur Rehman。清洁能源技术的评估与评价：一种用于可持续解决方案的双极模糊 BWM-EDAS 方法。《可再生能源》，2025年。[583] Ruchan Deniz 和 Nezir Aydin。采用混合球形模糊 BWM 与 MULTIMOORA 框架，实现可持续智慧电动公交车充电站部署。《神经计算与应用》，36(25):15685–15703，2024年。[584] Mehmet Bozkurt、Serhat Saylam、Rabia Saylam 和 Fatma Kutlu Gündoğdu。使用球形模糊 Z 数最佳-最差决策法评估指挥与控制周期中人工智能辅助所涉及的风险。载于《智能与模糊系统国际会议》，第771–780页。施普林格，2025年。[585] Shurong Zhao、Mohammed Gadafi Tamimu、Ailing Luo、Tiantian Sun 和 Yongxing Yang。面向中国—西非数字贸易电子商务供应链合作的犹豫模糊 BWM 风险评估框架。《理论与应用电子商务研究杂志》，20(3):233，2025年。[586] Asif Ali 和 Tabasam Rashid。犹豫模糊最佳-最差多准则决策法及其应用。《国际智能系统杂志》，34(8):1953–1967，2019年。

[587] Suizhi Luo 和 Weizhang Liang。采用未知权重信息的混合 TODIM 方法评估清洁生产绩效。《计算与应用数学》，40：1–28，2021年。[588] Surapati Pramanik、Suman Das、Rakhal Das 和 Binod Chandra Tripathy。单值中智集环境下的中智最佳-最差法-TOPSIS策略。《中智集与系统》，第56卷/2023年：《信息科学与工程》国际期刊，第177页，2024年。[589] Noor Azzah Awang 和 Nur Marfuzah Fazil。中智最佳-最差法：评估在线学习平台的有效方法，适用于新冠肺炎时期。载于《AIP会议论文集》。AIP Publishing LLC，2024年。[590] Muhammad Edmerdash、Ehab Rushdy 等。根据中智最佳-最差法、MABAC 和 PROMETHEE II 方法进行药品选择（DPS）的高效框架。《中智集与系统》，45(1)：19，2021年。[591] Muhammet Gul 和 Melih Yucesan。基于集成贝叶斯BWM-TOPSIS模型对土耳其大学进行绩效评估。《社会经济规划科学》，80：101173，2022年。[592] Tai-Wu Chang、Huai-Wei Lo、Kai-Ying Chen 和 James JH Liou。基于粗糙 BWM 和粗糙 TOPSIS-AL 的新型失效模式与影响分析模型，用于风险评估。《Mathematics》，7(10)：874，2019年。[593] Željko Stević、Dragan Pamučar、Marko Subotić、Jurgita Antuchevičiene 和 Edmundas Kazimieras Zavadskas。基于一种新型粗糙 HAMY 聚合算子的粗糙 BWM-粗糙 WASPAS 方法，用于环岛建设选址。《Sustainability》，10(8)：2817，2018年。[594] Peipei You、Sen Guo、Haoran Zhao 和 Huiru Zhao。采用混合 BWM-TOPSIS 方法评估电网企业的运营绩效。《Sustainability》，9(12)：2329，2017年。[595] Omer A Bafail 和 Reda MS Abdulaal。BWM-TOPSIS 方法与层次分析法-TOPSIS 方法的比较：在固体废物管理中的应用。载于《2022年第三届工业工程与工业管理国际会议》，第27–33页，2022年。[596] Thuy-Duong Nguyen、Chia-Nan Wang 和 Van-Quang Phan。采用模糊Z数最佳-最差法评估越南珠宝零售商的数字化转型因素。《2024年物流与工业工程国际会议（ICLIE）》，第1–5页，2024年。[597] Mona Jami Pour、Mahnaz Hosseinzadeh 和 Khadije Rafiei。采用区间最佳-最差法（BWM）识别并排列物联网在教育学习中的应用优先级。《2020年第4届智慧城市、物联网与应用国际会议（SCIOT）》，第1–6页，2020年。[598] Yun Du 和 Xiaoya Zhan。用于新能源汽车充电基础设施建设投资决策的集成稳健 BWM 和 EXPTODIM 方法。《应用软计算》，186：114266，2026年。[599] Fuqi Liang、Matteo Brunelli、Kevin Septian 和 Jafar Rezaei。基于信念的最佳-最差法。《国际信息技术与决策杂志》，20(01)：287–320，2021年。[600] Mahdi Bitarafan、Kambod Amini Hosseini 和 Sarfaraz Hashemkhani Zolfani。采用集成灰色 BWM-灰色 MARCOS 方法识别并评估城市面临的人为威胁。《决策：管理与工程应用》，6(2)：581–599，2023年。[601] Xinlong Li、Yan Ran、Hui Yu、Yifan Chen 和 Genbao Zhang。基于灰色 BWM 的元动作单元维护决策。载于《IOP会议系列：材料科学与工程》。IOP Publishing，2021年。[602] Anath Rau Krishnan、Maznah Mat Kasim、Rizal Hamid 和 Mohd Fahmi Ghazali。改进 CRITIC 法，用于估算决策准则的客观权重。《Symmetry》，13(6)：973，2021年。[603] Qiang Zhang、Jiahui Fan 和 Chaobang Gao。CRITID：通过先进的独立性检验增强 CRITIC，以实现稳健多准则决策。《科学报告》，14(1)：25094，2024年。[604] Ashish Soni、Sonu Kumar Gupta、Sethupathi Bose 和 Jitendra Kumar Katiyar。结构应用中生物复合材料的最佳材料选择：集成模糊CRITIC-COPRAS方法。《科学报告》，15，2025年。[605] Fatih Sahin 和 Akin Menekse。采用区间值球形模糊 CRITIC EDAS 进行内部控制风险评估。《科学报告》，15，2025年。[606] İbrahim Miraç Eligüzel 和 Nazmiye Eligüzel。用于智慧城市排名的 LDA 与模糊CRITIC-MABAC混合模型。IEEE Access，2025年。[607] Özge Nalan Bilişik、Nurşah Hafize Duman 和 Esra Taş。一种新型区间值直觉模糊CRITIC-TOPSIS方法：玻璃生产企业交通方式选择问题的应用。Expert Systems with Applications，235：121134，2024年。[608] Nurşah Alkan 和 Cengiz Kahraman。连续直觉模糊 CRITIC 与 WASPAS：智慧城市评价。载于《智能与模糊系统国际会议》，第725–734页。施普林格，2024年。[609] Adnan Veysel Ertemel、Akin Menekse 和 Hatice Camgoz Akdag。采用毕达哥拉斯模糊CRITIC-TOPSIS评估智能手机成瘾。《Sustainability》，15(5)：3955，2023年。[610] Mohd Anjum、Vladimir Simic、Hong Min 和 Naoufel Kraiem。采用毕达哥拉斯模糊CRITIC-AROMAN方法，推动智能交通系统中的元宇宙集成转型路径。IEEE Access，12 119404，2024 119383：–。

[611] Arunodaya Raj Mishra、Pratibha Rani 和 Kiran Pandey。采用改进的广义评分函数，通过费马特模糊CRITIC-EDAS方法选择可持续第三方逆向物流服务商。Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing，13(1)：295–311，2022年。[612] Wenyi Wang、Yushuo Cao、Yu Chen、Chen Liu、Xiao Han、Bo Zhou 和 Weizhong Wang。采用混合区间值费马特模糊CRITIC-ARAS模型评估食品供应链金融中的人工智能应用障碍。《科学报告》，14(1)：27834，2024年。[613] Elif Haktanır 和 Cengiz Kahraman。一种新型图形模糊CRITIC与REGIME方法：可穿戴健康技术应用。《人工智能工程应用》，113：104942，2022年。[614] Ömer Faruk Görçün 和 Ismail İyigün。评估低平板挂车在超大超重货物运输中的选择：混合图像模糊CRITIC-MARCOS模型。Journal of Soft Computing and Decision Analytics，3(1)：72–91，2025年。[615] Cengiz Kahraman、Sezi Cevik Onar 和 Başar Öztayşi。一种新型球形模糊 CRITIC 方法及其在供应商选择标准优先级排序中的应用。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，42(1)：29–36，2021年。[616] J Anafi、AA Khan 和 K Dong。采用 T-球形模糊 CRITIC-MAUT方法改进医疗废物管理。Journal of Green Economy and Low-Carbon Development，2(3)：137–152，2023年。[617] Mohd Anjum、Vladimir Simic、Melfi A Alrasheedi 和 Sana Shahab。用于评估协作式智能交通系统情景的 T-球形模糊CRITIC-WASPAS模型。IEEE Access，12：61137–61151，2024年。[618] Tripti Basuri、Kamal Hossain Gazi、Prodip Bhaduri、Srabani Guria Das 和 Sankar Prasad Mondal。基于决策分析的可持续选址问题——中智CRITIC-COPRAS评估模型。《Management Science Advances》，2(1)：19–58，2025年。[619] Ahmed Sleem、Nehal Mostafa 和 Ibrahim Elhenawy。用于对虚拟现实元宇宙中产品目标人群的客户因素与需求进行排序的中智CRITIC多准则决策方法。《Neutrosophic Systems with Applications》，2：55–65，2023年。[620] Huda E Khalid、Ibrahim Bahjat Ibrahim、AA Salama、Ahmed K Essa、Maher Noorlden Saaed 和 Muhammad Mustaffa Hussein。用于假肢康复的中智CRITIC多准则决策方法及其应用与技术。《中智集与系统》，82(1)：49，2025年。[621] S Sudha、Nivetha Martin 和 Said Broumi。可行性畜饲料的多元生成CRITIC-MAIRCA排序。《国际中智科学杂志》（IJNS），18(4)，2022年。[622] Selçuk Korucuk、Ezgi Demir、Çağlar Karamaşa 和 Zeljko Stevic。采用多元生成-CRITIC方法确定物流行业的创新能力维度：萨卡里亚省的应用。《International Review》，2020年。[623] Tianxiong Wang、Long Liu、Liu Yang 和 Yuqi Han。基于毕达哥拉斯模糊粗糙 CRITIC 与 TCN-Transformer-LSTM方法的 AR-HUD交互界面感性工学设计。Expert Systems with Applications，2026年。[624] Anath Rau Krishnan、Maznah Mat Kasim、Rizal Hamid 和 Mohd Fahmi Ghazali。改进 CRITIC 法，用于估算决策准则的客观权重。《Symmetry》，13：973，2021年。[625] Malisa R. Žizović、Boza D. Miljković 和 Dragan Marinković。确定准则权重系数的客观方法：对 CRITIC 法的改进。《决策：管理与工程应用》，2020年。[626] Qiang Zhang、Jiahui Fan 和 Chaobang Gao。CRITID：通过先进的独立性检验增强 CRITIC，以实现稳健多准则决策。《科学报告》，14，2024年。[627] Mehdi Keshavarz-Ghorabaee、Maghsoud Amiri、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Zenonas Turskis 和 Jurgita Antuchevičiene。采用一种基于准则移除效应的新方法（MEREC）确定客观权重。《Symmetry》，13(4)：525，2021年。[628] Sarfaraz Hashemkhani Zolfani。多准则决策中的客观加权：CRITIC、ITARA、MEREC 等方法的比较研究。《Decision Making and Artificial Intelligence Trends》，1(1)：105–120，2024年。[629] Taha Ahmadi Pargo 和 Sarfaraz Hashemkhani Zolfani。开发用于物联网系统设计中硬件选择的专家系统：灰色ITARA-COBRA方法（附农业领域示例）。《信息》，16(6)：425，2025年。[630] Mijanur Rahaman Seikh 和 Prayosi Chatterjee。电动汽车普及的可持续策略：基于置信水平的区间值球形模糊MEREC-VIKOR方法。《信息科学》，699：121814，2025年。[631] Reda Abdelaal、Anas A. Makki、Ebtissam M. Al-Madi 和 Amani M. Qhadi。高等教育机构战略目标与项目的优先级排序：一种新型混合模糊MEREC-G-TOPSIS方法。IEEE Access，12 89753，2024 89735：–。[632] Ibrahim M. Hezam、Arunodaya Raj Mishra、Pratibha Rani、Fausto Cavallaro、Abhijit Saha、Jabir Ali、Wadim Strielkowski 和 Dalia Streimikienė。采用混合直觉模糊-MEREC-RS-DNMA方法，结合可持续性视角评估替代燃料车辆。《Sustainability》，2022年。[633] M. K. Mondal、Biplab Sinha Mahapatra、M. B. Bera 和 G. S. Mahapatra。通过毕达哥拉斯模糊MEREC-MARCOS方法构建可持续森林资源管理模型。《环境、发展与可持续性》，2024年。

[634] Rishikesh Chaurasiya 和 Divya Jain。采用毕达哥拉斯模糊 MEREC-SWARA-ARAS 方法推动智慧城市废弃物管理中的物联网应用。《印度国家科学院院刊》A辑：物理科学，94 548，2024年 533: – 。[635] Guorou Wan、Yuan Rong 和 Harish Garg。基于新型评分函数和聚合算子的高效球形模糊 MEREC–COCOSO 方法，用于群体决策。Granular Computing，第 1 – 23 页，2023年。[636] Vladimir Simić、Ilgin Gokasar、Muhmamet Deveci 和 Libor Svadlenka。采用二型中智 MEREC-MARCOS 模型减轻城市交通对气候变化的影响。《IEEE工程管理汇刊》，71:3233–3249，2024年。[637] R. Sami Ul Haq、M. Saeed、N. Mateen、Faisal Siddiqui、Messam Naqvi、Jiabao Yi 和 Sohail Ahmed。运用单值中智 MEREC-MARCOS 框架，基于清晰数据和模糊数据进行可持续材料选择。《应用软计算》，128:109546，2022年。[638] Nazean Jomhari、Nurul Aswani Ahmad Alias、Adi Aslah Abdul Ellah、Aws A. Magableh 和 Ezlika M. Ghazali。采用 FUCOM-WSM 方法进行遗留系统现代化的多准则决策。《IEEE Access》，12 48619，2024年 48608: – 。[639] Abdulaziz Alossta、Isslam Eltariki、Omar Elmansouri 和 Ibrahim Badi。优化利比亚建筑与拆除废弃物管理策略：FUCOM-EDAS 多准则决策方法。《绿色经济与低碳发展杂志》，2024年。[640] Sanjib Kr Biswas、Dragan Stevan Pamucar、Samarjit Kar 和 Shib Sankar Sana。融合费马模糊信息的新型 FUCOM-CODAS 集成框架，用于多准则群体决策。Symmetry，13:2430，2021年。[641] Gülay Demir、Milanko Damjanović、Boško Matović 和 Radoje Vujadinović。采用模糊 FUCOM 和模糊 COCOSO 方法推进可持续城市交通：波德戈里察可持续城市交通计划案例。Sustainability，14(9):4972，2022年。[642] Ali Aygün Yürüyen、Alptekin Ulutaş、Azize Demirhan 和 Emre Ozsalman。运输车辆选择中的环境考量：模糊 FUCOM 方法。《环境质量管理：国际期刊》，36(6):1650–1669，2025年。[643] Jiahui Shi、Zhengjiang Liu、Yinwei Feng、Xinjian Wang、Haowen Zhu、Zaili Yang、Jin Wang 和 Huanxin Wang。基于复杂网络和 DEMATEL 的船舶碰撞事故演化模型与风险分析。《海洋工程》，2024年。[644] Eliana Judith Yazo-Cabuya、Jorge Aurelio Herrera-Cuartas 和 Asier Ibeas。运用 DEMATEL 和层次分析法进行组织风险优先级排序，以实现可持续发展。Sustainability，2024年。[645] Rubee Singh、Shahbaz Khan、Jacinta Dsilva 和 Piera Centobelli。面向食品供应链的区块链集成物联网：基于灰色理论的 Delphi-DEMATEL 方法。《应用科学》，2023年。[646] Takaaki Fujita。用于多准则决策的超模糊 VIKOR 和超模糊 DEMATEL 方法。《Spectrum of Decision Making and Applications》，3(1):292–315，2026年。[647] Kuo-Ping Lin、Ming-Lang Tseng 和 Ping-Feng Pai。采用近似模糊 DEMATEL 方法进行可持续供应链管理。《Resources, Conservation and Recycling》，128:134–142，2018年。[648] Arpan Paul 和 Siba Sankar Mahapatra。采用模糊层次分析法与模糊 DEMATEL 方法分析采矿业的可持续供应链因素。《供应链分析》，2025年。[649] Md. Golam Sarower Rayhan、Md. Masum 和 Koppiahraj Karuppiah。纺织与服装业循环经济赋能因素建模：集成模糊 TISM 与模糊 DEMATEL 方法。《国际工业工程与运营管理期刊》，2025年。[650] Lazim Abdullah、Herrini Mohd Pouzi 和 Noor Azzah Awang。采用直觉模糊 DEMATEL 构建水安全的因果关系。《国际智能计算与控制论期刊》，16(3):520–544，2023年。[651] Yaşar Gökalp 和 Serkan Eti。采用直觉模糊 DEMATEL 方法制定优先策略，以降低医院能源成本。《Journal of Soft Computing and Decision Analytics》，3(1):26–32，2025年。[652] Amin Vafadar Nikjoo 和 Mahdi Saeedpoor。采用直觉模糊 DEMATEL 方法确定伊朗保险业 SWOT 矩阵各组成部分的优先级。《国际运筹学杂志》，20(4):439–452，2014年。[653] Nurten Deva 和 A. Felix。双极模糊环境下的 DEMATEL 方法设计。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，41:7257 – 7273，2021年。[654] Natthinee Deetae、Buncha Srisombut、Thiti Gaketem、Supanaree Piros、Pheeraphan Thongplew 和 Pannawit Khamrot。采用球形双极模糊集与 DEMATEL 方法分析小微企业中的因果关系。第 55 卷，2025年。[655] Bibhas Chandra Giri、Mahatab Uddin Molla 和 Pranab Biswas。用于可持续供应链管理中供应商选择的毕达哥拉斯模糊 DEMATEL 方法。Expert Syst. Appl.，193:116396，2022年。[656] Shuai Yu、Xiuli Geng、Jian jia He 和 Yan Sun。基于区间毕达哥拉斯模糊 DEMATEL-ISM-SD 组合模型的产品服务生态系统演化分析。《清洁生产期刊》，2023年。

[657] Mohammad Akhtar 和 Mohammad Asim。采用费马提模糊 DEMATEL 构建企业柔性维度的模糊因果模型：印度制药业案例研究。Benchmarking: An International Journal，2024年。[658] Gamaliel G. Gonzales、Felix Costan、Decem Suladay、Roselyn R. Gonzales、Lynne Enriquez、Emily Costan、Nadine May Atibing、Joerabell Lourdes Aro、Samantha Shane Evangelista、Fatima Maturan、Egberto F. Selerio 和 Lanndon A. Ocampo。用于教育4.0实施障碍建模的费马模糊 DEMATEL 与 MMDE 算法：来自菲律宾的见解。《应用科学》，2022年。[659] Hsiu-Chen Huang、Chun-Nen Huang、Huai-Wei Lo 和 Tyan-Muh Thai。从航空安全视角探讨国际机场韧性因素之间的相互影响关系：采用费马模糊 DEMATEL 方法。Axioms，12:1009，2023年。[660] Selin Yalçın。采用集成图片模糊层次分析法-DEMATEL 决策支持系统评估废水处理设施的风险。《环境、发展与可持续性》，27:25733 – 25767，2025年。[661] Jung-Fa Tsai、Dinh-Hieu Tran、Phi-Hung Nguyen 和 Ming-Hua Lin。基于区间值犹豫模糊 DEMATEL 的农业供应链管理中区块链技术采用障碍评估方法。Sustainability，15(5):4686，2023年。[662] Mamta Pandey、Ratnesh Litoriya 和 Prateek Pandey。调查并确定可穿戴应用中各类问题的优先级：球形模糊 DEMATEL 方法。Multimedia Tools and Applications，83(4):10061–10090，2024年。[663] Ahmet Aytekin、Gözde Koca、Basil Oluch Okoth 和 Çağlar Karamaşa。通过球形模糊 DEMATEL 方法确定卫生信息系统选择中有效准则的重要性层级。载于《模糊域中多准则决策技术的实际应用》，第 417–434 页。施普林格，2022年。[664] Irene Mamites、Porferio Almerino Jr、Regina Sitoy、Nadine May Atibing、Jana Gloria Almerino、Danilo Cebe、Ri- cardo Ybañez、Jemima Tandag、Mary Anne Villaganas、Charisma Lumayag 等。影响大学教学质量的因素：基于中智 DEMATEL 分析因果关系。Education Research International，2022(1):9475254，2022年。[665] Feng Liu、Guan Aiwu、Vesko Lukovac 和 Milena Vukic。运输服务提供商选择的多准则模型：单值中智 DEMATEL 多准则模型。《决策：管理与工程应用》，1(2):121–130，2018年。[666] Sara Damavandi、Jack H. Grant、Laura Berardi 和 Louise Manning。评估食品供应链中区块链技术采用障碍：粗糙 DEMATEL 分析。British Food Journal，2025年。[667] Di Feng、Jianping Zhou、Liting Jing、Shaofei Jiang、Tingting Wu 和 Xu Jiang。智能产品服务系统概念设计的适应性评估：集成粗糙 DEMATEL 与贝叶斯网络模型。《清洁生产期刊》，2023年。[668] Kaveh Ostad-Ali-Askari、Hamid Jafarinia 和 Peiman Kianmehr。采用层次分析法-DEMATEL 确定水泥业可持续生产的决定因素。Process Integration and Optimization for Sustainability，9:1697 – 1711，2025年。[669] Devnaad Singh、Rohit Kumar Singh、Anupam Sharma 和 Prashant Singh Rana。结合层次分析法-DEMATEL 模型，构建技术赋能的韧性供应链。《企业信息管理期刊》，2025年。[670] Jing-Han Zeng、Jing-Yang Huang、Qing-Wei Zhong、Dai-Wu Zhu 和 Yi Dai。基于犹豫模糊 TOPSIS-DEMATEL-ISM 方法的飞行签派员人为因素风险评估：四川航空案例研究。International Journal of Computational Intelligence Systems，17，2024年。[671] Vivek Agrawal、Nitin Seth 和 Jitendra Kumar Dixit。结合层次分析法–TOPSIS–DEMATEL 评估电子服务质量的成功因素：来自印度银行业的经验。《电子商务研究》，22 747，2020年 715 : – 。[672] Yixiong Feng、Zhaoxi Hong、Zhifeng Zhang、Zixian Zhang 和 Jianrong Tan。基于区间分析和 DEMATEL 的能源互联网能源消耗优化可靠性分配。《IEEE Access》，5:4769–4778，2017年。[673] Zhenfeng Wang、Guangyin Xu、Heng Wang 和 Jingzheng Ren。面向可持续性转型的分布式能源系统：基于区间多准则决策方法，通过耦合区间 DEMATEL 和区间 VIKOR 进行综合评估。Energy，2019年。[674] Chaoyu Zheng、Benhong Peng、Xuan Zhao、Guo Wei、Anxia Wan 和 Mu Yue。用于识别公共卫生突发事件关键成功因素的大群体犹豫模糊语言 DEMATEL 方法。Aslib J. Inf. Manag.，75 1128，2022年 1104: – 。[675] Chia chi Sun。基于直觉语言 DEMATEL 的网络模型，用于有效国防和力量创新项目规划。《IEEE Access》，9:130141–130153，2021年。[676] Shahbaz Khan、Abid Haleem 和 Mohd Imran Khan。供应链中实施循环倡议的赋能因素：灰色 DEMATEL 方法。Global Business Review，25(1):68–84，2024年。[677] Yanhu Han 和 Lufan Wang。采用灰色 DEMATEL 方法识别装配式建筑的障碍：中国案例。《土木工程与管理杂志》，24(5):364–377，2018年。

[678] Kramat Hussain、Huaping Sun、Muhammad Ramzan、Shahid Mahmood 和 Muhammad Zubair Saeed. 可持续旅游发展障碍的解释结构模型：发展中经济体视角. Sustainability, 2024年.[679] Shahryar Sorooshian、Madjid Tavana 和 Samuel Ribeiro-Navarrete. 从经典解释结构模型到全解释结构模型及更进一步：半个世纪的商业研究. Journal of Business Research, 2023年.[680] Murad Salim Attiany、Sami Awwad Al-kharabsheh、lafie Saleh Al-Makhariz、Mohd Ahmad Abed-Qader、Sulieman Ibraheem Shelash Al-Hawary、Anber Abraheem Shlash Mohammad 和 Adeeb Ahmed AL Rahamneh. 运用解释结构模型分析供应链采用工业4.0的障碍. Uncertain Supply Chain Management, 2023年.[681] Haidar Abbas、Mohd. Mehdi、Imran Azad 和 Guilherme Francisco Frederico. 使用解释结构建模（ISM）方法对供应链中的抽象节点进行建模：基于综述的综合工具包. Benchmarking: An International Journal, 2022年.[682] Rameshwar Dubey 和 Sadia Samar Ali. 运用全解释结构建模和模糊MICMAC分析识别柔性制造系统的维度及其相互关系. Global Journal of Flexible Systems Management, 15:131–143, 2014年.[683] Gaurav Khatwani、Surya Prakash Singh、Ashish Trivedi 和 Ankur Chauhan. 模糊TISM：面向群体决策的TISM模糊扩展. Global Journal of Flexible Systems Management, 16:97 – 112, 2014年.[684] Vineet Jain 和 Vimlesh Kumar Soni. 运用模糊TISM对柔性制造系统绩效变量进行建模与分析. Journal of Modelling in Management, 2019年.[685] Anurag Kumar、Shraddha Mishra 和 Kuldeep Lamba. 可持续同步多式联运物流：通过中智解释结构模型分析揭示关键促进因素. Industrial Management & Data Systems, 2025年.[686] Vishwas Dohale、Priya Ambilkar、Ashwani Kumar、Sachin Kumar Mangla 和 Vijay Bilolikar. 运用中智ISM方法分析循环供应链的促进因素：来自印度服装业的经验. The International Journal of Logistics Management, 2023年.[687] Bhavna Pandey 和 Manoj Kumar Khurana. 印度制造业工业4.0采用策略框架：SWOT与N-ISM方法. Engineering Management Journal, 38:63 – 80, 2024年.[688] Dr. Sneha Badola. 解读影响投资者决策的行为因素：TISM-MICMAC方法. Journal of Informatics Education and Research, 2025年.[689] Rangga Primadasa、Elisa Kusrini、Agus Mansur 和 Ilyas Masudin. 整合DEMATEL-ISM-MICMAC：清真可持续供应链管理（HSSCM）指标的互联模型（面向中小企业）. Journal of Islamic Marketing, 2025年.[690] S. J. Gorane 和 Ravi Kant. 供应链管理促进因素建模：一种整合的ISM-模糊MICMAC方法. Asia Pacific Journal of Marketing and Logistics, 25:263–286, 2013.[691] Vishal Ashok Bhosale 和 Ravi Kant. 一种用于供应链知识流动促进因素建模的整合ISM模糊MICMAC方法. 《国际生产研究杂志》, 54:7374 – 7399, 2016年.[692] Devendra Kumar Dewangan、Rajat Agrawal 和 Vinay Sharma. 生态创新促进因素：提升印度制造业竞争力——一种整合的ISM-模糊MICMAC方法. International Journal of Business Innovation and Research, 13:475–501, 2017年.[693] Cihat Öztürk. 数字化作为供应链社会可持续性的催化剂：ISM-模糊MICMAC与DEMATEL方法. 《环境、发展与可持续性》, 2025年.[694] Ilyas Masudin、Intan Lestari、Amelia Khoidir 和 Dian Palupi Restuputri. 印度尼西亚食品制造业中小企业的可持续采购障碍：ISM–模糊 MICMAC 分析. Logistics, 2025年.[695] Gabriel Martinez Volquez、Suresh Renukappa、Subashini Suresh、Satyasiba Das 和 Tonny Veenith. 可持续商业模式创新驱动因素评价：TISM与模糊MICMAC方法. Smart and Sustainable Built Environment, 2025年.[696] A. John William、M. Suresh 和 Nagamani Subramanian. 考察影响中小企业竞争优势的因素之间的因果关系：TISM-中智MICMAC方法. Benchmarking: An International Journal, 2023年.[697] Seyed Mahmood Zanjirchi 和 Najmeh Faregh. 中智环境下的扩展ISM和MICMAC方法. Journal of Advances in Management Research, 2023年.[698] Michael J. Eckardt. 海马体作为认知图. Journal of Nervous and Mental Disease, 168:191–192, 1980.[699] James C. R. Whittington、David McCaffary、Jacob J. W. Bakermans 和 Timothy Edward John Behrens. 如何构建认知图. Nature Neuroscience, 25:1257 – 1272, 2022年.[700] Ioannis D. Apostolopoulos、Nikolaos I. Papandrianos、Nikolaos D. Papathanasiou 和 Elpiniki I. Papageorgiou. 过去二十年模糊认知图在医学中的应用：综述研究. Bioengineering, 11, 2024年.[701] Shahab Hosseini、Danial Jahed Armaghani、Xuzhen He、Biswajeet Pradhan、Jian Zhou 和 Daichao Sheng. 用于评估地下工程中导致岩爆的关键因素的模糊认知图：基础研究. Rock Mechanics and Rock Engineering, 57:9713 – 9738, 2024年.

[702] Yingzhi Teng、Kai Wu 和 Jing Liu. 从大量但含噪的模糊认知图集合中进行因果发现. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 32:3992–4003, 2024年.[703] Ioannis D. Apostolopoulos 和 Peter P. Groumpos. 模糊认知图：其在可解释人工智能中的作用. 《应用科学》, 2023年.[704] Ryan Schuerkamp 和 Philippe J. Giabbanelli. 模糊认知图的扩展：系统性综述. ACM计算调查, 56:1 – 36, 2023年.[705] Georgia Sovatzidi、Michael D. Vasilakakis 和 Dimitris K. Iakovidis. 用于可解释图像分类的直觉模糊认知图. ArXiv, abs/2408.03745, 2024年.[706] Petr Hájek 和 Wojciech Froelich. 将TOPSIS与区间值直觉模糊认知图相结合，以实现有效的群体决策. 《信息科学》, 485:394–412, 2019年.[707] Laxmi Deepak、Ratna Priya、W. Lilly Merline、G. Ramkumar 和 Nivetha Martin. 毕达哥拉斯模糊认知图在制定抑制电子废弃物的可行策略最优决策中的应用. 第一届计算、通信与控制系统国际会议论文集，I3CAC 2021，2021年6月7—8日，巴拉特大学，印度金奈，2021年.[708] Shaista Habib、Sundas Shahzadi 和 Muhammet Deveci. 医疗护理与治疗决策中的毕达哥拉斯模糊认知分析. Granular Computing, 8:1887–1906, 2023年.[709] Xiaoyang Gu、Hongmin Li 和 Henghao Fan. 基于自适应特征提取和犹豫模糊认知图的城市群时空混合空气污染预警系统. Syst., 11:286, 2023年.[710] Haideh Ghaderi、Hossein Gitinavard、Seyed Meysam Mousavi 和 Behnam Vahdani. 一种考虑风险偏好的犹豫模糊认知映射方法：学生住宿问题案例. 《国际应用管理科学杂志》, 9:253–293, 2017年.[711] Antonios Paraskevas、Michael Madas 和 Yiannis Nikolaidis. 运用中智认知图支持有关智慧港口绩效建模与分析的群体决策. 《应用科学》, 2025年.[712] Norarida Abd Rhani、Nurul Eylia Maisarah Mazlan、Nur Amani Izzati Mohd Azhan、Siti Nurul Fitriah Mohamad 和 Suriana Alias. 运用模糊与中智认知图分析新冠肺炎接种疫苗后病例的出现. 《马来西亚基础与应用科学杂志》, 2024年.[713] Layal Layal、Carlos Javier Lizcano Chapeta、Rosa Evelyn Chuga Quemac 和 Layal Kallach. 将中心性度量与D-OWA结合应用于中智认知图，以构建综合中心性指标. International Journal of Neutrosophic Science, 2024年.[714] Atharva Rajesh Shekatkar、Aditya Deodeshmukh 和 Ilanthenral Kandasamy. 精细中智认知图：用于对不确定因果关系建模的新型框架. 《国际模糊系统杂志》, 2025年.[715] Nivetha Nivetha、Sulbha Raorane、N. Ramila Gandhi、R. Priya、P. Pandiammal 和 Nivetha Martin. 可持续产业中的基于多元生成社会图的多元生成认知图方法. International Journal of Neutrosophic Science, 2024年.[716] Florentin Smarandache 和 Nivetha Martin. 决策中的多元生成认知图. International Journal of Neutrosophic Science, 2020年.[717] Mateusz Gil、Katarzyna Poczęta、Krzysztof Wróbel、Zaili Yang 和 Pengfei Chen. 探索模糊灰色认知图在载人船舶与自主船舶海上避碰中的应用. IEEE 海洋工程学报, 50:1210–1230, 2025年.[718] Lucas Gabriel Zanon、Tiago Fonseca Albuquerque Cavalcanti Sigahi、Rosley Anholon 和 Luiz César Ribeiro Carpinetti. 运用模糊灰色认知图分析组织文化对供应链绩效的影响. 灰色系统：理论与应用, 14:733–753, 2024年.[719] István Á. Harmati. 模糊粗糙认知网络的动态特性. Symmetry, 13:881, 2021年.[720] Gonzalo Nápoles、Rafael Falcon、Elpiniki I. Papageorgiou、Rafael Bello 和 Koen Vanhoof. 粗糙认知集成. International Journal of Approximate Reasoning, 85:79–96, 2017年.[721] Bingyi Kang、Yong Deng、Rehan Sadiq 和 Sankaran Mahadevan. 证据认知图. Knowledge-Based Systems, 35:77–86, 2012年.[722] Yingjun Zhang、Jiahu Qin、Wei Xing Zheng 和 Yu Kang. 扩展证据认知图及其应用. 《富兰克林研究所杂志》, 355(1):381–405, 2018年.[723] Seongmin A. Park、Maryam Zolfaghar、Jacob Russin、Douglas S. Miller、Randall C. O’Reilly 和 Erie D. Boorman. 动态认知控制下认知图的表征几何. bioRxiv, 2023年.[724] Joao Paulo Carvalho. 关于演化动态认知图的实现. 载于 IFSA 世界大会与 NAFIPS 年会联合会议, 2019年.[725] Witold Pedrycz 和 Wladyslaw Homenda. 从模糊认知图到粒化认知图. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 22(4):859–869, 2013年.[726] Rafael Falcon、Gonzalo Nápoles、Rafael Bello 和 Koen Vanhoof. 粒化认知图：综述. Granular Computing, 4(3):451–467, 2019年.

[727] Takaaki Fujita. 超概念的理论探索：超函数、超随机性、超决策及其他（包括超结构综述）。通过图化、超图化和不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他，344(498):111，2025年。[728] Takaaki Fujita. 超超结构各种概念简要综述。《超超拓扑与超超结构及其应用》，第97页，2025年。[729] Takaaki Fujita. 认知超图与超超图：复杂关系建模的新框架。《中智计算与机器学习》，39，2025年。[730] Wen-Ran Zhang. 阴阳双极认知映射与双极认知。载于《国际通信控制与计算技术会议》，2004年。[731] Wen-Ran Zhang. 双极认知图构建与决策分析的数据挖掘方法。载于 SPIE 国防+ 商业传感，2002年。[732] Nguyen Van Han 和 Phan Cong Vinh. 基于词语的推理：语气算子代数语言认知图方法。《并发与计算：实践与经验》，33，2020年。[733] Jihène Krichène 和 Noureddine Boudriga. 事件响应概率认知图。2008 IEEE并行与分布式处理及应用国际研讨会，第689–694页，2008年。[734] Jian Wu、Yucheng Chen、Zengwen Wang、Guoheng Hu 和 Chen Chen. 概率语言模糊认知图：应用于影响农村老年人健康的关键因素。《BMC医学信息学与决策》，22，2022年。[735] Sundararajan Dhruva、Raghunathan Krishankumar、Kattur Soundarapandian Ravichandran、Artras Kaklauskas、Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Pankaj Gupta. 食品来源废物处理方法的选择：运用q阶模糊数据、LOPCOW和COPRAS技术的集成决策模型。《清洁技术与环境政策》，27:5069–5093，2025年。[736] Madhusudhan Rao Dasari. 使用COPRAS方法优化信息安全控制中的云计算网络。《计算机科学、工程与技术》，2024年。[737] Ankur Tayal、Saurabh Agrawal 和 Rajan Yadav. Arank-fsc：运用模糊SWARA和模糊 COPRAS评估并排序印度建筑业的工业4.0促成因素。《智能决策技术》，18:663–683，2024年。[738] S. Madhavi、S. M. Udhaya Sankar、R. Praveen 和 N. Jagadish Kumar. 基于模糊 COPRAS的决策框架，用于减轻无线传感器节点（WSNs）中吸血鬼传感器节点的影响。《国际信息技术杂志》，15:1859–1870，2023年。[739] Elif Haktanır. 使用区间值直觉模糊COPRAS方法进行自制或外购决策。《大数据分析与决策中的智能和模糊技术》，2019年。[740] Bhavna Pandey 和 Manoj Kumar Khurana. 集成毕达哥拉斯模糊SWARA-COPRAS框架，用于确定缓解工业4.0风险的解决方案优先级。《Expert Syst. Appl.》，254:124412，2024年。[741] Suleyman Recep Satici 和 Suleyman Mete. 基于Fine-Kinney的职业风险评估：运用毕达哥拉斯模糊层次分析法-COPRAS评估能源分配与投资行业的起重设备。《加济大学科学学报》，2023年。[742] Yuanhang Zheng、Zeshui Xu、Yue He 和 Huchang Liao. 基于犹豫模糊语言COPRAS方法评估慢性阻塞性肺疾病的严重程度。《应用软计算》，69:60–71，2018年。[743] Esin Mukul、Merve Güler 和 Gülçin Büyüközkan. 运用集成犹豫模糊语言AHP-COPRAS方法评价智慧城市。《面向感知决策支持的数据科学与知识工程》，2018年。[744] Gul Imamoglu、Ertuğrul Ayyıldız、Nezir Aydin 和 Y. Ilker Topcu. 弹性血液供应链的献血车选址：一种新型球形模糊层次分析法集成球形模糊COPRAS方法。《Journal of Enterprise Information Management》，2024年。[745] Jianping Fan、Dongshuai Han 和 Meiqin Wu. 面向多准则决策问题的T-球形模糊COPRAS方法。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，43:2789–2801，2022年。[746] Davood Jamini、Hossein Komasi、Amir Karbassi Yazdi、Thomas Hanne 和 Giuliani Coluccio. 伊朗农村地区美食旅游的情景规划：运用图片模糊AHP与COPRAS对策略进行排序。《Sustainability》，17 9524，2025 21( ): .[747] Jianping Lu、Siqi Zhang、Jiang Wu 和 Yu Wei. 图片模糊环境下多属性群体决策的COPRAS方法及其在绿色供应商选择中的应用。《Technological and Economic Development of Economy》，27:369–385，2021年。[748] Nasser Nasser、Ned Vıto Quevedo Arnaız、D.X. Valencia 和 Nasser El El-Kanj. 将中智COPRAS信息融合方法应用于评估退休对福祉和家庭凝聚力的影响。《International Journal of Neutrosophic Science》，2024年。[749] Tripti Basuri、Kamal Hossain Gazi、Prodip Bhaduri、Srabani Guria Das 和 Sankar Prasad Mondal. 基于决策分析的可持续选址问题——中智CRITIC-COPRAS评估模型。《管理科学进展》，2025年。

[750] Nilsen Kundakcı. 基于MACBETH和Multi-MOORA方法的多准则决策综合方法。《Alphanumeric Journal》，4(1):17–26，2016年。[751] CARLOS A BANA E COSTA 和 JEAN-CLAUDE VANSNICK. MACBETH方法在加性聚合模型框架中的应用。《Journal of Multi-Criteria Decision Analysis》，6(2):107–114，1997年。[752] Tatiane Roldão Bastos、André Andrade Longaray、Catia Maria dos Santos Machado、Leonardo Ensslin、Sandra Rolim Ensslin 和 Ademar Dutra. 模糊-MACBETH混合方法：运用模糊理论对定性量表进行数学处理。《International Journal of Computational Intelligence Systems》，16(1):21，2023年。[753] Tatiane Roldão Bastos、André Andrade Longaray、Catia Maria dos Santos Machado、Leonardo Ensslin、Sandra Rolim Ensslin 和 Ademar Dutra. 将遗传算法应用于决策过程中的模糊-MACBETH方法。《International Journal of Computational Intelligence Systems》，17(1):48，2024年。[754] Diala Dhouib. 运用模糊MACBETH方法分析汽车轮胎废弃物逆向物流中的备选方案。载于《2013年国际高级物流与运输会议》，第321–326页。IEEE，2013年。[755] Ridha Muldina Negara、Nana Rachmana Syambas 和 Eueung Mulyana. C3CPS：基于CRITIC-COCOSO的缓存放置策略，运用多准则决策方法实现命名数据网络中的高效内容分发。《Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences》，35(9):101714，2023年。[756] Alptekin Ulutaş、Can Bülent Karakuş 和 Ayşe Topal. 运用模糊SWARA和COCOSO方法进行物流中心选址。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，38(4):4693–4709，2020年。[757] Anirban Tarafdar、Azharuddin Shaikh、Md Niamot Ali 和 Anupam Haldar. 自主移动机器人选择的集成模糊决策框架：运用模糊TOPSIS和图片模糊CoCoSo方法平衡主观与客观度量指标。《运筹学会杂志》，77(2):427–453，2026年。[758] ZhiXin Fang、XinLi Yao 和 Man Song. 运用圆形直觉模糊CoCoSo与爱因斯坦聚合优化球员位置安排的智能算法。《科学报告》，15(1):26678，2025年。[759] Zhongyu Shi 和 Wei Ji. 直觉模糊MAGDM的先进技术及其在公园景观规划和设计方案评价中的应用。《International Journal of Agricultural and Environmental Information Systems (IJAEIS)》，16(1):1–19，2025年。[760] Huchang Liao、Rui Qin、Di Wu、Morteza Yazdani 和 Edmundas Kazimieras Zavadskas. 融合累积前景理论与组合权重的毕达哥拉斯模糊组合折衷解法，用于冷链物流配送中心选择。《国际智能系统杂志》，35(12):2009–2031，2020年。[761] Xindong Peng、Xiang Zhang 和 Zhigang Luo. 基于COCOSO和CRITIC并结合评分函数的毕达哥拉斯模糊多准则决策方法，用于5G行业评价。《Artificial Intelligence Review》，53(5):3813–3847，2020年。[762] Han Lai、Huchang Liao、Yilu Long 和 Edmundas Kazimieras Zavadskas. 一种用于群体决策的犹豫费马特模糊COCOSO方法及其在区块链平台评价中的应用。《国际模糊系统杂志》，24(6):2643–2661，2022年。[763] Muhammad Qiyas、Muhammad Naeem、Saifullah Khan、Saleem Abdullah、Thongchi Botmart 和 Tajammul Shah. 基于图片模糊信息的COCOSO方法决策支持系统。《Journal of Mathematics》，2022(1):1476233，2022年。[764] Rong Yan、Yongguang Han、Huiyuan Zhang 和 Cun Wei. 运用球形模糊CoCoSo和CRITIC技术进行电动汽车充电站选址。《Informatica》，35(1):203–225，2024年。[765] Min Kong 和 Xiao Han. 运用语言型T-球形模糊CoCoSo’b方法选择可持续韧性城市交通系统的整合方案。载于《Intelligent Urban Mobility》，第287–313页。爱思唯尔，2025年。[766] Aurimas Petrovas、Romualdas Bausys、Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Florentin Smarandache. 运用中智遗传COCOSO方法生成创意游戏场景模式。《论文集》第十五卷：《Neutrosophic Theories and Applications》，第267页，2025年。[767] Debashis Ghosh、Bahnishikha Roy Muhuri、GS Mahapatra 和 BS Mahapatra. 运用中智得分函数的集成MEREC-COCOSO方法进行经济特区选址。《中智集与系统》，73 55，2024 1( ): . [768] Xian Yuan 和 Kaiyin Zhang. 科技产业大学生创新能力管理绩效评价：一种析取生成CoCoSo方法。《中智集与系统》，第80卷，2025年，第377页，2025年。[769] Živko Erceg、Vitomir Starcević、Dragan Stevan Pamucar、Goran Mitrović、Željko Stević 和 Srđan Žikić. 一种旨在合理化成本的库存管理新模型：ABC-FUCOM-区间粗糙COCOSO模型。《Symmetry》，11:1527，2019年。[770] Santonab Chakraborty、Rakesh D. Raut、T. M. Rofin 和 Shankar Chakraborty. 基于灰色COCOSO方法的医疗保健单位服务质量评价。《International Journal of Pharmaceutical and Healthcare Marketing》，2025年。[771] Ibrahim Badi、Željko Stević 和 Mouhamed Bayane Bouraima. 运用完全一致性方法-灰色COCOSO模型评价自由区工业厂房方案。《Journal of Industrial Intelligence》，2023年。[772] Zahra Khoshsepehr 和 Saeed Alinejad. 基于集成毕达哥拉斯模糊SWARA-COCOSO方法构建组织反脆弱性评估模型。《OPSEARCH》，2025年。

[773] Rajdip Mahajan、Abhijit Baidya、Pinki Majumder 和 Uttam Kumar Bera. 一种新颖的混合球形模糊层次分析法-SWARA-CoCoSo 群体决策方法及其在妇女赋权政策评价中的应用. Sādhanā, 50, 2025年.[774] Asghar Khan、Omar M. Barukab、Young Bae Jun、Sher Afzal Khan、Umair Ahmad 和 Ali Muhammad Ali Rushdi. （p–q）阶正交对模糊环境下用于多准则决策应用的扩展CoCoSo方法. 《科学报告》, 15, 2025年.[775] Xue-Guo Xu、Ling Zhang、Ling-Xiang Mao 和 Ke Li. 基于球形模糊集的扩展CoCoSo方法在质量功能展开中的新方法. Syst., 10:253, 2022年.[776] Alireza Afshari、Majid Mojahed 和 Rosnah Mohd Yusuff. 用于人员选拔问题的简单加性加权方法. International journal of innovation, management and technology, 1(5):511, 2010年.[777] Ulya Ilhami Arsyah、Nizwardi Jalinus、Rahmatul Husna Arsyah、Mutiana Pratiwi 等. 简单加性加权法在教育援助决策中的分析. Turkish journal of computer and mathematics education, 12(14):2389–2396, 2021年.[778] Katerina Kabassi、Christos Karydis 和 Athanasios Botonis. 层次分析法、模糊 SAW 和模糊加权乘积法在文化类网站评价中的应用. 《Multimodal Technologies and Interaction》, 4(1):5, 2020年.[779] Mohammadsoroush Tafazzoli、Ayoub Hazrati、Kishor Shrestha 和 Krishna Kisi. 运用模糊TOPSIS和模糊SAW技术提升承包商选择效果. 《Buildings》, 14(6):1861, 2024年.[780] Pashatania Fitri Indah Lestari、Tito Tri Prabowo 和 Wahyo Mulyo Utomo. 模糊简单加权加法法在职业高中新生录取选择中的有效性. 《Letters in Information Technology Education (LITE)》, 3(1):18–22, 2020年.[781] Prabjot Kaur 和 Sanjay Kumar. 一种用于供应商选择的直觉模糊简单加权加法法（IFSAW）. 《IOSR Journal of Business and Management》, 15:78–81, 2013.[782] S. Sudharsan 和 Devarasan Ezhilmaran. 一种用于服务质量评价的区间值直觉模糊简单加性加权方法. 《Journal of Computational and Theoretical Nanoscience》, 2018年.[783] Eda Boltürk、Ali Karaşan 和 Cengiz Kahraman. 基于中智集的简单加性加权法和加权乘积法. 《基于中智集的模糊多准则决策》, 2018年.[784] Ahmedia Ahmedia、Mohammed M. A. Almazah、Badr Eldeen A. A. Abouzeed 和 Murtada Khalid Abdalla Abdelmah-mod. 结合人工智能的中智模糊简单加性加权法，用于可持续心脏病识别与分类. International Journal of Neutrosophic Science, 2024年.[785] Abdulaziz Alosta、Omar Elmansuri 和 Ibrahim Badi. 通过集成层次分析法-RAFSi方法解决选址问题. 《Reports in Mechanical Engineering》, 2(1):135–142, 2021年.[786] Hoang Xuan Thinh 等. RAFSI与PIV方法在多准则决策中的比较：车削加工过程的应用. 《International Journal of Metrology and Quality Engineering》, 13:14, 2022年.[787] Weizhong Wang、Yu Chen、Yi Wang、Muhammet Deveci、Amer Al-Hinai 和 Seifedine Kadry. 运用集成区间值费马模糊 RAFSi 模型分析区块链在供应链金融中采用的障碍. 《Financial Innovation》, 11(1):9, 2025年.[788] Darko Božanić、Aleksandar Milić、Duško Tešić、Wojciech Salabun 和 Dragan Pamučar. 用于选择工程机械群组以实现机动性的 D 数-FUCOM-模糊RAFSI模型. 《Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering》, 19(3):447–471, 2021年.[789] Weizhong Wang、Yu Chen、Yi Wang、Muhmamet Deveci、Amer Al-Hinai 和 Seifedine Kadry. 运用集成区间值费马模糊 RAFSi 模型分析区块链在供应链金融中采用的障碍. 《Financial Innovation》, 11, 2025年.[790] Ilgin Gokasar、Muhammet Deveci、Mehtap Işık、Tugrul Unsal Daim、Aws Alaa Zaidan 和 Florentin Smarandache. 使用基于二型中智数的RAFSI模型评估发展中国家引入电动汽车的备选方案. 《Technological Forecasting and Social Change》, 2023年.[791] Xindong Peng、Linhui Yu 和 Wenquan Li. 一种融入RATMI的模糊多准则决策集成框架, 用于教学模式评价. International Journal of Computational Intelligence Systems, 18(1):282, 2025年.[792] Abdullah M Barasin、Ammar Y Alqahtani 和 Anas A Makki. 零售仓库绩效评估：采用G-BWM和RATMI的组合多准则决策方法. Logistics, 8(1):10, 2024年.[793] Reda MS Abdulaal 和 Omer A Bafail. 多准则决策策略中的两种新方法（RAMS-RATMI）. Journal of mathematics, 2022(1):6725318, 2022年.[794] Abinay Baraily、Srinjoy Chatterjee、Ranjan Kumar Ghadai、Partha Protim Das 和 Shankar Chakraborty. 使用一种新的基于RAMS-RATMI的方法优化混合铝-MMC钻削. 《International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)》, 18(7):4345–4361, 2024年.[795] Anas A Makki 和 Reda MS Abdulaal. 一种基于模糊MEREC-G和模糊 RATMI 的混合多准则决策方法. Mathematics, 11(17):3773, 2023年。

[796] Anna Shkurina. 一种利用统计阈值降低偏差的自适应rancom-st方法. 载于《计算科学国际会议》，第281–295页. Springer, 2025年.[797] Jakub Więckowski. 推进rancom方法：探索群体决策中的决策者赋权与基于比率的机制. 载于欧洲人工智能会议，第227–238页. Springer, 2025年.[798] Arunodaya Raj Mishra、Dragan Stevan Pamucar、Pratibha Rani 和 Ibrahim M. Hezam. 基于单值中智距离测度的MEREC-RANCOM-WISP方法，用于解决可持续储能技术问题. Cognitive Computation, 17, 2025年.[799] Sara Bošković、Libor Švadlenka、Stefan Jovčić、Momčilo Dobrodolac、Vladimir Simić 和 Nebojša Bacanin. 一种考虑两步归一化的备选排序法（AROMAN）——电动汽车选择问题案例研究. IEEE access, 11:39496–39507, 2023年.[800] Huiling Xiang、Hafiz Muhammad Athar Farid 和 Muhammad Riaz. 基于线性规划的模糊备选排序法，考虑两步归一化，用于省级地区数字经济发展的综合评价. Axioms, 13(2):109, 2024年.[801] Ivana Nikolić、Jelena Milutinović、Darko Bozanić 和 Momcilo Dobrodolac. 运用区间二型模糊AROMAN决策方法提升农村地区邮政网络的可持续性. Mathematics, 2023年.[802] Paul Kailiponi. 运用多属性效用理论（MAUT）分析疏散决策. 《Procedia Engineering》, 3:163–174, 2010年.[803] Nuroji Nuroji. 运用多属性效用理论（MAUT）确定最佳员工. 《Jurnal Ilmiah Informatika Dan Ilmu Komputer (JIMA-ILKOM)》, 1(2):46–53, 2022年.[804] Heni Sulistiani、Pritasari Palupiningsih、Fikri Hamidy、Priskila Lovika Sari、Yosi Khairunnisa 等. 运用多属性效用理论（MAUT）和PIPRECIA-S赋权对员工绩效进行评估：教育机构案例研究. 载于2023年国际信息学、多媒体、网络与信息系统会议（ICIMCIS），第369–373页. IEEE, 2023年.[805] Rajdeep Singh 和 Chandan Deep Singh. 运用模糊 MAUT 技术对影响制造业绩效的因素进行排序. 《国际工业与系统工程杂志》, 50(3):303–321, 2025年.[806] Long Chen、Qiuchen Lu 和 Xiaojing Zhao. 一种基于模糊 MAUT 的半自动图像对象识别系统，用于构建现状 IFC BIM 对象. 《International Journal of Construction Management》, 22(1):51–65, 2022年.[807] Fangyi Liu 和 Tom MY Lin. 基于口碑理论，运用模糊 MAUT 分析感知风险的影响 . 《 International Journal of Psychology 》 , 43(4):641, 2008年.[808] Wankang Zhao、Jing Li、Chuck Zhang、Zhiyong Liang 和 Ben Wang. 基于特征的复合结构成本估算：采用模糊多属性效用理论. 《国际工业与系统工程杂志》, 1(1-2):284–300, 2006年.[809] Chensong Dong、Chuck Zhang 和 B Wang. 将绿色质量功能展开与基于模糊多属性效用理论的成本估算相结合，用于环境友好型产品开发. International Journal of Envi-ronmentally Conscious Design & Manufacturing, 11(1):12–28, 2003年.[810] Dodi Siregar、Diki Arisandi、Ari Usman、Dedy Irwan 和 Robbi Rahim. 简单多属性评分技术在决策支持中的研究. 载于Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2017年.[811] Robbi Rahim Risawandi 和 R Rahim. 简单多属性评分技术在决策支持中的研究. 决策, 4:C4, 2016年.[812] Shuo-Yan Chou 和 Yao-Hui Chang. 一种基于战略导向的模糊 SMART 方法的供应商选择决策支持系统. Expert systems with applications, 34(4):2241–2253, 2008年.[813] M Sandeep、S Kumanan 和 S Vinodh. 模糊 SMART 方法在供应商选择中的应用. 《International Journal of Services and Operations Management》, 9(3):365–388, 2011年.[814] Ting-Yu Chen. 基于T-球形模糊机制分析的多准则选择建模. 《国际智能系统杂志》, 37(3):1972–2011, 2022年.[815] Basar Oztaysi、Cengiz Kahraman 和 Sezi Cevik Onar. 球形模糊机制法在废物处置地点选择中的应用. 载于智能与模糊系统国际会议, 第715–723页. Springer, 2021年.[816] Ye Liang. 运用单值三角中智数对废弃煤矿场地进行景观设计质量评价. 《中智集与系统》, 81(1):26, 2025年.[817] Bonifacio Llamazares. 广义TODIM方法分析. 《欧洲运筹学杂志》, 269(3):1041–1049, 2018年.[818] Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes、Luis Alberto Duncan Rangel 和 Francisco José Coelho Maranhão. 巴西天然气去向的多准则分析：TODIM方法的应用. 《Mathematical and Computer Modelling》, 50(1-2):92–100, 2009年.[819] Fatih Alali 和 A Cagri Tolga. 运用 TODIM 方法进行投资组合配置 . Expert Systems with Applications, 124:341–348, 2019 年。

[820] Ömür Tosun 和 Gökhan Akyüz。基于模糊 TODIM 方法的供应商选择问题。International Journal of Computational Intelligence Systems，8(2)：317–329，2015年。[821] Renato A Krohling、André GC Pacheco 和 André LT Siviero。IF-TODIM：一种用于多准则决策的直觉模糊 TODIM 方法。Knowledge-Based Systems，53：142–146，2013。[822] Nasser Aedh Alreshidi、Muhammad Rahim、Fazli Amin 和 Abdulaziz Alenazi。在存在犹豫且权重未知的情况下，基于梯形二型毕达哥拉斯模糊 TODIM 方法进行合理决策。AIMS数学，2023年。[823] Xiaonan Ji、Lixia Yu 和 Jia-Cai Fu。个人违约风险评价：基于对偶犹豫毕达哥拉斯模糊 TODIM 方法。Mathematics，2019年。[824] Peijia Ren、Zeshui Xu 和 Xunjie Gou。用于多准则决策的毕达哥拉斯模糊 TODIM 方法。Applied Soft Computing，42：246–259，2016年。[825] Yan Pan、Shouzhen Zeng、Wendi Chen 和 Jiaxing Gu。基于费马模糊 TODIM 和后悔理论的众包物流平台服务质量评价。Eng. Appl. Artif. Intell.，123：106385，2023年。[826] Tarun Sethi 和 S. Rethina Kumar。基于扩展 TODIM-VIKOR 方法和费马模糊信息测度的医疗消费品多属性群决策问题。Mathematical Modeling and Computing，2023年。[827] Quanyu Ding、Mark Goh 和 Ying-Ming Wang。用于动态应急响应的区间犹豫模糊 TODIM 方法。Soft Computing，25(13)：8263–8279，2021年。[828] Yi Liu、Muhammad Tariq、Saifullah Khan 和 Saleem Abdullah。复数对偶犹豫模糊 TODIM 方法及其在俄乌战争对全球经济影响中的应用。《复杂与智能系统》，10(1)：639–653，2024年。[829] Chao Tian 和 Juan Peng。用于旅游景点推荐的集成图片模糊 ANP-TODIM 多准则决策方法。Technological and Economic Development of Economy，26(2)：331–354，2020年。[830] Iman Mohamad Sharaf 和 Essam Abdel-Hadi Ali Khalil。用于绿色职业健康与安全设备供应商选择的球形模糊 TODIM 方法。《国际管理科学与工程管理杂志》，16(1)：1–13，2021 年。[831] Yuan Rong 、 Qiaoqiao Zhang 、 Xiaofang Lu 和 Zheng Pei。用于多准则决策的广义球形模糊 TODIM 方法。载于《2019年第14届IEEE智能系统与知识工程国际会议（ISKE）》，第118–124页。IEEE，2019年。[832] Dan Zhang、Mengwei Zhao、Guiwu Wei 和 Xudong Chen。基于累积前景理论的单值中智 TODIM 方法，用于多属性群决策及其在医疗应急管理评价中的应用。《经济研究》，35(1)：4520–4536，2022年。[833] Dan Zhang、Mengwei Zhao、Guiwu Wei 和 Xudong Chen。基于累积前景理论的单值中智 TODIM 方法，用于多属性群决策及其在医疗应急管理评价中的应用。《经济研究》，35：4520–4536，2021年。[834] Yun Cai。基于区间中智 TODIM 和 EDAS 技术的城市公共交通运营评价广义集成框架。《Soft Computing》，28：10331–10344，2024年。[835] Jian Lin、Jing Lu 和 Huizhen Cai。基于具有异构指标信息的中智 TODIM 方法的植被生态评价。Environmental Monitoring and Assessment，197(8)：875，2025年。[836] Qiongyao Liu、Wenqiang Dai、Wei Wang 和 Yuemin Gao。在新时代教育背景下，应用多元生成-TODIM 方法评价职业院校教学质量。《中智集与系统》，79(1)：41，2025年。[837] Jing Li、Hong Fang 和 Wenyan Song。利用变精度粗糙集理论和 TODIM 方法进行失效模式与影响分析。IEEE Transactions on Reliability，68(4)：1242–1256，2019年。[838] Varun Tiwari、Pritee Khanna 和 Puneet Tandon。利用粗数和 TODIM 方法在概念评价过程中捕捉设计意图。Comput. Aided. Des. Appl.，第215–228页，2023年。[839] Peide Liu 和 Xinli You。用于多属性决策的概率语言 TODIM 方法。Granular Computing，2(4)：333–342，2017年。[840] Xu Xiuqin、Xie Jialiang、Yue Na 和 Wang Honghui。基于广义 Choquet 积分的概率不确定语言 TODIM 方法及其应用。《国际智能计算与控制论期刊》，14(2)：122–144，2021年。[841] Hesam Dehghani、A. Siami 和 Parisa Haghi。基于灰色方法和 TODIM 方法的采矿方法选择新模型。《Journal of Mining and Environment》，8：49–60，2017年。[842] Fan Lei、Qiang Cai、Ningna Liao、Guiwu Wei、Yan He、Jiang Wu 和 Cun Wei。概率不确定语言信息下基于混合加权距离的 TODIM-VIKOR 方法及其在医疗物流中心选址中的应用。Soft Computing，27：8541–8559，2023年。

[843] Peide Liu 和 Fei Teng。基于二维不确定语言变量的多属性群决策扩展 TODIM 方法。Complexity，21(5)：20–30，2016年。[844] Xiaoli Tian、Zeshui Xu 和 Jing Gu。基于累积前景理论的扩展 TODIM 方法及其在风险投资中的应用。《Informatica》，30(2)：413–429，2019年。[845] Ting Kuo。若干改进灰色关联分析模型综述。The Journal of Grey System，29(3)：70–78，2017年。[846] Małgorzata Gerus-Gościewska 和 Dariusz Gościewski。灰色关联分析（GRA）作为研究城市空间规划中社会偏好的有效方法。Land，11(1)：102，2022年。[847] Sanjeev Goyal 和 Sandeep Grover。应用模糊灰色关联分析对先进制造系统进行排序。Grey Systems: Theory and Application，2(2)：284–298，2012年。[848] Abdolreza Karimi、Behrouz Ahmadpour 和 Mohammad Reza Marjani。在废水处理工艺选择中使用模糊灰色关联分析方法。Iranian Journal of Health, Safety and Environment，5(3)：1041–1050，2018年。[849] Mukesh Kumar Mehlawat、Pankaj Gupta 和 Ahmad Zaman Khan。投资组合优化的集成模糊灰色关联分析方法。《应用智能》，53(4)：3804–3835，2023年。[850] Jianqin Fu、Guanjie Zhang、Dong Xu、Boquan Qin、Changhe Wei 和 Xilei Sun。基于改进模糊灰色关联分析的质子交换膜燃料电池入口参数协同优化。Thermal Science and Engineering Progress，55：103008，2024年。[851] Haibin Zhang 和 Lei Wang。基于区间值直觉模糊 GRA 方法的农业电子商务服务质量评价。Journal of Mathematics，2022年。[852] Zhiyuan Chen、Di Shen、Yaojun Ren、Fuping Yu 和 Xiujiu Yuan。基于 q 阶正交对概率犹豫模糊 GRA 和 TOPSIS 的空域运行效能评价。Symmetry，14：242，2022年。[853] Zhuoqian Li、Yajie Dou、Boyuan Xia、Kewei Yang 和 Mengjun Li。犹豫模糊环境下基于 GRA 方法的系统组合选择。Journal of Systems Engineering and Electronics，2022年。[854] Prosun Mandal、Srinjoy Chatterjee 和 Shankar Chakraborty。利用单值中智灰色关联分析对带有铜-MWCNT复合工具的电火花加工过程进行双目标优化。World Journal of Engineering，2024年。[855] Xueliang Wang。基于三角模糊中智多属性决策的大学英语线上线下混合教学效果评价灰色关联分析。International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems，27：193–205，2023年。[856] Volvo Sihombing、Zulkarnain Nasution、Muhammad Ali Al Ihsan、Marlina Siregar、Ibnu Rasyid Munthe、Victor Marudut Mulia Siregar、Irma Fatmawati 和 Dedy Ari Asfar。用于选择英语课程分支地点的加性比率评估（ARAS）方法。载于 Journal of Physics: Conference Series。IOP Publishing，2021年。[857] Shankar Chakraborty、Prasenjit Chatterjee 和 Partha Protim Das。加性比率评估（ARAS）方法。载于《制造环境中的多准则决策方法》，第171–181页。Apple Academic Press，2023年。[858] Cem Niyazi Durmu 和 Omer Faruk Gorcun。利用区间二型模糊 ARAS 方法评价独立审计事务所的战略管理和增长方案。Journal of Intelligent Decision Making and Information Science，2025年。[859] Poonkodi Sathiyamoorthy、Vimala Saravanan、M. Ramachandran 和 Chitra Periyasamy。使用模糊 ARAS 方法介绍微控制器和嵌入式系统。Journal on Innovations in Teaching and Learning，2025年。[860] Safiye Turgay 和 Recep Yilmaz。通过制造业工作评价提升组织效能：一种模糊 ARAS 方法评分方法。Engineering World，2024年。[861] Pratbiha Rani、Arunodaya Raj Mishra 和 Mohd Dilshad Ansari。区间值直觉模糊 ARAS 和 TOPSIS 方法下的智能手机选择问题分析。载于《2019年第五届图像信息处理国际会议（ICIIP）》，第509–514页。IEEE，2019年。[862] S. Anita Shanthi 和 S. Poonkodi。利用复Fermatean图形模糊 ARAS 和 COPRAS 方法估计高效 Wi-Fi 路由器。2025年IEEE第二届女性计算国际会议（InCoWoCo），第1–4页，2025年。[863] Stefan Jovcić、Vladimir Simic、Petr Průsa 和 Momcilo Dobrodolac。用于货运配送方案选择的图片模糊 ARAS 方法。Symmetry，12：1062，2020年。[864] Akın Menekşe 和 Hatice Camgöz Akdağ。利用球形模糊 ARAS 进行地震脆弱性评估。Intelligent and Fuzzy Techniques for Emerging Conditions and Digital Transformation，2021年。[865] Akın Menekşe 和 Hatice Camgöz Akdağ。医院建筑地震风险分析：一种新型区间值球形模糊 ARAS 方法。Journal of Risk Analysis and Crisis Response，2022年。[866] Irvaniza m Irvanizam、Novi Zahara 和 Marzuki Marzuki。基于多准则群体决策的单值中智 ARAS 学校选择方法。载于《多准则决策模型与技术：中智方法》，第307–332页。IGI Global Scientific Publishing，2025年。[867] Amit Kumar 和 Sonu Rajak。基于金属增材制造并结合 SWARA 和 WASPAS 多准则决策技术的生物植入材料选择。Journal of Materials Engineering and Performance，34：18766–18786，2025年。

[868] Qiankun Jiang 和 Haiyan Wang。基于混合直觉模糊熵-最佳-最差法-WASPAS 方法的造船企业供应商选择。Sustainability，2025年。[869] Tapan Senapati 和 Guiyun Chen。图片模糊 WASPAS 技术及其在多准则决策中的应用。Soft Computing，26(9):4413–4421，2022年。[870] Zenonas Turskis、Nikolaj Goranin、Assel Nurusheva 和 Seilkhan Boranbayev。基于模糊 WASPAS 的欧盟可持续发展关键信息基础设施确定方法。Sustainability，11(2):424，2019年。[871] Dongmei Li、Guorou Wan 和 Yuan Rong。一种增强型球面立方模糊 WASPAS 方法及其在众包物流平台服务质量评估中的应用。《Spectrum of Decision Making and Applications》，3(1):100–123，2026年。[872] Ping Fu、Shaopu Cao、Dingbin Xu、Xinhao Zhang 和 Jinsheng Xie。基于混合扩展费马提模糊 WASPAS 的建筑信息模型中区块链优化选择方法。《科学报告》，15(1):36004，2025年。[873] Bibhuti Bhusana Meher、Jeevaraj Selvaraj 和 Melfi A. Alrasheedi。基于聚合算子的梯形值直觉模糊 WASPAS 算法及其在风力发电厂项目选址中的应用。Mathematics，2025年。[874] Komal。基于阿基米德t-范数和t-余范数的直觉模糊 WASPAS 方法：在未知权重信息下评估医疗废物处置备选方案。《应用软计算》，146:110751，2023年。[875] S. Anita Shanthi 和 R. Preethi。基于双极模糊 WASPAS 方法的电化学放电加工分析。2023年04月，2023年01月第五届电气、计算机与通信技术国际会议（ICECCT），页码–。[876] Ubaid ur Rehman 和 Tahir Mahmood。基于 Einstein 算子的 BCF-WASPAS 方法识别软件缺陷预测中的特征选择技术。《Int. J. Intell. Comput. Cybern.》，18:183–216，2024年。[877] Cengiz Kahraman、Sezi Cevik Onar、Basar Oztaysi 和 Esra Ilbahar。使用毕达哥拉斯模糊 WASPAS 方法进行 GSM运营商选择。《Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing》，33，2019年。[878] Esra Ilbahar、Selcuk Cebi 和 Cengiz Kahraman。基于毕达哥拉斯模糊 WASPAS 方法的可再生能源方案评估：土耳其案例研究。载于《智能与模糊系统国际会议》，页码888–895。施普林格，2019年。[879] Ping Fu、Shaopu Cao、Dingbin Xu、Xinhao Zhang 和 Jinsheng Xie。基于混合扩展费马提模糊 WASPAS 的建筑信息模型中区块链优化选择方法。《科学报告》，15，2025年。[880] Arunodaya Raj Mishra 和 Pratibha Rani。基于费马提模糊 WASPAS 方法的多准则医疗废物处置地点选择。《复杂与智能系统》，7:2469–2484，2021年。[881] Yingshan Xu 和 Dongdong Zhang。使用循环图片模糊 WASPAS 方法识别服务创新和数字化产业中的人工智能驱动新兴趋势。Symmetry，17:1546，2025年。[882] Tapan Senapati 和 Guiyun Chen。图片模糊 WASPAS 技术及其在多准则决策中的应用。Soft Computing，26:4413–4421，2022年。[883] Aurimas Petrovas 和 Romualdas Bauvys。基于遗传算法和中智 WASPAS 算法的程序化视频游戏场景生成。《应用科学》，2022年。[884] Rokas Semenas 和 Romualdas Bauvys。基于中智 WASPAS 扩展方法的自适应自主机器人导航。Symmetry，14:179，2022年。[885] Yuhan Gao 和 Ali Yu。基于球形模糊 WASPAS 的体育课堂教学有效性提升因素优先级排序方法。《科学报告》，15(1):20875，2025年。[886] Phi-Hung Nguyen、Thanh-Tuan Dang、Kim-Anh Nguyen 和 Hong-Anh Pham。基于球形模糊 WASPAS 的熵客观赋权国际支付方式选择。《Computers, Materials & Continua》，72 2075，2022年1月 2055( ):–。[887] A Petrovas、R Bausys 和 EK Zavadskas。格式塔原理驱动的遗传毕达哥拉斯中智 WASPAS 游戏场景生成适应度函数。《International Journal of Computers, Communications & Control》，18(4)，2023年。[888] Chengxiu Yang、Qianzhe Wang、Jie Zhu 和 Xiangyu Fan。一种用于评估突防场景中航空集群射频隐身性能的新型毕达哥拉斯犹豫模糊 WASPAS 方法。载于《制导、导航与控制进展：2020年制导、导航与控制国际会议论文集》，ICGNC 2020，中国天津，2020年10月23–25日，页码1735–1744。施普林格，2021年。[889] Arunodaya Raj Mishra、Pratibha Rani、Kamal Raj Pardasani 和 Abbas Mardani。一种基于指数信息测度的绿色供应商问题评估新型犹豫模糊 WASPAS 方法。《清洁生产期刊》，238:117901，2019年。[890] Gordan Stojić、Željko Stević、Jurgita Antuchevičienė、Dragan Pamučar 和 Marko Vasiljević。一种用于PVC细木工产品制造企业供应商选择的新型粗糙 WASPAS 方法。《信息》，9(5):121，2018年。[891] Dongmei Wei、Yuan Rong、Harish Garg 和 Jun Liu。一种基于毕达哥拉斯模糊可约加权 Maclaurin对称平均的教学质量评价扩展 WASPAS 方法。Journal of Intelligent & Fuzzy Systems，42(4):3121–3152，2022年。

[892] Bartłomiej Kizielewicz 和 Aleksandra Bączkiewicz。住房选择问题中模糊TOPSIS、模糊 VIKOR、模糊 WASPAS 和模糊 MMOORA 方法的比较。Procedia Computer Science，192:4578–4591，2021年。[893] Samaneh Zolfaghari 和 Seyed Mostafa Mousavi。一种基于失效模式与影响分析、MULTIMOORA、TPOP 及区间值犹豫模糊语言集的新型风险评估方法：在医疗保健行业中的应用。Kybernetes，50 2547，2020年2521:–。[894] Mahyar Kamali Saraji、Abbas Mardani、Mario Köppen、Arunodaya Raj Mishra 和 Pratibha Rani。使用 SWARA-MULTIMOORA 方法的扩展犹豫模糊集：在高等教育机构中适应在线教育以控制新冠肺炎疫情传播。《Artificial Intelligence Review》，55(1):181–206，2022年。[895] ZENG Shouzhen、Alvydas Baležentis 和 SU Weihua。采用 MULTIMOORA 方法的多准则犹豫模糊群体决策。Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research，47(3)，2013年。[896] Gökay Akkaya、Betül Turanoğlu 和 Sinan Öztaş。集成模糊层次分析法和模糊 MOORA 的工业工程行业选择问题方法。Expert Systems with Applications，42(24):9565–9573，2015年。[897] Ikuobase Emovon、Oghenenyerovwho Stephen Okpako 和 Edith Edjokpa。模糊 MOORA 方法在自动锤击机设计与制造中的应用。World Journal of Engineering，18(1):37–49，2021年。[898] Biplab Sinha Mahapatra、Debashis Ghosh、Dragan Pamucar 和 GS Mahapatra。使用二元组毕达哥拉斯模糊 MOORA 方法进行企业资源规划选择的动态群体决策。Expert Systems with Applications，263:125675，2025年。[899] Sara Saboor、Vian Ahmed、Chiraz Anane 和 Zied Bahroun。用于推动建筑业社会可持续性的混合层次分析法–模糊 MOORA 决策支持工具。Sustainability，17(11):4879，2025年。[900] Luis Pérez-Domínguez、Alejandro Alvarado-Iniesta、Iván Rodríguez-Borbón 和 Osslan Vergara-Villegas。用于供应商选择的直觉模糊多目标优化比率分析。Dyna，82(191):34–41，2015年。[901] Partha Pratim Deb、Diptendu Bhattacharya 和 Indranath Chatterjee。使用直觉模糊多目标优化比率分析进行医院管理系统软件选择的多准则决策。载于《先进通信与机器智能国际会议》，页码183–195。施普林格，2023年。[902] Suleyman Mete。在毕达哥拉斯模糊环境下使用基于失效模式与影响分析的层次分析法-MOORA 集成方法评估管道建设中的职业风险。《Human and Ecological Risk Assessment: An International Journal》，25:1645–1660，2019年。[903] Şura Toptancı 和 Adle Neval İnal。基于费马提模糊 MOORA 的铝业公司危害分析方法。《Journal of Intelligent Systems in Current Computer Engineering》，2024年。[904] Gulfam Shahzadi、Anam Luqman 和 Mohammed M. Ali Al-Shamiri。基于费马模糊信息的扩展 MOORA 方法。《工程数学问题》，2022年。[905] Yakup Celikbilek。一种新的区间值中智层次分析法-MOORA 方法：在项目经理选择中的应用。Quality & Quantity，2025年。[906] Baisakhi Banik、Shariful Alam 和 Avishek Chakraborty。基于五边形中智领域和高级 MULTIMOORA 策略分析不同国家因新冠肺炎疫情激增造成的经济衰退。Process Integration and Optimization for Sustainability，8:975–991，2024年。[907] Prabina Kumar Patnaik、Priyadarshi Tapas Ranjan Swain、Srimant Kumar Mishra、Abhilash Purohit 和 Sandhyarani Biswas。基于层次分析法-MOORA 方法的结构应用复合材料选择。Materials Today: Proceedings，33:5659–5663，2020年。[908] Dana Marsetiya Utama、Mochammad Samsul Asrofi 和 Ikhlasul Amallynda。层次分析法-MOORA 算法在印度尼西亚纺织业绿色供应商选择中的应用。载于 Journal of Physics: Conference Series。IOP Publishing，2021年。[909] Phi-Hung Nguyen、Jung-Fa Tsai、Venkata Ajay G Kumar、Yi-Chung Hu 等。越南证券交易市场农业公司股票投资：层次分析法结合 GRA-TOPSIS-MOORA 方法。Journal of Asian Finance, Economics and Business，7(7):113–121，2020年。[910] Sumit Chawla、Saurabh Agrawal 和 Ranganath M Singari。用于新型自行车选择优先级排序的集成 TOPSIS-MOORA 模型。载于《工程设计进展：FLAME 2018精选论文集》，页码755–765。施普林格，2019年。[911] Anoop Kumar Sahu、Saurav Datta 和 Siba Sankar Mahapatra。使用灰色-MOORA 方法进行供应链绩效基准评估：一项实证研究。Grey Systems: Theory and Application，4(1):24–55，2014年。[912] Santosh Kumar Sahu、Saurav Datta、Saroj Kumar Patel 和 Siba Sankar Mahapatra。供应链绩效评估、基准评估与决策：使用灰色理论和灰色 MOORA 的实证研究。International Journal of Process Management and Benchmarking，3(3):233–289，2013年。[913] Rajesh Attri 和 Sandeep Grover。偏好选择指数法在生产系统生命周期设计阶段决策中的应用。《Journal of King Saud University-Engineering Sciences》，27(2):207–216，2015年。[914] Shankar Chakraborty、Prasenjit Chatterjee 和 Partha Protim Das。偏好选择指数（PSI）法。载于《Multi-Criteria Decision-Making Methods in Manufacturing Environments》，页码213–219。Apple Academic Press，2023年。

[915] Jiang Minglin 和 Haiping Ren。基于直觉模糊偏好选择指数法的电力变压器部件风险优先级评估。《工程数学问题》，2022年(1):8366893，2022年。[916] Emre Bilgin Sari。使用基于模糊理论的偏好选择指数法进行恢复备选方案决策。Logforum，16(1):171–181，2020年。[917] Hosein Gitinavard、Seyed Meisam Moosavi、Behnam Vahdani、Hamid Ghaderi 等。基于犹豫模糊偏好选择指数的建筑行业承包商选择新决策方法。《工业管理研究期刊》，2017年。[918] Edmundas Kazimieras Zavadskas、Zdravko Nunić、Željko Stjepanović 和 Olegas Prentkovskis。一种用于选择自动导引车（AGV）的新型粗糙值范围法（r-rov）。《信息学与控制研究》，27(4):385–394，2018年。[919] Serap Pelin Türkoğlu 和 Sevgi Eda Tuzcu。评估新冠肺炎疫情期间的国家表现：一种基于标准差的值范围法。《工程科学运筹学：理论与应用》，4(3):59–81，2021年。[920] Meijing Song、Aleksandar Blagojevic、Sandra Kasalica、Zeljko Stevic、Dragan Marinkovic 和 Olegas Prentkovskis。使用直觉模糊SWARA-模糊ROV模型评估运输链绩效。《匈牙利理工学报》，23 344，2026 1 329( ): – 。[921] Yu Duan、Željko Stević、Boris Novarlić、Sarfaraz Hashemkhani Zolfani、Ömer Faruk Görçün 和 Marko Subotić。模糊多准则决策模型在可持续废物管理多功能机器选择中的应用。Sustainability，17(6):2723，2025年。[922] S Narayanamoorthy、V Annapoorani 和 Daekook Kang。使用基于MOOSRA的犹豫模糊多准则决策法评估电子废物场址选择。载于《AIP会议论文集》。AIP Publishing LLC，2020年。[923] Nebojša Vasić、Milorad Kilibarda 和 Milan Andrejić。应用集成FAHP和MOOSRA方法选择电子商务分销渠道。《国际航运与运输物流期刊》，18(3):281–304，2024年。[924] Sanjib Biswas、Dragan Pamučar、Darko Božanić 和 Bikash Halder。一种新的球形模糊LBWA-MULTIMOOSRAL框架：用于评估印度微型、小型和中型企业精益程度的应用。《工程数学问题》，2022 5480848，2022 1( ): 。[925] Pegah Shayani Mehr、Ashkan Hafezalkotob、Keyvan Fardi、Hamidreza Seiti、Farzad Movahedi Sobhani 和 Arian Hafezalkotob。太阳能电池板技术选择的综合框架：BWM-MULTIMOOSRAL方法。《能源科学与工程》，10(12):4595–4625，2022年。[926] Sanda Narayanamoorthy、Vilk Annapoorani、Daekook Kang、Dumitru Baleanu、Jeonghwan Jeon、Joseph Varghese Kureethara 和 L Ramya。运用集成赋权方法和犹豫模糊MOOSRA对生物医疗废物处置方法进行全新评估。《清洁生产期刊》，275:122587，2020年。[927] Alptekin Ulutaş、Dragisa Stanujkic、Darjan Karabasevic、Gabrijela Popovic、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Florentin Smarandache 和 Willem KM Brauers。开发一种用于供应商选择的新型集成多准则决策MULTIMOOSRAL方法。《Informatica》，32(1):145–161，2021年。[928] Majid Behzadian、S Khanmohammadi Otaghsara、Morteza Yazdani 和 Joshua Ignatius。TOPSIS应用前沿进展综述。Expert Systems with Applications，39(17):13051–13069，2012年。[929] David L Olson。TOPSIS模型中权重的比较。《Mathematical and Computer Modelling》，40(7-8):721–727，2004年。[930] Sorin Nădăban、Simona Dzitac 和 Ioan Dzitac。模糊TOPSIS：概述。Procedia Computer Science，91 831，2016 823: – 。[931] Mahmood M Salih、BB Zaidan、AA Zaidan 和 Mohamed A Ahmed。2007年至2017年模糊TOPSIS前沿进展综述。《计算机与运筹学》，104:207–227，2019年。[932] T-C Chu。通过模糊TOPSIS方法选择工厂选址。《国际先进制造技术期刊》，20(11):859–864，2002年。[933] Xinxing Wu、Zhiyi Zhu、Chuan Chen、Guanrong Chen 和 Peide Liu。基于可容许距离测度、一般线性序下的单调直觉模糊TOPSIS法。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，31 1565，2022 5 1552( ): – 。[934] Feride Tuğrul。利用直觉模糊逼近理想解排序法选择无人飞行器的方法。《伊科尼翁数学期刊》，4(2):31–41，2022年。[935] Gülçin Büyüközkan 和 Sezin Güleryüz。使用直觉模糊逼近理想解排序法进行智能手机选择的多准则群决策方法。International Journal of Computational Intelligence Systems，9(4):709–725，2016年。[936] Penglei Nian。Vague-TOPSIS法及其在干扰效能评估中的应用。载于2025 IEEE第3届图像处理与计算机应用国际会议（ICIPCA）论文集，第1–5页。IEEE，2025年。[937] Muhammad Akram、Shumaiza 和 Maham Arshad。用于诊断的双极模糊TOPSIS和双极模糊ELECTRE-I方法。《计算与应用数学》，39(1):7，2020年。

[938] Ying Han、Zhenyu Lu、Zhenguang Du、Qi Luo 和 Sheng Chen。一种用于双相情感障碍诊断的阴阳双极模糊认知TOPSIS方法。《生物医学中的计算机方法与程序》，158:1–10，2018年。[939] Muhammad Akram、Wieslaw A Dudek 和 Farwa Ilyas。基于毕达哥拉斯模糊TOPSIS方法的群体决策。《国际智能系统杂志》，34(7):1455–1475，2019年。[940] Sezi Cevik Onar、Basar Oztaysi 和 Cengiz Kahraman。利用毕达哥拉斯模糊TOPSIS进行云服务提供商的多准则评价。Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing，30，2018年。[941] Seyed Shabahang Majd、Alireza Maleki、Sepideh Basirat 和 Amin Golkarfard。费马模糊TOPSIS方法及其在智慧城市背景下对基于商业智能的策略进行排序中的应用。《运作智能杂志》，2024年。[942] Marimuthu Dharmalingam、Ghanshaym S. Mahapatra 和 Raja Vijayakumar。用于选择移动通信塔选址的环境感知多准则决策：费马模糊逼近理想解排序法。International Journal of Fuzzy Systems，27:2017 – 2039，2025年。[943] Habib Zare Ahmadabadi、Ali Saffari Darberazi、Fatemeh Zamzam、Mohammad Sadegh Babakhanifard、Mehrdad Kiani 和 Elham Mofatehzadeh。供应链韧性影响因素模型：结合犹豫模糊逼近理想解排序法与元综合的集成方法。《工业工程应用研究期刊》，11(2):195–211，2024年。[944] Chenyang Song、Zeshui Xu、Jian Hou 和 Jianchao Ji。基于后悔理论的概率犹豫模糊TOPSIS方法及其在投资策略中的应用。Soft Computing，28(5):4285–4298，2024年。[945] Anu Gupta Aggarwal、Sanchita Aggarwal 和 Vinita Jindal。利用顾客评论对酒店进行排序：一种LDA-图片模糊TOPSIS方法。《系统保障工程与管理国际期刊》，16(5):1885–1898，2025年。[946] Sijia Zhu、Yuhan Li、Prasanalakshmi Balaji、Akila Thiyagarajan、Rajanikanth Aluvalu 和 Zhe Liu。一种基于新型散度测度、用于风险评估的改进区间值图片模糊TOPSIS方法。《工程与科学计算机建模》（CMES），144(2)，2025年。[947] Burcu Tezcan 和 Tamer Eren。基于球形模糊层次分析法和球形模糊逼近理想解排序法的野火装备规划整数规划。《环境系统与决策》，45(3):38，2025年。[948] Ebru Aydoğdu、Elif Güner、Başak Aldemir 和 Halis Aygün。基于熵的复球形模糊TOPSIS。Expert Systems with Applications，215:119331，2023年。[949] Pranab Biswas、Surapati Pramanik 和 Bibhas C Giri。群体决策中的中智TOPSIS。载于《使用中智集进行模糊多准则决策》，第543–585页，2019年。[950] Xihua Li、Yun Luo、Hongya Wang、Jiong Lin 和 Bin Deng。基于方面的情感分析与中智TOPSIS方法的医生选择。《工程应用人工智能》，124:106599，2023年。[951] Rana Muhammad Zulqarnain、Xiao Long Xin、Muhammad Saeed、Florentin Smarandache 和 Nadeem Ahmad。用于求解多准则决策问题的广义中智TOPSIS，第38卷。Infinite Study，2020年。[952] Arokia Pratheesha SV、Parul Arora、Ritika Wason、Divya Baliga B 等。基于四分单值中智精细化Hamacher聚合运算的多属性决策TOPSIS方法。《中智集与系统》，80 10，2025 1( ): 。[953] Muhammad Akram、Shumaiza 和 Florentin Smarandache。基于双极中智TOPSIS和双极中智ELECTRE-I的决策。Axioms，7(2):33，2018年。[954] PARTHA PRATIM Dey、Surapati Pramanik 和 BIBHAS C Giri。用于求解双极中智环境下多属性决策问题的TOPSIS。载于《中智理论与应用新趋势》，第65 77页，2016 – 。[955] Mohamed Abdel-Basset 和 Rehab Mohamed。一种用于可持续供应链风险管理的新型多基因TOPSIS-CRITIC模型。《清洁生产期刊》，247:119586，2020年。[956] Wenjing Liu、Yuemin Gao、Qiongyao Liu 和 Wenqiang Dai。高质量发展背景下，面向“双师型”教师质量评价的多准则决策与基于多元论集合的TOPSIS框架。《中智集与系统》，79(1):43，2025年。[957] Shampa Sengupta、Debabrata Datta、S Suman Rajest、P Paramasivan、T Shynu 和 Rajan Regin。开发粗糙TOPSIS算法作为混合多准则决策方法，并将其用于预测糖尿病。《生物信息学研究与应用国际期刊》，19(4):252–279，2023年。[958] Ahmad M Alshamrani 和 Ibrahim M Hezam。集成粗糙熵与粗糙TOPSIS方法，评估表现最差国家的列格坦繁荣支柱。《测量与控制》，56(9-10):1670–1683，2023年。[959] Zhuo Zhang、Yanyu Wang 和 Zhengxin Wang。一种基于加权关联系数的灰色TOPSIS方法。载于2013年IEEE灰色系统与智能服务国际会议（GSIS）论文集，第550–557页。IEEE，2013。[960] Jing Song 和 Junhui Zheng。灰色 TOPSIS 方法在高等教育教学质量评价中的应用。《国际新兴技术在线学习期刊》，10(8):42，2015 年。

[961] Ibtesam Alshammari、Mani Parimala、Cenap Ozel、Muhammad Riaz 和 Rania Kammoun。基于线性丢番图模糊软 TOPSIS 、 VIKOR 和聚合算子的新型多准则决策算法。《 Mathematics 》，10(17):3080，2022 年。[962] A Bobin 、 P Thangaraja、H Prathab 和 S Thayalan。使用立方超软TOPSIS方法进行决策。Infinite Study，2023年。[963] A Bobin 和 V Chinnadurai。基于相关系数的区间值直觉中智超软TOPSIS方法。《中智集与系统》，51(1):38，2022年。[964] T Kiruthika、M Karpagadevi、S Krishnaprakash 和 G Deepa。使用 Python 的超超软集及其在 TOPSIS 方法下中智超超软集中的应用。《中智集与系统》，91:586–616，2025年。[965] Constanța Zoie Rădulescu、Marius Rădulescu、Adrian Victor Vevera 和 Radu Boncea。扩展群体TOPSIS方法及其在网络安全中的应用。2024年控制、决策与信息技术第十届国际会议（CoDIT），第1768–1773页，2024年。[966] Jacob Muvingi、Arshad Ahmud Iqbal Peer、Josef Jablonský 和 F. Hosseinzadeh Lotfi。层级群体DEA超效率与群体TOPSIS技术：在移动货币代理选址中的应用。《Expert Syst. Appl.》，234，121033，2023年。[967] Ruey-Chyn Tsaur。区间 TOPSIS 方法的决策风险分析。《Applied Mathematics and Computation》，218(8):4295–4304，2011年。[968] Ana Pires、Ni-Bin Chang 和 Graça Martinho。基于AHP的模糊区间TOPSIS评估：葡萄牙塞图巴尔半岛固体废物管理系统可持续扩建。《Resources, Conservation and Recycling》，56，21，2011年，1 7( ): – 。[969] Ye Chen、Kevin W Li 和 Si-feng Liu。一种用于多准则决策分析的 OWA-TOPSIS 方法。《Expert Systems with Applications》，38(5):5205–5211，2011年。[970] Juan Roberto Pereira Salcedo、Karla Melissa Ruiz Quezada、Edison Luis Cruz Navarrete 和 Pedro Manuel García Arias。用于人工智能系统海量数据决策的中智OWA-TOPSIS模型。《中智集与系统》，84(1):49，2025年。[971] Arayeh Afsordegan、M Sánchez、N Agell、Siamak Zahedi 和 LV Cremades。利用定性 TOPSIS 方法在不确定条件下进行决策，以选择可持续能源方案。《International Journal of Environmental Science and Technology》，13(6):1419–1432，2016年。[972] Muniyandy Elangovan、Puppala Ramya 和 Chandrashekhar Goswami。可持续能源选项：应对挑战性情境的定性 TOPSIS 方法。《可持续技术创新的决策技术与方法：工业5.0中的策略与应用》，第45–67页，2025年。[973] Bhaveshkumar Nandanram Pasi、Sathish Kannan 和 Pallavi Dhamak。助力青年实现可持续创业：用于技能优先级排序和发展策略的集成模糊TOPSIS-AHP框架。《Journal of Enterprising Communities: People and Places in the Global Economy》，2025年。[974] Rong Gao、Xiaolan Xie 和 Q. Guo。K-TAHP：一种基于TOPSIS+AHP的 Kubernetes 负载均衡策略。《IEEE Access》，11:102132–102139，2023年。[975] Haris Doukas、Charikleia Karakosta 和 John Psarras。一种用于评估可再生能源选项可持续性的语言型TOPSIS模型。《International Journal of Global Energy Issues》，32(1-2):102–118，2009年。[976] Fengling Wang。用于多属性群体决策的概率双层次语言型TOPSIS方法及其在大学英语教学质量评价中的应用。《Discrete Dynamics in Nature and Society》，2022(1):6079906，2022年。[977] Osman Yavuz Akbulut。土耳其保险业企业财务绩效的灰色PSI与灰色MARCOS模型分析。《Knowledge and Decision Systems with Applications》，2025年。[978] Ahmed Hussein Ali、Amira Ben Salah 和 Hamidreza Rabiei-Dastjerdi。环境压力因素影响下，利用模糊MARCOS进行城市桥梁评估的多准则决策。《Mesopotamian Journal of Civil Engineering》，2025年。[979] Vahideh Shahin、Moslem Alimohammadlou 和 Dragan Stevan Pamucar。一种用于可再生能源选择的区间值圆形直觉模糊MARCOS方法。《 Spectrum of Decision Making and Applications》，2025年。[980] Muhammad Imran Shahid、AQ Baig、Muhammad Kamran、Dragan Stevan Pamucar 和 Ixtiyarov Farxod。一种用于评估教育环境中性骚扰因素的数据驱动多准则决策方法：将 ORDPA-F 与三角直觉模糊MARCOS方法相结合。《Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática》，2025年。[981] Guo Li、Xiuli Geng 和 Yong Yuan。新冠疫情暴发期间体育赛事服务供应商绩效评价：一种新颖的犹豫模糊MARCOS方法。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，45:3965–3984，2023年。[982] Er wei Hao 和 Junzhe Ma。利用基于图像模糊MARCOS的多准则群体决策方法，提升财务会计中的管理决策优化。《IEEE Access》，12:178171–178190，2024年。[983] Ömer Faruk Görçün 和 Ismail İyigün。超大超重货物运输中低平板挂车选择评估：一种混合图像模糊CRITIC-MARCOS模型。《Journal of Soft Computing and Decision Analytics》，2025年。

[984] Raiha Imran、Munazza Amin、Kifayat Ullah、Dragan Stevan Pamucar、Zeeshan Ali、Oumaima Saidani 和 Vladimir Simic。利用球形模糊MARCOS方法，采用数据驱动方法应对大学生的学业压力应对问题和心理健康问题。《应用软计算》，185:113925，2025年。[985] Milan Kovác、Snezana Tadić、Mladen Krstić 和 Mouhamed Bayane Bouraima。用于评估无人机城市物流概念的新型球形模糊MARCOS方法。《Complex.》，2021:2374955:1–2374955:17，2021年。[986] Nivetha Martin、Said Broumi、S.Sudha 和 R.Priya。中智MARCOS在智能制造系统决策中的应用。Neutrosophic Systems with Applications，2023年。[987] Shankha Shubhra Goswami、T. Tapankumar、N. Channa Keshava Naik、GOWRISHANKAR JAYAPALAN、Nilesh Bhosle、Amrita Singh、G. Sanyasi Raju、Dr. Nagesh 和 A. Johnson Santhosh。印度可持续可再生能源选择的多模型多准则决策框架：集成 CRITIC-EDAS-CODAS-CoCoSo。《Discover Sustainability》，6，2025年。[988] Asmaa Elsayed 和 Bilal Arain。利用 OWCM-CODAS 和三角中智集评估和选择医疗废物处理设备的系统方法。Neutrosophic Systems with Applications，2024年。[989] Rajdeep Singh。使用模糊 CODAS 方法分析影响工业绩效的因素。《International Journal of Process Management and Benchmarking》，2025年。[990] Ravindra Andukuri 和 Ch. Maheswara Rao。模糊 CODAS 在工业旋转机械状态监测设备最优选择中的应用。《Operations Research Forum》，5，2024年。[991] Eren Kamber 和 Murat Baskak。基于圆形直觉模糊 CODAS 方法的绿色物流园区选址：伊斯坦布尔案例。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，46:4173–4189，2023年。[992] Kaan Deveci、Rabia Cin 和 Ahmet Kağızman。一种改进的区间值直觉模糊 CODAS 方法及其在土耳其可再生能源方案多准则选择中的应用。《应用软计算》，96 106660，2020年：。[993] Eda Boltürk。毕达哥拉斯模糊 CODAS 及其在制造企业供应商选择中的应用。《J. Enterp. Inf. Manag.》，31:550–564，2018年。[994] Sara Almeraz-Durán、Luis Asunción Pérez Dominguez、David Luviano Cruz、Jesús Israel Hernández Hernández、Roberto Romero-López 和 Delia Julieta Valles-Rosales。基于毕达哥拉斯模糊 CODAS 方法开发失效模式与影响分析方法的框架。《Symmetry》，13:2236，2021年。[995] Dragan Stevan Pamucar、Ibrahim Badi、Korica Sanja 和 Radojko Obradović。利用语言中智 CODAS 方法选择发电技术的新方法：利比亚案例研究。《能源》，2018年。[996] Eda Boltürk 和 Ali Karaşan。使用中智 CODAS 方法对医院投资方案进行优先级排序。《J. Multiple Valued Log. Soft Comput.》，33:381–396，2019年。[997] Hacer Yumurtaci Aydogmus、Eren Kamber 和 Cengiz Kahraman。使用图像模糊 CODAS 方法进行 ERP 选择。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，40:11363–11373，2021年。[998] Geng Niu、Fei Zhang 和 Muyuan Guo。利用一种新型复数图像模糊 CODAS 算法，在移动僵尸网络命令与控制检测中进行终端取证。《Symmetry》，17:1637，2025年。[999] Ali Karaşan、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Cengiz Kahraman 和 Mehdi Keshavarz-Ghorabaee。通过区间值犹豫模糊 CODAS 方法进行住宅建筑工地选址。《Informatica》，30:689–710，2019年。[1000] Neşe Yalçın 和 Nimet Yapici Pehlivan。基于模糊包络的犹豫模糊语言术语集模糊 CODAS 方法应用：人员选拔问题案例研究。《Symmetry》，11:493，2019年。[1001] Akın Menekşe 和 Hatice Camgöz-Akdag。一种新型区间值球形模糊 CODAS：新冠肺炎时期学术单位的复课准备度评估。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，43:6461–6476，2022年。[1002] Aslı Yıldız 和 Coskun Ozkan。一种新颖的改进德尔菲法球形模糊层次分析法与球形模糊 CODAS 集成方法，用于自动售货机选址问题：伊斯坦布尔真实案例研究。《神经计算与应用》，36:823–842，2023年。[1003] Mehdi Keshavarz-Ghorabaee、Edmundas Kazimieras Zavadskas、Laya Olfat 和 Zenonas Turskis。使用一种基于与平均解距离的全新评价方法进行多准则库存分类（EDAS）。《Informatica》，26:435–451，2015年。[1004] Phuong Thanh Phan 和 Phong Thanh Nguyen。基于与平均解距离的评价方法：用于评估和选择施工经理的衍生模型。《Technologies》，2022年。[1005] Divya Zindani、Saikat Ranjan Maity 和 Sumit Bhowmik。用于材料选择问题的模糊EDAS（基于与平均解距离的评价）。载于《制造业计算方法进展：ICCMM 2019精选论文》，第755–771页。施普林格，2019年。[1006] Cüneyt Dumrul、Faik Bilgili、Fulya Zaralı、Yasemin Dumrul 和 Zerrin Kiliçarslan。使用直觉模糊 EDAS 方法评估土耳其的可再生能源方案。《Environmental Science and Pollution Research International》，31:15503–15524，2024年。[1007] Fatma Kutlu Gündogdu、Cengiz Kahraman 和 Hatice Nida Civan。一种新颖的犹豫模糊 EDAS 方法及其在医院选择中的应用。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，35:6353–6365，2018年。

[1008] Ningna Liao、Hui Gao、R. Lin、Guiwu Wei 和 Xudong Chen。基于累积前景理论、适用于含概率犹豫模糊信息的多属性群体决策的扩展 EDAS 方法。《Artificial Intelligence Review》，56：2971–3003，2022年。[1009] Harish Garg 和 Iman Mohamad Sharaf。具有球形模糊差异概念的新型球形聚合函数及其在球形模糊 EDAS 和工业机器人选择中的应用。《计算与应用数学》，41，2022年。[1010] Fengxia Diao 和 Guiwu Wei。球形模糊环境下的多属性群体决策 EDAS 方法。《International Journal of Knowledge-based and Intelligent Engineering Systems》，26：175–188，2022年。[1011] Ö mer Faruk Görçün 和 Hande Küçükönder。采用单值中智 EDAS 方法评估城市道路照明的能量采集方法。2025年人工智能、计算机、数据科学与应用国际会议（ACDSA），第1–8页，2025年。[1012] Ali Karaşan 和 Cengiz Kahraman。一种新颖的区间值中智 EDAS 方法：联合国国家可持续发展目标的优先级排序。《Soft Computing》，22：4891–4906，2018年。[1013] Morteza Yazdani 和 Felipe Reis Graeml。VIKOR 及其应用：最新综述。《Int. J. Strateg. Decis. Sci.》，5：56–83，2014年。[1014] Prasenjit Chatterjee 和 Shankar Chakraborty。VIKOR 方法及其变体的比较分析。《Decision Science Letters》，5：469–486，2016年。[1015] Serafim Opricovic。模糊 VIKOR 及其在水资源规划中的应用。《Expert Systems with Applications》，38(10)：12983–12990，2011年。[1016] Tsung-Han Chang。模糊 VIKOR 方法：台湾医院服务评价案例研究。《信息科学》，271：196–212，2014年。[1017] Xinhui Kang 和 Jiao Wang。利用稳定扩散模型和直觉模糊 VIKOR 优化历史建筑中的木雕窗格设计。《Humanities and Social Sciences Communications》，12(1)：1–16，2025年。[1018] Jiating Liang 和 Peng Liu。基于直觉模糊 VIKOR 的共享制造服务评价。《Heliyon》，10(8)，2024年。[1019] Zhengfu Yu、Donglai Wang、Azleena Mohd Kassim、Sijia Zhu 和 Zhe Liu。采用对数距离测度的扩展区间值毕达哥拉斯模糊 VIKOR 方法，用于大学图书馆服务质量评价。《Journal of Mathematics》，2025(1)：9966857，2025年。[1020] M Maheshpraba 和 M Kameswari。结合圆形毕达哥拉斯模糊 AHP 与圆形毕达哥拉斯模糊 VIKOR 技术进行多专家饼干供应商选择。《Intelligent Decision Technologies》，2024年。[1021] Yu-tong Luo 和 Mu Zhang。基于费马模糊 VIKOR 方法的芯片制造上市公司信用风险评价。载于《中国灾害防御协会风险分析理事会第十届年会论文集》（RAC 2022），第206页。Springer Nature，2023年。[1022] Sunil Kumar Sharma。通过结合 Boruta-GA 混合优化模型的梯形双极模糊 VIKOR 技术改进股票投资组合选择：一种多准则决策方法。《International Journal of Computational Intelligence Systems》，18，2025年。[1023] Muhammad Riaz、Anam Habib、Muhammad Saqlain 和 Miin-Shen Yang。立方双极模糊 VIKOR 方法：采用新的距离与熵测度及爱因斯坦平均聚合算子，并应用于可再生能源。《国际模糊系统杂志》，25：510–543，2022年。[1024] Peng Yang 和 Pingqing Liu。基于具有可信度的犹豫模糊 VIKOR 多属性决策方法评价大学智能化水平。《国际模糊系统杂志》，第1–14页，2025年。[1025] Serdar Koçak、Yusuf Tansel İç、Kumru Didem Atalay、Mustafa Sert 和 Berna Dengiz。审稿人遴选方法的开发：多层犹豫模糊 VIKOR 和 TOPSIS 方法。《Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing》，14(4)：3275–3302，2023年。[1026] Iman Mohamad Sharaf。一种用于氢储存系统评价的新型球形模糊 TOPSIS 和球形模糊 VIKOR 方法：Im Sharaf。《Soft Computing》，27(8)：4403–4423，2023年。[1027] Elif Haktanir 和 Cengiz Kahraman。采用比例球形模糊 VIKOR 方法对电动运动型多用途汽车进行多准则比较。《Journal of Fuzzy Extension and Applications》，6(2)：318–343，2025年。[1028] Xinlong Li、Yuhong Du、Ziqi Rong 和 Shuaijie Zhao。基于 TODIM 的复球形模糊 VIKOR 方法：评估近红外光谱中羊绒和羊毛纤维分类的最优波段区间。《Journal of Natural Fibers》，22(1)：2519667，2025年。[1029] Hossein Sayyadi Tooranloo 和 Arezoo Sadat Ayatollah。用于多属性群体决策的中智 VIKOR 方法。《Operations Research and Decisions》，34(2)：121–134，2024年。[1030] Hasan Eroğlu 和 Ridvan Şahin。基于中智 VIKOR 方法、采用改进距离测度和得分函数的决策方法：可再生能源方案选择案例研究。《Cognitive Computation》，12 1355，2020 6 1338( ): – 。

[1031] Peiwen Wang、Yan Lin、Min Fu 和 Zhiping Wang。用于多元生成概率语言多属性群体决策的 VIKOR 方法及其在可持续供应链金融风险评估中的应用。《国际模糊系统杂志》，25 793，2023 2 780( ): – 。[1032] Muhammad Rizqy Abdurrahman Assyifa、Elisa Kusrini、Agus Mansur 和 Ridwan Andi Purnomo。考察液化石油气可持续物流指标的监测系统：集成 DEMATEL-模糊灰色VIKOR框架。《Process Integration and Optimization for Sustainability》，第1–32页，2025年。[1033] Ahmed Shihab Albahri、Jameel R Al-Obaidi、AA Zaidan、Osamah Shihab Albahri、Rula A Hamid、BB Zaidan、Abdullah Hussein Alamoodi 和 M Hashim。基于集成层次分析法和群体 VIKOR 方法、用于新冠肺炎患者优先级排序的多生物学实验室检查框架。《国际信息技术与决策杂志》，19(05)：1247–1269，2020年。[1034] Kareem A Dawood、AA Zaidan、Khaironi Y Sharif、Abdul A Ghani、Hazura Zulzalil 和 BB Zaidan。基于最佳-最差法和群体 VIKOR 技术、用于开源软件选择的新型多视角可用性评价框架。《国际信息技术与决策杂志》，22(01)：187–277，2023年。[1035] Kai-wen Shen 和 Jian-qiang Wang。基于 Z数新型综合加权距离度量的 Z-VIKOR 方法及其应用。《IEEE Transactions on Fuzzy Systems》，26(6)：3232–3245，2018年。[1036] Zamali Tarmudi、Shamsatun Nahar Ahmad、Siti Afiqah Mohammad、Ahmad Faiz Ghazali、Mazlyda Abd Rahman 和 Yaya Sudarya Triana。采用 Z数方法的 VIKOR 投资组合选择决策方法。《Malaysian Journal of Computing (MJoC)》，9(1)：1759–1767，2024年。[1037] Leyla Demir、Muhammet Enes Akpınar、Ceyhun Araz 和 Mehmet Ali Ilgın。基于新型多准则排序方法的绿色供应商评价系统：VIKORSORT。《Expert Systems with Applications》，114：479–487，2018年。[1038] Lanndon Ocampo 和 Kafferine Yamagishi。旅游景点的多准则排序与感知 COVID-19 暴露风险：VIKORSORT 的应用。《Kybernetes》，51(11)：3121–3152，2022年。[1039] Xiuzhen Li 和 Wenyan Song。基于粗糙 VIKOR 和质量功能展开的产品相关服务设计属性优先级排序。《工程数学问题》，2016(1)：9642018，2016年。[1040] Liting Jing、Jiaxin Wang、Jing Xie、Di Feng、Jianxiang Wang、Xiang Peng 和 Shaofei Jiang。一种基于定量仿真、融合键合图与不确定环境下粗糙 VIKOR 的概念设计评价方法。《清洁生产期刊》，380：134928，2022年。[1041] Tarakeswar Barik、Suchismita Parida 和 Kamal Pal。CFRP层合板钻削工艺参数优化：MOORA–TOPSIS–VIKOR 综合方法。《Fibers and Polymers》，25(5)：1859–1876，2024年。[1042] Mohammad Hadi Haghighatnejad、Reza Tavakoli Moghaddam 和 Hossein Amoozadkhalili。采用 TOPSIS-VIKOR 决策技术，评估压力管理方法与管网管理操作的整合，以减少水损失。《Journal of Water and Wastewater Science and Engineering》，8(1)：41–48，2023年。[1043] Muhammad Akram、Maria Shabir、Arooj Adeel 和 Ahmad N Al-Kenani。多属性决策框架：基于复杂球形模糊n软集的 VIKOR 方法。《工程数学问题》，2021(1)：1490807，2021年。[1044] Tao Wang、Xinxing Wu、Harish Garg、Li-Yu Daisy Liu 和 Guanrong Chen。基于前景理论的 MABAC 算法：针对图像模糊集采用新型相似度测度和交互运算及其应用。《Eng. Appl. Artif. Intell.》，126：106787，2023年。[1045] Pu Ji、Hong yu Zhang 和 Jian qiang Wang。基于单值中智语言集、采用 MABAC-ELECTRE方法组合的外包供应商选择。《Comput. Ind. Eng.》，120：429–441，2018年。[1046] Rıdvan Şahin 和 Fatma Altun。概率单值中智犹豫模糊环境下基于 MABAC 方法的决策。《Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing》，11(10)：4195–4212，2020年。[1047] Rajkumar Verma。基于新型指数型模糊信息测度的模糊 MABAC 方法。《Soft Computing》，25：9575–9589，2021年。[1048] Darko Bozanić、Adis Puska、Dusko Tesić、Andjelka Stilic、Kifayat Ullah、Yousif Raad Muhsen 和 Ibrahim M. Hezam。用于组合工程机械——反铲装载机排序的模糊层次分析法-模糊 MABAC 模型。《Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering》，2025年。[1049] Zeeshan Ali。用于阿尔茨海默病诊断的模糊 MABAC 深度学习：复杂命题线性丢番图模糊幂聚合分析。《TFSS》，4：129–158，2025年。[1050] SP Sundar Singh Sivam、N Harshavardhana 和 D Kumaran。通过直觉模糊 MABAC 实现可持续优化：增量板料成形中锥形微杯的制造。《Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering》，46(7)：445，2024年。[1051] Mengwei Zhao、Guiwu Wei、Xudong Chen 和 Yu Wei。基于累积前景理论、用于多属性群体决策的直觉模糊 MABAC 方法。《国际智能系统杂志》，36 6359，2021 11 6337( ): – 。[1052] Utpal Mandal 和 Mijanur Rahaman Seikh。基于 Dombi聚合算子、属性权重未知的区间值球形模糊 MABAC 方法，用于塑料废物管理过程的选择。《应用软计算》，145 110516，2023 : 。

[1053] Peide Liu 和 Pei Zhang. 基于 CCSD 和前景理论的正规波动犹豫模糊 MABAC 方法，用于多属性决策. 《国际智能系统杂志》, 36:447 – 477, 2020 年 .[1054] Lili Rong 、 Lei Wang 、 Peide Liu 和 Baoying Zhu. 基于多粒度不平衡犹豫模糊语言 MABAC 方法的慕课评价. 《国际智能系统杂志》, 36:5670 – 5713, 2021年.[1055] Sumera Naz、Aqsa Shafiq、Shariq Aziz Butt、Gabriel Piñeres-Espitia、Dragan Stevan Pamucar 和 Rabia Ijaz. 使用新型二元组语言q-阶图模糊MABAC框架评估用于安全交易的区块链软件系统. Expert Syst. Appl., 268:126162, 2024年.[1056] Nezir Aydin、Sukran Seker 和 Ceyda Güngör Sen. 石油和天然气行业安全风险评估新框架：基于失效模式与影响分析和最佳-最差法的图片模糊 MABAC 应用. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2022年.[1057] Dragan Pamučar 和 Darko Božanić. 多式联运物流中心开发地点的选择：单值中智MABAC模型的应用. Infinite Study, 2019年.[1058] Ping Wang、Jie Wang、Guiwu Wei、Cun Wei 和 Yu Wei. 二元组语言中智环境下用于多属性群决策的多属性边界近似区域比较（MABAC）. 《Informatica》, 30(4):799–818, 2019年.[1059] Radojko Lukić. 使用ARAT 和粗糙MABAC方法评估塞尔维亚贸易绩效动态. Oeconomica Jadertina, 14(2):34–44, 2024年.[1060] Jabbar Ahmmad、Osamah AbdulAziz Al-Dayel、Meraj Ali Khan 和 Tahir Mahmood. 使用模糊粗糙MABAC决策优化残障支持系统中的人工智能辅助技术. 《科学报告》, 15(1):18335, 2025年.[1061] M. Clement、Joe Anand、K. Kalaiarasi、Nivetha Martin、B. Ranjitha、S. Sujitha Priyadharshini 和 Mohit Tiwari. 使用模糊C均值聚类与 MAIRCA-多准则决策方法对可行的电气产品物流供应商进行分类. 2023 第一届网络物理系统、电力电子与电动汽车国际会议（ICPEEV）, 第 1–7 页, 2023年.[1062] Huu Quang Nguyen、Van-Tung Nguyen、Dang-Phong Phan、Quoc Hoang Tran 和 Ngoc Pi Vu. 使用 MARCOS、TOPSIS 和 MAIRCA 方法进行 PMEDM 过程中的多准则决策. 《应用科学》, 2022年.[1063] Xiaoyu Zhang. 面向可持续经济，结合生态经济因素的能源价格与需求预测：毕达哥拉斯模糊 MAIRCA CRITIC 方法. 《科学报告》, 15, 2025年.[1064] Mohammad Mohammadi、Amin Mehranzadeh 和 Mohsen Chekin. F-EVM：结合模糊 MAIRCA 方法和模糊特征向量法，改进物联网中的路由. Cluster Computing, 27:5121 – 5141, 2024年.[1065] Xiaofei Shi 和 Fei Li. 使用圆型直觉模糊MAIRCA-CRITIC模型对体育教育项目进行智能数据驱动评估. 《科学报告》, 15, 2025年.[1066] Fatih Ecer. 新冠肺炎时期使用直觉模糊集扩展 MAIRCA 方法进行冠状病毒疫苗选择. 《神经计算与应用》, 34:5603 – 5623, 2022年.[1067] Jose Rui Figueira、Salvatore Greco、Bernard Roy 和 Roman Słowiński. ELECTRE方法：主要特点与最新进展. 《多准则分析手册》, 第 51–89 页, 2010年.[1068] Kannan Govindan 和 Martin Brandt Jepsen. ELECTRE：方法论与应用的综合文献综述. 《欧洲运筹学杂志》, 250(1):1–29, 2016年.[1069] Muhammad Akram、Shumaiza 和 Maham Arshad. 用于诊断的双极模糊逼近理想解排序法和双极模糊ELECTRE-I方法. 计算与应用数学, 39(1):7, 2020年.[1070] Mehmet Sevkli. 模糊ELECTRE方法在供应商选择中的应用. 《国际生产研究杂志》, 48(12):3393–3405, 2010年.[1071] Babak Daneshvar Rouyendegh 和 Serpil Erol. 使用模糊ELECTRE方法选择最佳项目. 《工程数学问题》, 2012(1):790142, 2012年.[1072] Babak Daneshvar Rouyendegh 和 Turan Erman Erkan. 模糊ELECTRE方法在学术人员选择中的应用. Human Factors and Ergonomics in Manufacturing & Service Industries, 23(2):107–115, 2013年.[1073] Binyamin Yusoff、Dian Pratama、Adem Kilicman 和 Lazim Abdullah. 用于群决策分析的圆型直觉模糊 ELECTRE III 模型. 《Informatica》, 34(4):881–908, 2023年.[1074] Maryam Daneshvar、Fatemeh Karimi Jafari 和 Zahra Moradi Golriz. 采用直觉模糊 DEMATEL-ELECTRE 混合方法评估组织单位绩效. Journal of decisions and operations research, 9(3):584–606, 2024年.[1075] Qinghua Mao、Jiacheng Fan、Jian Lv、Yaqing Gao、Jinjin Chen 和 Mengxin Guo. 基于毕达哥拉斯模糊 ELECTRE-III 方法的海上光伏电站选址决策框架. Journal of Renewable and Sustainable Energy, 16(2), 2024年.[1076] Li-Ping Zhou、Shu-Ping Wan 和 Jiu-Ying Dong. 一种用于多准则群体决策的费马特模糊ELECTRE方法. 《Informatica》, 33(1):181–224, 2022年.[1077] Murat Kirişci、Ibrahim Demir 和 Necip Şimşek. 费马特模糊ELECTRE多准则群决策与最适宜生物医学材料选择. Artificial Intelligence in Medicine, 127:102278, 2022年.

[1078] Zhang-peng Tian、Ru-xin Nie、Xiao-Kang Wang 和 Jian-qiang Wang. 在权重信息未知的情况下用于多准则群体决策的单值中智 ELECTRE II. 计算与应用数学, 39 224, 2020年 3( ): .[1079] Li Zhang、Shufeng Cheng 和 Peide Liu. 用于多准则群体决策的概率多值中智 ELECTRE 方法. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 39(5):7587–7604, 2020年.[1080] Muhammad Akram、Shumaiza 和 Florentin Smarandache. 基于双极中智 TOPSIS 和双极中智 ELECTRE-I 的决策. Axioms, 7:33, 2018年.[1081] Akin Menekse 和 Hatice Camgoz-Akdag. 使用球形模糊 ELECTRE 进行内部审计规划. Applied Soft Computing, 114:108155, 2022年.[1082] S Anita Shanthi 和 KG Basavaraju. 使用费马图像模糊 ELECTRE 方法估算可再生能源. 载于 2024年第四届电气、计算、通信与可持续技术进展国际会议（ICAECT）, 第 1–4 页. IEEE, 2024年.[1083] Wang Jikai、Dou Yajie、Guo Gangzheng、Ouyang Weijun、Qiu Zhiran 和 Tan Yuejin. 区间值犹豫模糊 ELECTRE III-Borda 共识优化融合模型：战略规划项目群体决策框架. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2026年.[1084] Denis Bouyssou 和 Thierry Marchant. 关于 ELECTRE TRI-B 与 ELECTRE TRI-C 之间的关系及 ELECTRE TRI-B 的一种新变体. 《欧洲运筹学杂志》, 242(1):201–211, 2015年.[1085] Vincent Mousseau 和 Roman Slowinski. 根据分配示例推断 ELECTRE TRI 模型. 全球优化杂志, 12(2):157–174, 1998.[1086] Musavarah Sarwar、Muhammad Akram 和 Peide Liu. 用于自动化制造过程风险评估与影响分析的集成粗糙 ELECTRE II 方法. Artificial Intelligence Review, 54(6):4449–4481, 2021年.[1087] Huiyun Lu、Shaojun Jiang、Wenyan Song 和 Xinguo Ming. 模糊环境下可持续供应商选择的粗糙多准则决策方法. Sustainability, 10(8):2622, 2018年.[1088] Ghous Ali、Muhammad Nabeel 和 Adeel Farooq. 基于球形立方模糊集的扩展 ELECTRE 多准则群体决策方法. 知识与信息系统, 66(10):6269–6306, 2024 年 .[1089] Chuanyang Ruan 、 Shicheng Gong 和 Xiangjing Chen. 基于概率区间值直觉犹豫模糊信息和后悔理论的扩展 ELECTRE III 方法多准则群体决策. 《复杂与智能系统》, 11(1):92, 2025年.[1090] Antonio J Sánchez-Garrido、Ignacio J Navarro、José García 和 Víctor Yepes. 一种基于自适应 ANP 与 ELECTRE IS 的多准则决策模型, 采用定量变量. Mathematics, 10(12):2009, 2022年.[1091] Yan Tu、Hongwei Shi、Kai Chen、Yingying Liang、Xiaoyang Zhou 和 Benjamin Lev. 基于三参照点的群体 ELECTRE III 方法，用于城市洪涝韧性评估. Expert Systems with Applications, 210:118488, 2022年.[1092] Decui Liang、Yuanyuan Fu 和 Alessio Ishizaka. 考虑不可比较类别的共识型群体 ELECTRE-SORT 方法及其在机器维护策略分配中的应用. Omega, 118:102849, 2023年.[1093] Juscelino Almeida-Dias、José Rui Figueira 和 Bernard Roy. 一种每个类别由多个参考行动表征的多准则排序方法：ELECTRE TRI-NC 方法. 《欧洲运筹学杂志》, 217(3):567–579, 2012年.[1094] Ana Sara Costa、Kannan Govindan 和 José Rui Figueira. 使用 ELECTRE TRI-NC 方法对新兴经济体的供应商进行分类：考虑可持续性方面的案例研究. 《清洁生产期刊》, 201 947, 2018年 925: – .[1095] Mohammad Hassan Kamfiroozi 和 NAEINI ALI BONYADI. 灰色环境下的供应商选择：灰色理论、层次分析法、靶心法与 ELECTRE 方法. INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION, SECURITY AND SYSTEMS MANAGEMENT, 2013.[1096] Jean Dezert 和 Jean-Marc Tacnet. 基于信任函数的软 ELECTRE TRI 超越方法. 载于 2012年第15届信息融合国际会议, 第 607–614 页. IEEE, 2012年.[1097] Muhammad Akram、Arooj Adeel、Ahmad N Al-Kenani 和 José Carlos R Alcantud. 犹豫模糊 n-软 ELECTRE-II 模型：一种新的决策框架. 《神经计算与应用》, 33(13):7505–7520, 2021年.[1098] Mir Seyed Mohammad Mohsen Emamat、Caroline Maria de Miranda Mota、Mohammad Reza Mehregan、Mohammad Reza Sadeghi Moghadam 和 Philippe Nemery. 在股票投资组合选择背景下使用 ELECTRE-TRI 和 FlowSort 方法. 《Financial Innovation》, 8(1):11, 2022 年 .[1099] Dimitri Van Assche 和 Yves De Smet. 基于分类示例的 FlowSort 参数引导 . 《国际多准则决策期刊》 , 6(3):191–210, 2016年.[1100] Ana Carolina Scanavachi Moreira Campos、Bertrand Mareschal 和 Adiel Teixeira de Almeida. 模糊 FlowSort：将 FlowSort 方法与模糊集理论相结合，根据不精确的定量数据进行决策. 《信息科学》, 293:115–124, 2015年.

[1101] Masoume Gholizade、Mohammad Rahmanimanesh、Hadi Soltanizadeh 和 Shib Sankar Sana。犹豫三角模糊 FlowSort 方法：多准则决策问题。《国际系统科学杂志：运营与物流》，10(1):2259293，2023年。[1102] Sasan Ghorbani、Komeil Bour 和 Roohollah Javdan。应用 PROMETHEE II、WASPAS 和 CoCoSo 模型评估隧道掘进机施工中的岩土工程灾害。《科学报告》，15，2025年。[1103] Wojciech Saabun、Jarosaw Watróbski 和 Andrii Shekhovtsov。多准则决策分析方法是否可作为基准？对 TOPSIS、VIKOR、COPRAS 和 PROMETHEE II 方法的比较研究。Symmetry，12:1549，2020年。[1104] Muhammad Akram 和 Rabia Bibi。基于集成 PROMETHEE 方法与二元语义费马模糊集的多准则群体决策。Granular Computing，第1–25页，2023年。[1105] Ying-Hsiu Chen、Tien-Chin Wang 和 Chao-Yen Wu。运用模糊 PROMETHEE 进行信息系统外包战略决策。Expert Systems with Applications，38(10):13216–13222，2011年。[1106] Huchang Liao 和 Zeshui Xu。直觉模糊 PROMETHEE 多准则决策。《智能与模糊系统杂志》，27(4):1703–1717，2014年。[1107] Dilber Uzun Ozsahin 和 Ilker Ozsahin。采用模糊 PROMETHEE 方法评估乳腺癌治疗技术。International Journal of Medical Research & Health Sciences，7(5):29–32，2018年。[1108] Thomas Bakas、Christopher Papadopoulos、Dionissis Latinopoulos、Ifigenia Kagalou 和 Mike Spiliotis。用于地中海流域管理的扩展直觉模糊 PROMETHEE II 群体决策：Bakas 等人的研究。Water Resources Management，39(9):4243–4260，2025年。[1109] Muhammad Akram、Shumaiza 和 Ahmad N Al-Kenani。基于双极模糊 PROMETHEE 过程的绿色供应商选择多准则群体决策。Symmetry，12(1):77，2020年。[1110] Rajesh Arunachalam 和 Esther Rani Perumal。基于双极模糊信息的 PROMETHEE 超越方案，用于缓解无线传感器网络中的吸血鬼攻击。Transactions on Emerging Telecommunications Technologies，33(9):e4564，2022年。[1111] Ting-Yu Chen。针对勾股模糊信息的多准则决策分析，提出一种新颖的基于 PROMETHEE 的超越方法。IEEE Access，6:54495–54506，2018年。[1112] Muhammad Akram、Maheen Sultan、Arooj Adeel 和 Mohammed M Ali Al-Shamiri。勾股模糊 n-软 PRO METHEE 方法：一种群体决策新框架。AIMS Math，8(8):17354–17380，2023年。[1113] Revathy Aruchsamy、Inthumathi Velusamy、Krishnaprakash Sanmugavel、Prasantha Bharathi Dhandapani 和 Kaviku- mar Ramasamy。费马模糊集的推广，以及费马模糊 PROMETHEE II 方法在通过 PROMETHEE GAIA 进行决策中的应用。Axioms，13(6):408，2024年。[1114] Weizhong Wang、Yi Wang、Yu Chen、Muhammet Deveci、Seifedine Kadry 和 Witold Pedrycz。运用混合区间值费马模糊 PROMETHEE-II 模型分析食品工业采纳韧性供应链的障碍。Journal of Industrial Information Integration，40:100614，2024年。[1115] M Priya 和 R Kumaravel。运用层次分析法和图像模糊 PROMETHEE-II 探究水质评估：深入研究。Malaysian Journal of Mathematical Sciences，18(3):515–527，2024年。[1116] Sui-Zhi Luo、Si-Huan Hu、Qian Li 和 Ji an Wu。用于文化旅游产品定价的图像模糊 CEBOM-PROMETHEE 模型。IEEE Access，12:129844–129856，2024年。[1117] Sonia Hajlaoui 和 Nesrin Halouani。犹豫模糊 PROMETHEE 方法。载于：2013年第五届建模、仿真与应用优化国际会议（ICMSAO），第1–6页。IEEE，2013年。[1118] Iman Mohamad Sharaf。运用球形模糊 PROMETHEE 评估地热能源系统。载于:《球形模糊集决策：理论与应用》，第375–397页。施普林格，2020年。[1119] Gabriel HM Pinheiro、Nadya Regina Galo 和 Bruno de Athayde Prata。巴西绿色氢能运输方式选择：球形模糊 PROMETHEE II 的应用。Applied Soft Computing，第114290页，2025年。[1120] Romualdas Bausys、Edmundas Kazimieras Zavadskas 和 Rokas Semenas。采用 m-广义 q-中智 PROMETHEE 方法为巡检机器人选择路径。《能源》，15(1):223，2021 年。[1121] Edmundas Kazimieras Zavadskas 、Romualdas Bausys、Arturas Kaklauskas 和 Saulius Raslanas。通过一对一神经营销和中智 PROMETHEE 方法评估享乐型购物租金。Applied Soft Computing，85 105832，2019 : 。[1122] Chen-Tung Chen、Yuan-Chu Hwang 和 Wei-Zhan Hung。应用多语言 PROMETHEE 方法进行人员评估与选择。载于：2009年 IEEE 工业工程与工程管理国际会议，第1312–1316页。IEEE，2009年。[1123] Macarena Espinilla、Nesrin Halouani 和 Habib Chabchoub。用于异质多准则群体决策问题的纯语言 PROMETHEE I 和 II 方法。International Journal of Computational Intelligence Systems，8(2):250–264，2015年。[1124] Muhammad Akram、Maheen Sultan、José Carlos R Alcantud 和 Mohammed M Ali Al-Shamiri。扩展模糊 n-软 PROMETHEE 方法及其在机器人管家选拔中的应用。Math. Biosci. Eng，20:1774–1800，2023年。

[1125] Partha Protim Das 和 Shankar Chakraborty。应用灰色 PROMETHEE 方法对绿色粉末混合电火花加工过程进行参数优化。Process Integration and Optimization for Sustainability，5(3):645–661，2021年。[1126] J Suresh、J Martin Sahayaraj、B Rajakumar 和 N Jayapandian。基于混合贝叶斯与改进灰色 PROMETHEE-AL 模型的信任度估计技术，用于阻止移动自组网中的恶意节点与自私节点。Wireless Networks，30(3):1697–1718，2024年。[1127] Mohammad Azadfallah。运用扩展群体 PROMETHEE I 程序对供应链中的供应商进行评估与选择。International Journal of Supply Chain and Operations Resilience，3(1):56–76，2017年。[1128] Laila Oubahman、Szabolcs Duleba 和 Domokos Esztergár-Kiss。运用混合 AHP 群体 PROMETHEE 模型分析大学生的出行方式选择偏好：来自布达佩斯市的证据。European Transport Research Review，16(1):8，2024年。[1129] Mesran Mesran、Surya Darma Nasution、Sandy Syahputra、Abdul Karim 和 Elvitrianim Purba。扩展 PROMETHEE II 在机械师技能等级提升中的应用。Int. J. Sci. Res. Sci. Technol，4(2):125–130，2018年。[1130] J Vimala、AN Surya、Nasreen Kausar、Dragan Pamucar、Vladimir Simic 和 Mohammed Abdullah Salman。采用 (p, q)-棱线性丢番图模糊集的扩展 PROMETHEE 方法及其在机器人选择问题中的应用。《科学报告》，15 69，2025 1( ): 。[1131] Mukta Sapkota、Meenakshi Arora、Hector Malano、Ashok Sharma 和 Magnus Moglia。采用 PROMETHEE–GAIA 方法对混合供水系统进行综合评估。《水》，10(5):610，2018年。[1132] Jean-Philippe Hubinont。SMAA-GAIA：SMAA-PROMETHEE 方法的辅助工具。《国际多准则决策期刊》，6(3):237–246，2016年。[1133] Salvatore Corrente、Salvatore Greco、Floriana Leonardi 和 Roman Słowiński。应用层次 SMAA-PROMETHEE 方法评估欧洲城市的可持续性。《应用智能》，51(9):6430–6448，2021年。[1134] Nesrin Halouani、Habib Chabchoub 和 J-M Martel。用于项目选择的 PROMETHEE-MD-2T 方法。《欧洲运筹学杂志》，195(3):841–849，2009年。[1135] Musavarah Sarwar、Fariha Zafar、Iqra Abdul Majeed 和 Soha Javed。工业制造中的供应商选择：一种模糊粗糙 PROMETHEE 方法。《工程数学问题》，2022(1):6141225，2022年。[1136] Fariha Zafar、Muhammad Shoaib Saleem、Iqra Abdul Majeed 和 Soha Javed。一种新的粗糙 PROMETHEE 方法，用于评估全身麻醉过程中的潜在失效模式及其影响：F. Zafar 等人的研究。Soft Computing，28(4):3449–3463，2024年。[1137] Alireza Alinezhad 和 Javad Khalili。QUALIFLEX 方法。载于：《多属性决策的新方法与应用（MADM）》，第41–46页。施普林格，2019年。[1138] Jian Li 和 Jian-qiang Wang。概率犹豫模糊环境下用于选择绿色供应商的扩展 QUALIFLEX 方法。《国际模糊系统杂志》，19(6):1866–1879，2017年。[1139] Zhiming Zhang。基于似然度比较方法的区间值犹豫模糊 QUALIFLEX 方法多准则决策分析。《神经计算与应用》，28(7):1835–1854，2017年。[1140] Xiaolu Zhang 和 Zeshui Xu。基于 QUALIFLEX 的犹豫模糊多准则决策分析。载于：《多准则决策分析的犹豫模糊方法》，第71–95页。施普林格，2016年。[1141] Ting-Yu Chen。采用似然度比较方法进行多准则决策分析的区间值直觉模糊 QUALIFLEX 方法。《信息科学》，261:149–169，2014年。[1142] Antonios Paraskevas 和 Michael Madas。一种基于中智 QUALIFLEX 方法的新型多准则决策技术。《中智集与系统》，2024年。[1143] Rıdvan Şahin。基于中智犹豫指数的中智 QUALIFLEX 方法，用于在 COVID-19 疫情期间选择潜在的防病毒口罩供应商。Soft Computing，26(19):10019–10033，2022年。[1144] Juan-Juan Peng 和 Chao Tian。用于治疗方案选择的多值中智距离型 QUALIFLEX 方法。《信息》，9(12):327，2018年。[1145] M Madić 和 G Petrović。应用 ORESTE 方法解决交通运输与物流中的决策问题。《UPB 科学通报，D辑：机械工程》，78(4):83–94，2016年。[1146] Soniya Gupta、Natasha Awasthi 和 Dheeraj Kumar Joshi。一种基于 ORESTE 方法的决策框架，运用概率型对偶犹豫模糊信息促进可再生能源开发。《模糊扩展与应用杂志》，6(1):14–42，2025年。[1147] Yi Wang、Xiao Han 和 Weizhong Wang。一种用于评估食品供应链韧性的费马模糊 ORESTE 方法。《运作智能杂志》，2024年。[1148] Hui Zhang、Hui Gao 和 Peide Liu。运用新的区间二型模糊 ORESTE 方法评估新冠肺炎疫情冲击下的区域经济恢复力。《复杂与智能系统》，第1–36页，2022年。[1149] Çiğdem Sıcakyüz 和 Babek Erdebilli。电子信任是可持续性的驱动因素吗？采用扩展直觉模糊 ORESTE 方法评估土耳其电子商务行业。《可持续性》，15(13):10693，2023年。

[1150] Weizhang Liang、Bingran Dai、Guoyan Zhao 和 Hao Wu。采用犹豫模糊ORESTEQUALIFLEX方法评估绿色矿山的绩效。《数学》，2019年。[1151] Wei Yang 和 Yongfeng Pang。基于交叉熵测度的 T-球形模糊ORESTE方法及其在多属性决策中的应用。Soft Computing，26：10371–10387，2022年。[1152] Saliha Karadayi-Usta 和 Erfan Babaee Tirkolaee。采用中智ORESTE方法评估时尚品牌的可持续性。Sustainability，2023年。[1153] Chao Ding、Rangcao Tang 和 Wen Ji。面向不确定性下商务英语语言分析课程规划与教学支持的智能单值中智多准则决策框架。《科学报告》，16，2026年。[1154] Guolin Ke、Qi Meng、Thomas Finley、Taifeng Wang、Wei Chen、Weidong Ma、Qiwei Ye 和 Tie-Yan Liu。LightGBM：一种高效的梯度提升决策树。载于 Neural Information Processing Systems，2017年。[1155] Bahzad Charbuty 和 Adnan Mohsin Abdulazeez。基于决策树算法的机器学习分类。《Journal of Applied Science and Technology Trends》，2021年。[1156] Robin LP Chang 和 Theodosios Pavlidis。模糊决策树算法。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics，7(1)：28–35，2007年。[1157] B Chandra 和 P Paul Varghese。模糊SLIQ决策树算法。《IEEE 系统、人类与控制论汇刊 B辑（控制论）》，38(5)：1294–1301，2008年。[1158] Cristina Olaru 和 Louis Wehenkel。一种完备模糊决策树技术。Fuzzy Sets and Systems，138 254，2003 2 221( ): – 。[1159] Yingtao Ren、Xiaomin Zhu、Kaiyuan Bai 和 Runtong Zhang。一种新的直觉模糊决策树随机森林集成。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，31：1729–1741，2023年。[1160] Sahar Sardari、Mahdi Eftekhari 和 Fatemeh Afsari。用于高度不平衡数据分类的犹豫模糊决策树方法。Applied Soft Computing，61：727–741，2017年。[1161] Mahdi Eftekhari、Adel Mehrpooya、Farid Saberi-Movahed 和 Vicenç Torra。用于高度不平衡数据分类的犹豫模糊决策树方法。载于 How Fuzzy Concepts Contribute to Machine Learning，第93–106页。施普林格，2022年。[1162] Sakshi Taaresh Khanna、Sunil Kumar Khatri 和 Neeraj Kumar Sharma。用于口腔癌检测的医疗保健数据中智统计分析。International Journal of Neutrosophic Science (IJNS)，26(3)，2025年。[1163] Bo Pang。用于决策树构建的中智信息增益：在体育大学网球教练教学表现评价中的应用。《中智集与系统》，91(1)：9，2025年。[1164] Harris Drucker 和 Corinna Cortes。提升决策树。载于 Advances in Neural Information Processing Systems，8，1995年。[1165] Alex Rogozhnikov。采用提升决策树重新加权。载于 Journal of Physics: Conference Series。IOP Publishing，2016年。[1166] Mohammad Hamidi 和 Marzieh Rahmati。关于二元决策超树（超图）。AUT Journal of Mathematics and Computing，5(2)：117–130，2024年。[1167] Shuang An 和 Qinghua Hu。模糊粗糙决策树。载于 International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing，第397–404页。施普林格，2012年。[1168] Rafael Falcon、Rami Abielmona 和 Erik Blasch。采用模糊粗糙决策树对船舶类型进行行为学习。载于第17届信息融合国际会议（FUSION），第1–8页。IEEE，2014年。[1169] Catherine Breslin 和 Mark JF Gales。用于生成互补系统的有向决策树。Speech Communication，51(3)：284–295，2009年。[1170] Catherine Breslin 和 Mark JF Gales。使用有向决策树生成互补系统。载于2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP'07，第4卷，第IV–337页。IEEE，2007年。[1171] David Laughton、G Joe、M Paduada 和 M Samis。使用仿真方法进行完备决策树分析：以艾伯塔采用蒸汽注入生产沥青为例。载于 SPE Annual Technical Conference and Exhibition?，第SPE–103178页。SPE，2006年。[1172] EV Djukova 和 NV Peskov。一种基于完备决策树的分类算法。Pattern Recognition and Image Analysis，17(3)：363–367，2007年。[1173] Chaojun Liu 和 Yonghong Yan。使用语音决策树进行稳健的状态聚类。Speech Communication，42(3- 4)：391–408，2004年。[1174] Harriet J Nock、Mark JF Gales 和 Steve J Young。语音决策树状态聚类方法的比较研究。载于 Eurospeech，第111–114页，1997年。[1175] Anissa Frini、Adel Guitouni 和 Jean-Marc Martel。多准则决策树的一般分解方法。《欧洲运筹学杂志》，220(2)：452–460，2012年。

[1176] Maciej Nowak 和 Bogusław Nowaka。多准则决策树在项目规划中的应用。Procedia Technology，9：826–835，2013。[1177] Bing Huang、Hua-xiong Li 和 Da-kuan Wei。直觉模糊信息系统中的基于优势关系的粗糙集模型。Knowledge-Based Systems，28：115–123，2012年。[1178] Salvatore Greco、Benedetto Matarazzo 和 Roman Słowiński。有序数据的粒计算与数据挖掘：基于优势关系的粗糙集方法。载于 Granular, Fuzzy, and Soft Computing，第117–145页。施普林格，2023年。[1179] Shaoyong Li、Tianrui Li 和 Dun Liu。属性集变化情况下基于优势关系的粗糙集方法中的增量更新近似。Knowledge-Based Systems，40：17–26，2013年。[1180] Salvatore Greco、Benedetto Matarazzo 和 Roman Słowiński。基于优势关系的粗糙集方法在不确定性决策与时间偏好中的应用。Annals of Operations Research，176(1)：41–75，2010年。[1181] Salvatore Greco、Benedetto Matarazzo 和 Roman Słowiński。基于优势关系的粗糙集方法在涉及多位决策者的决策中的应用。载于 International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing，第306–317页。施普林格，2006年。[1182] Marko Palangetić、Chris Cornelis、Salvatore Greco 和 Roman Słowiński。使用有序加权平均算子扩展模糊基于优势关系的粗糙集方法。载于欧洲模糊逻辑与技术学会第11届会议（EUSFLAT 2019），第528–535页。Atlantis Press，2019年。[1183] Marko Palangetić、Chris Cornelis、Salvatore Greco 和 Roman Słowiński。基于优势关系的粗糙集方法的模糊扩展。International Journal of Approximate Reasoning，129：1–19，2021年。[1184] Martin L Puterman。马尔可夫决策过程。Handbooks in Operations Research and Management Science，2 434，1990 331：–。[1185] Frédérick Garcia 和 Emmanuel Rachelson。马尔可夫决策过程。人工智能中的马尔可夫决策过程，第1–38页，2013年。[1186] Mahdi Fakoor、Amirreza Kosari 和 Mohsen Jafarzadeh。采用模糊马尔可夫决策过程进行人形机器人路径规划。Journal of Applied Research and Technology，14(5)：300–310，2016年。[1187] Malay Bhattacharyya。模糊马尔可夫决策过程。Fuzzy Sets and Systems，99(3)：273–282，1998年。[1188] Jianjun Yin。三重不确定性下休闲体育产业竞争力分析战略规划的区间值中智马尔可夫决策模型。《中智集与系统》，91(1)：52，2025年。[1189] Wei Zhao。新质生产力背景下用于职业教育人才培养质量评价的精化 n 值中智马尔可夫决策过程。《中智集与系统》，91(1)：44，2025年。[1190] Ling Xu 和 Jian-Bo Yang。多准则决策与证据推理方法导论，第106卷。曼彻斯特管理学院，曼彻斯特，2001年。[1191] Jian-Bo Yang 和 Madan G Singh。一种用于不确定性下多属性决策的证据推理方法。IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics，24(1)：1–18，1994年。[1192] Chengpeng Wan、Jupeng Yuan、Desheng Cao、Tianni Wang 和 Adolf K.Y. Ng。一种用于评估港口抵御台风韧性的基于模糊证据推理的模型。Transportation Research Part D: Transport and Environment，2024年。[1193] Xiaohe Dong、Congcong Zhao、Bing Wu 和 Carlos Guedes Soares。一种基于模糊证据推理的方法，用于评估长江沉船造成的航行阻碍风险。Maritime Policy & Management，52：912–929，2024年。[1194] Hu-Chen Liu、Long Liu 和 Qing-Lian Lin。采用模糊证据推理和基于置信规则的方法进行模糊失效模式与影响分析。IEEE Transactions on Reliability，62(1)：23–36，2013年。[1195] Hu-Chen Liu、Qing-Lian Lin 和 Ming-Lun Ren。采用模糊证据推理方法和动态自适应模糊佩特里网进行故障诊断与原因分析。Computers & Industrial Engineering，66(4)：899–908，2013年。[1196] Yanni Wang、Yaping Dai、Yu-wang Chen 和 Fancheng Meng。采用直觉模糊邓普斯特-谢弗理论进行医疗诊断的证据推理方法。International Journal of Computational Intelligence Systems，8(1)：75–94，2015年。[1197] Susmita Mishra 和 M Prakash。采用直觉模糊理论的数字乳腺钼靶推理系统。Computer Systems Science & Engineering，41(3)，2022年。[1198] Benhong Peng、Chaoyu Zheng、Xuan Zhao、Guo Wei 和 Anxia Wan。基于风险态度与证据推理方法论的毕达哥拉斯模糊多属性群决策。International Journal of Intelligent Systems，36(11)：6180–6212，2021年。[1199] Xiaozhuan Gao、Lipeng Pan 和 Yong Deng。量子毕达哥拉斯模糊证据理论：从量子质量函数视角进行否定。IEEE Transactions on Fuzzy Systems，30(5)：1313–1327，2021年。[1200] Chonghui Zhang、Wuhui Lu、Zeshui Xu 和 Wenting Xue。基于含犹豫模糊信息的证据推理算法评估电力系统改革方案。Applied Intelligence，53(21)：26079–26097，2023年。

[1201] Muhammad Zahid、Ezzeddin Bakhtavar、Salim Khoso、Syed Naveel Hussain、Rehan Sadiq和Kasun Hewage。球形模糊证据推理在车网互动赋能的电动汽车普及中的应用：基于数据的公众认知分析。《旅行行为与社会》，42:101169，2026年。[1202] Jiang Li、Jianping Fan、Ruixin Chen和Meiqin Wu。在图形模糊多准则环境下，基于准则移除效应和证据推理方法的三支决策。《国际模糊系统杂志》，第1–15页，2025年。[1203] Sunay P Pai和Rajesh S Prabhu Gaonkar。中智环境下基于证据推理的失效模式评估模型。载于《国际可靠性、安全与危险会议》，第259–271页。施普林格，2024年。[1204] Yanhui Guo和Abdulkadir Sengur。Necm：中智证据C均值聚类算法。《神经计算与应用》，26(3):561–571，2015年。[1205] Sunay P Pai和Rajesh S Prabhu Gaonkar。多元生成环境下基于证据推理的风险评估。载于《机械工程最新进展：ICRAMERD 2020精选论文集》，第949–962页。施普林格，2021年。[1206] Maryam Bagheri Fard Sharabiani、Mohammad Reza Gholamian Gholamian和Seyed Farid Ghannadpour。利用目标规划和相似函数求解不完全层次分析法模型的新方法。《国际层次分析法杂志》，15(1)，2023。[1207] Ramadan Hamed Mohamed。目标规划与模糊规划之间的关系。《模糊集与系统》，89(2):215–222，1997年。[1208] Liang-Hsuan Chen和Feng-Chou Tsai。具有不同重要性和优先级的模糊目标规划。《欧洲运筹学杂志》，133(3):548–556，2001年。[1209] Edward L Hannan。论模糊目标规划。《决策科学》，12(3):522–531，1981年。[1210] Samir Dey和Tapan Kumar Roy。用于求解非线性多目标结构问题的直觉模糊目标规划技术。《模糊集值分析杂志》，3(00243):1–15，2015年。[1211] Jafar Razmi、Ehsan Jafarian和Saman Hassanzadeh Amin。一种直觉模糊目标规划方法，用于求解多目标规划问题的帕累托最优解。《Expert Systems with Applications》，65 193，2016 181：–。[1212] Sayan Chandra Deb和Sahidul Islam。毕达哥拉斯模糊目标规划：一种新方法及其应用。《国际运筹学杂志》，50(4):477–489，2024年。[1213] Sayan Deb和Sahidul Islam。一种基于毕达哥拉斯模糊集精确函数的新型目标规划方法。《OPSEARCH》，61(1):245–262，2024年。[1214] Indrani Maiti、Tarni Mandal和Surapati Pramanik。用于多层级多目标线性规划问题的中智目标规划策略。《Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing》，11 3186，2020 8 3175( )：–。[1215] Wajahat Ali、Mohd Khalid、Nabil Ahmed Khan和Shakeel Javaid。融合费马模糊与中智目标规划，在不确定性下实现多目标医疗优化。《全寿命周期可靠性与安全工程》，第1–21页，2025年。[1216] Anushree Bhattacharya和Madhumangal Pal。通过图形模糊目标规划方法分析印度可持续生物医学废物管理。《运筹学》，26(1):15，2026年。[1217] Firoz Ahmad和Ahmad Yusuf Adhami。球形模糊目标规划问题。载于《Decision Making with Spherical Fuzzy Sets: Theory and Applications》，第495–514页。施普林格，2020年。[1218] Hideichi OHTA和Toshikazu YAMAGUCHI。考虑模糊解的含分数目标多目标规划。《日本模糊理论与系统学会杂志》，7(6):1221–1228，1995年。[1219] Chandra Sen。改进的多目标规划技术。《美国运筹学杂志》，10 48，2020 3 45( )：–。[1220] James S Dyer。交互式目标规划。《管理科学》，19(1):62–70，1972年。[1221] Abu S Masud和Ching-Lai Hwang。交互式序贯目标规划。《运筹学会杂志》，32(5):391–400，1981年。[1222] M Victoria Rodríguez Uría、Rafael Caballero、Francisco Ruiz和Carlos Romero。元目标规划。《欧洲运筹学杂志》，136(2):422–429，2002年。[1223] Rafael Caballero、Francisco Ruiz、M Victoria Rodríguez Uría和Carlos Romero。交互式元目标规划。《欧洲运筹学杂志》，175(1):135–154，2006年。[1224] Selma Gütmen、Sankar Kumar Roy和Gerhard-Wilhelm Weber。加权目标规划概述：具有若干新观点的多目标运输问题。《中欧运筹学杂志》，32(3):557–568，2024年。[1225] Jernej Prišenk、Jernej Turk、Črtomir Rozman、Andreja Borec、Magdalena Zrakić和Karmen Pažek。结合线性规划与加权目标规划在农业应用中的优势。《运筹学》，14(2):253–260，2014年。

[1226] Carlos Romero。扩展字典序目标规划：一种统一方法。Omega，29(1):63–71，2001年。[1227] Ali AlArjani和Teg Alam。用于银行绩效管理的词典序目标规划模型。《应用数学杂志》，2021(1):8011578，2021年。[1228] Chia-Nan Wang、Nhat-Luong Nhieu和Trang Thi Thu Tran。用于可持续全球生产规划的随机切比雪夫目标规划混合整数线性模型。Mathematics，9(5):483，2021年。[1229] Neha Gupta、Irfan Ali和Abdul Bari。求解线性双层多跟随者规划问题的切比雪夫目标规划方法。Aligarh J Stat，35:41–50，2015年。[1230] Susan Jane Wilkins。用于具有多个目标的小群体决策的交互式目标规划算法。内布拉斯加大学林肯分校，1985年。[1231] T Gómez、M Hernández、MA León和R Caballero。通过线性分式目标规划模型求解森林规划问题。《森林生态与管理》，227(1-2):79–88，2006年。[1232] Bijay Baran Pal和Somsubhra Gupta。一种利用遗传算法求解区间值多目标分式规划问题的目标规划方法。载于《2008年IEEE第10区及第三届工业与信息系统国际会议》，第1–6页。IEEE，2008年。[1233] Ching-Ter Chang。多选择目标规划。Omega，35(4):389–396，2007年。[1234] Ching-Ter Chang。具有效用函数的多选择目标规划。《欧洲运筹学杂志》，215(2):439–445，2011年。[1235] William W Cooper、Lawrence M Seiford和Joe Zhu。《数据包络分析手册》。Springer Science & Business Media，2011年。[1236] Yong-bae Ji和Choonjoo Lee。数据包络分析。《Stata杂志》，10(2):267–280，2010年。[1237] Saowanee Lertworasirikul、Shu-Cherng Fang、Jeffrey A. Joines和Henry L. W. Nuttle。模糊数据包络分析（DEA）：一种可能性方法。《Fuzzy Sets Syst.》，139:379–394，2003年。[1238] Meilin Wen和Huaishu Li。模糊数据包络分析（DEA）：模型与排序方法。《计算与应用数学杂志》，223:872–878，2009年。[1239] Ali Emrouznejad、Madjid Tavana和Adel Hatami-Marbini。模糊数据包络分析的最新进展。《基于模糊数据包络分析的绩效测量》，第1–45页，2013。[1240] Saowanee Lertworasirikul、Shu-Cherng Fang、Jeffrey A Joines和Henry LW Nuttle。模糊数据包络分析（DEA）：一种可能性方法。《模糊集与系统》，139(2):379–394，2003年。[1241] Jolly Puri和Shiv Prasad Yadav。直觉模糊数据包络分析：在印度银行业中的应用。《Expert Systems with Applications》，42(11):4982–4998，2015年。[1242] Francisco Javier Santos Arteaga、Ali Ebrahimnejad和Amir Zabihi。一种求解直觉模糊数据包络分析问题的新方法。《模糊优化与建模杂志》（FOMJ），2(2):46–57，2021年。[1243] Kshitish Kumar Mohanta。利用双极模糊数据包络分析对决策单元进行效率分析与排序。《数据科学与智能系统杂志》，2025年。[1244] KK Mohanta。利用数据包络分析中的双极模糊数提升绩效评估。《运筹与战略分析杂志》，3(3):199–210，2025年。[1245] Mohammad Aqil Sahil、Meenakshi Kaushal和QM Danish Lohani。一种新型毕达哥拉斯模糊数据包络分析模型：印度公共部门银行评估，2022年。[1246] Arunodaya Raj Mishra、Abhijit Saha、Pratibha Rani、Dragan Pamucar、Debjit Dutta和Ibrahim M Hezam。利用HF-DEA-FOCUM-MABAC技术进行可持续供应商选择：汽车制造业案例研究。《Soft Computing》，26(17):8821–8840，2022年。[1247] Kshitish Kumar Mohanta和Deena Sunil Sharanappa。球形模糊数据包络分析（SF-DEA）：一种全新的效率分析方法。载于《AIP会议论文集》。AIP Publishing LLC，2024年。[1248] Kshitish Kumar Mohanta、Deena Sunil Sharanappa、Devika Dabke、Lakshmi Narayan Mishra和Vishnu Narayan Mishra。球形模糊输入和输出背景下的数据包络分析。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，15(3):1158–1179，2022年。[1249] Wei Yang、Lulu Cai、Seyed Ahmad Edalatpanah和Florentin Smarandache。三角形单值中智数据包络分析：在医院绩效测量中的应用。Symmetry，12(4):588，2020年。[1250] Basma E El-Demerdash、A Almutairi、Sultan S Alodhaibi、Hamiden Abd El-Wahed Khalifa和Heba Ghareb Goma。中智环境下优化两阶段系统的数据包络分析框架。《中智集与系统》，85(1):13，2025年。[1251] Jianzhong Li、Alhanouf Alburaikan和Rita de Fátima Muniz。利用中智数据包络分析评估建设项目的基于安全性的绩效。《管理决策》，61(2):552–568，2023年。[1252] Walid Abdelfattah。基于多属性集和数学规划的DEA总体效率评估变量选择程序。《国际科学研究与管理杂志》，10(05):397–409，2022年。

[1253] Johanna Irene Escobar Jara。基于多元生成 DEA 计算厄瓜多尔玻利瓦尔大学基础教育项目学生基础数字能力教学策略效率的方法。《中智集与系统》，84(1):36，2025年。[1254] Gülin Zeynep Öztaş、Esra Aytaç Adalı、Ayşegül Tuş、Tayfun Öztaş 和 Abdullah Özçil。绩效评估的备选方法：多元论集合与数据包络分析。载于《智能与模糊系统国际会议》，第742–749页。施普林格，2020年。[1255] Chiang Kao 和 Shiuh-Nan Hwang。两阶段数据包络分析中的效率分解：在台湾非寿险公司的应用。《欧洲运筹学杂志》，185(1):418–429，2008年。[1256] Ümit Sağlam。用于评估美国39个州风电效率的两阶段数据包络分析模型。《能源转换与管理》，146:52–67，2017年。[1257] Jiangxue Zhang、Yimeng Liu、Yuan Chang 和 Lixiao Zhang。中国工业生态效率：利用三阶段数据包络分析进行省级量化。《清洁生产期刊》，143:238–249，2017年。[1258] Shan Huang。基于一种新的数据包络分析方法的综合环境效率分析：超松弛基于测度的网络三阶段数据包络分析方法。《清洁生产期刊》，400:136689，2023年。[1259] Yi Yang、Wen-Jing Xue 和 Jing Liu。中国海南县级公立医院的效率评估：基于面板数据的四阶段数据包络分析模型。《中华医学杂志》，134(07):876–878，2021年。[1260] Zhaohua Wang 和 Chao Feng。中国能源、环境与经济效率及生产率的绩效评估：全局数据包络分析的应用。《应用能源》，147:617–626，2015年。[1261] Zhaohua Wang 和 Chao Feng。中国生产无效率与生产率增长的来源：全局数据包络分析。《能源经济学》，49:380–389，2015年。[1262] Ji uping Xu、Bin Li 和 Desheng Wu。粗糙数据包络分析及其在供应链绩效评价中的应用。《国际生产经济学杂志》，122(2):628–638，2009年。[1263] L Cevallos-Torres、F Zahra Montazeri 和 F Rasoulpour。不确定性下的供应链效率评估：粗糙集理论与数据包络分析的整合。《J. Intell. Manag. Decis》，3(4):231–247，2024年。[1264] A Al-Refaie。用于求解田口方法多响应问题的灰色数据包络分析方法。《机械工程师学会会刊B辑：工程制造期刊》，224 158，2010 1 147( ): – 。[1265] Hamid Asnaashari、Abbas Sheikh Aboumasoudi、Mohammad Reza Mozaffari 和 Mohammad Reza Feylizadeh。采用两步灰色数据包络分析方法，将索赔削减准则应用于高效承包商的选择。《Grey Systems: Theory and Application》，13(4):785–807，2023年。[1266] José Ramón San Cristóbal。用于评估可再生能源技术效率的多准则数据包络分析模型。《可再生能源》，36(10):2742–2746，2011年。[1267] H Moheb-Alizadeh、SM Rasouli 和 Reza Tavakkoli-Moghaddam。在模糊环境下使用多准则数据包络分析（MCDEA）解决位置—分配问题。《Expert Systems with Applications》，38 5695，2011 5 5687( ): – 。[1268] Peter C Fishburn。社会选择理论。普林斯顿大学出版社，2015年。[1269] Hannu Nurmi。模糊社会选择：选择性回顾。Soft Computing，12:281–288，2007年。[1270] Peter C Casey、Michael B Gibilisco、Carly A Goodman、Kelly Nelson Pook、John N Mordeson、Mark J Wierman 和 Terry D Clark。模糊社会选择模型：解释政府组建过程，第318卷。施普林格，2014年。[1271] Michael B. Gibilisco、Annie M. Gowen、Karen E. Albert、John N. Mordeson、Mark J. Wierman 和 Terry D. Clark。模糊社会选择理论。载于《模糊性与软计算研究》，2014年。[1272] Girish H Subramanian、John Nosek、Sankaran P Raghunathan 和 Santosh S Kanitkar。决策表与决策树的比较。《美国计算机协会通讯》，35(1):89–94，1992年。[1273] Cao Chinh Nghia 和 Nguyen Long Giang。模糊决策表中基于模糊粗糙集的属性约简。《国际计算机应用杂志》，132:32–37，2015年。[1274] Geert Wets、Fja Frank Witlox、Hjp Harry Timmermans 和 Jan Vanthienen。使用模糊决策表的位置选择建模。载于《北美模糊信息处理会议会刊》，第80–84页，1996年。[1275] Xiao yan Zhang、Ling Wei、Shuqun Luo 和 Weihua Xu。直觉模糊决策表中的相似度与不确定性度量。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，31:2767–2777，2016年。[1276] Bing Huang、Huaxiong Li、Guo fu Feng 和 Xianzhong Zhou。多尺度直觉模糊决策表中的优势关系粗糙集。《Appl. Math. Comput.》，348:487–512，2019年。[1277] Pritpal Singh 和 Kinjal Rabadiya。信息分类、可视化与决策：一种基于中智集理论的方法。载于《2018 IEEE国际系统、人类与控制论会议（SMC）》，第409–414页。IEEE，2018年。

[1278] Gurpreet Kaur、Aishwarya Dhara、Arunava Majumder、Balvinder Singh Sandhu、Avinandan Puhan 和 Manoj Singh Adhikari。在中智环境下的 CRITIC-TOPSIS 多准则决策技术及其在飞机选择中的应用。《当代数学》，4(4):1180–1203，2023年。[1279] Kamal Kumar 和 Shyi-Ming Chen。基于转换决策矩阵、概率密度函数和区间值直觉模糊值的多属性决策。《信息科学》，554:313–324，2020年。[1280] Sandeep Kumar 和 Mohit Kumar。利用博弈论方法求解区间值直觉模糊决策矩阵下的多群体决策问题。《国际管理科学与工程管理杂志》，16:34–42，2020年。[1281] Pavla Rotterová 和 Ondřej Pavlačka。模糊决策矩阵的新方法。《匈牙利理工学报》，14(5):85–102，2017年。[1282] Sandeep Kumar 和 Mohit Kumar。利用博弈论方法求解区间值直觉模糊决策矩阵下的多群体决策问题。《国际管理科学与工程管理杂志》，16(1):34–42，2021年。[1283] Pavla Rotterová 和 O Pavlačka。模糊决策矩阵中备选方案评价的模糊方差计算。载于《第34届国际经济学数学方法会议论文集》，第735–740页。利贝雷茨技术大学，利贝雷茨，2016年。[1284] Susumu Cato。准决定性、准超滤子与社会准序。《社会选择与福利》，41 202，2013 1 169( ): – 。[1285] P Srivastava 和 RL Gupta。模糊邻近结构与模糊超滤子。《数学分析与应用杂志》，94(2):297–311，1983年。[1286] Pramila Srivastava 和 Mona Khare。模糊格栅、模糊超滤子与反例。《西蒙·斯蒂文》，67:65–76，1993年。[1287] KC Chattopadhyay、UK Mukherjee 和 SK Samanta。关于模糊超滤子的一则注记。《印度纯粹与应用数学杂志》，29:695–704，1998年。[1288] Alireza Bagheri Salec。关于软超滤子。《国际非线性分析与应用杂志》，10 138，2019 1 131( ): – 。[1289] Izzettin Demir、Oya Bedre Ozbakir 和 Ismet Yildiz。模糊软超滤与模糊软滤子的收敛性质。《科学新成果杂志》，4(8):92–107，2015年。[1290] Takaaki Fujita。决策中的模糊与中智超滤子：与决策树的深层联系及其应用，2026年。[1291] Zhan’ao Xue、Yunhua Xiao、Weihua Liu、Huiru Cheng 和 Yuejun Li。BL代数的直觉模糊滤子理论。《国际机器学习与控制论杂志》，4(6):659–669，2013。[1292] N Pankajam 和 A Pushpalatha。直觉模糊拓扑空间中的预滤子。《印度数学学会杂志》，2012年。[1293] Tahsin Oner、Young Bae Jun、Tugce Katican 和 Arsham Borumand Saeid。通过直觉模糊结构研究谢弗竖线BL代数。《新数学与自然计算》，20(02):289–307，2024年。[1294] AA Salama 和 H Elagamy。中智滤子。《国际计算机科学工程与信息技术研究杂志（IJCSEITR）》，3(1):307–312，2013。[1295] A Ibrahim 和 S Gunaseeli。关于BL代数的中智滤子与奇妙滤子。《国际中智科学杂志（IJNS）》，21(2)，2023年。[1296] Giorgio Nordo、Arif Mehmood 和 Said Broumi。单值中智滤子。Infinite Study，2020年。[1297] Takaaki Fujita。模糊与中智偏移综述：与一些集合概念和归一化函数的联系。《通过图化、超图化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，74，2024年。[1298] K Tamilselvan、V Visalakshi 和 Prasanalakshmi Balaji。图像模糊滤子的应用：使用聚类算法评估员工绩效。《AIMS数学》，8(9):21069–21088，2023年。[1299] Takaaki Fujita。准超滤子与弱超滤子：其性质与极大性。《亚洲数学研究杂志》，21(3):49–62，2025年。[1300] Costas D Koutras、Christos Moyzes、Christos Nomikos、Konstantinos Tsaprounis 和 Yorgos Zikos。关于弱滤子与超滤子：面向知识表示的集合论。《IGPL逻辑杂志》，31(1):68–95，2023年。[1301] Takaaki Fujita。关于中智关联与阈值图的注记。SciNexuses，1:97–125，2024年。[1302] Emet Gürel 和 Merba Tat。SWOT分析：理论综述。《国际社会研究杂志》，10(51)，2017年。[1303] Tanya Sammut-Bonnici 和 David Galea。SWOT分析。《威利管理百科全书》，12(1):1–8，2015年。[1304] Sepehr Ghazinoory、A Esmail Zadeh 和 Azizollah Memariani。模糊SWOT分析。《Journal of Intelligent & Fuzzy Systems》，18(1):99–108，2007年。

[1305] Zygimantas Meskauskas、Raimundas Jasinevicius、Egidijus Kazanavicius 和 Vytautas Petrauskas。基于可解释人工智能的模糊 SWOT 图：复杂系统分析。载于《2020年 IEEE 国际模糊系统会议（FUZZ-IEEE）》，第1–8页。IEEE，2020年。[1306] Emad Roghanian、Baharak Ghorbani 和 Mohammad Alipour。直觉模糊数在 SWOT 分析中的应用。《国际工业与系统工程杂志》，28(2):152–165，2018年。[1307] Aylin Adem、Ali Çolak 和 Metin Dağdeviren。结合 SWOT 分析与犹豫模糊语言术语集，对风力涡轮机生命周期中的职业安全风险进行评估的集成模型。《安全科学》，106:184–190，2018年。[1308] Esin Mukul 和 Merve Güler。用于工业5.0技术评估的集成式犹豫模糊 SWOT 分析。载于《2024年第八届智能技术创新方法国际研讨会（ISAS）》，第1–6页。IEEE，2024年。[1309] Mohamed Abdel-Basset、Mai Mohamed 和 Florentin Smarandache。面向战略规划与决策的中智层次分析法–SWOT分析扩展。Symmetry，10(4):116，2018年。[1310] Mohamed Abdel Basset、Mai Mohamed、Arun Kumar Sangaiah 和 Vipul Jain。用于战略规划方法选择的中智层次分析法与 SWOT 集成方法。《Benchmarking: An International Journal》，25 2564，2018 7 2546( ): – .[1311] Katia N Flores Ledesma、Rafael W Cánez Palomino、César R Vilcapoma Pérez、Pedro B Gutiérrez、Ana M Val- lina Hernández、Elier A Nieto Rivas、Abrahán C Neri Ayala 和 Santos L Guanilo Gómez。借助中智 SWOT 分析和中智认知图，评估人工智能应用于当代拉丁美洲教育所面临的挑战与机遇。《中智集与系统》，69(1):7，2024年。[1312] Gomatesh M Ravanavar 和 Poornima M Charantimath。运用 TOWS 矩阵制定战略：案例研究。《国际研究与发展期刊》，1(1):87–90，2012年。[1313] Rittick Maity、Kumarasamy Sudhakar、Amir Abdul Razak、Alagar Karthick 和 Dan Barbulescu。农光互补：运用 SWOT 分析和 TOWS 矩阵进行战略评估。《能源》，16(8):3313，2023年。[1314] Dijana Oreški。运用 SWOT-层次分析法制定策略。《TEM期刊》，1(4):283–291，2012年。[1315] Çağlar Kıvanç Kaymaz、Salih Birinci 和 Yusuf Kızılkan。运用 SWOT-层次分析法评估埃尔祖鲁姆省的可持续发展目标。《环境、发展与可持续性》，24(3):2986–3012，2022年。[1316] Guiwen Liu、Saina Zheng、Pengpeng Xu 和 Taozhi Zhuang。面向中国建筑行业能源服务公司行业战略的 ANP-SWOT 方法。《可再生能源与可持续能源评论》，93:90–99，2018年。[1317] Reza Shakoor Shahabi、Mohammad Hossein Basiri、Mahdi Rashidi Kahag 和 Samad Ahangar Zonouzi。用于分析伊朗废钢行业战略相互依赖性并确定优先级的 ANP-SWOT 方法。《资源政策》，42:18–26，2014年。[1318] Kuo-liang Lee 和 Shu-Chen Lin。用于国际配送中心环境评估的模糊定量 SWOT 程序。《信息科学》，178(2):531–549，2008年。[1319] Mengmeng Zhou 和 Jiaqi Yang。基于定量 SWOT 分析的港口竞争战略研究。载于《2011年管理与服务科学国际会议》，第1–4页。IEEE，2011年。[1320] Ni Made Sumiarsih、Djoko Legono 和 Robert J Kodoatie。输水系统的战略性可持续管理：SWOT-QSPM 分析。《土木工程论坛期刊》，4(1)，2018年。[1321] Kamran Mohammadi。改进无线分布式网络的战略管理：综合优先级 SWOT-QSPM（IPSQ）方法——在被动防御中的应用。《社会经济规划科学》，88:101663，2023年。[1322] Pongsiri Kamkankaew。战略管理的当前趋势：SWOT 与 SOAR 方法的比较分析。《RMUTT全球商业、会计与金融评论》，7(2):63–78，2023年。[1323] Ling Li。SWOT 与 SOAR 分析课堂动态的管理启示：中国案例研究。《组织发展期刊》，38(4)，2020年。[1324] P Richard G Layard、Richard Layard 和 Stephen Glaister。成本效益分析。剑桥大学出版社，1994年。[1325] Robert J Brent。应用成本效益分析。爱德华·埃尔加出版社，2007年。[1326] Eda Boltürk 和 Elif Haktanır。分解式模糊成本效益分析及其在眼科手术机器人选择中的应用。《工程经济学家》，68(1):20–33，2023年。[1327] M Rabbani、H Rezaei Soufi 和 S Ali Torabi。针对业务连续性管理与灾难恢复策略的两阶段模糊成本效益分析。《安全科学》，85:9–22，2016年。[1328] Harshal Fulari、Vishal Fegade 和 Praveen Kumar Loharkar。从再制造视角对产品开发过程中的设计进行模糊成本效益分析。《国际应用工程研究期刊》，10(11):10114–10118，2015年。[1329] Antonios Paraskevas、Takaaki Fujita、Michael Madas 和 Florentin Smarandache。基于效用的颠倒逻辑：不确定条件下的中智决策框架。《决策与运筹研究杂志》，10(2)，2025年。[1330] Sezi Cevik Onar、Basar Oztaysi 和 Cengiz Kahraman。风能投资的球形模糊成本效益分析。载于《智能与模糊系统国际会议》，第134–141页。施普林格，2020年。

[1331] Sezi Cevik Onar、Basar Oztaysi 和 Cengiz Kahraman。风能投资的球形模糊成本效益分析。载于《智能与模糊技术：智能与创新解决方案：INFUS 2020会议论文集，土耳其伊斯坦布尔，2020年7月21日至23日》，第134页。Springer Nature，2020年。[1332] Mark Fitzgerald、Benjamin R Saville 和 Roger J Lewis。决策曲线分析。《JAMA》，313(4):409–410，2015年。[1333] Ewout W Steyerberg 和 Andrew J Vickers。决策曲线分析：讨论。《医学决策》，28(1):146–149，2008年。[1334] Michael Hechter 和 Satoshi Kanazawa。社会学理性选择理论。《社会学年度评论》，23 214，1997 1 191( ): – .[1335] Raymond Boudon。超越理性选择理论。《社会学年度评论》，29(1):1–21，2003年。[1336] Xiao Luo。和模糊理性选择函数的新方法。《Fuzzy Sets and Systems》，127(2):241–246，2002年。[1337] Jin Bai Kim。模糊理性选择函数。《Fuzzy Sets and Systems》，10(1-3):37–43，1983年。[1338] Mark J Wierman、Terry D Clark、John N Mordeson 和 William J Tastle。对模糊理性选择模型的批判。载于《2012年北美模糊信息处理学会（NAFIPS）年会》，第1–6页。IEEE，2012年。[1339] Jin Bai Kim 和 Kern O Kymn。由模糊偏好导出的理性选择函数。《国际数学与数学科学期刊》，11(1):43–45，1988年。[1340] Zbigniew Świtalski。关于模糊理性选择函数的注记。《Fuzzy Sets and Systems》，35(3):341–343，1990年。[1341] Alexander Felfernig。用于软件需求优先级排序的人工智能技术。《软件工程人工智能方法》，第29–47页，2021年。[1342] Abdel Ejnioui、Carlos Otero 和 Luis Otero。基于仿真的模糊多属性决策方法，用于软件需求优先级排序。载于《第1 42届信息技术研究年会论文集》，第 – 页，2012 37 st。[1343] Abdel Ejnioui、Carlos E Otero 和 Abrar A Qureshi。运用模糊多属性决策对软件需求进行优先级排序。载于《2012年 IEEE 开放系统会议》，第1–6页。IEEE，2012年。[1344] Punam Bajaj 和 Vineet Arora。运用模糊层次分析法进行需求优先级排序的多人决策。《ACM SIGSOFT 软件工程札记》，38(5):1–6，2013年。[1345] Takaaki Fujita。服务集成与管理（SIAM）和基于 ITIL 的模型之模糊与中智扩展的拟议框架。《智能决策与粒计算杂志》，1(1):161–198，2025年。[1346] Saeed Rouhani 和 Ahad Zare Ravasan。基于模糊TOPSIS的 ITSM 软件选择方法。《国际 IT/业务协同与治理期刊（IJITBAG）》，5(2):1–26，2014年。[1347] Olano Garces Luisa Vivian、Olano Garces Lidia Alessandra、Casildo Bedón Nancy Esther、Levano Rodriguez Danny 和 Soria Quijaite Juan Jesús。使用 ITIL-模糊方法对私立大学信息学开发部门的事件管理流程进行优先级排序。《国际模糊逻辑与智能系统期刊》，25(1):37–54，2025年。[1348] Hryhorii Hnatiienko、Nikolay A Kiktev、Tatiana Babenko、Alona Desiatko 和 Larysa Myrutenko。利用不完整数据和决策支持方法确定网络安全措施的优先级。载于《ITS》，第169–180页，2021年。[1349] Abdullah M Alnajim、Abdul Wahid Khan、S hah Zaib、Shabbab Algamdi 和 Faheem Khan。通过模糊TOPSIS方法探讨软件供应商面临的网络安全挑战。《PeerJ 计算机科学》，12:e3337，2026年。[1350] Wajdi Alhakami。提升沙特阿拉伯王国的网络安全能力：一种模糊决策方法。《计算机、材料与连续体》，79(2)，2024年。[1351] Ali Alqazzaz。用于网络安全风险评估的集成中智方法论与机器学习模型：一项探索性研究。《International Journal of Neutrosophic Science（IJNS）》，23(3)，2024年。[1352] Meijing Zhang 和 Linghui Li。平衡易用性与防护：运用中智模糊Dombi算子评估计算机网络安全的决策方法。《中智集与系统》，83(1):38，2025年。[1353] Aveek Basu、Sanchita Ghosh 和 Sraboni Dutta。运用模糊逻辑分析云效能。《International Journal of Business Information Systems》，46(4):460–490，2024年。[1354] Mohd Fadzil Faisae Rashid、Windo Hutabarat 和 Ashutosh Tiwari。综述运用软计算方法优化装配顺序规划与装配线平衡。《国际先进制造技术杂志》，59(1):335–349，2012年。[1355] Luis MM Custodio、Joao JS Sentieiro 和 Carlos FG Bispo。运用模糊决策系统进行生产计划与调度。《IEEE机器人与自动化汇刊》，10(2):160–168，2002年。[1356] Kuppulakshmi Vadivel、Sugapriya Chandrasekar、Nagarajan Deivanayagampillai 和 Kavikumar Jacob。面向制造系统经济高效生产计划的模糊决策。Engineering Research Express，6 035418，2024 3( ): .[1357] Ahteshamul Haq、Srikant Gupta 和 Aquil Ahmed。用于解决供应链网络问题的多准则模糊中智决策模型。《中智集与系统》，46:50–66，2021年。

[1358] Rittik Roy 和 Pintu Das。基于中智线性规划方法的多目标生产计划问题。Infinite Study，2015年。[1359] Mahmood Shafiee。维护策略选择问题：多准则决策综述。《维护工程质量期刊》，21(4):378–402，2015年。[1360] Milad Aghaee 和 Safar Fazli。维护方法选择的改进型多准则决策方法：汽车行业案例研究。《管理科学快报》，2:137–146，2012年。[1361] Fathia Sghayer Abdulgader、Rajeh Eid 和 Babak Daneshvar Rouyendegh。使用模糊多准则决策方法选择维护计划的决策支持模型开发：理论框架。《应用计算智能与软计算》，2018:9346945:1–9346945:14，2018年。[1362] Sujan Chandra Banik、Iftheker Ahmed Khan、Akm M. Morshed、Md. Ziaur Rahman Khan 和 Md Aman Uddin。孟加拉国的工业电力需求：自备电源与电网供电方案的模糊多准则决策分析。《工程成果》，2025年。[1363] Hechuan Wei、Caiyun Niu、Boyuan Xia、Yajie Dou 和 Xuejun Hu。考虑项目相互作用的项目组合优化改进选择方法。《Expert Systems with Applications》，142:112952，2020年。[1364] Thi Thanh Nguyen 和 Lee Gordon-Brown。投资组合优化中的模糊数与多准则决策方法。世界科学、工程与技术学院，《国际计算机、电气、自动化、控制与信息工程期刊》，6:1593–1605，2012年。[1365] Bersam Bolat、Ferhan Çebi、Gül Tekin Temur 和 Irem Otay。项目选择的模糊集成方法。《J. Enterp. Inf. Manag.》，27:247–260，2014年。[1366] Derya Deliktaş 和 Ozden Ustun。基于模糊 MULTIMOORA 方法、用于求解基数约束投资组合优化问题的多目标遗传算法。《应用智能》，53:14717–14743，2022年。[1367] Yongtao Tan、Liyin Shen、Craig Langston 和 Yan Liu。使用模糊 TOPSIS 方法进行建设项目选择。《Journal of Modelling in Management》，5:302–315，2010年。[1368] Reza Raei 和 Mohammad Bahrani Jahromi。采用模糊网络分析法、VIKOR 和 TOPSIS 的混合方法进行投资组合优化。《管理科学快报》，2:2473–2484，2012年。[1369] Osman Taylan、Abdallah O. Bafail、Reda M. S. Abdulaal 和 Mohammed R. Kabli。通过模糊层次分析法和模糊 TOPSIS 方法进行建设项目选择与风险评估。《应用软计算》，17:105–116，2014年。[1370] Mohamed Abdel-Basset、Asmaa Atef 和 Florentin Smarandache。项目选择的混合中智多准则群体决策方法。《Cogn. Syst. Res.》，57:216–227，2019年。[1371] Milton Alexander Villegas Álava、Stella Paola Delgado Figueroa、Hilda Mercedes Blum Alcivar 和 Maikel Yelandi Leyva Vázquez。单值中智数与层次分析法在项目选择中的应用。《中智集与系统》，2018年。[1372] Irem Otay 和 Cengiz Kahraman。使用区间中智 TOPSIS 进行六西格玛项目选择。载于 EUSFLAT/IWIF-SGN，2017年。[1373] Thomas H Stanton。信用评分与贷款评分。改善联邦信贷计划管理的工具，“赠款报告”，1999年7月。[1374] Gail Denisse Chamochumbi Diaz、Federica Palazzi 和 Laerte Sorini。中小企业的信用worthiness：模糊决策方法。《计算管理科学》，23(1):1–23，2026年。[1375] R Ramesh 和 M Jeyakarthic。基于模糊支持向量机的金融信用评分预测系统异常值检测。《J. Wirel. Mob. Networks Ubiquitous Comput. Dependable Appl.》，14(4):60–73，2023年。[1376] Petr Hájek 和 Vladimír Olej。直觉模糊神经网络：基于文本信息的信用评分案例。载于《神经网络工程应用国际会议》，第337–346页。施普林格，2015年。[1377] AA Salama、Mohamed Mokhtar El-Muradani、Huda E Khalid、Ahmed Essa、Haitham Ward 和 Ibrahim Yasser。使用中智逻辑增强管理信息系统风险管理：在投资、信用评分和供应链中断中的应用。《中智集与系统》，90(1):12，2025年。[1378] Mohanned H Alharbi。中智 $\alpha$折扣认知映射用于财务困境预测：来自沙特新兴市场的证据。《中智集与系统》，94(1):24，2025年。[1379] Mithat Zeydan、Cüneyt Çolpan 和 Cemal Çobanoğlu。供应商选择与绩效评估的组合方法。《Expert systems with applications》，38(3):2741–2751，2011年。[1380] Semih Önüt、Selin Soner Kara 和 Elif Işık。使用组合模糊多准则决策方法进行长期供应商选择：电信公司案例研究。《Expert Syst. Appl.》，36:3887–3895，2009年。[1381] Jui-Chung Kao、Chia-Nan Wang、Viet Tinh Nguyen 和 Syed Tam Husain。供应链管理中的供应商选择模糊多准则决策模型。《Intell. Autom. Soft Comput.》，31:1451–1466，2022年。[1382] Imane Tronnebati、Fouad Jawab、Youness Frichi 和 Jabir Arif。使用模糊层次分析法、模糊 TOPSIS 和模糊 WASPAS 进行绿色供应商选择：摩洛哥汽车行业案例研究。《Sustainability》，2024年。

[1383] Jia-Wen Wang、Ching-Hsue Cheng 和 Kun-Cheng Huang。供应商选择的模糊层次 TOPSIS。《应用软计算》，9:377–386，2009年。[1384] Khodadad Ouraki、Abdollah Hadi-Vencheh、Ali Jamshidi 和 Amir Karbassi Yazdi。在不确定环境下用于供应商选择的增强型层次模糊 TOPSIS-ANP 方法。《Mathematics》，2025年。[1385] Rıdvan Şahin 和 Muhammed Yiğider。一种基于 TOPSIS 的多准则中智群体决策方法，用于供应商选择。ArXiv，abs/1412.5077，2014年。[1386] Mohamed Abdel-Basset、Mai Mohamed 和 Florentin Smarandache。用于供应商选择问题的混合中智群 ANP-TOPSIS 框架。《Symmetry》，10:226，2018年。[1387] Yong Sun 和 Yilin Cai。在单值中智环境下融合 TOPSIS 与灰色关联分析的绿色供应商选择灵活决策方法。《IEEE Access》，9:83025–83040，2021年。[1388] Vukašin Pajić、Milan Andrejić、Marijana Jolović 和 Milorad Kilibarda。商业物流中的战略性仓库选址：采用 IMF SWARA–MARCOS 的新方法——塞尔维亚物流服务提供商案例研究。《Mathematics》，12(5):776，2024年。[1389] Alptekin Ulutaş、Figen Balo、Lutfu S. Sua、Ezgi Demir、Ayşe Topal 和 Vladimir L. J. Jakovljevic。一种新的集成灰色多准则决策模型：仓库选址案例。《Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering》，2021年。[1390] Maysam Ashrafzadeh、Farimah Mokhatab Rafiei、Naser Isfahani 和 Zahra Zare。模糊 TOPSIS 方法在仓库选址选择中的应用：案例研究。《Interdisciplinary Journal of Contemporary Research in Business》，2012年。[1391] Çağla Cergibozan 和 Ilker Gölcük。基于模糊最佳-最差法的仓库选址选择方法及伊兹密尔案例研究。《Kybernetes》，54:4138–4161，2024年。[1392] Muhammet Deveci、Nihan Çetin Demirel 和 Emine Ahmetoğlu。基于区间二型模糊多准则决策的航空公司新航线选择：土耳其与北美地区目的地间新航线案例研究。《Journal of Air Transport Management》，59:83–99，2017年。[1393] Gülçin Büyüközkan 和 Esin Mukul。使用模糊多准则决策方法评价智慧城市物流解决方案。《Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi》，25(9):1033–1040，2019年。[1394] Kwanjira Kaewfak、Van-Nam Huynh、Veeris Ammarapala 和 Chayakrit Charoensiriwath。用于选择多式联运货运路线的模糊层次分析法-TOPSIS 方法。载于《国际知识与系统科学研讨会》，第28–46页。施普林格，2019年。[1395] Vinay Kumar Saini 和 Vivek Kumar。基于层次分析法、模糊集和 TOPSIS 的移动自组网可靠路线选择。载于 2014 年可持续全球发展计算国际会议（INDIACom），第24–29页。IEEE，2014年。[1396] Kwanjira Kaewfak、Veeris Ammarapala 和 Chayakrit Charoensiriwath。多式联运路线选择的模糊层次分析法：泰国煤炭行业案例。《Science & Technology Asia》，第84–95页，2021年。[1397] Na Han 和 Xiang-Jun Ji。基于层次分析法-模糊方法的绩效评估研究。载于 2009 年国际机器学习与控制论会议，第5卷，第2750–2753页。IEEE，2009年。[1398] Zahra Ghassabi。使用模糊层次分析法对高等教育机构员工进行绩效评估。《International Journal of Business Information Systems》，24(4):399–422，2017年。[1399] Basar Oztaysi、Tuncay Gurbuz、Esra Albayrak 和 Cengiz Kahraman。使用模糊网络分析法确定购物中心的目标营销策略。《Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing》，27，2016年。[1400] Serhan Hamal、Bahar Sennaroglu 和 Mahmure Övül Arıoğlu。使用模糊网络分析法进行营销策略选择。载于《智能与模糊系统国际会议》，第1008–1014页。施普林格，2020年。[1401] Ali Mohaghar、Mohammad Reza Fathi、Mohammad Karimi Zarchi 和 Asie Omidian。营销策略选择的 VIKOR-模糊层次分析法组合方法。《Business Management and Strategy》，3(1):13–27，2012年。[1402] Miray Şahan、Zeynep Sidal Kara 和 Ibrahim Yilmaz。通过集成模糊 DEMATEL 与 COPRAS 方法选择零售业营销策略。《国际模糊系统杂志》，第1–16页，2025年。[1403] K Arun Bhavsar、Jimmy Singla、Yasser D Al-Otaibi、Oh-Young Song、Yousaf Bin Zikria 和 Ali Kashif Bashir。使用机器学习进行医学诊断：统计综述。《Computers, Materials and Continua》，67(1):107–125，2021年。[1404] Janis Fan-Fang Yao 和 Jing-Shing Yao。基于模糊数和合成推理规则的医学诊断模糊决策。《Fuzzy Sets and Systems》，120(2):351–366，2001年。[1405] Zehui Shao、Saeed Kosari、Hossein Rashmanlou 和 Farshid Mofidnakhaei。使用 Vague集进行医学诊断中的模糊决策。《Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing》，40，2023年。[1406] Ismat Beg 和 Tabasam Rashid。基于直觉模糊关系的医学诊断系统。《Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets》，2015年。[1407] Shaista Habib、Ather Ashraf、Muhammad Arif Butt 和 Maria Ahmad。基于单值中智信息的医学诊断。《中智集与系统》，第42卷，2021年，第302页，2021年。

[1408] Jia Syuen Chai、Ganeshsree Selvachandran、Florentin Smarandache、Vassilis C Gerogiannis、Le Hoang Son、Quang-Thinh Bui 和 Bay Vo。单值中智集的新相似度量及其在模式识别和医学诊断问题中的应用。《复杂与智能系统》，7(2):703–723，2021年。[1409] SANI SAIDU MUSA。使用模糊 PROMETHEE 方法评估癌症治疗方案。《国际高级计算机科学与应用杂志》，2017年。[1410] Huiyin Ouyang、Nilay Tanık Argon 和 Serhan Ziya。高需求时期重症监护病房床位的分配。《运筹学》，68(2):591–608，2020年。[1411] Liqun Chen、Weibo Liu 和 Jianghua Zhang。一种用于患者床位分配的区间二型模糊多准则决策方法。《科学报告》，15(1):21019，2025年。[1412] Ripon Kumar Chakrabortty、Md Asadujjaman 和 Md Nuruzzaman。运用模糊与层次分析法方法设计医院床位：孟加拉国的一项案例研究。《国际工业与系统工程杂志》，17(3):315–328，2014年。[1413] Ramin Ravangard、Mohammadkarim Bahadori、Mehdi Raadabadi、Ehsan Teymourzadeh、Khalil Alimomoham- madzadeh 和 Fardin Mehrabian。运用模糊层次分析法（模糊层次分析法）制定医院床位发展模型。《伊朗公共卫生期刊》，46(11):1555，2017年。[1414] A Aryafar、S Yousefi 和 F Doulati Ardejani。采用模糊层次分析法（模糊层次分析法）进行环境影响评估时采矿活动对地下水交互作用的权重。《Environmental Earth Sciences》，68 2324，2013 8 2313( ): – 。[1415] Meng Shao、Zhixin Han、Jinwei Sun、Chengsi Xiao、Shulei Zhang 和 Yuanxu Zhao。多准则决策在可再生能源选址中的应用综述。《可再生能源》，157:377–403，2020年。[1416] Mehdi Jahangiri、Akbar Alidadi Shamsabadi、Ali Mostafaeipour、Mostafa Rezaei、Yasaman Yousefi 和 Luis Martin Pomares。运用模糊多准则决策技术，在卡塔尔选出最适合利用风能和太阳能发电及制氢的地点。《国际氢能期刊》，45(27):13862–13875，2020年。[1417] Chia-Nan Wang、Ying-Fang Huang、Yu-Chien Chai 和 Van Thanh Nguyen。模糊环境下越南可再生能源电站选址的多准则决策。《应用科学》，8(11):2069，2018年。[1418] Andrew C Lorenc。数值天气预报的分析方法。《英国皇家气象学会季刊》，112(474):1177–1194，1986年。[1419] R Syed Aamir Adnan 和 R Kumaravel。降雨预测气象因素的优先级排序：模糊层次分析法与模糊TOPSIS相结合的方法。《物理学文摘》，100(5):055236，2025年。[1420] Kainat Muniba、Muhammad Naveed Jafar、Asma Riffat、Jawaria Mukhtar 和 Adeel Saleem。基于中智软函数和聚合算子的多准则决策气候变化预测模型。《中智系统与应用》，21:25–35，2024年。[1421] Novhirtamely Kahar 等。智能手机选择决策支持系统中 SMART 与模糊多准则决策方法的比较研究。《国际图像、图形与信号处理期刊》，13(4):1，2021年。[1422] Duško Tešić、Darko Božanić 和 Adis Puška。利用结构化用户评论选择智能手机：随机森林与模糊 DIBR II–WASPAS 相结合的方法。《数学与计算科学创新研究期刊》，3(2):71–93，2024年。[1423] Chimele Orji Abraham、Paul Augustine Ejegwa、Nasreen Kausar、Abolape Deborah Akwu 和 Tonguc Cagin。基于新的三维毕达哥拉斯模糊距离度量，通过逼近理想解排序法改进智能手机选择流程。《智能数据分析》，第1088467X251387621页，2025年。[1424] Yifan Feng、Haoxuan You、Zizhao Zhang、Rongrong Ji 和 Yue Gao。超图神经网络。载于《人工智能促进协会会议论文集》，2019年。[1425] Alain Bretto。《超图理论：导论》。《数学工程》。瑞士查姆：施普林格，1，2013年。[1426] Yue Gao、Zizhao Zhang、Haojie Lin、Xibin Zhao、Shaoyi Du 和 Changqing Zou。超图学习：方法与实践。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，44(5):2548–2566，2020年。[1427] Takaaki Fujita。电信超网络与电信超超图网络。《机电系统智能建模》，2(1):16–31，2025年。[1428] Julio Cesar Méndez Bravo、Claudia Jeaneth Bolanos Piedrahita、Manuel Alberto Méndez Bravo 和 Luis Manuel Pilacuan-Bonete。将快速换模与工业4.0相结合，利用多元生成 n-超超图优化流程。《中智集与系统》，84:328–340，2025年。[1429] Takaaki Fujita、Ajoy Kanti Das 和 Suman Das。分子线超图与超超图。《中智知识》，9:31–65，2026年。[1430] Eduardo Martín Campoverde Valencia、Jessica Paola Chuisaca Vásquez 和 Francisco Ángel Becerra Lois。利用多元生成 n-超超图对阿苏艾省制造业的生存与企业增长关系进行多中智分析，时间范围为2020–2023年。《中智集与系统》，84:341–355，2025年。[1431] T. Fujita、Muhammad Saqlain 和 Muhammad Gulistan。直觉模糊超超图的层次网络建模。《多准则算法及其应用》，10(1):1–22，2026年。

[1432] E. J. Mogro、J. R. Molina、G. J. S. Canas 和 P. H. Soria。树烟草提取物（蓝花烟草）作为多元生成生物杀虫剂备选方案，用于利用 $n$-超超图控制果蝇（移入果蝇）。《中智集与系统》，74:57–65，2024年。[1433] Takaaki Fujita。有向无环超超图（dash）：层级依赖建模的一般框架。《中智知识》，6:72–86，2025年。[1434] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。软有向 n-超超图及其若干现实世界应用。《欧洲纯粹与应用数学期刊》，18(4):6643–6643，2025年。[1435] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《超图与超超图理论及其应用》。《国际中智科学协会（NSIA）出版社》，2026年。[1436] Takaaki Fujita。元超图、元超超图与迭代元图：对图的图、超图的超图、超超图的超超图及其他结构进行建模。《跨学科研究新进展》，4(5):1–23，2025年。[1437] Takaaki Fujita。元结构、元超结构与元超超结构。《计算机与应用杂志》，1(1):1–22，2025年。[1438] Shouxian Zhu。中智 n-超超网络：一种评估媒体融合中短视频传播效果的新方法。《中智集与系统》，85:1004–1017，2025年。[1439] Mohammad Hamidi、Florentin Smarandache 和 Mohadeseh Taghinezhad。《基于赋值模糊超超图的决策》。Infinite Study，2023年。[1440] Florentin Smarandache。超超结构与中智超超结构基础。《中智集与系统》，63(1):21，2024年。[1441] Claude Berge。《超图：有限集的组合学》，第45卷。爱思唯尔，1984年。[1442] Florentin Smarandache。n-超超图与多元生成 n-超超图。《Nidus Idearum》，7:107–113，2019年。[1443] Takaaki Fujita、Ajoy Kanti Das、Suman Das 和 Volkan Duran。植物与土壤科学中的土壤微生物超网络与超超网络。《中智知识》，8:89–108，2026年。[1444] Takaaki Fujita。超超图与 n 次幂数学结构的图类及概念探索。《通过图化、超图化与不确定化推进不确定组合学：模糊、中智、软、粗糙及其他》，3(4):512，2025年。[1445] Takaaki Fujita、Arif Mehmood 和 Volkan Duran。多维网络的推广：多维超网络与超超网络框架。《中智知识》，8:62–79，2025年。[1446] Takaaki Fujita、Muhammad Gulistan 和 A Ghaib Arkan。利用超网络与超超网络对分子相互作用建模。《研究进展》，26(4):294–326，2025年。[1447] Takaaki Fujita。递归超图与递归超超图：探索更具层次性与一般化的图概念，2026年。[1448] Takaaki Fujita 和 Florentin Smarandache。《超超图与多元生成图神经网络的理论基础》。《国际中智科学协会（NSIA）出版社》，2026年。[1449] Takaaki Fujita。层级递归超超图：多层级与递归关联的统一框架，2026年。[1450] Naganand Yadati、RS Dayanidhi、S Vaishnavi、KM Indira 和 G Srinidhi。通过递归超图实现知识库问答。载于《欧洲计算语言学协会分会第16届会议论文集：主卷》，第448–454页，2021年。[1451] Naganand Yadati。面向多关系、有序递归超图的神经消息传递。《Neural Information Processing Systems》，33:3275–3289，2020年。

Real-world decisions rarely rely on perfectly precise information.

This book surveys major methodologies for decision-making under uncertainty, including fuzzy sets, neutrosophic sets, plithogenic models, and multi-criteria decision frameworks.

It provides a structured taxonomy of methods, computational procedures, and applications across science, engineering, and social systems.

- Fuzzy Set Theories
- Neutrosophic and Plithogenic Models
- Multi-Criteria Decision-Making (MCDM)
- Weight Elicitation Methods
- Consensus and Dynamic Decision Frameworks

ISBN 978-1-599973-883-3






SCIENTIFIC RESEARCH/ DECISION SCIENCE / FUZZY MCDM METHODS