arXiv:2603.15715v1 [math.CV] 16 Mar 2026

随机亚纯函数的拟共形标准化

Michael Iofin

2025年8月

摘要

我们通过随机拟共形映射研究覆盖球面的曲面的共形类型。在复平面上构造一个随机贝尔特拉米系数，我们得到一个具有预定畸变的局部拟共形同胚；它几乎必然满射，并且以高概率近似线性。由此，我们获得了与覆盖球面的曲面相关的随机亚纯函数的一个标准化，并据此证明这些曲面几乎必然为抛物型，同时得到其 Nevanlinna 特征增长阶的界。

1 引言

一致化定理指出，每个单连通黎曼曲面都共形等价于开单位圆盘 $\mathbb{D}$、平面 $\mathbb{C}$ 或黎曼球面 $\mathbb{C}$ （参见 [1], 第 10 章）。这类曲面分别称为双曲型、抛物型或椭圆型。黎曼曲面研究中的一个重要经典问题是类型问题，其目标是确定单连通黎曼曲面的共形类型。

铺展在球面上的曲面 是一个二元组（X， p），其中 X 是一个拓扑曲面，而 $p : X \to \mathbb{C}$ 是从 X 到黎曼球面 [5]的连续、开且离散映射。根据 Sto¨ılov 定理 [12], ，存在 X 上的唯一共形结构，使得映射 p 是全纯的。如果 X 是单连通的，且 ϕ 是从 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{C}$或 $\mathbb{D}$ 到 X的一致化映射，那么$f = p\circ\phi$ 是一个亚纯函数，而 X 称为 f^{-1}的黎曼曲面。铺展在球面上的曲面是构造黎曼曲面并研究非单射亚纯函数的反函数的一种自然方式。它们最初用于研究多项式函数的反函数，此后，关于铺展在球面上的曲面的研究已推广到可能具有无限层的曲面。

设 $s(r)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负非递减函数。 $s(r)$ 的阶 λ 和下阶 λ 分别由以下公式定义：

$$\lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log s(r)}{\log r}, \qquad \underline{\lambda} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log s(r)}{\log r}.$$

$s(r)$ 的阶是满足 $s(r) = O(r^k)$ 的所有常数 k 的下确界。与铺展在球面上的曲面相关联的亚纯函数 f 具有 Nevanlinna 特征 $T_f(r)$。Nevanlinna 特征之所以值得关注，是因为它控制着对于任意给定的 $a \in \mathbb{C}$， $f(z) = a$ 的根的分布。例如，Picard-Borel定理 [10] 指出，对于至多有 2 个例外的所有 a， $T_f(r)$ 的阶与 $n_f(r, a)$ 的阶相同；这里， $n_f(r, a)$ 表示 $f(z) = a$ 在圆盘 $\{|z| \leq r\}$ 中的根的个数。Nevanlinna理论可用于证明并大幅推广经典的小Picard定理。该定理指出，非恒定亚纯函数至多可以遗漏 $\mathbb{C}$ 中的两个点。我们将 f 的阶和下阶分别定义为 $T_f(r)$ 的阶和下阶。亚纯函数值分布理论中的一个重要问题，是确定亚纯函数的阶和下阶。

我们考虑一种构造黎曼曲面的模型。将无限网格中的单元（每个单元都是单位正方形）按棋盘格图案涂成黑白两色。为每个白色正方形配上一份黎曼球面上半球 $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$，为每个黑色正方形配上一份下半球。此外，为网格的每个顶点在两个半球之间的边界 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上配上一个点。我们要求，如果 v_1, v_2, v_3, v_4 是网格中某个单元的顶点，且按顺时针顺序排列，那么与这些顶点对应的边界点也按循环顺序（顺时针或逆时针）排列。每个半球的边界上都有四个对应点，我们称之为标记边界点。对于任意两个相邻单元 c和 c'，我们将分别与 c和 c' 对应的半球粘合起来，具体做法是识别两者之间的边界弧；这些边界弧连接的是与 c 和 c' 共有的两个顶点对应的标记点。

令 $\mathcal{R}$ 为将与网格各单元对应的所有半球粘合在一起所形成的曲面。注意，$\mathcal{R}$ 是一个铺展在球面上的曲面，其中投影映射 $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ 将 $\mathcal{R}$ 的每个分支半球映射到黎曼球面$\mathbb{C}$上对应的半球。投影 p 使$\mathcal{R}$成为一个与平面同胚的黎曼曲面。

扩充实直线的原像 $p^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$称为$(\mathcal{R}, p)$的网。令 $\mathcal{S}$ 表示网与无限方格网同胚的铺展在球面上的曲面集合；集合 $\mathcal{S}$ 恰好由可按照上述方法构造的曲面组成。Vinberg[14]提出了一个问题： $\mathcal{S}$ 中曲面的共形类型可能是什么。显然，这种曲面可以是抛物型，如 $\wp^{-1}$的黎曼曲面所示，其中 $\wp$ 是一个Weierstrass椭圆函数。Geyer和Merenkov的一篇论文 [8]通过构造一个具有方格网的双曲曲面，回答了Vinberg问题。

本文通过在 $\mathcal{S}$ 的一个子集上构造概率测度，并证明其中几乎所有曲面都是抛物型，继续研究Vinberg问题。因此，双曲曲面是一个边界情形。我们的主要工具是随机构造的拟共形映射，它们对与 $\mathcal{S}$中随机曲面相关的亚纯函数进行正规化。拟共形映射是共形映射的一种推广，同时保留了共形映射的许多性质；它们因具有灵活性而十分有用。这些映射曾

由Teichm¨uller进行了深入研究，例如见 [13]。随机拟共形映射的研究分别从解析观点 [4]和几何观点 [9]展开。在这些进展的基础上，我们确立了拓展现有理论范围的结果。我们工作的一个创新之处，是将关于随机拟共形映射的结果应用于研究 $\mathcal{S}$中曲面的共形类型。关于随机拟共形映射的定理还可能有哪些其他应用，也值得探讨。

$\mathcal{S}$ 中的曲面可通过从 $\mathbb{C}$拉回球面度量而赋予黎曼流形结构。我们的模型构造了随机曲面，它们在由四个单元交汇形成的可数顶点集之外具有正常曲率。像我们这样的覆盖球面的曲面，是多值代数函数的黎曼曲面这一概念的自然推广。特别是，覆盖球面的曲面允许纤维具有无限基数。从组合学角度看， $\mathcal{S}$ 中的随机黎曼曲面具有方格结构。由随机格产生的共形结构已得到广泛研究，例如 Angel 和 Schramm 在 [3] 中的研究，以及 Gill 和 Rohde 在 [11]中的研究。随机格在统计力学和二维量子引力研究中日益受到关注；在这些领域，离散化用于将对无限维空间的积分转化为对有限多个变量求和，如 [7]所示。以往的研究主要聚焦于随机三角剖分，而我们将其拓展到具有四边形胞元的随机格。

为了构造随机拟共形映射，我们令一个划分$\mathcal{P} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots\}$ 为一组可数个若尔当区域 $\mathcal{D}_i$，这些区域的内部互不相交，且其闭包覆盖 $\mathbb{C}$。本文中，我们假设所有若尔当区域 $\mathcal{D}_i$ 都包含其边界。第3节将介绍一种模型，用于在划分的每个区域 $\mathcal{D}$ 上随机选取贝尔特拉米系数 μ 。量 $\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$ 在 $\mathbb{C}$上不一定一致有界，这意味着可测黎曼映射定理并不适用；不过，我们仍然能够构造一个贝尔特拉米系数为 μ的局部拟共形同胚 w^μ 。尽管 w^μ 是单射，它却不一定是满射。出于技术上的原因，我们将研究范围限于有界几何划分 $\mathcal{P}$ 上的概率有界微分 μ ；其定义将在第3节给出。由此我们得到第一个主要定理。

定理 1. 若 μ 是定义在具有有界几何的分划 $\mathcal{P}$ 上的概率有界贝尔特拉米微分，则映射 w^μ 以概率 *1* 满射到 $\mathbb{C}$。

对于 $p \in \mathbb{C}$，令 $B(p, R)$ 表示以 p 为中心、半径为 R 的开圆盘。在第3节中，我们还定义了 $\mathcal{P}$ 和 μ 上一种称为周期性的条件。我们的第二个主要定理指出，如果进一步满足周期性，那么在任何足够大的圆盘上， w^μ 以高概率接近一个线性映射。

定理 2. 设 μ 是周期的，且 $\mathcal{P}$ 是具有有界几何的周期划分。那么存在一个线性映射 A_μ ，使得对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 R_ϵ ，使得如果 $R \geq R_\epsilon$ 足够大，那么 $|A_\mu - w^\mu| < \epsilon R$

在 $B(0,R)$ 上以概率 $1-\epsilon$成立。这里 A_μ 仅取决于选择 μ所依据的概率分布。

定理1和定理2之所以有用，是因为在修改与 $\mathcal{S}$ 中曲面相关的随机亚纯函数时，自然会出现随机拟共形映射。具体而言，我们将考虑一个概率空间 $(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$，其中 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{S}$ 的子集，而 $\eta_{\mathcal{V}}$ 是 $\mathcal{V}$ 上的概率测度。于是，下面的定理便可由定理 1 轻易推出。

定理 3. 在 $(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$ 中，几乎所有曲面都是抛物型的。

定理 2 为我们的随机拟共形映射的结构提供了更具体的信息，因此使我们能够进一步了解由曲面定义的亚纯函数 f $\mathcal{V}$。具体而言，除了得知 f 定义在整个 $\mathbb{C}$ 上，我们还能够利用下述定理估计其增长阶。

定理 4. 由 $(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$ 中的曲面定义的亚纯函数 f 几乎总是阶至少为 *2*，且下阶至多为 *2*。

在第2节中，我们将讨论与极值长度和拟共形映射相关的背景知识。在第3节中，我们将定义有界几何划分、概率有界随机贝尔特拉米微分以及周期划分与微分。在第4节中，我们将证明有界几何划分中渗流的一些性质。在第5节中，我们将利用渗流结果证明随机拟共形映射的“粗拟共形性”，进而证明定理 1。在第6节中，我们将推广 Ivrii 和 Markovi´c [9] 的结果，以证明定理 2。在第7节中，我们定义概率空间 $(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$。在第 8 节中，我们将运用定理1和定理2证明定理 3 和定理 4，以此大幅推广 Vinberg问题 [14]的解答。最后，在第9节中，我们将探讨未来研究的潜在方向。

2 背景

我们回顾极值长度理论和拟共形映射的相关背景，以确立记号和约定。我们沿用 Ahlfors 的著作 [1] 和 [2]。设 Γ 是 $\mathbb{C}$中的一族可求长曲线。定义度量 $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 若满足博雷尔可测、非负，且 $\iint \rho^2 \, dx\, dy$ 不等于 0 或 ∞，则称其为容许的。给定 $\gamma \in \Gamma$ 和一个容许的 ρ，按照以下公式定义$\rho(\gamma)$

$$\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho \, |dz|.$$

于是我们有

$$L(\rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma).$$

根据公式定义 $A(\rho)$

$$A(\rho) = \iint \rho^2 \, dx \, dy.$$

我们有如下定义。

定义。 Γ的极值长度 记作 $\lambda(\Gamma)$，定义为

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)},$$

其中，上确界取遍所有允许函数 ρ。

下面的命题使极值长度与我们对共形类型的研究相关。

命题 5 ([2, 定理 3 在第 1]章的推论。 若 ϕ 在包含一族可求长曲线 Γ 的区域内共形，且 $\Gamma' = \phi(\Gamma)$，则$\lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma')$。

我们还需要下面这个称为比较原理的命题。

命题 6 ([1, 定理 4-1])。 设 Γ 和 Γ' 是两个曲线族，使得每条曲线 $\gamma \in \Gamma$ 都包含某个 $\gamma' \in \Gamma'$。在这种情况下， $\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma')$。

最后，以下命题称为复合法则，可用于进一步比较各种曲线族的极值长度。

命题 7 ([1, 定理 4-2])。 设 Ω_1,Ω_2 是互不相交的开集，且 Γ_1、 Γ_2分别是 Ω_1,Ω_2，中的曲线族。若 Γ 是第三个曲线族，且其中每条 $\gamma \in \Gamma$ 都包含一条 $\gamma_1 \in \Gamma_1$ 和一条 $\gamma_2 \in \Gamma_2$，则 $\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2)$。

本文中，四边形指若尔当区域 Q ，其边界上有四个顶点，将边界分成四段弧，称为边。此外，标记一对对边，以便考察连接这两条标记边的 Q 中的曲线族 Γ 。我们用以下公式定义 Q 的模:

$$\operatorname{Mod} Q = \lambda(\Gamma)^{-1}.$$

区域 Ω 上的保向同胚 ϕ称为 K 拟共形映射，如果

$$\frac{1}{K} \operatorname{Mod} Q \leq \operatorname{Mod} \phi(Q) \leq K \operatorname{Mod} Q$$

对 Ω 中的所有四边形 Q，均有此性质。

令 $A(r, R)$ 表示中心为 0、内半径为 r、外半径为R的环带。给定一个拓扑环带 A，令 $\operatorname{Mod} A$ 表示连接 A边界分支的曲线族的极值长度。众所周知，$\operatorname{Mod}\ A(r, R) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}$ （参见 [2]第 1 章中的例2）。

命题 6 得出以下抛物性的判据。

命题 8。 设 X 是一个单连通开黎曼曲面，且 K 是 X 的一个具有非空内部的紧子集。设 Γ 是连接 K 的边界与 X 的边界的曲线族，也就是说， Γ 中的每条曲线都始于 K 的边界，并最终位于 X 的任意紧子集之外。如果 $\lambda(\Gamma) = \infty$，那么 X 是抛物型的。

证明。 反设 X 是双曲型。根据一致化定理，我们可以令 ϕ为从 X 到单位圆盘 $\mathbb{D}$的共形映射。我们还可以确保 ϕ将 K 的一个内部点映射到 0。因此，我们可以选取 $0 < r < 1$ ，使得 $B(0, r) \subset \phi(K)$。令 Γ' 为连接 $B(0, r)$的边界与单位圆盘边界的曲线族。根据命题 5 和命题 6，我们有

$$\lambda(\Gamma') \geq \lambda(\phi(\Gamma)) = \lambda(\Gamma) = \infty,$$

所以 $\lambda(\Gamma') = \infty$。然而，连接环带 $A(r, 1)$相对两侧边界分支的曲线族的极值长度为 $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$，这个量显然不是无穷大。由此得到矛盾，说明 X 是抛物型。

□

3 平面划分上的随机微分

令 $\mathcal{P} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots\}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 的一个划分，由可数个若尔当区域 $\mathcal{D}_i$ 组成，使它们覆盖 $\mathbb{C}$且内部互不相交。这里我们将若尔当区域视为包含其边界。我们作出若干较弱的假设，以控制划分 $\mathcal{P}$的行为。我们通过以下公式定义 $\mathcal{P}$ 的网格尺寸d

$$d = \sup_i \{\operatorname{diam} \mathcal{D}_i\},$$

其中，diam $\mathcal{D}_i$ 表示 $\mathcal{D}_i$的直径。若对于所有 $R > 0$，都存在一个常数 k_R ，使得对于所有 $p \in \mathbb{C}$，圆盘 $B(p, R)$至多与 $\mathcal{P}$的 k_R 个区域相交，则称 $\mathcal{P}$ 具有有界密度。由此得到以下定义。

定义。 若划分 $\mathcal{P}$ 具有有限网格尺寸和有界密度，则称其具有有界几何。

我们讨论在平面$\mathbb{C}$上构造随机贝尔特拉米微分。对于每个区域 $\mathcal{D}_i$，令 $\mu_t^{(i)}(z)$表示一族由 $t \in \mathbb{R}$参数化、定义在$\mathcal{D}_i$ 上的贝尔特拉米微分。这里， t 的取值由 $\mathbb{R}$上的某个概率测度 ν_i 选取，因此 $\mu_t^{(i)}(z)$是定义在 $\mathcal{D}_i$上的随机选取函数。从现在起，我们假设对于每个 t 和 i ，都存在一个常数$k_t^{(i)} < 1$ ，使得对所有 $z \in \mathcal{D}_i$， $|\mu_t^{(i)}(z)| \leq k_t^{(i)}$ 。因此，拟共形伸缩率 $K = \frac{1+|\mu_t^{(i)}(z)|}{1-|\mu_t^{(i)}(z)|}$ 在每个 $\mathcal{D}_i$上都有界。对于每个 i，我们要求 $k_t^{(i)}$ 是 t的可测函数。

令 μ 为 $\mathbb{C}$ 上的随机贝尔特拉米系数，使得每个 $\mathcal{D}_i$ 中 $\mu(z)$ 的取值为 $\mu_t^{(i)}(z)$，其中每个 $\mathcal{D}_i$ 中的 t 均由 ν_i 独立随机选取

$\mathcal{D}_i$ （ μ 的存在性由柯尔莫哥洛夫延拓定理保证）。令 $K_\mu(z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ （ ）为与 μ 相关联的拟共形伸缩率。尽管 K_μ 在每个 $\mathcal{D}_i$ 中都有界，但我们不一定能找到一个适用于所有 $\mathbb{C}$ 的 K_μ 上界。因此，可测黎曼映射定理并不保证存在一个拟共形同胚 $w^\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其贝尔特拉米系数为 μ。然而，Ivrii 和 Markovi´c [9] 概述了一种构造 w^μ 的方法。若考虑截断的贝尔特拉米微分 $\mu_R = \mu \cdot \chi_{B(0,R)}$，则 K_{μ_R} 在整个 $\mathbb{C}$ 上都有界，因为根据 $\mathcal{P}$ 的有限密度， $B(0, R)$ 只与有限多个区域 $\mathcal{D}_i$ 相交，且 K_μ 在每个 $\mathcal{D}_i$ 中都有界。因此，可测黎曼映射定理保证存在一个拟共形同胚 $w_R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其贝尔特拉米微分为 μ_R，并固定点 -1、0、1。然后，我们可以取 w_R 的一个收敛子序列，使其作为 $R \to \infty$ 收敛到映射 $w^\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，其贝尔特拉米微分为 μ。我们可以在 w^μ 后复合一个 M¨obius 变换，以确保它固定 0、1、∞（若 $w^\mu(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$, 则称 w^μ 固定 ∞）。映射 w^μ 是单射，但不一定是满射。

现在我们来定义定理 3 中“概率有界”的含义。

定义。 若对所有 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 $k < 1$，使得对于所有 i， $|\mu| \le k$在 $\mathcal{D}_i$ 上处处成立的概率至少为 $1 - \epsilon$，则随机微分 μ 是概率有界的 。

由于 $K_\mu = \frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}$，我们得到下面这个等价定义。事实上，下面定义中的常数 K 与上面定义中的常数 k 由公式 $K = \frac{1+k}{1-k}$ 关联。

定义。 若对所有 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 $K < \infty$，使得对于所有 i， $K_\mu \le K$ 在 $\mathcal{D}_i$ 上处处成立的概率至少为 $1 - \epsilon$，则随机微分 μ 是概率有界的 。

对于第二个主要定理，我们还需要一些周期性假设。若存在一个由向量 Γ 构成的二维格，使得当 $v \in \Gamma$ 时，平移 v 是 $\mathcal{P}$ 的一个对称变换，则称 $\mathcal{P}$ 以 Γ 为周期。我们还称定义在 $\mathcal{P}$ 上的随机贝尔特拉米微分 μ 以 Γ 为周期，若只要 $\mathcal{D}_{i'}$ 是将 $\mathcal{D}_i$ 平移 $v \in \Gamma$ 得到的， μ 在 $\mathcal{D}_i$ 和 $\mathcal{D}_{i'}$ 上的分布就相同。我们证明了关于周期微分的以下引理。

引理9。 如果 μ 是有界几何的周期划分 $\mathcal{P}$ 上的周期微分，那么它是概率有界的。

证明。 我们首先证明，对于所有 $i \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，都可以选择 $k_i < 1$，使得在 $\mathcal{D}_i$ 上有 $|\mu| < k_i$，其概率为 $1 - \epsilon$。回顾一下， $k_t^{(i)}$ 是关于 t 的可测函数，且在 $\mathcal{D}_i$ 上有 $\mu_t^{(i)}(z) \le k_t^{(i)}$。给定 $k < 1$，令 $B_k^{(i)}$ 表示满足 $k_t^{(i)} \le k$ 的所有 $t \in \mathbb{R}$ 所组成的集合。任意 t 在 k 足够大时都属于 $B_k^{(i)}$，因此由测度的连续性可得

$$\lim_{k \to 1} \nu_i \left(B_k^{(i)} \right) = 1.$$

因此，可以选择足够大的 $k_i < 1$，使得 $\nu_i(B_{k_i}^{(i)}) \geq 1-\epsilon$，这意味着在 $\mathcal{D}_i$ 上有 $|\mu| \leq k_i^{(t)} \leq k_i$ 的概率至少为 $1-\epsilon$。

设 u 和 v 是生成 Γ的两个向量。由u 和 v 张成的平行四边形包含于 $B(0,\ R)$中，其中 R 足够大。 $\mathcal{P}$ 的有限密度意味着这个平行四边形只与有限多个区域 $\mathcal{D}_i$ 相交。固定$\epsilon > 0$。对于每个与该平行四边形相交的区域 $\mathcal{D}_i$，我们可以选择足够大的 $k_i < 1$，使得 $\mathcal{D}_i$上的 $|\mu| \leq k_i$ 以概率 $1-\epsilon$成立。令 $k < 1$ 为所有与由 u和 v 张成的平行四边形相交的 $\mathcal{D}_i$ 对应的 k_i 的最大值，由周期性可知，在任意区域$\mathcal{D}_i$中，$|\mu| \leq k$ 以概率 $1-\epsilon$ 成立。因此 μ是概率有界的。

□

现在假设 μ 是有界几何划分 $\mathcal{P}$ 上的周期的贝尔特拉米系数。根据引理9，我们可以应用定理1，得出 w^μ 几乎必然满射。因此， w^μ 由其贝尔特拉米系数 μ 确定，且仅相差一个平面 $\mathbb{C}$的双全纯映射的后复合；该映射必为 $z \mapsto az+b$的形式。从此处起，我们要求 w^μ 固定 0、1、 ∞；这几乎必然唯一确定 w^μ。

4 渗流

令 $\mathcal{P}$ 为一个有界几何的划分。我们首先证明一个引理，讨论与圆盘 $B(0,\ R)$相交的区域数量的增长率 $\mathcal{D}_i$。

引理10。令 $\mathcal{P}$ 为一个有界几何的划分。令 $k(R)$ 表示与 $B(0,\ R)$ 相交的区域数量 $\mathcal{D}_i$。那么存在仅依赖于 $\mathcal{P}$ 的常数 m 和M，使得对于所有足够大的 R，有

$$mR^2 \leq k(R) \leq MR^2.$$

证明。为证明上界 $k(R) \leq MR^2$，注意存在一个常数M'，使得当 R足够大时，$B(0,\ R)$可由 $M'R^2$个半径为1的圆盘覆盖。根据有界密度的定义，这些圆盘中的每一个至多与 k_1 个区域相交，因此 $B(0,\ R)$至多与 $k_1M'R^2$ 个区域相交。取 $M = k_1M'$即可得到上界。

令 d 表示 $\mathcal{P}$的网格尺寸，也就是说，对于所有 i，都有 $d \geq \operatorname{diam} \mathcal{D}_i$。为证明下界，注意存在一个常数 m，使得对于所有足够大的R，$B(0,\ R)$的内部至少包含 mR^2 个边长为 $2d$的正方形，这些正方形彼此不相交，边界处也不相交。对于每个正方形Q，我们可以指定一个包含 Q中心的区域 $\mathcal{D}_Q$。注意这些区域 $\mathcal{D}_Q$ 各不相同，因为显然，直径至多为d 的单个区域 $\mathcal{D}$ 不可能包含两个正方形的中心，而这两个中心之间的距离大于 $2d$。由此可知，$B(0,\ R)$至少包含 mR^2 个区域。

□

注意到，根据引理10的证明，k_1的有限性意味着对于所有 R，k_R 都是有限的，因为 $k_R \leq k_1M'R^2$。因此，有界密度可以被视为一种局部条件，也就是说，对于任意 R，k_R 的有限性意味着对于所有 R，k_R 都是有限的。

现在我们描述 $\mathcal{P}$上的一个渗流过程。固定一个常数 $0 \leq r \leq 1$，并独立且随机地将每个区域 $\mathcal{D}_i$ 染成蓝色或黄色，使得任意给定区域为黄色的概率至多为 r （注意，不同区域为黄色的概率不必相同，只要它们彼此独立且都不超过 r即可）。在这种情况下， r 称为渗流参数。对于任意可求长曲线 γ，定义其化学长度 $d_{\text{chem}}(\gamma)$为它与蓝色区域的交集的长度。对于任意两点 x 和 y，令 $d_{\text{chem}}(x, y)$表示所有连接 x 和 y的曲线 γ 上的 $d_{\text{chem}}(\gamma)$的下确界。 x 与y 之间的欧几里得距离记为 $d(x, y)$。现在我们可以证明关于渗流的主要引理了，该引理指出，以高概率而言，化学距离与欧几里得距离相当。这个引理的灵感来自 [9]的引理 4.2。

引理 11。 设 $\mathcal{P}$ 是一个具有有界几何的划分。那么存在一个正的常数 $r < \frac{1}{2}$，它仅依赖于 $\mathcal{P}$，使得如果渗流参数至多为 r，那么对于任意足够大的 N，以下结论以至少 $1 - \frac{1}{N^2}$ 的概率成立：对于任意两点 $x, y \in B(0, N)$，若 $d(x, y) \geq \log N$，则有

$$\frac{1}{10} \cdot d(x, y) \leq d_{\text{chem}}(x, y) \leq d(x, y).$$

证明。 令 d 表示 $\mathcal{P}$的网格尺寸。固定 $R > 3d$。令区域 $\mathcal{D}_i$ 的 R-邻域表示所有到 $\mathcal{D}_i$ 的距离小于 R的点所组成的集合。只要两个区域之间的距离至少为 R，它们的$\frac{R}{3}$ -邻域就不会与任何共同区域相交。

考虑两点 x， $y \in B(0, N)$。我们按如下方式构造图 $G = (V, E)$，其中顶点集 V 由 $\mathcal{P}$ 中的区域 $\mathcal{D}$ 组成，边集 E由 V中的区域对组成。将包含 x 的区域加入 V。考虑一条从 x通向 y的路径 γ。沿着 γ行进时，如果进入一个与 V中任何其他区域的距离至少为 R 的区域，就将这个新区域加入 V。最后，当且仅当两个 V 元素所对应区域之间的距离至多为 $2R$时，在它们之间连一条边。

我们断言 G 是连通的。事实上，我们可以证明，沿着γ前进时，我们加入到 V 中的每个区域都属于 G的同一个连通分支，该分支包含 x所在的区域。如果沿着 γ前进时，将区域 $\mathcal{D}$ 加入到 V 中，令$\mathcal{D}'$ 表示 γ 进入 $\mathcal{D}$之前所在的区域。那么 $\mathcal{D}'$ 不在 V中，因此它到 V中某个区域的距离至多为 R。由此可知， $\mathcal{D}$ 到V中某个区域的距离至多为 $R + d < 2R$。因此， $\mathcal{D}$与 V中先前的区域属于同一个连通分支。故 G 是连通的。

最后，注意到 V 必须包含一个与 y 的距离至多为$2R$的区域。事实上，若包含 y 的区域不在 V中，则它与 V 中某个区域的距离至多为 R，且从 y 到 V 中某个区域的距离至多为$R + d < 2R$。因此，我们可在 V中选取一个区域序列 σ，该序列以包含 x 的区域开始，使得 σ 中任意两个相邻区域之间的距离至多为 $2R$，且最后一个区域与 y的距离至多为 $2R$。由构造可知， σ 中的每个区域与其相邻区域的距离至少为 R。设 L 表示 σ中区域的数量。

若 σ 中的一个区域 $\mathcal{D}$ 是孤立的，且与 $\mathcal{D}$ 的 $\frac{R}{3}$ -邻域相交的每个区域都是蓝色，则称其为孤立的。若 σ 中至少有 $_{9\ 10}$ 个区域是孤立的，则可得

$$d_{\mathrm{chem}}(\gamma) \geq \frac{9}{10}\frac{R}{3}L. \tag{1}$$

选择一个点序列 $x = x_1$、x_2、.....、x_L，使得 x_i 属于 σ 中的第 i 个区域。由于 V 中任意两个区域的距离至多为 $2R$，且每个区域的直径至多为 d，因此 $d(x_i,\ x_{i+1}) \leq 2R+2d < 3R$。同理，$d(x_L,\ y) < 3R$。由此可得

$$L \geq \frac{d(x,y)}{3R} \tag{2}$$

将方程 2 代入方程 1，我们得到

$$d_{\mathrm{chem}}(\gamma) \geq \frac{9}{10}\frac{R}{3}\frac{d(x,y)}{3R} = \frac{1}{10}d(x,y).$$

我们的策略现在是证明：以高概率，对于所有可能的序列 σ，σ 中至少有$_{9\ 10}$ 的区域是孤立的。

如果 $d(x,\ y) \geq \log\ N$，那么方程 2 表明，一个相关联的区域序列 σ 的长度 L 至少为$_{\log_{3R}{}^{N}}$。若区域序列 σ 中任意两个相邻区域的距离至多为 $2R$，且 σ 中任意两个区域的距离至少为 R，则称该序列为可关联序列。我们为如下概率建立下界：对于长度为 $L \geq {}_{\log_{3R}{}^{N}}$ 的任意可关联序列，其中至少有$_{9\ 10}$ 的区域是孤立的。

令 $k = k_{\frac{R}{3}+d}$，使得任意区域的 $\frac{R}{3}$ -邻域至多与 k个区域相交（这是可行的，因为 $\mathcal{P}$ 具有有界密度）。因此，一个区域不是孤立区域的概率至多为

$$1-(1-r)^k \leq 1-(1-rk) = rk.$$

在一个长度为 L 的可关联序列中，超过 $\frac{L}{10}$ 个区域不是孤立区域的概率至多为

$$\sum_{j=\lceil \frac{L}{10} \rceil}^{L} \binom{L}{j}(rk)^j \leq 2^L \sum_{j=\lceil \frac{L}{10} \rceil}^{\infty} (rk)^j \leq 2^{L+1}(rk)^{\frac{L}{10}},$$

只要我们将 r 设得足够小，使得 $rk \leq \frac{1}{2}$，最后一个不等式就成立。我们利用了可关联序列中任意两个区域之间的距离至少为 R 这一事实，得出它们的 $\frac{R}{3}$ -邻域不会与任何相同的区域相交，因此可以断定该序列中两个区域分别为孤立区域的概率相互独立。

根据引理10，存在一个常数 M，使得对于所有足够大的 N，圆盘 $B(0,\ N)$ 至多与划分 $\mathcal{P}$ 中的 MN^2 个区域相交。固定可关联序列 σ 的一个区域$\mathcal{D}$。任何与 $\mathcal{D}$ 的距离至多为 $2R$ 的区域，都必须与以 $\mathcal{D}$ 中任意一点为中心、半径为 $2R+d<3R$ 的圆盘相交，

这意味着，在 $\mathcal{D}$ 之后， σ 中下一个区域至多有 k_{3R} 种选择。因此，长度为 L 的可关联序列数量至多为 $MN^2k_{3R}^L$，因为起始区域至多有 MN^2 种选择。因此，存在一个长度为 L 的序列、其中至少有 $\frac{L}{10}$ 个区域不是孤立的，其概率至多为 $MN^2k_{3R}^L \cdot 2^{L+1}(rk)^{\frac{L}{10}} = 2MN^2\alpha_r^L$，其中 $\alpha_r = 2k_{3R}(rk)^{\frac{1}{10}}$。对所有 $L \geq \log_{3R} N$ 求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{L=\lceil \frac{\log N}{3R} \rceil}^{\infty} 2MN^2\alpha_r^L &= 2MN^2 \sum_{L=\lceil \frac{\log N}{3R} \rceil}^{\infty} \alpha_r^L \\ &\leq 4MN^2\alpha_r^{(\log N)/3R} \\ &= 4MN^2N^{(\log \alpha_r)/3R} \leq \frac{1}{N^2}\end{aligned}$$

对所有足够大的 N，只要我们选择足够小的 r。注意， r 不依赖于 N，因为 $N \to \infty$。

因此，我们有：如果选择足够小的 r ，那么以至少 $1 - \frac{1}{N^2}$ 的概率，所有长度至少为 $\log_{3R} N$ 的可关联序列都满足以下性质：其中至少有 $9\,10$ 的区域是孤立的。因此，对于任意一对点 x， y，若 $d(x, y) \geq \log N$，我们有

$$d_{\text{chem}}(\gamma) \geq \frac{1}{10} d(x, y)$$

对于连接 x 和 y的任意曲线 γ ，可得以至少$1 - \frac{1}{N^2}$的概率，我们有

$$d_{\text{chem}}(x, y) \geq \frac{1}{10} d(x, y)$$

对于任意一对点 x， y，若 $d(x, y) \geq \log N$。证明完毕。

□

5 粗拟共形性

本节中，我们引入“粗拟共形性”的概念，并证明映射 w^μ 以高概率是粗拟共形的。随后，我们利用所得结果证明定理 1。定义和证明主要基于 Ivrii 和 Markovi´c [9] 的工作。

定义。 若一个保向同胚 ϕ 对于边长至少为 ϵ的任意矩形，其模的改变倍数至多为 K，则称其为（K， ϵ）粗略拟共形的。

现在我们证明，随机拟共形映射 w^μ 在 $B(0, N)$ 上以高概率是粗略拟共形的。

引理 12. 设 μ 是定义在具有有界几何的划分 $\mathcal{P}$ 上的概率有界贝尔特拉米系数。存在一个固定常数 K ，使得对任意足够大的 N， w^μ 以概率 $1 - \frac{1}{N^2}$. 在 $B(0, N)$ 上是粗略的拟共形映射，畸变为$(K,$ 对数 $N)$

证明。 根据 μ 的概率有界性，可以选取一个常数$K>1$ ，使得.....的概率为

$$K_\mu \leq K'$$

至少为 $1-r$，其中 r 是引理 11 保证存在的常数。如果 $K_\mu > K'$，则将划分中的区域 $\mathcal{D}$ 涂成黄色，否则涂成蓝色。各区域独立着色，且区域被涂成黄色的概率至多为 r。由引理 11 可知，对所有足够大的 N ，以至少 $1-\frac{1}{N^2}$ 的概率有

$$d_{\mathrm{chem}}(x,y) \geq \frac{1}{10} d(x,y)$$

对所有 x， y，当 $d(x,\ y) \geq \log N$ 时。

取一个矩形 $\mathbf{R} \subset B(0,\ N)$，其边长为 ℓ_1，$\ell_2 \geq \log N$，且长度为 ℓ_1 的边已标记。我们建立 $\operatorname{Mod} w^\mu(\mathbf{R})$ 的上界。为此，令 $\mathcal{B}$ 表示蓝色区域的并集，并定义度量$\rho_{\mathbf{R}} = \chi_{\mathcal{B}\cap\mathbf{R}}$。注意， $A(\rho_{\mathbf{R}}) \leq \ell_1\ell_2$。另考虑如下定义的度量

$$\rho^*_{\mathbf{R}}(w) = [\mathrm{Jac}(w^\mu)^{-1}(w)]^{\frac{1}{2}} \cdot \chi_{w^\mu(\mathcal{B}\cap\mathbf{R})}(w),$$

使得 $A(\rho^*_{\mathbf{R}}) = A(\rho_{\mathbf{R}}) \leq \ell_1\ell_2$。

令 Γ 表示连接$\mathbf{R}$中长度为ℓ_1 的相对标记边的曲线族。由于 w^μ 在蓝色区域内是 K' 拟共形的，因此

$$\rho^*_{\mathbf{R}}(w^\mu(\gamma)) \geq \frac{1}{\sqrt{K'}} \rho_{\mathbf{R}}(\gamma)$$

对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立。由于 γ两端点之间的距离至少为 $\ell_2 \geq \log N$，由引理 11 可知， $\rho_{\mathbf{R}}(\gamma) \geq \frac{\ell_2}{10}$ 的概率为 $1-\frac{1}{N^{2\circ}}$记 Γ^* 为连接$\mathbf{R}$中相对标记边的曲线族，则

$$L_{\rho^*_{\mathbf{R}}}(\Gamma^*) \geq \frac{1}{10\sqrt{K'}} \ell_2.$$

Thus

$$\operatorname{Mod} w^\mu(\mathbf{R}) = \lambda(\Gamma^*)^{-1} \leq \frac{A(\rho^*_{\mathbf{R}})}{L_{\rho^*_{\mathbf{R}}}(\Gamma^*)^2} \leq 100K' \frac{\ell_1\ell_2}{\ell_2^2} = 100K' \operatorname{Mod} \mathbf{R}$$

对所有$\mathbf{R}$，以概率 $1-\frac{1}{N^2}$成立。同理可得

$$\operatorname{Mod} w^\mu(\mathbf{R}) \geq \frac{1}{100K'} \operatorname{Mod} \mathbf{R}$$

通过考虑连接$\mathbf{R}$未标记的一对边的曲线族。因此， w^μ 以概率 $1-\frac{1}{N^2}$是（$100K'$，$\log N$）粗略拟共形的，故引理得证， $K = 100K'$。

□

利用引理 12，我们现在可以开始证明定理 1。

定理 *1* 的证明。令 $Q(n, N)$ 表示由正方形 $[-N, N]^2$ 去掉其中心处的正方形 $[-n, n]^2$ 后所得的拓扑环带。我们有，$\operatorname{Mod} Q(n, N)$ 表示连接 $Q(n, N)$ 相对边界分支的曲线族的极值长度。我们给出 $\operatorname{Mod} \phi(Q(N, 2N))$ 的下界，其中 ϕ 是任意一个 (K, N) 粗略拟共形映射。

令 R_1 表示矩形 $[N, 2N] \times [-2N, 2N]$，并令 R_2, R_3, R_4 分别表示绕原点旋转 R_1 $90°, 180°, 270°$ 度所得的图形。任何连接 $Q(N, 2N)$ 的相对边界分支的路径 γ，都必须与某个 $1 \leq i \leq 4$ 相交。事实上，不妨设 γ 的终点位于边 $x = 2N$ 上。由于 γ 的起点的 x 坐标至多为 N，因此 γ 与 R_1 相交。矩形 R_i 如图 1 所示。

因此，连接 $\phi(Q(N, 2N))$ 的相对边界分支的路径 γ，必定与某个 $1 \leq i \leq 4$ 的 $\phi(R_i)$ 相交。由于 R_i 的模为 $1\,4$，可知 $\phi(R_i)$ 的模至少为 $\frac{1}{4K}$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在一个度量 ρ_i，使得 $A(\rho_i) = 1$，且对于任何与 $\phi(R_i)$ 相交的曲线 γ，$\rho_i(\gamma)^2 \geq \frac{1}{4K} - \epsilon$。

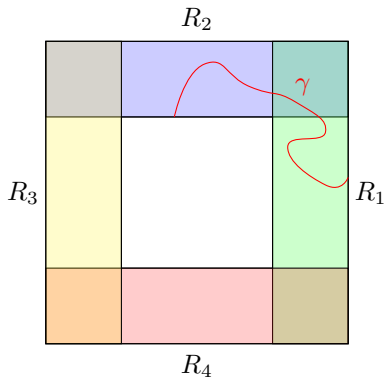

图 1：连接 $Q(N, 2N)$ 相对边界分支的曲线 γ

现在考虑度量 $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_4$。根据默尔黑德不等式，$\rho^2 \leq 4(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)$。因此，对于连接 $\phi(Q(N, 2N))$ 相对边界分支的任意曲线 γ，$A(\rho) \leq 16$ 且 $\rho(\gamma)^2 \geq \frac{1}{4K} - \epsilon$。由此可知，穿过 $\phi(Q(N, 2N))$ 的曲线族的极值长度至少为

$$\frac{L(\rho)^2}{A(\rho)} \geq \frac{1}{64K} - \frac{\epsilon}{16}.$$

令 ϵ 趋于 0，我们得到

$$\operatorname{Mod} \phi(Q(N, 2N)) \geq \frac{1}{64K}$$

注意， $Q(2^k N, 2^{k+1}N)$ 包含于 $B(0, 2^{k+1}\sqrt{2}N)$ 中。选择足够大的 N，使得 $N \geq \log(2\sqrt{2}N)$，并且引理 12 对所有 $N' \geq 2\sqrt{2}N$ 均适用于 $B(0, N')$。考虑嵌套环域序列

$$Q(N, 2N), Q(2N, 4N), Q(4N, 8N), \ldots$$

以概率 $1 - \frac{1}{2^{2k+3}N^2}$，我们有 w^μ 在 $B(0,\ 2^{k+1}\sqrt{2}N)$ 中是 $(K,\ 2^k N)$ 粗拟共形的；事实上，w^μ 满足更强的 $(K,\ \log(2^{k+1}\sqrt{2}N))$ 粗拟共形性假设。因此，连接 $Q(2^k N,\ 2^{k+1}N)$ 的相对边界分支的曲线族的极值长度至少为 $\frac{1}{64K}$。根据 Borel–Cantelli 引理，这几乎必然对除有限多个 k 之外的所有情形成立。由命题 7，连接 $w^\mu(\mathbb{C})$ 的边界与 $w^\mu([-N, N]^2)$ 的曲线族的极值长度至少为 $\frac{1}{64K} + \frac{1}{64K} + \cdots = \infty$。由命题 8 可知，$w^\mu(\mathbb{C})$ 几乎必然是抛物型的。这意味着 w^μ 几乎必然是满射，从而完成证明。

□

6 重新缩放

现在我们转而证明定理 2。给定 δ，令 I_δ 表示映射 $z \mapsto \delta z$。令 $\delta\mathcal{P}$ 表示对划分 $\mathcal{P}$ 应用映射 I_δ缩放后得到的划分，这意味着 $\delta\mathcal{P}$ 的网格尺寸比 $\mathcal{P}$ 小 δ倍。我们可以考虑划分 $\delta\mathcal{P}$上的相应随机贝尔特拉米微分 $\mu_\delta = \mu \circ I_\delta^{-1}$。最后，令 w_δ^μ 表示贝尔特拉米微分为 μ_δ的拟共形映射。我们将引理 12 改写为适用于 w_δ^μ 的形式。

引理 13. 任取 $N, \epsilon > 0$。对于任意足够小的 δ，映射 w_δ^μ 以至少 $1 - \epsilon$ 的概率在 $B(0, N)$ 上是(K, ϵ)-粗略拟共形的。

证明。 证明 w_δ^μ 在 $B(0, N)$上是(K, ϵ)-粗略拟共形的，等价于证明 w^μ 在 $B(0,\ \delta^{-1}N)$上是$(K, \delta^{-1}\epsilon)$-粗略拟共形的。然而，根据引理 12，当 δ 足够小以至于 $\delta^{-1}\epsilon \geq \log(\delta^{-1}N)$时，这一结论以至少 $1 - \frac{\delta^2}{N^2}$ 的概率成立。还需要进一步选取足够小的 δ，使得 $\frac{\delta^2}{N^2} < \epsilon$成立。

□

现在我们得到定理 2 的一个略作修改的形式。

定理 14. 设 μ 是周期的，且 $\mathcal{P}$ 是一个具有有界几何的周期划分。那么存在一个线性映射 A_μ，使得对于任意 $\epsilon > 0$，都存在一个常数 δ_ϵ，若 $\delta \leq \delta_\epsilon$ 足够小，则以至少 $1 - \epsilon$ 的概率，$|A_\mu - w_\delta^\mu| < \epsilon$ 在$B(0,1)$ 上成立。这里，A_μ 仅取决于据以选取 μ 的概率分布。

在引理 13 中以高概率证明粗拟共形性之后，定理的证明便可直接照搬 [9] 第6节和第7节的内容。请注意，在 [9]引理6.3的证明中用到了周期性的假设。现在我们由定理 14 推出定理 2。

定理 2 的证明。我们沿用定理 2 陈述中的记号。令 $\delta = \frac{1}{R}$。考虑映射 $w = I_\delta \circ w^\mu \circ I_R$。我们有， w 的贝尔特拉米系数是在划分 $\delta\mathcal{P}$上的系数 $\mu \circ I_R$，这意味着 w 与 w_δ^μ 同分布。

由定理 14 可知，如果 $\delta \leq \delta_\epsilon$ 足够小（或等价地，如果 $R \geq \delta_\epsilon^{-1}$ 足够大），那么以概率 $1-\epsilon$，我们有 $|w - A_\mu| < \epsilon$ 在 $B(0,\ 1)$ 上。因此， $|I_R \circ w \circ I_\delta - I_R \circ A_\mu \circ I_\delta| < \epsilon R$ 在 $B(0,\ R)$ 上。然而，由于 $I_R \circ w \circ I_\delta = w^\mu$ 且 $I_R \circ A_\mu \circ I_\delta = A_\mu$，可知以概率 $1-\epsilon$,

$$|w^\mu - A_\mu| < \epsilon R$$

在 $B(0,\ R)$ 上如所需成立。因此，定理 2 得证，其中 $R_\epsilon = \delta_\epsilon^{-1}$。

□

注记。请注意，当用 $I_R(K)$ 替换 $B(0,\ R)$ 时，定理 2 仍然成立，其中 K 是任意紧集，而 $I_R(K)$ 是将 K 按 R 的倍数进行膨胀所得的集合。事实上，只需注意到 $I_R(K) \subset B(0,\ cR)$ 即可，其中 c 是一个常数，使得 $K \subset B(0,\ c)$。于是由定理 2 可知，当 R 足够大时， $|w^\mu - A_\mu| < \epsilon' cR$ 在 $I_R(K)$ 上成立，剩下的只需选择 $\epsilon' = c^{-1}\epsilon$。

7 随机黎曼曲面

本节中，我们定义 $\mathcal{V}$ $\mathcal{S}$ 的一个子集，并在 $\mathcal{V}$上定义一个概率测度 $\eta_\mathcal{V}$。由于难以参数化 $\mathcal{S}$的所有对象，因此有必要考虑 $\mathcal{S}$ 的一个较简单的子集。正如我们将看到的，定理1和定理2的一般性使我们可以灵活选择 $\mathcal{V}$，而 $\mathcal{V}$ 涵盖了 $\mathcal{S}$中种类繁多的曲面。本节余下部分请注意， $\mathcal{S}$ 中的一个曲面由其标记边界点决定，因此，可以将 $\mathcal{S}$ 上的概率分布理解为一种依据该分布选择标记边界点的概率分布。

将黎曼球面$\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{R}^3$的子集 $\{(x,\ y,\ z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$，这样，具有 $z > 0$ 的点集对应于复数上半球 $\mathbb{H}^+$，其虚部为正；具有 $z < 0$的点集对应于复数下半球 $\mathbb{H}^-$，其虚部为负。在单位圆盘$\{(x,\ y,\ 0) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ 上考虑极坐标系（$r,\ \theta$），使得点1、∞、-1、0的坐标分别为（1，0）、（1，$\frac{\pi}{2}$）、（1，π）、（1，$\frac{3\pi}{2}$）。在半球 $\mathbb{H}^+$和 $\mathbb{H}^-$上，定义极坐标系（$r,\ \theta$），使得其中一个半球上的点（$x,\ y,\ z$）的极坐标与点（$x,\ y,\ 0$）的极坐标相同。从现在起，将这些称为 $\mathbb{H}^+$ 和 $\mathbb{H}^-$上的半球坐标。

考虑平面上的一个无限矩形格。根据 i和 j 的奇偶性，将位置为 $(i,\ j)$ 的顶点标记为 1 到 4 之间的一个整数，使得任一单元的顶点按循环顺序标记为 1、2、3、4。选取四个半球坐标为 $(1,\ \theta_1)$、$(1,\ \theta_2)$、$(1,\ \theta_3)$、$(1,\ \theta_4)$ 的点，以及开弧区间 C_i、 $1 \leq i \leq 4$，使得 C_i 两两不相交，其闭包覆盖 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$，且 C_i 的端点为 $(1,\ \theta_i)$ 和 $(1,\ \theta_{i+1})$（此处 $\theta_5 = \theta_1$）。

如图 2 所示。最后，在 C_i 上定义概率分布 η_i 。这些分布 η_i 例如可以是由弧长诱导的均匀分布。

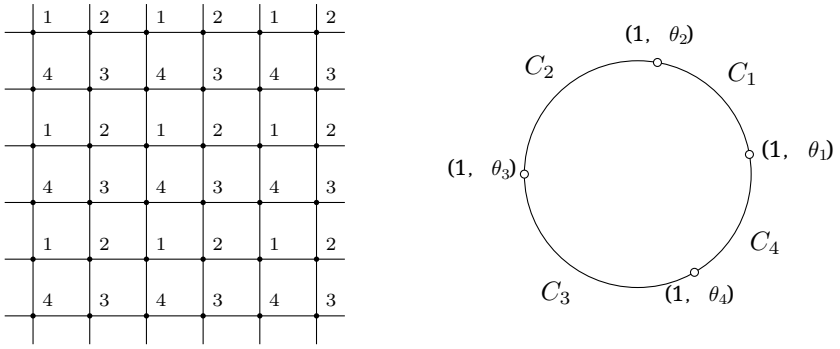

图 2：标记顶点并将 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 划分为区间。

为在 $\mathcal{S}$ 中构造黎曼曲面 $\mathcal{R}$ ，我们为每个标记为 i 的顶点指定一个通过 η_i 选取的随机标记边界点。将带有这些标记点的曲面粘合起来，即可得到一个黎曼曲面。令 $\mathcal{V}$ 为以此方式得到的曲面集合。为了保证每个单元的标记边界点按循环顺序排列， $\mathcal{V}$ 中曲面的顶点只能沿着区间 C_i 变化。现在，令 $\eta_{\mathcal{V}}$ 为 $\mathcal{V}$ 上的分布，该分布对应于按照 η_i 选取每个顶点的方式（由柯尔莫哥洛夫延拓定理保证 $\eta_{\mathcal{V}}$ 的存在）。由此得到一个概率空间 $(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$。注意，$(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$ 的定义取决于 θ_i 的选择。

集合 $\mathcal{V}$ 足够大，可以包含一个双曲曲面，正如 Geyer 和 Merenkov [8]所示。然而，将在第 8 节中证明的定理 3指出，双曲曲面的集合在（$\mathcal{V}$, $\eta_{\mathcal{V}}$）中是零测集。因此，几乎必然存在一个双全纯映射 $\phi: \mathcal{R} \to \mathbb{C}$。曲面 $\mathcal{R}$ 自带一个映射 $p: \mathcal{R} \to \mathbb{C}$，它将 $\mathcal{R}$ 中的每个单元映射到 $\mathbb{C}$中相应的半球。因此，$\mathcal{V}$ 中的曲面 $\mathcal{R}$可以看作亚纯函数 $f = p \circ \phi^{-1}$的逆映射的黎曼曲面，而该函数几乎总是以平面 $\mathbb{C}$ 作为其定义域。因此， $\mathcal{R}$几乎总能在平面中定义一个亚纯函数 f，但要忽略对 $\mathbb{C}$的自同构进行前复合的差异；这种自同构的形式为 $z \mapsto az + b$。如果我们考虑 f的 Nevanlinna 特征 $T_f(r)$（定义于 $[0, \infty$中的 r），可以看到，用 $\mathbb{C}$ 的自同构与 f进行前复合，至多会改变 r 前面的常数，并使 $T_f(r)$改变一个有界的加性因子，从而不会改变f的阶或下阶。因此，定理 4（其中涉及the f的增长阶）是有意义的。

8 椭圆型函数的拟共形变形

在本节中，我们分别使用定理1和定理2证明定理 3 和定理 4。为此，我们将 f 表示为一个阶为 2 的椭圆函数的局部拟共形变形。

设 (1，m_i) 是 C_i 的中点。考虑带有标记边界点 (1，m_i) 的上半球 $\mathbb{H}^+$ 。存在某个矩形 $Q \subset \mathbb{C}$ 以及一个共形映射 $\wp$: $Q \to \mathbb{C}$ ，它将 Q 映射到 $\mathbb{H}^+$ ，并将 Q 的顶点映射到点 (1，m_i)。通过反射将 $\wp$ 延拓后，我们得到一个双周期函数$\wp$: $\mathbb{C} \rightrightarrows \mathbb{C}$ ，它将 $\mathbb{C}$ 中矩形网格的每个单元映射到上半球 $\mathbb{H}^+$ 或下半球 $\mathbb{H}^-$。

定义 $\mathcal{R}_0$ 为 $\mathcal{V}$ 中的曲面，并将标记边界点 (1，m_i) 指定给标记为 i 的顶点（这里使用的是第 7 节中的顶点标记）。于是， $\wp$ 诱导出一个映射 $\wp_0$: $\mathbb{C} \to \mathcal{R}_0$, 使得 $\wp = p_0 \circ \wp_0$，其中p_0 : $\mathcal{R}_0 \to \mathbb{C}$ 是自然投影，它将 $\mathcal{R}_0$ 的每个单元映射到 $\mathbb{C}$ 中相应的半球。

给定黎曼曲面 $\mathcal{R}$ in $\mathcal{V}$ 及其关联投影 $p : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$，我们将 $\wp_0$ 变形为函数 $\tilde{\wp}_0$: $\mathbb{C} \to \mathcal{R}$ ，使得 $f = p \circ \tilde{\wp}_0$，其中 f 满足 $\mathcal{R}$ 是 f^{-1} 的黎曼曲面。

沿直线 $\theta = \theta_i$ 和$\theta = m_i$将 $\mathcal{R}_0$ 的每个半球划分为八个扇区。考虑这些直线在 $\wp_0$下的原像。它们将 $\mathbb{C}$ 中矩形网格的每个单元划分为八个三角形若尔当区域，其中每个三角形区域对应于 $\mathcal{R}_0$上某个半球的一个扇区。如图 3 所示。

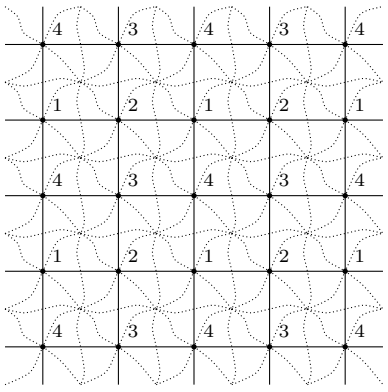

图 3：矩形网格的单元被划分为三角形若尔当区域。

在 $\mathcal{R}$ 中固定一个单元。假设该单元中标签为 i 的顶点对应的边界点，对于 $1 \le i \le 4$，坐标为 (1，α_i)。注意，(1，α_i) 属于开弧区间 C_i，其端点为 (1，θ_i)，(1，θ_{i+1})。我们应用形如 (r，θ) $\mapsto$ (r，$k(\theta)$) 的映射，其中 $k(\theta)$ 是分段线性映射，它将 (1，m_i) 映至 (1，α_i)，并使 (1，θ_i) 对于 $1 \le i \le 4$ 保持不变。注意

此映射在每个半球的八个扇区内具有常数贝尔特拉米系数，因此是拟共形映射。将这些映射应用于每个半球，我们得到一个局部拟共形映射 $\phi:\ \mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}$。 ϕ 在单个半球上的作用如图 4 所示。

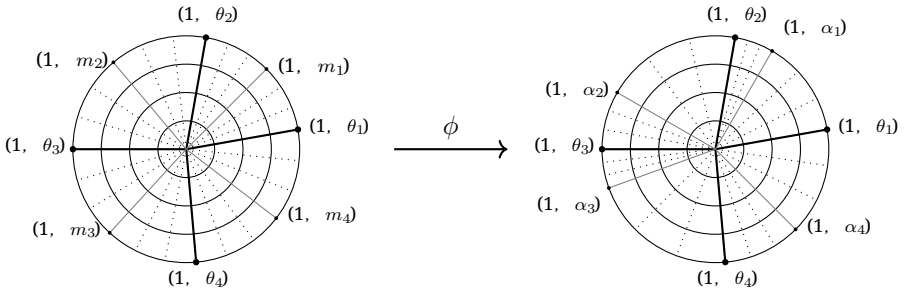

图4： ϕ 在一个半球上的作用

令 $\mathcal{P}$ 为这样的划分：其中每个区域都是与一个顶点相邻的八个三角区域的集合；令 μ 为 $p\circ\phi\circ\wp_0$的贝尔特拉米系数。第3节中引入的测度 ν_i 定义在 $\mathbb{R}$ 上，而测度η_i 定义在 C_i上。这不会造成任何困难，因为 C_i 与 $\mathbb{R}$同胚。注意，根据贝尔特拉米系数的复合规则，系数 μ不再在每个三角区域上为常数；然而，$|\mu|$ 在每个三角区域上为常数，并且关于 α_i连续。因此，第3节中的函数$k_t^{(i)}$ 可以选择为在 t上可测；事实上，它可以选择为连续函数。

考虑随机局部拟共形映射 w^μ。若令 $f=p\circ\phi\circ\wp_0\circ(w^\mu)^{-1}$，则贝尔特拉米系数的复合规则表明， f是共形的。此外， $\mathcal{R}$ 是 f^{-1} 的黎曼曲面（见图5）。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\wp_0} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R} \\ \downarrow{\scriptstyle w^\mu} & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ w^\mu(\mathbb{C}) & & \xrightarrow{\quad f \quad} & & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

图5： $\mathcal{R}$ 是 f^{-1}的黎曼曲面。

划分 $\mathcal{P}$ 是周期的，且具有有界几何； μ 在$\mathcal{P}$上是周期的。因此，根据引理9，μ是概率有界的，所以定理1和定理2适用。现在我们给出定理 3的一个简短证明。

定理*3*的证明。 注意到 $\phi\circ\wp_0\circ(w^\mu)^{-1}$ 是从 $w^\mu(\mathbb{C})$ 到 $\mathcal{R}$的共形同胚。根据定理 1，我们有 w^μ 几乎必然满射到 $\mathbb{C}$，因此 $\phi\circ\wp_0\circ(w^\mu)^{-1}$ 几乎必然是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathcal{R}$的双全纯映射。 □

现在我们要估计 f 的阶。由于定理 2 适用，我们可以开始证明定理 4。

定理 4 的证明。令 σ 为 $\mathbb{C}$ 上的球面度量，并将其缩放，使得 $\mathbb{C}$ 的面积为 1。我们定义 $A(t)$ 为拉回度量 $f^*\sigma$ 下 $B(0,t)$ 的面积。根据 Ahlfors 和 Shimizu 的一个著名公式（[6]中的方程 12），

$$T_f(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dr + O(1)。$$

因此，我们需要估计 $A(t)$ 的增长。

令 $D(0,R)$ 表示满足 $A_\mu(D(0,R)) = B(0,R)$ 的椭圆，其中 A_μ 是由定理 2 保证存在的线性映射。注意， $D(0,R)$ 是将 $D(0,1)$ 按因子 R缩放得到的。根据定理 2 证明末尾的注记，将 $B(0,R)$ 替换为 $D(0,R)$ 后，定理 2 的结论仍然成立。固定 $\epsilon > 0$。我们可以选取一个序列 R_n，使得对于所有正整数 n，定理 2 对 R_n 成立的概率至少为 $1 - \frac{\epsilon}{2^n}$。根据 Borel–Cantelli 引理，以概率 1，定理 2 的结论对无穷多个 n成立。以下推论对这些 n均成立。

对于 $t \in \left[\frac{R_n}{2}, R_n\right]$， R_n 有无穷多个取值，—

$$I_{1-2\epsilon}(A_\mu(D(0,t))) \subset w^\mu(D(0,t)) \subset I_{1+2\epsilon}(A_\mu(D(0,t)))$$

概率为 1。利用 $D(0, t)$ 的定义，我们可以将其改写为

$$B(0, t(1-2\epsilon)) \subset w^\mu(D(0,t)) \subset B(0, t(1+2\epsilon)),$$

或者也可以写成

$$(w^\mu)^{-1}(B(0, t(1-2\epsilon))) \subset D(0,t) \subset (w^\mu)^{-1}(B(0, t(1+2\epsilon))).$$

因此可知，对于 $t \in \left[\frac{R_n}{2}(1+2\epsilon)\ R_n(1-2\epsilon)\right]$,

$$D\left(0, \frac{t}{1+2\epsilon}\right) \subset (w^\mu)^{-1}(B(0,t)) \subset D\left(0, \frac{t}{1-2\epsilon}\right) \tag{3}$$

为简单起见，从现在起我们取 $\epsilon < \frac{1}{20}$ 足够小，使得上述结论对 $t \in [0.6R_n, 0.9R_n]$ 成立。

现在我们转而讨论 $A(t)$ 的界。存在常数 m 和 M，使得当 t 足够大时， $D(0, t)$ 完全包含矩形格内部至少 mt^2 个单元，并且包含于 Mt^2 个单元的并集中。回顾一下，我们关注的是函数 $f = p \circ \phi \circ \wp_0 \circ (w^\mu)^{-1}$。对于 $t \in [0.6R_n, 0.9R_n]$，表达式 3 表明

$$(w^\mu)^{-1}(B(0,t)) \subset D\left(0, \frac{t}{1-2\epsilon}\right),$$

由此可知， $B(0, t)$在$(w^\mu)^{-1}$ 下的像包含于至多 $M(\frac{t}{1-2\epsilon})^2$ 个单元的并集中。因此， $B(0, t)$在 $\wp_0 \circ (w^\mu)^{-1}$下的像

可由至多 $M(\frac{t}{1-2\epsilon})^2$ 个半球覆盖。由于 ϕ 将半球映为半球，且每个半球的面积为$1\ 2$，因此

$$A(t) \le \frac{Mt^2}{2(1-2\epsilon)^2}.$$

我们在 $A(t)$ 上构造一个类似的下界。我们有

$$(w^\mu)^{-1}(B(0,t)) \supset D\left(0, \frac{t}{1+2\epsilon}\right)$$

对无穷多个 R_n ， $t \in [0.6R_n, 0.9R_n]$ 以概率 1 成立。由此可知， $B(0,t)$ 在 $(w^\mu)^{-1}$ 下的像至少包含 $m(\frac{t}{1+2\epsilon})^2$ 个单元。因此， $B(0,t)$ 在 $\wp_0 \circ (w^\mu)^{-1}$ 和 $\phi \circ \wp_0 \circ (w^\mu)^{-1}$ 下的像至少包含 $m(\frac{t}{1+2\epsilon})^2$ 个半球。于是

$$A(t) \ge \frac{mt^2}{2(1+2\epsilon)^2}.$$

总之，对于某些常数 c_1 和 c_2，我们有

$$c_1 t^2 \le A(t) \le c_2 t^2$$

对无穷多个 n ， $t \in [0.6R_n, 0.9R_n]$ 以概率 1 成立。积分可得

$$T_f(R_n) + O(1) = \int_0^{R_n} \frac{A(t)}{t} dt \ge \int_{0.6R_n}^{0.9R_n} \frac{A(t)}{t} dt \ge \int_{0.6R_n}^{0.9R_n} c_1 t dt = 0.225 c_1 R_n^2.$$

记 f 的增长阶为 λ，由此可得

$$\lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{\log T_f(R_n)}{\log R_n} \ge \limsup_{n\to\infty} \frac{2\log R_n + O(1)}{\log R_n} = 2.$$

以概率 1。

类似地，我们有

$$T_f(0.9R_n) + O(1) = \int_0^{0.9R_n} \frac{A(t)}{t} dt \le \int_0^{0.9R_n} c_2 t dt = 0.405 c_2 R_n^2,$$

其中我们用到了 $A(t)$ 是递增函数这一事实。将下阶记为 λ，由此可得

$$\underline{\lambda} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\log T_f(0.9R_n)}{\log 0.9R_n} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{2\log R_n + O(1)}{\log R_n + O(1)} = 2$$

概率为 1。定理 4 的证明完成。

□

9 进一步研究方向

定理 3 和定理 4 的主要局限之一是，它们只对 $\mathcal{V}$ $\mathcal{S}$ 的一个子集确立了结果。在整个 $\mathcal{S}$ 上构造测度的主要挑战在于， $\mathcal{S}$ 难以参数化：仅仅指定每个标记边界点，并不一定能定义 $\mathcal{S}$ 中的曲面，因为与一个单元的顶点相关联的标记边界点必须按循环顺序排列。

一种为所有 $\mathcal{S}$ 参数化的思路，是在双全纯映射意义下指定每个半球的顶点。更具体地说，设 a, b, c, d 为半球的标记边界顶点，且按循环顺序排列，因此存在唯一的半球自同构，将 b, c, d 映射到 $1, 0, \infty$，其表达式为

$$z \mapsto \frac{(z-c)(b-d)}{(z-d)(b-c)}.$$

a, b, c, d 的交比定义为 a 在此映射下的像；因此其公式为

$$(a, b; c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

由于 a, b, c, d 按循环顺序排列，因此 $(a, b;\ c, d)$ 属于区间 $(1, \infty)$。若 $H(a, b, c, d)$ 表示具有标记边界点 a, b, c, d 的半球，则存在一个双全纯映射，在 $H(a, b, c, d)$ 与 $H(a', b', c', d')$ 之间将相应的标记边界点彼此映射，当且仅当 $(a, b; c, d) = (a',\ b';\ c', d')$。因此，每个半球都可以由其交比在双全纯映射意义下确定，而交比可以是 $(1, \infty)$ 中的任意数。

自然的问题是，指定曲面 $\mathcal{R} \in \mathcal{S}$ 中每个单元的交比，是否就能在双全纯映射意义下唯一确定 $\mathcal{R}$ 。以下猜想对此作了更具体的表述。

猜想1。 设 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 是 $\mathcal{S}$ 中的两个曲面，使得$\mathcal{R}$ 在位置(i, j) 处的单元交比为$k_{i,j}$，而 $\mathcal{R}'$ 在位置 i, j 处的单元交比为$k'_{i,j}$。进一步假设，对所有 i, j，都有$k_{i,j} = k'_{i,j}$ 。那么 $\mathcal{R}$ 和$\mathcal{R}'$ 具有相同的共形类型，也就是说， $\mathcal{R}$和 $\mathcal{R}'$ 在双全纯映射意义下等价。

猜想1并非易于证明。事实上，尽管存在双全纯映射$\phi_{i,j}$ ，将 $\mathcal{R}$ 在位置(i, j)处的单元映到 $\mathcal{R}'$ 在位置(i, j)处的单元，但这些$\phi_{i,j}$ 无法拼接成一个双全纯映射 $\phi\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ ，因为$\phi_{i,j}$ 在相邻单元的边界处未必一致。若能证明猜想1，就可以将 $\mathcal{S}$ 中每个可数无限乘积空间 $(1, \infty)^\omega$的元素，与一个共形类型定义良好的曲面对应起来。由此便更容易在具有方格网的曲面集合上定义概率分布，例如在每个单元上从相同的概率分布中独立随机选取各个交比。这样一来，就有望证明 $\mathcal{S}$ 中几乎每个曲面都是抛物型，而无需将讨论限制在子空间 $\mathcal{V}$内。

同样值得关注的是，定理 4 的证明能否加强为对以下猜想的证明。

猜想 2. 由$(\mathcal{V}, \eta_{\mathcal{V}})$中的一个曲面定义的亚纯函数 f 几乎总是具有 *2* 阶。

我们尚未能得到几乎必然成立的 lim sup $_{\log T_f(r) \log r}$ 的上界，也未能得到几乎必然成立的 lim inf $_{\log T_f(r) \log r}$ 的下界。证明猜想 1 和猜想 2 是一个值得进一步研究的方向。

10 致谢

我谨感谢我的导师 Sergiy Merenkov 教授提出这个项目，并给予我宝贵的指导和反馈。没有他的帮助，这篇论文便不可能完成。我也衷心感谢 MIT PRIMES 项目给予我开展研究的绝佳机会。这是一次独一无二的学习经历，我从中获益良多。

参考文献

[1] L. Ahlfors：《共形不变量：几何函数论专题》，麦格劳-希尔高等数学丛书（1973）。[2] L. Ahlfors：《拟共形映射讲义》，D Van Nostrand 数学研究丛书《10》（1966）。[3]O. Angel 和 O. Schramm：《均匀无限平面三角剖分》，《数学物理通讯》《241》（2003）191–213。[4] K. Astala、S. Rohde、E. Saksman、T. Tao：《迭代奇异积分的均匀化及其在随机拟共形映射中的应用》，《伊比利亚美洲数学评论》《38》（2022）2285–2336。[5] A. Eremenko：《亚纯函数的几何理论》。《当代数学》《355》（2004）。[6] A. Eremenko：《奈望林纳理论讲义》。普渡大学（2012）。[7]F. David：《单纯形量子引力与随机格》。莱苏什暑期学校讲义（1992）。[8] L. Geyer 和 S. Merenkov：《具有方格网的双曲曲面》。《分析与数学杂志》《96》（2005），357–367。[9]O. Ivrii 和 V. Markovi´c：《随机拟共形映射与随机德劳内三角剖分的均匀化》，《微分几何杂志》《124》（2023）523–551。[10] R. Nevanlinna：《解析函数》，Grundlehren der mathematischen Wis- senschaften《162》（1970）。

[11] J. Gill 和 S. Rohde：《随机平面映射的黎曼曲面类型》，《伊比利亚美洲数学评论》《29》（2013）1071–1090。[12] S. Sto¨ılow：《莱》,关于拓扑原理及 ´解析函数理论的讲义。巴黎（1956）。[13]O. Teichm¨uller：《极值拟共形映射与二次微分》，Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wis- senschaften《22》（1939）。[14] `E. B. Vinberg：《具有预设临界值的实整函数》（俄文）。Problems in grouptheory andinhomological algebra。雅罗斯拉夫尔国立大学，雅罗斯拉夫尔（1989）127–138。