arXiv:2603.15775v1 [math.GT] 16 Mar 2026

双曲曲面拼接体的计数与熵

Hugo Parlier 和 Yandi Wu

摘要

本文研究闭双曲曲面拼接体，重点关注闭测地线数量的增长。与曲面的情形相同，我们证明拓扑熵与体积熵相等；但我们也发现，二者的表现随几何数据而异，闭测地线数量的上下界取决于最短闭测地线的长度和拼接曲线的长度。特别是，我们证明，在最短闭测地线长度没有下界的情况下，熵可以随粘接长度呈指数增长。

1 引言

出于诸多原因，研究闭测地线数量的增长是研究双曲曲面及其模空间的核心内容。这一主题及相关问题体现了几何与动力系统之间的联系。本文将研究一类曲面的自然推广对象，这类对象在 [Laf07] Laf中被定义为“二维 P-流形”，而在 [Buy05]Buy中被称为“双曲图曲面”。

闭（可定向）双曲曲面可以通过沿裤边粘合裤子曲面构造而成，条件是成对粘合的边界曲线长度相等。在我们的情形中，我们取消了对粘合在一起的曲线数量的限制，因此，尽管得到的不再是曲面，却得到了一类闭几何对象，我们称之为双曲曲面拼接体。我们研究其中一个特定类别，称为适当曲面拼合体；在这一类别中，我们排除了带边界的曲面拼接体，以及“仅仅是”闭双曲曲面的曲面拼接体。

Huber 素测地线定理给出了闭双曲曲面上长度小于 L的本原闭测地线数量的精确渐近增长函数。曲面拼接体也有类似结果（见定理 2 17217。。）；适当曲面拼合体 X 中的曲线数量渐近地按 e^{hL} hL增长，其中 h 或者是测地流的拓扑熵，或者是 X的体积熵。这两种熵相等这一事实，源于 Leuzinger 的研究 [Leu06], Leu，随后增长结论则由一项

更一般的 Ricks 定理 [Ric22]Ric；见第 2 3 节23。。。Buyalo [Buy05] Buy此前研究过适当曲面拼合体的体积熵，并证明 $h_X > 1$与闭双曲曲面不同，其熵恒为 1。除此之外，Buyalo 还证明 h_X 会随着奇异曲线长度的增加而趋于无穷；也就是说，这些拼接曲线是我们粘合三条以上曲线副本的位置。

我们的主要贡献是给出了 $\mathcal{G}_X(L)$ 的大小的定量上下界；它是 X 上长度不超过 L 的本原闭测地线集合。除了 L 和曲面拼接体的面积外，我们的上界还涉及粘合曲线 B 的总长度，以及 sys (X)，即 X 的最短闭测地线的长度，也就是最短非平凡闭测地线的长度。我们在以下量中考虑最短闭测地线：

$$r_0 := r_0(X) = \min\left\{\frac{\log(3)}{4}, \frac{\mathrm{sys}(X)}{4}\right\}.$$

本文始终使用该量。我们的上界可表述如下：

定理1.1。设 X 是一个适当曲面拼合体，其面积为 A，粘合曲线总长度为 B，且 r_0 如上所述。那么

$$\#\mathcal{G}_X(L) \leq \frac{4A}{\pi r_0^2}\left(15 + \frac{3AB}{4\pi r_0}\right)^{\frac{25\,AB}{\pi r_0^2}(L+r_0)}.$$

因此，X 的熵 $h(X)$ 满足

$$h(X) \leq \frac{25\,AB}{\pi r_0^2}\log\left(15 + \frac{3AB}{4\pi r_0}\right).$$

我们认为，这一结果对应于 Buser 关于闭曲面的一个广泛应用的结果：[Bus1010，Bus引理 6.6。4] Buser 的结果给出了一个只取决于 L 和曲面面积的界，而我们还需要更多几何数据。请注意，Buyalo 的结果表明，任何上界 确实 需要对粘合长度 B [Buy05],Buy施加条件，但这里我们还对最短闭测地线设定了界。不过请注意，对于固定面积和最短闭测地线的下界，该上界的表现形式为 $e^{CB\log(B)L}$，其中常数为 $C > 0$。

接下来，我们给出一系列曲面拼接体的构造，表明B 与 sys(X)之间至少存在某种依赖关系。

我们的第一个例子是一个非常自然的曲面拼接体，它由闭曲面得到。取一个闭双曲曲面S，并在其上选取一条简单闭测地线 β。取S 的多个副本（至少 2 个），并沿着 β 通过恒等映射粘合，便得到一个曲面拼接体$X = X_{S,\beta,m}$。它由我们对S、β 和$m \geq 2$（即S的副本数）的选择来参数化。我们证明如下结论：

定理1.2。存在一个常数 c，它只取决于 S 的拓扑，使得当 L 足够大时，

$$\#\mathcal{G}_X(L) > e^{c(S)\ell(\beta)L}.$$

证明给出了明确的常数，技术性陈述见命题 3 3。。。虽然我们的证明使用了测地流以及关于 S 上（长）闭测地线的等分布结果，但其思路其实相当简单。首先要注意，只有当 β 足够长时，这一结果才有意义。现在，如果 S 上的闭测地线足够长，它们便开始在单位切丛中等分布，这意味着它们开始有规律地与 β相交，并且它们与 β 的交数与其长度（直接）成正比，比例只取决于 β的长度。关键在于，S 上的这些测地线会提升为 X上的多条测地线。通过对这些不同现象进行量化，便可得到这一结果。

我们注意到 Ledrappier 和 Lim 的一个结果 [LL10] LL给出了一个相关结果，适用于为定理 1 3。.构造的某些非常特殊的曲面拼接体。例如，考虑一个二亏格曲面，它由一个单孔环面沿其边界曲线反射得到；这条边界曲线成为该二亏格曲面的分离曲线。现在考虑沿分离曲线粘合两个该曲面副本得到的曲面拼接体，记作 β。这个曲面拼接体的万有覆盖是一个非正则建筑，而 Ledrappier 和 Lim 研究了由此得到的体积熵，并证明它有一个（严格的）下界 [LL10。，LL定理 1.4] 该下界对 $\ell(\beta)$也是线性的。根据先前的结果，这个体积熵也给出了测地线数量的下界；对于这个特定的曲面拼接体，该下界略强一些。

无论如何，这些定理以及 Buyalo 的结果 [Buy05], Buy都告诉我们，熵可以任意大，但并未给出任意 L 下闭测地线数量的显式下界，也没有揭示它与最短闭测地线长度之间的依赖关系。再结合定理 1 1。.，定理 1 2。.。意味着，对于最短闭测地线的固定下界，熵有一个关于 B 的线性下界，以及一个关于 B对数(B)的线性上界。我们的下一个构造表明，一般而言，实际情况远非如此。

接下来，我们给出曲面拼接体 X_B 的一个显式构造，其粘接长度为 B；当 B 充分大时，这些曲面拼接体具有许多闭测地线。它们都与一个亏格为四、具有四条边界曲线且四条边界曲线全部粘接在一起的球面同胚。

定理 1.3. 对于任意满足 $B \geq 2$对数(24) 的 B，都存在面积为 4π 、粘接长度为 B 的曲面拼接体 X_B，使其满足

$$\#\mathcal{G}_{X_B}(L) \geq 2^{1+\frac{1}{96}\frac{e^{B/2}}{B}L}$$

对于所有 $L \geq 2B + 5$。特别地，X_B 的熵满足

$$h(X_B) \geq c\,\frac{e^{B/2}}{B}$$

其中 $c > 0$ 是某个普适常数。

常数c 是明确的（可取为 log 2 96），但我们并未尝试对其进行优化。

特别是，根据定理 1 11..1，它们的最短闭测地线必然趋于 0，而这实际上是构造的一个特征。熵关于 B 的指数增长表明，缩短最短闭测地线对熵的影响可能远大于“仅仅”增加粘接长度。同样，为了证明存在大量闭测地线，如定理 1 21..2所述，证明使用了同一条测地线的多个提升。

论文概要。下面概述本文的内容。第 2节 介绍了关于双曲曲面和正规双曲曲面拼接体的一些有用事实，这些内容将在本文后续部分中用到。此外，第 2 节第 3节。.3 节利用文献中的结果，阐明曲面拼接体的熵与计数之间的关系。最后，在第 3节中，我们证明主要结果，即定理 1 第 1节。.1、1.21.2以及 1 第 31 第 3。。。

致谢。第二位作者感谢弗里堡大学接待她，她在此期间完成了本研究的重要部分。她还感谢 Francisco Arana-Herrera 提供的有益讨论。

2 预备知识与技术引理

本节介绍关于双曲几何和曲面拼接体的一些有用事实，这些内容将在后续章节中发挥作用。

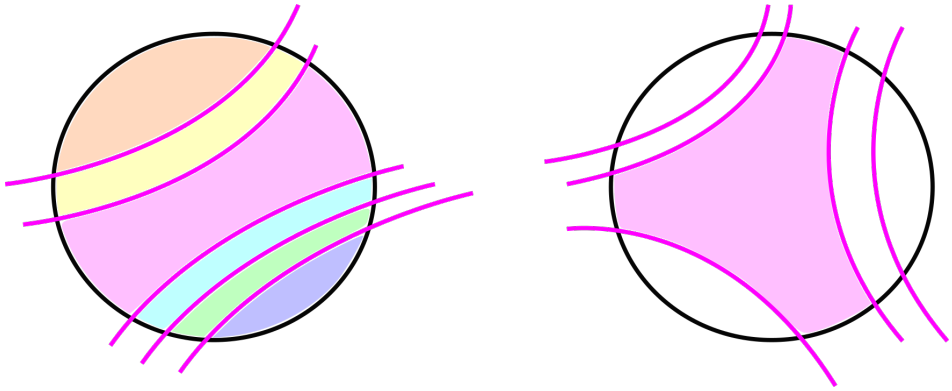
2.1 双曲几何

回忆一下， $\mathbb{H}^2$双曲平面可以用庞加莱圆盘模型来描述。换言之， $\mathbb{H}^2$ 它是单位圆盘 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$，配备由$ds^2 = \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2 + dy^2)$描述的度量。我们将广泛运用以下事实。

引理 2.1. 半径为 r 的双曲圆盘的面积为 4π双曲正弦$^2(r/2) = 2\pi(\cosh(r) - 1)$。

我们陈述一些关于 $\mathbb{H}^2$ 的事实，这些事实对于第 3 节中的论证将很有用3。我们从以下内容开始：

引理 2.2。 设 S 和 γ 如前所述。设 D 是 S 上半径小于或等于对数(3) 2 的任意嵌入闭圆盘。那么 $\gamma \cap D$ 的补区域不是四边形就是半圆盘。



可能　　不可能

图1：若D 的半径小于或等于 log(3) 2，则其补区域必定是四边形或半圆盘。

——

证明。 如果我们将圆盘提升到万有覆盖中，并取穿过圆盘内部的延伸测地线弧的完整提升，就会得到一组互不相交的测地线，它们穿过一个半径为 log 3 2 的圆盘。

——

现在反设，圆盘内的某个补区域大于一个四边形。这意味着存在一点，它位于双曲平面中由三条（或更多条）互不相交的测地线围成的区域内，且到这些测地线的距离都严格小于 log 3 2。必要时删去测地线后，可假设恰有三条。如果它们尚未构成理想三角形，我们当然可以在该区域内找到一个包含该点的理想三角形，并且该点到三角形各边的距离仍严格小于 log 3 2。现在便可得出结论：在理想三角形中，不存在到三条边的距离都严格小于 log 3 2 的点。事实上，log 3 2 恰好是与理想三角形三边均相切的唯一嵌入圆盘的半径。

——

——

——

□

下面的引理给出了内接于双曲圆盘的三角形角度大小的下界。

引理2.3 (参见引理 A。1, [BP18]BP)。 给定 $r > 0$，考虑一个边长为 $\geq r$、内接于半径为 $\geq r$ 的圆中的双曲三角形。则所有角的下界为 φ_r，其中

$$\cot\left(\frac{\varphi_r}{2}\right) = \cosh(r) \cdot \left\{\sqrt{1+2\cosh(r)} + \sqrt{2+2\cosh(r)}\right\}.$$

定理2 32..3 推出了以下推论，该推论将在下一节中使用：

推论2.4. 给定一个由圆盘构成的最小覆盖，每个圆盘至多有 $\frac{2\pi}{\varphi_r}$ 个邻球。 —

证明。 固定一个圆盘 D_1 ，并考虑 D_2 和 D_3, 这一对相邻的邻球。考虑包含在 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 中的三角形，其顶点是这三个圆盘的圆心。每条边的长度都至少为 r，即圆盘的半径。于是，根据定理2.3，存在某个 φ_r 定理2 32。.3 ，它是每个三角形内角的下界。因此，由于圆盘 D_1 中心周围的总角度为 2π，圆盘 D_1中心周围至多有 $\frac{2\pi}{\varphi_r}$ 个三角形。见图22。

—

□

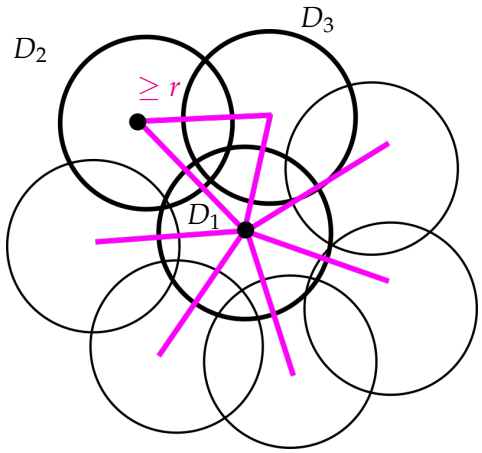


图 2

费米坐标。 为便于计算，我们现在引入费米坐标，它是相对于基准双无限测地线 $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{H}^2$定义的$(\mathbb{H}^2, \rho)$ 坐标系。为方便读者，我们简要介绍这个坐标系（另见 [Bus10]Bus 第 4 页）。注意， $\tilde{\gamma}$ 将 $\mathbb{H}^2$ 分为左右两侧。给定某个点$p \in \mathbb{H}^2$，我们定义t 为 $\tilde{\gamma}$ 上的点，使得 $(p$ 与 $\tilde{\gamma}(t))$ 构成一条垂直于 $\tilde{\gamma}$像的线段。另一个坐标 ρ是从p 到 $\tilde{\gamma}$的有向距离；若p 位于 $\tilde{\gamma}$左侧，则 $\mathrm{dist}(p, \tilde{\gamma})$ 为负（若位于左侧，则为正）。相对于(ρ,t)， $\mathbb{H}^2$ 上的通常双曲度量可表示为

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2(\rho)dt^2. \tag{1}$$

2.2 曲面 amalgam

现在我们给出双曲曲面拼合体的精确定义。这类对象最初在 [Buy05] Buy中被定义，称为双曲图曲面；在 [Laf07],Laf中则称为“二维 P-流形”。

定义 2.5（双曲曲面拼合体，参见 [Laf07]Laf 中的定义 2.3）。紧致度量空间 X 称为双曲曲面拼合体，如果存在一个闭子集$Y \subset X$（即X 的粘合曲线），满足以下条件：

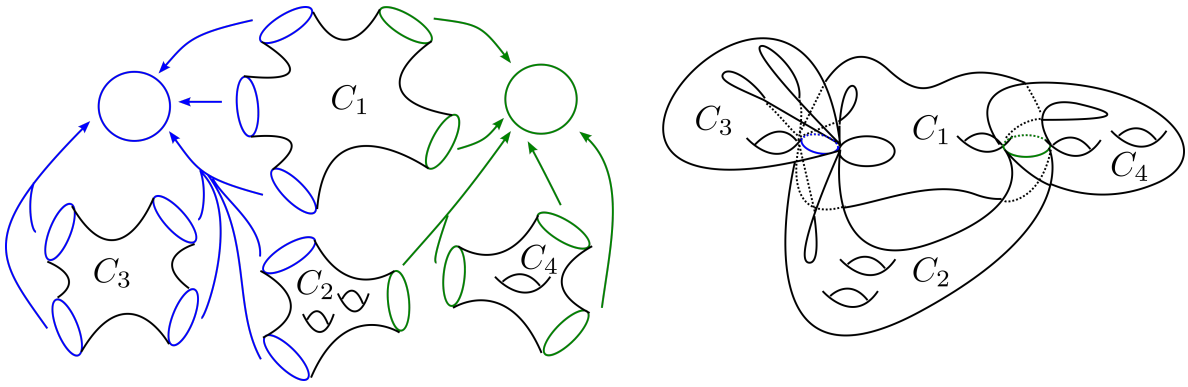
1. Y 的每个连通分支都与S^1同胚；2. $X - Y$ 的每个连通分支的闭包都与带边界的紧致双曲曲面同胚，并且该同胚将$X - Y$ 的该连通分支映射到一个带边界曲面的内部。我们将$X - Y$ 的每个连通分支称为X中的一个腔室；3. 每个腔室上都存在一个与原度量一致的双曲度量。

本文还要求曲面拼接体是恰当[1], 的，也就是说，它们满足以下基本假设：

假设 2.6。曲面拼接体X 是简单的；也就是说，Y 构成X 的一个全测地子空间，由互不相交的简单闭曲线组成。

假设 2.7。Y（粘合曲线）的每个连通分支至少连接到三个不同的边界分支，这些边界分支属于腔室（腔室不必彼此不同）。

定理 2 62。.6 确保我们的曲面拼接体是一个局部 CAT(−1) 空间。定理 2 72。.7 排除了具有非空边界的曲面拼接体以及闭双曲曲面。特别需要注意的是，本文的结果不适用于闭双曲曲面，因为它们的拓扑熵和体积熵始终 都等于 1。



Fig图 3：一个含有四个腔室的正规双曲曲面拼接体示例 s.

[1]请注意，Lafont [Laf07] Laf使用“厚”这一术语，但由于我们将需要对曲面 amalgam 进行厚-薄分解，因此我们使用“恰当”一词。

领圈引理和带状区域公式。 我们将 γ 的r-邻域定义为 定义为：其中 γ 是闭测地线，即点的集合

$$N_\gamma(r) = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, \gamma) \leq r\}.$$

下面的引理是对双曲曲面上简单闭测地线周围带状区域面积公式的直接推广。

引理 2.8. 设 $r > 0$，且 γ 是一条简单闭测地线，并假设 $N\gamma(r)$ γ 是若干嵌入环带的并。则

$$\mathrm{Area}\left(N_r(\gamma)\right) = n(\gamma)\ell(\gamma)\sinh(r),$$

其中，$n(\gamma)$ 是与 γ 相连的腔室的边界分支数（若 γ 是粘合曲线），否则为 2 。

证明。 这是一个直接计算，所用的是相对于 γ 在覆盖映射下的一个连通原像分支定义的费米坐标。由于 X 上的分片双曲度量限制在嵌入于 $\mathscr{C}(X)$中的单个环带 A上时，就是通常的双曲度量，因此我们可以使用公式（11）中的坐标来计算该环带的面积：

$$\int_{\rho=-r}^{r}\int_{t=0}^{\ell(\gamma)} \cosh(\rho)dtd\rho = 2\sinh(r)\ell(\gamma).$$

如果将外层积分的积分限改为 $\rho = 0$，而不是 $\rho = -r$ 或$\rho = r$，我们会发现积分的结果为 $\sinh(r)\ell(\gamma)$。这意味着 γ 将A分成面积相等的两个环带。因此，定理得证。

□

我们以与曲面中定义类似的方式，定义曲面拼接体中闭测地线 γ 周围的领圈 $\mathscr{C}(\gamma)$ 。也就是说， $\mathscr{C}(\gamma)$ 是宽度为r的邻域

$$w(\gamma) = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{1}{\sinh(\ell(\gamma)/2)}\right).$$

请记住，由于经典领圈引理，双曲曲面中的领圈是环带；参见 [Kee74] Kee以及 [Bus10] Bus中的定理 3.1.8 和 4.1.1。在曲面拼接体中，领圈的拓扑结构可能复杂得多；如果核心曲线与粘合测地线相交，它们不一定同胚于环带，甚至不一定是若干环带的并（见图44）。因此，需要一个更细致的领圈引理版本，即定理 2 92..9。

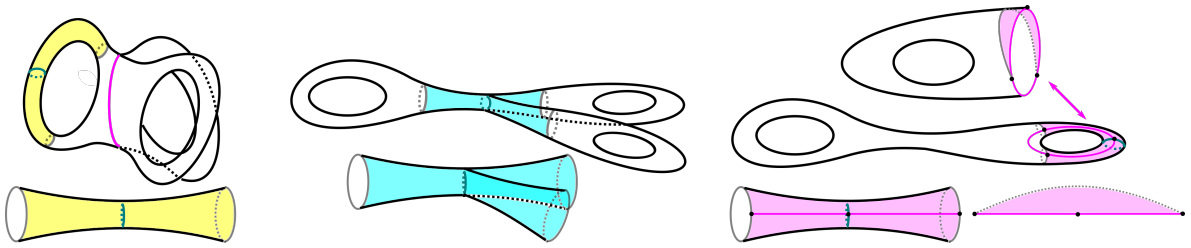


图4: 曲面拼接体中，短曲线的领圈有更多拓扑类型。

引理 2.9 (正规双曲曲面拼接体的领圈引理)。 设 X 为一个正规双曲曲面拼接体。那么，任何一组两两不相交、且除非自身为粘合曲线否则不与粘合曲线相交的简单闭测地线 γ_1， γ_2，……， γ_m 均满足以下条件：

1. 由公式给出的宽度为 $w(\gamma_i)$ 的领圈 $\mathscr{C}(\gamma_i)$

$$\mathscr{C}(\gamma_i) = \{p \in S : \text{距离}(p, \gamma_i) \leq w(\gamma_i)\} \text{ 其中 } w(\gamma_i) = \text{反双曲正弦}\left(1/\text{双曲正弦}(\ell(\gamma_i)/2)\right)$$

当 $i = 1, 2, ..., 3g$ 时两两不相交。

2. 每个领圈都是 n 个圆柱的有限并，每个圆柱都与配备黎曼度量 $ds^2 + d\theta^2\, cosh^2(t)$ 的 $w \times S$ 等距，其中 n 是附着到该处的腔室的边界分支数；若该处是粘合曲线，则 n 为 *2*，否则为 *1*。这些圆柱都沿其公共边界分支识别。

证明。 首先，假设 γ_i 与任何满足$i \neq j$的 γ_j 不相交，并且 γ_i 不与任何粘合测地线相交。那么 γ_i 完全包含在$C \subset X$的某个腔室中，因为它与所有粘合测地线都不相交，因此不可能横跨多个腔室。于是我们可以将经典领圈引理应用于C。它是一个紧致双曲曲面，因此可得 $\mathscr{C}(\gamma_i)$ 是 γ_i的一个环形邻域。

假设 γ_i 是一条粘合测地线，连接到某个由腔室组成的集合 $\{C_j\}_{=1}^{n(\gamma_i)}{}_j$。根据经典领圈引理（例如参见 [Bus10], Bus的定理4.3.2），在每个C_j上， γ_i 都有一个环形邻域，它是宽度为反双曲正弦 $\left(1/\text{双曲正弦}\left(\ell(\gamma_i)_2\right)\right)$的半领圈。于是 $\mathscr{C}(\gamma_i)$由$n(\gamma_i)$ 个这样的半领圈组成，它们沿着 γ_i（即共有的边界分支）粘合在一起。

由于满足推论陈述中假设的 γ_i 要么是紧双曲曲面的边界分支，要么是紧双曲曲面中彼此不相交的简单闭测地线，因此我们可以利用标准领圈引理得出它们的领圈彼此不相交。

□

推论 4.1.2 [Bus10] Bus说明，紧双曲曲面中的短简单闭测地线不能（横截）相交。对于曲面拼接体而言，情况并非如此；例如，两条与某条粘合测地线相交的短曲线也可能彼此相交（见图 5）。然而，下述定理指出，在所有其他情况下，两条短曲线都不能相交。

引理 2.10。设 γ 和 δ 是 X 上的闭测地线，它们在粘合曲线 Γ之外仅有有限个交点，并且假设 γ 是简单的。则：

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\gamma)\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\delta)\right)\geq 1.$$

~ ~证明。设 $\widetilde{\gamma}$ 和 δ 分别是 γ 和 δ 的提升，且它们在 X 中恰好相交于一点。考虑 $N_\epsilon(\widetilde{\gamma}\cap\widetilde{\delta})$，其中 $\epsilon\geq$ 反双曲正弦$\left(\ell^{1}\right.$双曲正弦$\left.(\ell(\gamma)/2)\right)$。设 A $\cong \mathbb{H}^2$是 ~X ~ ~中的一个公寓，且包含 $\widetilde{\gamma}$；由 [Wu25]Wu 的引理 2.9 可知这样的公寓存在。虽然 $\alpha_{\widetilde{\delta}}=\delta\cap N_\epsilon(\widetilde{\gamma}\cap\delta)$ 未必~一定包含于 A 中，但存在一个自然的等距投影，可将 $N_\epsilon(\widetilde{\gamma}\cap\delta)$ 投影到 A 中的一个开圆盘上。由于 γ 和 δ 不会在粘合测地线上相交，也不会在任何测地线段上重合，它们在投影映射下的像将横截相交。因此，$\alpha_{\widetilde{\delta}}$ 在该投影下的像是一条连接~A $\cap\mathscr{C}(\widetilde{\gamma})$两个边界分支的弧。由于所有公寓都具有相同的度量，投影保持长度；因此，$\ell_X(\delta)\geq\ell_{\sim}X(\alpha_{\widetilde{\delta}})\geq 2$反双曲正弦$\left(\ell^{1}\right.$双曲正弦$\left.(\ell(\gamma)/2)\right)$。由于双曲正弦是递增函数，

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\delta)\right)\geq\frac{1}{\sinh(\frac{1}{2}\ell(\gamma))}.$$

因此不等式得证。注意，如果将 $\ell(\gamma)$ 和 $\ell(\delta)$ 替换为 2 反双曲正弦(1)，则等号成立。

□

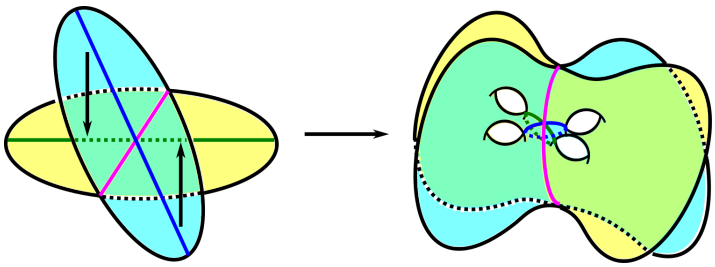


图 5：如果两条短测地线在粘合曲线上相交，那么它们的提升的像可能投影到同一条双无限闭测地线上，因此定理 2 10 的证明2。.10 将不再成立。

厚与薄　　n 分解。回想一下，双曲

曲面的领圈引理的一个推论是存在厚薄分解。在本小节中，我们为曲面拼接体定义厚薄分解。

定义 2.11（曲面拼接体的单射半径）。我们将 X 在 p 处的单射半径，即 $r_p(X)$，定义为满足以下条件的 $r > 0$ 的上确界： $B(p, r)$ 同胚于圆盘，或同胚于树与区间的乘积（见图 6）。

等价地，单射半径是以p为基点的最短简单测地环长度的两倍。注意，对曲面S 而言，$r_p(S)$ 的定义与上述定义一致。

定义 2.12 （X的厚部与薄部分解）。X 的薄部是集合 $\{p \in X : r_p(X) < \text{反双曲正弦}(1)/2\}$。~~$X$ 的补集~~是X的厚部。

接下来我们证明，与闭双曲曲面的情形类似（参见 [Bus10]Bus 中的定理 4.1.6），单射半径较大的点位于短曲线领圈并集的补集中。以下结果将对此作出精确说明。

引理 2.13. 设 X 是一个正规双曲曲面拼接体。设 $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}$ 为 X 中长度为 $< 2\text{反双曲正弦}(1)$ 的简单闭测地线的集合。若 $p \in X \setminus \left\{ \bigcup_{\gamma_i} \mathscr{C}(\gamma_i) \right\}$，则 $r_p(X) \geq \text{反双曲正弦}(1)$。

证明。假设 $r_p(X) < \text{反双曲正弦}(1)$。那么根据定义，存在一条以 p 为基点、长度为 $2r_p(X) \leq 2\text{反双曲正弦}(1)$ 的简单测地环 μ_p。由于 X 是局部 CAT(−1) 的，μ_p 与某条闭测地线 β自由同伦。根据 [Wu25]Wu 的引理 2.9， β 提升为一条双向无限测地线 $\widetilde{\beta}$，它包含于 X 中某个与双曲平面等距的公寓 $A \subset X$（但一般而言，在覆盖映射下未必投影到闭曲面上）。虽然可能不存在一个位于 A 中的提升 $\mu_p, \widetilde{\mu}_p$，但存在自然投影 $\pi : X \to A$，它将某个 $\widetilde{\mu_p}$ 映射到 A 上。该投影保持距离，因为 X 是双曲曲面拼接体。由于 $\pi(\widetilde{\mu_p})$ 和 β位于某个双曲平面中，我们可以应用 [Bus10] Bus 中定理 4.1.6 证明里的论证，得出 $\ell(\beta) < 2\text{反双曲正弦}(1)$，因此 β 是这些领圈的核心曲线之一，且 $p \in \mathscr{C}(\beta)$。

□

定理 2 132..13 给出了对X的薄部和厚部的一个便捷刻画。我们可以将双曲曲面拼合体的薄部视为领圈 $\{\mathscr{C}(\beta_i)\}$的集合，其中$\{\beta_i\}$ 是X 中长度小于 2反双曲正弦(1)的闭测地线集合。领圈邻域$X \setminus \{\bigcup_i \mathscr{C}(\beta_i)\}$ 的补集是X的厚部。

我们指出，与双曲曲面的情形不同，领圈 $\mathscr{C}(\beta_i)$，甚至简单闭曲线 β_i 也不一定彼此不相交。

2.3 熵与测地线计数

在本预备节的最后部分，我们利用文献中已证明的结果，建立熵与计数之间的关系（见定理 2 17217。。）。我们首先介绍 广义单位切丛 SX 上的 X 的测地流映射的拓扑熵这一概念；该丛也可视为 X 中单位速度测地线构成的空间（更多详情见第 3.1 节，参见 [Wu25] Wu）。

令 $\mathcal{G}(X)$ 为 X 的测地线集合，并令 $\varphi: \mathbb{R} \to X$ 为 SX 上的测地流映射。定义

$$d_{\mathcal{G}(X)}(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\mathbb{R}} d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \frac{e^{-|t|}}{2} dt, \text{ where } d_T(x, y) = \max_{0 \le t \le T} d_X(\varphi_t(x), \varphi_t(y)).$$

若集合 S $\in \mathcal{G}$(X) 满足：对任意 $\gamma_1, \gamma_2 \in$ S，$d_T(\gamma_1, \gamma_1) \ge \epsilon$，则称其为 (T, ϵ)-分离集。若 S $\subset \mathcal{G}$(X) 满足：对任意 $\gamma \in \mathcal{G}$(X)，存在某个 $\gamma' \in$ S 使得 $d_T(\gamma, \gamma') \le \epsilon$，则称其为 (T, ϵ)-张成集。令 N(φ,ϵ, T) 为 (T, ϵ)-分离集的最大基数，S(φ, ϵ, T) 为 (T,ϵ)-张成集的最小基数。

定义 2.14（拓扑熵）。有几种等价的定义 .

$$h_{\text{top}}(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \sup \frac{\log\left(N(\varphi, \epsilon, T)\right)}{T} = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \sup \frac{\log\left(S(\varphi, \epsilon, T)\right)}{T}.$$

文献中广泛研究的另一种熵的概念如下。注意，在本节中，(X,g) 将是一个适当曲面拼合体，其中 g 是度量。

定义 2.15 (体积熵)。 正规双曲曲面拼接体(X,g) 的体积熵 为极限

$$h_{\text{vol}}(X, g) = \lim_{r \to \infty} \frac{\log\left(\text{vol}_g\left(B(x, r)\right)\right)}{r}$$

~ ~其中$x \in X$ 是万有覆盖X 中的一个基点，$B(x,r)$ 是以x 为中心、半径为r的球，其体积取决于g。

以下定理表明，在正规双曲曲面拼接体的情形下，体积熵和拓扑熵实际上相等。

定理 2.16 (参见 [Leu06]Leu 的主定理。)。 设(X, g) 是一个正规双曲曲面拼接体。那么

$$h_{top}(\varphi) = h_{vol}(X, g),$$

其中 h^{top}（φ）是测地流 $\varphi_t: \mathbb{R} \to X$ 在 X 上测地线空间中的拓扑熵，而 h_{vol}（X，g）是（X，g）的体积熵。

证明。这是 Leuzinger 主定理的直接推论 [Leu06]Leu。我们可以验证 Leuzinger 定理的所有~条件。主定理首先要求 (X, ~g) 是测地线~完备、局部唯一测地且为测地的。事实上，在 (X, ~g) 中，每条测地线都可以无限延伸，并且 (X,~X, ~g) 中任意两点之间都存在唯一的最短测地线。此外， π_1(X) 通过等距变换在~(X, ~g) 上适当不连续且余紧地作用，并且 π_1(X) 保持 (X, g) 上的自然体积测度。另外，由于 (X, g) 是完备的 CAT(0)（Hadamard）空间，(X, g) 满足 Leuzinger 主定理陈述中所要求的所谓性质 (C) [Leu06]Leu。

剩下唯一需要检验的假设是(X,g) 满足 Leuzinger 所称的性质 (U)；也就是说，我们需要证明存在 $0 < \delta_0 \leq \infty$，使得对所有 $0 < \delta < \delta_0$，都存在正常数$C_i(\delta)$，其中$i = 1,2$，使得

$$0 < C_1(\delta) = \inf_{x\in\widetilde{X}} \mathrm{vol}_g\big(B(x,\delta)\big) \leq \sup_{x\in\widetilde{X}} \mathrm{vol}_g\big(B(x,\delta)\big) = C_2(\delta).$$

为此，注意到X 中的球要么是面积最小的圆盘，要么同胚于树与区间的乘积。设C 是X中的任意一个腔室。存在一个半径为r_C 的圆盘，完全包含在C的内部。令 $\delta_0 = r_C$。于是~对 $0 < \delta < \delta_0$，X 包含无穷多个面积为

$$4\pi \sinh^2(\delta/2) = \inf_{x\in\widetilde{X}} \mathrm{vol}_g\big(B(x,\delta)\big).$$

~另一方面，若我们选取$y \in X$ 中的某个点，它位于一条粘合测地线的某个提升上，则球$B(y,\delta)$ 包含一个以y为中心、半径为 δ 的圆盘，因此

$$\sup_{x\in\widetilde{X}} \mathrm{vol}_g\big(B(x,\delta)\big) \geq \mathrm{vol}_g\big(B(y,\delta)\big) > 4\pi \sinh^2(\delta/2).$$

于是由 [Leu06], Leu$h^{\mathrm{top}}(\varphi) = h_{\mathrm{vol}}(X,g)$。 □

回忆一下，$\#\mathcal{G}_X(L)$ 表示在(X,g) 中长度小于或等于L的闭测地线数量。$\#\mathcal{G}_X(L)$ 与SX 上测地流映射的拓扑熵之间的关系，由 Ricks 提出的一般定理的以下特殊情形给出：

定理 2.17 （参见 [Ric22]Ric）。 设 X 是一个恰当双曲曲面拼合体。当 $L \to \infty$,

$$\#\mathcal{G}_X(L) \sim \frac{e^{hL}}{hL}$$

其中 $h = h^{top}$（φ）是广义单位切丛 SX 上测地流的拓扑熵。

注记 2.18。 正如 [Ric22], Ric所指出的，指数 h 实际上等于 临界指数$\sim \delta_{\pi_1(X)}$，即 $\pi_1(X)$ 的庞加莱级数的临界指数。不过，他在较早的一篇论文中证明，如果 X 是一个恰当且测地完备的 CAT(0)度量空间，那么 $\delta_{\pi_1(X)}$ 等于 $\pi_1(X)$ $/SX$ 上的测地流映射的拓扑熵（见 [Ric 21]Ric中的定理 A）。

尽管我们假设其是恰当的，但当X 是闭双曲曲面时，该定理仍然成立。在这一经典情形下，$h = 1$，由此得到通常的计数 $|\#\mathcal{G}_X(L)| \sim e^L/L$ 最初由 Huber 给出（ [Hub59], Hub另见 [ES23] ES的附录）。

作为上述结果的直接推论，我们得到以下结论，这将使我们能够在下文中给出拓扑熵（或体积熵）的界。我们用 log 表示自然对数。

推论 2.19. 正规双曲曲面拼接体 X 的拓扑熵 h 满足

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\log\left(\#\mathcal{G}_X(L)\right)}{L} = h.$$

3 测地线计数

在本节中，我们将推导 $\#\mathcal{G}_X(L)$ 的上界和下界，其中

$$\#\mathcal{G}_X(L) = \#\{\gamma : \ \gamma \text{ 是非平凡的无向闭测地线，且 } \ell(\gamma) \le L\}。$$

记号。 以下记号将在全文中使用。令 Γ 为由X的粘合测地线组成的多重曲线。设

$$B = B(\Gamma) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \ell(\gamma),$$

X中所有粘合曲线的长度之和。回顾一下，在引言中，我们定义了如下量

$$r_0 := \min\left\{\frac{\log(3)}{4}, \frac{\mathrm{sys}(X)}{4}\right\}.$$

注意，$r_0 <$ 反双曲正弦(1) 2。为方便起见，我们设 $A :=$ 面积(X)。

3.1 上界

我们首先求出 $\#\mathcal{G}_X(L)$的一个上界。用半径为 X 的球覆盖 r_0，方法如下：选取一组极大的、两两不相交的半径为 $r_0/2$ 的球，其球心分别为 $\{p_1,\ldots,p_n\}$。注意，根据定理 2 112。.11，我们对 r_0 的选择保证半径为 $2r_0$ 的球是嵌入的，这在后面会派上用场。

首先，我们注意到球的集合 $\{B(p_i,r_0)\}_{i=1}^n$ 覆盖了 X。否则，就存在某个$p \in X$，使得对于所有$p \notin B(p_i, r_0)$，都有 $i = 1, 2, ..., n$，因此对于所有$B(p, r_0/2)$ 和 $B(p_i, r_0/2)$ 都不相交，而这组不相交球并非极大的。

证明将按以下步骤进行：

- 步骤 *1*： 求覆盖中球的数量 n的上界 $\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, r_0)$；
- 步骤 *2*： 给出$\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, r_0)$中每个球的面积上界；
- 步骤*3*： 利用上一步给出 $\beta(L)$ 的上界，即长度不超过 L 的闭测地线 η 经过的球的数量；
- 步骤 *4*： 求出任意给定球在$\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, r_0)$ 中相邻邻球数量的上界。$\#\mathcal{G}_X(L)$ 的上界将由$n\lambda^{\beta(L)}$ 给出。

步骤 1：覆盖中球的数量上界。 根据定理 2.12.1，半径为 $r_0/2$ 的圆盘在 $\mathbb{H}^2$ 中的面积为 4π 双曲正弦$^2(r_0/4)$。由于每个球 $B(p_i,r_0/2)$ 都是嵌入的，且X 是局部 $\mathrm{CAT}(-1)$，其面积不小于半径为 $r_0/2$ 的双曲圆盘的面积。因此，由于当$x > 0$时，双曲正弦$^2(x) > x$，

$$\text{Area}\left(B(p_i, r_0/2)\right) \geq 4\pi \sinh^2(r_0/4) > \frac{\pi r_0^2}{4}.$$

总之，由于半径为 $r_0/2$ 的圆盘互不相交，覆盖 X的球的总数至多为

$$n \leq \frac{4A}{\pi r_0^2}. \tag{2}$$

步骤 2：覆盖中每个球的面积上界。我们首先注意到以下结论 ：

引理 3.1. 设 $B(x,r)$ 是 X 中的一个嵌入球，其中 $r <$对数$(3)/2$。则 $B(x,r)$ 同胚于一棵（有限）树与$(0,1)$的乘积。

证明。 注意，根据定理 2.22.2， $\Gamma \cap B(x, r)$ 的补区域要么是半圆盘，要么是四边形。若将每个半圆盘补区域替换为矩形，就会得到一棵与区间相乘的树 T。 T 的内部顶点对应于与 $B(x, r)$相交的粘合测地线，而叶对应于作为半圆盘的补区域。见图 6.6。

□

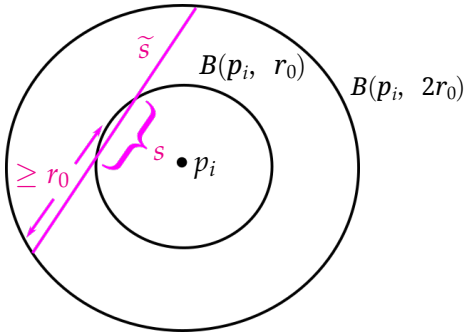


图 7: 线段s 可以任意短，但其延长线 $\tilde{s}$ 的长度至少为 $2r_0$.

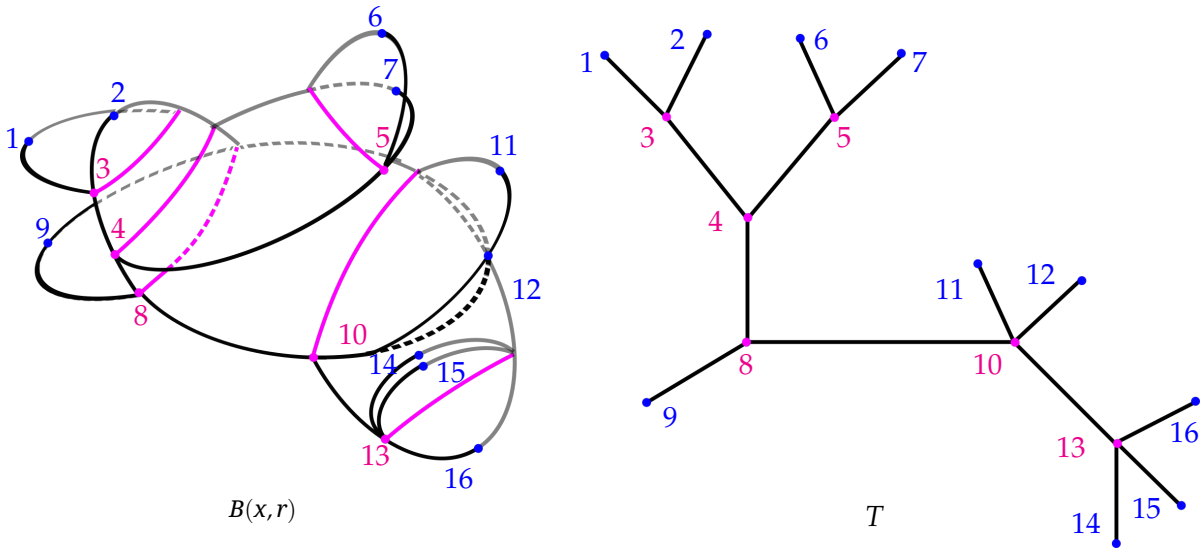


图 6：开球$B(x,\ r)$ 同胚于$T\ \times (0,\ 1)$，其中T 是一棵树。

假设一个球 $B(p_i,\ r_0)$ 同胚于 $T_i \times (0,1)$，且不同胚于圆盘。在接下来的段落中，我们将给出 T_i的叶数上界。

首先，我们对 T_i 的内部顶点数进行估计，该数量也等于 $\Gamma \cap B(p_i, r_0)$（$i = 1, 2, ..., n$）的连通分支数。考虑 $\subset \Gamma \cap B(p_i, r_0)$ 的一个连通分支 s。令 $\Gamma \cap B(p_i, 2r_0)$ 中包含 s 的连通分支为 $\tilde{s}$。则 $\tilde{s}$ 的长度至少为 $2r_0$（见图77）。由于不同的 $\tilde{s}$ 是 Γ 和 $\ell(\Gamma) = B$ 的互不相交的子弧，因此 $\Gamma \cap B(p_i, r_0)$ 的连通分支数至多为 $B/2r_0$。

每个内部顶点的度由与该顶点对应的粘合测地线的线段 s 相邻的腔室数给出。回想一下，双曲裤子曲面的面积为 2π，这也是 X 的每个腔室面积的下界。

虽然腔室不一定是裤子曲面，但我们可以为每个腔室固定一个裤子分解

。这将X 分解为双曲裤子曲面，其边界曲线要么是 Γ 中的粘合测地线，要么是完全位于某个腔室内部的内部曲线。由于每个裤子曲面的面积为 2π，因此X 中的裤子曲面总数至多为 $\mathrm{Area}(X)/(2\pi)$。此外，一个裤子曲面有三个边界分支，因此它沿至多三个边界分支与给定的粘合测地线相邻。由此可知，T_i 中每个内部顶点的度至多为 $^{3}\mathrm{Area}_{(X)\ 2\pi}$ 。

然后，利用内部顶点数量的上界 $B/2r_0$ ，根据握手引理，我们有

$$\#\{\text{leaves of } T_i\} \leq (B/2r_0)\left(\frac{3A}{2\pi} - 2\right) + 2. \tag{3}$$

现在我们使用公式（33）来界定每个 $B(p_i,\ r_0)$ 的面积。设 T_i 的一个指定内部顶点 x_0，为 T_i 的根。考虑从 x_0 到 T_i 的每个叶节点的路径集合；这些路径中的每一条都对应于 $B(p_i,\ r_0)$ 中某个腔室内的一个拓扑半圆盘，其面积上界为 4π双曲正弦$^2(r_0/2)$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}\left(B(p_i, r_0)\right) &\leq \left(\#\{\text{leaves of } T_i\}\right)\left(4\pi \sinh^2(r_0/2)\right) \\ &\leq \left[(B/2r_0)\left(\frac{3A}{2\pi} - 2\right) + 2\right]\left(4\pi \sinh^2(r_0/2)\right).\end{aligned} \tag{4}$$

步骤3：界定一条长测地线经过的球的数量。设 η 是一条长度为 L 的闭合~测地线，并设 $\tilde{\eta}$ 是其在万有覆盖 X 中的一个提升。考虑 X 中与 $\tilde{\eta}$ 相交的球的集合~；这些球是集合 $\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\ \mathrm{r}_0)\}$ 中球的提升（这些球不一定两两不同）。如前所述，球 $\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\ \mathrm{r}_0/2)\}$ 两两不相交，而那些与 $\tilde{\eta}$ 相交的球 $\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\ \mathrm{r}_0/2)$ 的并集包含于以 $\tilde{\eta}$ 为中心、半径为 $^{3}\mathrm{r}_2{}^{0}$ 的邻域内，即 $\mathrm{N}(\tilde{\eta},\ ^{3}\mathrm{r}_2{}^{0})$。事实上，每个球 $\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\ \mathrm{r}_0)$ 的中心到 $\tilde{\eta}$ 的距离小于 r_0，因此 $\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\ \mathrm{r}_0/2)$ 中的任意点到 $\tilde{\eta}$ 的距离至多为 $\mathrm{r}_0 + (\mathrm{r}_0/2)$。

现在我们来给 $\mathrm{N}(\tilde{\eta},\ ^{3}\mathrm{r}_2{}^{0})$ 的面积作上界。考虑 $\tilde{\eta}$ 的一个长度为 L 的子线段上的点集 $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m\}$，这些点的位置满足对 $\mathrm{j} = 2, 3, \ldots, \mathrm{m}$，有 $\mathrm{d}_{\tilde{X}}(\mathrm{x}j{-}1, \mathrm{x}j) = \mathrm{r}_0/2$。注意，$\mathrm{N}(\tilde{\eta},\ ^{3}\mathrm{r}_2{}^{0})$ 可以用集合 $\{\mathrm{B}(\mathrm{x}j, 2\mathrm{r}_0)\}_{j=1}^{m}$ 中的 $\mathrm{m} = \lceil 2\mathrm{L}/\mathrm{r}_0 \rceil + 1$ 个球覆盖。见图88。

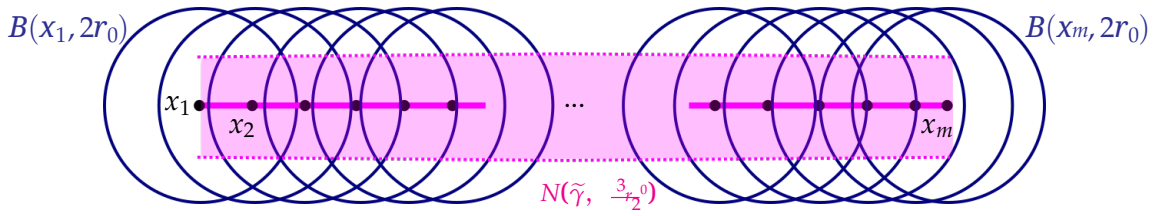


图8：使用半径为 $2r_0$ 的球估算$N(\tilde{\gamma}, 3r_0/2)$ 的面积。注意，这些*not*球与原始覆盖 $\{B(p_i,r_0)\}$中的球并不相同。

homeo ~由于$B(x_j,2r_0)\cong T_j\times(0,1)$嵌入在$X$中，我们可以使用步骤 2 中的相同论证，给出$T_j$的叶数上界，从而也得到$B(x_j,2r_0)$的面积上界：

$$\text{Area}\left(B(x_j,2r_0)\right)\leq\left[\frac{B}{2(2r_0)}\left(\frac{3A}{2\pi}-2\right)+2\right]\left(4\pi\sinh^2(r_0)\right).$$

由于$N(\widetilde{\eta},3r_0/2)$被$m=\lceil 2L/r_0\rceil+1$个球$B(x_j,2r_0)$覆盖，我们有

$$\text{Area}\left(N(\widetilde{\eta},3r_0/2)\right)\leq\left[\frac{B}{2(2r_0)}\left(\frac{3A}{2\pi}-2\right)+2\right]\left(4\pi\sinh^2(r_0)\right)\left(\left\lceil\frac{2L}{r_0}\right\rceil+1\right). \tag{5}$$

注意，$\Gamma\neq\emptyset$，$\text{sosys}(X)\leq B$。此外，由于$r_0\leq\text{sys}(X)/4$，我们有$2r_0\leq\text{sys}(X)\leq B$，因此$B/(2r_0)\geq 1$。因此，

$$\left[\frac{B}{2(2r_0)}\left(\frac{3A}{2\pi}-2\right)+2\right]\leq\frac{3BA}{4\pi r_0}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\text{Area}\left(N(\widetilde{\eta},3r_0/2)\right)&\leq\left(\frac{3BA}{4\pi r_0}\right)\left(4\pi\sinh^2(r_0)\right)\left(\left\lceil\frac{2L}{r_0}\right\rceil+1\right)\\&\leq\left(\frac{3BA(2L+2r_0)}{r_0^2}\right)\sinh^2(r_0).\end{aligned} \tag{6}$$

我们将注意力转回最初用$\widetilde{\eta}$覆盖的球$\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_k,\mathrm{r}_0)\}$；请回想，这些球是$\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)\}$中球的提升，它们覆盖了X。由于$\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_k,\mathrm{r}_0/2)\}$是一组两两不交的球，面积均至少为$4\pi$双曲正弦$^2(\mathrm{r}_0/4)$，且全部位于$\mathrm{N}(\widetilde{\eta},3\mathrm{r}_0/2)$内，我们可以推导出$\beta(\mathrm{L})$的上界，即集合$\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_k,\mathrm{r}_0)\}_{=1}^{\beta(L)}$k中的球的数量：

$$\begin{aligned}\beta(L)&\leq\left(\frac{3B\,A(2L+2r_0)}{4\pi r_0^2}\right)\overbrace{\left(\frac{\sinh^2(r_0)}{\sinh^2(r_0/4)}\right)}^{16\cosh^2(r_0/4)\cosh^2(r_0/2)}\\&=\left(\frac{12B\,A}{\pi r_0^2}\right)\left(\cosh^2(r_0/4)\right)\left(\cosh^2(r_0/2)\right)(2L+2r_0).\end{aligned} \tag{7}$$

步骤 4：推导$\#\mathcal{G}_X(\mathrm{L})$的一个上界。现在我们可以利用前面的步骤推导$\#\mathcal{G}_X(\mathrm{L})$的一个上界。首先，我们计算$\{\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)\}$中与每个球相邻的球的数量；该区域覆盖 X。当$\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)$不同胚于圆盘时，$\mathrm{T}_i$的每个叶节点都对应于万有覆盖中的一个补半平面，经过$\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)$的测地线可由此进入或离开。因此，一旦$\eta$（一条长度至多为 L 的闭测地线）进入某个与树和区间的乘积同胚的球$\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)$，(33) 就给出了从$\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)$进入相邻球的行进方向数量的上界。另一方面，当$\eta$进入$\mathbb{H}^2$中某个与圆盘同胚的球$\mathrm{B}(\mathrm{p}_i,\mathrm{r}_0)$时，根据

定理 2 42。.4， η 离开 球(p_i,r_0) 后，至多可进入 13 个相邻球。令 λ 为与任意给定球 $B(p_i,r_0)$ 相邻的球的最大数量，则有

$$\lambda \le \max\left\{13,\ \left(\frac{B}{2r_0}\right)\left(\frac{3A}{2\pi}-2\right)+2\right\}. \tag{8}$$

因此，

$$\#\mathcal{G}_X(L) \le N\lambda^{\beta(L)}, \tag{9}$$

其中 N、 $\beta(L)$ 和 λ 的上界分别由（22）、（77）和（88）给出。事实上， $\lambda^{\beta(L)}$限定了从固定初始球出发的测地线可能经过的球序列数量，而 N 则计入了初始球的最大选择数量。

推导整体上界。 回忆一下，$r_0 := \min\left\{\frac{\log(3)}{4},\ \mathrm{sys}(X)_4\right\}$ 以及 $A :=$ 面积(X)。根据（22）和（99），我们有 $\#\mathcal{G}_X(L) \le N\lambda^{\beta(L)}$，其中

$$N \le \frac{4A}{\pi r_0^2}.$$

此外，由（88）我们可以使用粗略上界

$$\lambda \le 15 + \frac{3AB}{4\pi r_0}.$$

最后，将（77）与不等式 $r_0 \le$ 对数$(3)/4$（从而 $\cosh(r_0/4)$ 和 $\cosh(r_0/2)$均一致有界）结合起来，我们得到显式估计

$$\beta(L) \le \frac{25\,AB}{\pi r_0^2}(L + r_0).$$

将这些结果结合起来，可得到以下对所有 $L \ge 0$均成立的一致上界：

$$\#\mathcal{G}_X(L) \le \frac{4A}{\pi r_0^2}\left(15 + \frac{3AB}{4\pi r_0}\right)^{\frac{25\,AB}{\pi r_0^2}(L+r_0)}. \tag{10}$$

这是引言中定理 1 11..1 的主要结果。注意，关于熵的陈述同样见于定理 1 11..1，它可由此结果和一次直接极限计算得出。

注 3.2. 对于固定的A 以及最短闭测地线长度的一致下界，上述界给出了形如$(K_1B)^{K_2B}$ 的上界，其中K_1,K_2 是仅依赖于最短闭测地线长度和面积的常数。令$K := K_2$ 对数K_1,，则该界变为$e^{KB\log(B)}$。在第**??** 节中我们将看到，若不对最短闭测地线长度施加下界，就不可能得到这种形式的界。

特定情形下的上界。 现在我们分析在 $\mathrm{sys}(X) \to 0, L \to \infty$ 和 $B \to \infty$ 的范围内，$\#\mathcal{G}_X(L)$ 上界的表现。在这种情况下，我们有

$r_0 = \mathrm{sys}(X)/4$，因此简化 (1010)，我们可以找到仅依赖于 K_0,K_1, 和 K_2 A 的常数

$$\#\mathcal{G}_X(L) \precsim \frac{K_0 A}{\mathrm{sys}^2(X)} \left[\left(\frac{K_1 B}{\mathrm{sys}(X)} \right)^{K_2 \left(\frac{BL}{\mathrm{sys}^2(X)} \right)} \right].$$

当 B 和 L充分大时，我们可以进一步将表达式简化为只依赖于 A的常数 K:

$$\#\mathcal{G}_X(L) \precsim \left(\frac{B}{\mathrm{sys}^3(X)} \right)^{K \left(\frac{BL}{\mathrm{sys}^2(X)} \right)}.$$

现在我们转而讨论 $\#\mathcal{G}_X(L)$的下界，并说明边界长度和最短闭测地线对结果的影响不可或缺。我们先给出一个一般构造，构造一族拼接曲线不断增长的曲面 amalgam。第二部分将给出一个更具体的例子，并表明如果允许最短闭测地线趋于 0，就会出现不同的行为。

3.1.1 固定曲面上的长粘合曲线

本部分将阐释的总体思路是，长粘合曲线可以产生许多闭测地线。这基于一种非常一般的构造：将固定的双曲曲面拼接在一起。

下面给出一种一般构造。设 S 是亏格为 $g \geq 2$, β 的闭双曲曲面，S 上有一条闭曲线，且 $m \geq 2$ 是一个自然数。令 $X = X_{m,\beta}$ 为沿 β等距拼接 S 的 m 个副本所得的曲面 amalgam。下界估计针对最简单的情形，即 $m = 2$，因为当 m 更大时，X 将会有更多曲线。

主要目标是证明以下命题。它使用了一个常数

$$c_\beta = \frac{\ell(\beta)}{2\pi^2(g-1)}$$

其来源将在证明中变得清晰。

命题 3.3。设 $C > 0$ 为任意满足 $C <$ 对数(2)c_β的常数。对于充分大的 L，X 上至少存在 e^{CL} 条本原闭测地线。

在进入证明之前，我们注意到，该命题意味着：通过将 β 取得足够长，对于任意 $C > 0$, 长度不超过 L 的测地线数量至少以 e^{CL} 的速度增长。特别是，对于曲面拼接体的测地线数量的指数增长的任何上界，都必须包含一个随粘合曲线的长度 B 增大而趋于无穷的项。

本部分余下内容将用于为该命题的证明做准备。

我们先观察以下事实。

观察 **3.4.** X 上的每条闭测地线都会典范地投影到S上的一条闭测地线 .

这给出了从X 上的闭测地线集合到S上的闭测地线集合的一个自然满射。关键在于量化该映射在多大程度上不是单射。这是因为S 上的闭测地线会与 β相交：事实上，每次相交时，测地线都可以在X上“选择”一个腔室。

更具体地说，设 α 是S 上的一条闭测地线，满足$i(\alpha,\beta) = k > 1$。那么我们声称，至少有 2^{k-1} 条X 上的闭测地线投影到 α （而且当$m = 2$时，恰好有 2^{k-1} 条）。

到目前为止，这些评论都比较一般；不过，我们将在下面更具体的构造中运用这些观察，该构造使用了基本的遍历理论。

对于$L > 0$，令 $\mathcal{G}_S(L) := \{\gamma \subset S : \ \gamma$ 本原闭测地线，且 $\ell(\gamma) \le L\}$。我们的下一个主要工具是以下关于(L) 中的曲线及其与一条固定曲线的交点的结果。专家们对此早已熟知，或许表述略有不同；为求完整，我们给出证明。

引理 3.5. 设 S 是一个亏格为 $g \ge 2$ 的闭双曲曲面，并设 $\beta \subset S$ 是一条长度为 $\ell(\beta)$ 的闭测地线。

那么， $\mathcal{G}_S(L)$ 中的一条测地线与 β 之间的期望交数满足

$$\mathbb{E}_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\big[i(\beta,\gamma)\big] \ \sim \ c_\beta\, L \qquad as\ L\to\infty,$$

其中

$$c_\beta = \frac{4\,\ell(\beta)}{\mathrm{vol}(T^1S)} = \frac{\ell(\beta)}{2\pi^2(g-1)}.$$

证明。 我们给出的证明使用 Bonahon流 [Bon88], Bon等分布和素测地线定理。

考虑曲面 S 上的测地流空间 $\mathcal{C}(S)$ 以及连续双线性交形式

$$i(\cdot,\cdot) : \mathcal{C}(S)\times\mathcal{C}(S) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$$

它将闭曲线的交数推广开来。设 $\mathcal{L}$ 表示与双曲度量相关联的刘维尔流，并设 δ_β 为与 β相关联的流。Bonahon [Bon88]Bon证明（采用标准归一化）

$$i(\mathcal{L},\delta_\beta) = \ell(\beta).$$

将 $\mathcal{L}$ 视为（无向）测地线空间上的刘维尔测度，恒等映射$i(\mathcal{L}, \delta_\beta) = \ell(\beta)$ 恰好就是克罗夫顿型陈述：穿过 β的测地线的 $\mathcal{L}$-测度为 $\ell(\beta)$。

现在我们利用本原闭测地线的等分布性。Bowen 的一条定理 [Bow72]Bow(另见 Margulis 关于周期轨道渐近的研究 [Mar04]Mar)表明，测地流的本原周期轨道相对于 Bowen-Margulis 测度趋于等分布。由于 S 具有常曲率 -1，Bowen–Margulis 测度与刘维尔测度重合。根据 Margulis 的等分布结果，在弱-* 拓扑下，我们有如下收敛（参见 [ES22] ES）：

$$\frac{1}{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma)}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\delta_\gamma \longrightarrow \frac{4}{\mathrm{vol}(T^1S)}\,\mathcal{L} \qquad \text{as } L\to\infty.$$

现在将连续线性泛函 $C \mapsto i(C, \delta_\beta)$ 作用于上述收敛关系。利用 $i(\cdot,\cdot)$的双线性与连续性，我们得到

$$\frac{1}{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma)}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)} i(\delta_\gamma,\delta_\beta) \longrightarrow \frac{4}{\mathrm{vol}(T^1S)}\,i(\mathcal{L},\delta_\beta) = \frac{4\,\ell(\beta)}{\mathrm{vol}(T^1S)}.$$

由于 $i(\delta_\gamma, \delta_\beta) = i(\beta, \gamma)$，这是平均渐近

$$\frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)} i(\beta,\gamma)}{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma)} \longrightarrow \frac{4\,\ell(\beta)}{\mathrm{vol}(T^1S)}. \tag{11}$$

紧双曲曲面的素测地线定理 [Bus10]Bus由 Huber 首先证明[Hub59], Hub，其表述为

$$\#\mathcal{G}_S(L) \sim \frac{e^L}{L}$$

对于$L \to \infty$。接下来，标准的分部求和论证给出

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma) \sim e^L,$$

因此

$$\frac{1}{\#\mathcal{G}_S(L)}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma) \sim L.$$

现在可以转而讨论期望。将（1111）乘以平均长度，即可得到最终结果：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}[\,i(\beta,\gamma)\,] &= \frac{1}{\#\mathcal{G}_S(L)}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)} i(\beta,\gamma)\\ &= \left(\frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)} i(\beta,\gamma)}{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma)}\right)\left(\frac{\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}\ell(\gamma)}{\#\mathcal{G}_S(L)}\right) \sim \frac{4\,\ell(\beta)}{\mathrm{vol}(T^1S)}\,L.\end{aligned}$$

□

备注 3.6. 如前所述，上述结果并非新结果。特别是，它可以视为 Erlandsson-Souto 在其著作中证明的渐近相交定律的推论 [ES2222，ES命题 2.4]。事实上，Erlandsson-Souto 证明（对于随机本原闭测地线 γ）

$$\frac{i(\beta,\gamma)}{\ell(\gamma)} \longrightarrow \frac{\ell(\beta)}{2\pi^2(g-1)}$$

因此通常有 $i(\beta,\gamma) \sim {}^{\ell}{}_{(\beta)\,2\pi^2(g-1)}\,\ell(\gamma)$。在我们的设定中，我们从集合$\mathcal{G}_S(L)$中均匀选取 γ。现在，由于根据素测地线定理，$\mathbb{E}[\ell(\gamma)] \sim L$，因此得到

$$\mathbb{E}_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}[\,i(\beta,\gamma)\,] \sim \frac{\ell(\beta)}{2\pi^2(g-1)}\,L.$$

我们将使用定理 3.5 的以下推论35。。。

推论 3.7。 设 S 是一个闭双曲曲面，且 $\beta \subset S$ 是一条闭测地线。令 c^{β} $=\ell(\beta)/$ 体积(T^1S) 如引理 *3.5*35.。所述。则对每个 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $L_0 = L_0(\varepsilon)$，使得对于所有 $L \geq L_0$，至少存在 $e^{(1-\varepsilon)L}$ 条本原闭测地线 γ，满足 $\ell(\gamma) \leq L$

$$i(\beta,\gamma) \geq (1-\varepsilon)c_\beta L.$$

证明。 固定 $\varepsilon \in]0,\ 1[$。根据引理 3.53。.5，当 L 足够大时，我们有

$$\mathbb{E}_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}[\,i(\beta,\gamma)\,] \geq (1-\varepsilon/2)c_\beta L.$$

现在考虑我们“不想要”的测地线集合，即集合中的曲线

$$\mathrm{Bad}(L) := \left\{\gamma \in \mathcal{G}_S(L) :\ i(\beta,\gamma) < (1-\varepsilon)c_\beta L\right\}.$$

及其补集

$$\mathrm{Good}(L) := \left\{\gamma \in \mathcal{G}_S(L) :\ i(\beta,\gamma) \geq (1-\varepsilon)c_\beta L\right\}.$$

Let

$$p_L := \frac{\#\,\mathrm{Bad}(L)}{\#\mathcal{G}_S(L)}$$

为“坏”集合中曲线所占的比例。我们将仅用领圈引理，为“好”集合的期望值给出一个粗略界。若 $i(\gamma,\beta) = k > 0$，则 $\ell(\gamma) > 2w(\beta)$，其中$w(\beta)$ 是围绕 β 的领圈宽度。因此，对于任意 $\gamma \in \mathcal{G}_S(L)$，我们有

$$i(\beta,\gamma) < \frac{1}{2w(\beta)}L.$$

Now

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\gamma\in\mathcal{G}_S(L)}[i(\beta,\gamma)] &= \frac{1}{\#\mathcal{G}_S(L)}\left(\sum_{\gamma\in\mathrm{Good}(L)} i(\beta,\gamma)+\sum_{\gamma\in\mathrm{Bad}(L)} i(\beta,\gamma)\right)\\ &< \frac{1}{\#\mathcal{G}_S(L)}\left(\#\,\mathrm{Bad}(L)\,(1-\varepsilon)\,c_\beta L+\#\,\mathrm{Good}(L)\frac{1}{2w(\beta)}L\right)\\ &= p_L\,(1-\varepsilon)\,c_\beta L+(1-p_L)\frac{1}{2w(\beta)}L.\end{aligned}$$

现在，我们可以除以 L，重新整理各项，并利用期望下界得到：

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)c_\beta \le \frac{1}{2w(\beta)}-\left(\frac{1}{2w(\beta)}-(1-\varepsilon)c_\beta\right)p_L.$$

注意，$1\ 2_{w(\beta)} \succ \cancel{(1}-\varepsilon)c^\beta$；否则，交集的期望值小于$(1-\varepsilon)c^\beta L$，这与我们最初的断言矛盾。现在我们可以单独考察$p_L$；根据前一句，其分子和分母均为正：

$$p_L \le \frac{\frac{1}{2w(\beta)}-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)c_\beta}{\frac{1}{2w(\beta)}-(1-\varepsilon)\,c_\beta}<1.$$

注意，p_L 的上界由一个与L 无关的函数给出，并且严格小于 1。特别地，“良好”测地线占所有测地线的一个确定比例$q_L := 1-p_L > 0$。现在取充分大的L，并利用素测地线定理，确保至少有$e^{(1-\varepsilon/2)L}$ 条闭测地线位于 $\mathcal{G}_S(L)$内。因此我们有

$$\#\,\mathrm{Good}(L) \ge q_L\#\mathcal{G}_S(L) \ge q_L e^{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)L}.$$

现在，再次取充分大的L，则q_L 与$e^{\frac{\varepsilon}{2}L}$之比的上界为 1，因此

$$\#\,\mathrm{Good}(L) \ge e^{(1-\varepsilon)L}$$

由此便证明了这一论断。 □

现在我们可以转而讨论这对X上的曲线数量有何影响。关键在于，当L足够大时，S 上长度不超过L 的大多数曲线都会花费大量时间与 β 相交，而且 β 越长，交点就越多。如上所述，这会使X上的曲线数量增加。现在我们可以完成该命题的证明。

命题*3 3*的证明33。。。 根据推论 3 7*3..7*，对于任意小的 $1>\varepsilon>0$，以及足够大的L，存在$e^{(1-\varepsilon)L}$ 条位于S 上的本原闭测地线 γ，满足 $\ell(\gamma) \le L$ 且

$$i(\beta,\gamma) \ge (1-\varepsilon)c_\beta L.$$

Each 每条这样的曲线都会在X上产生至少 $2^{i(\beta,\gamma)-1}$ 条测地线，因此至少有 t

$$\frac{1}{2}e^{(1-\varepsilon)L}2^{(1-\varepsilon)c_\beta L} = \frac{1}{2}e^{(1-\varepsilon)L+\log(2)(1-\varepsilon)c_\beta L}$$

对于足够大的L，其值大于

$$e^{\log(2)(1-\varepsilon)c_\beta L}.$$

这就证明了该命题。 □

3.1.2 短脉长与高熵

本节将构造一族曲面拼接体，其中闭测地线的数量会随着长度增长而大量增加。为此，我们先从构造一个单孔环面开始，它将作为曲面拼接体的基本构件。

环面 $T_{b,s}$。 下文中，我们考虑正常数B、s、$b > 0$，它们满足一些不等式，具体条件稍后给出。这些常数具有几何意义：s 是环面（以及后文中的曲面拼接体）的最短闭测地线长度，而b 是单孔环面的边界长度。与前文一样，B 是粘合测地线的长度；在此构造中，B 最终将取决于s。

我们考虑一条直角五边形，其不相邻边的长度分别为 s_2 和 b_4。随后，我们将它的四个副本拼接在一起，使五边形的顶点彼此相接，从而构造出如图 9所示的单孔环面。由此得到的单孔环面既具有前后对称性，也具有上下对称性。曲线 α 的长度为 s，并与曲线 β 垂直相交，其中 β 是由五边形的边首尾相接而成的。单孔环面的边界长度为 b。根据 [Bus10],Bus的定理 2.3.4， α 和 β 的长度满足

$$\sinh\left(\frac{\ell(\alpha)}{2}\right)\sinh\left(\frac{\ell(\beta)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{b}{4}\right). \tag{12}$$

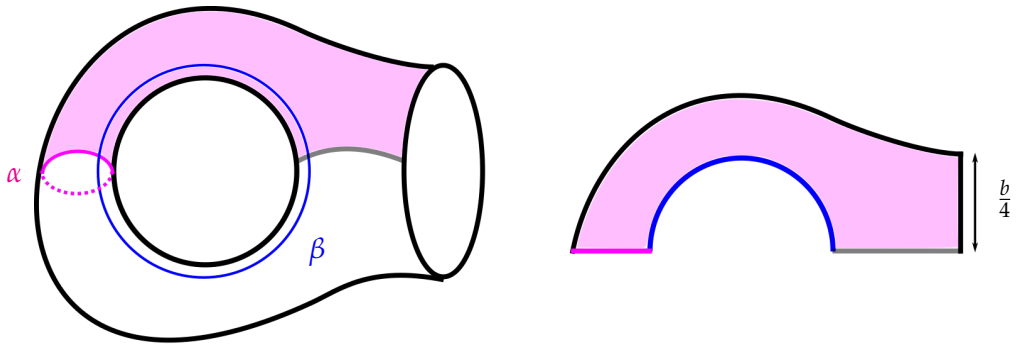


图9：由四个直角五边形副本拼成的单孔环面 $T_{b,\,s}$ (左图)。其边界长度 b 由（1212）给出。

我们将关注$s \to 0$和b 都较小但固定的情形。我们可以假设$s < b$ 且$b \leq 2$反双曲正弦(1)。在这种情况下，由于 α 与环面上的所有内部曲线相交，且 $\ell(\alpha) < 2$反双曲正弦(1)，根据领圈引理，所有其他曲线（包括 β）的长度都> 2反双曲正弦(1)。现在，由于 $\ell(\alpha) < b$， α 是T_b的最短闭测地线，$_s$ 因此

$$\mathrm{sys}(T_{b,s}) = s.$$

曲面拼接体 $X_{b,s,k}$。 我们固定 α 的定向，并对任意$k \in \mathbb{N}$，通过沿 α对 β 施加k 次正向德恩扭转，得到曲线 β_k。特别地， $\beta_0 := \beta$。注意， β与 β_k 恰好相交k 次。

曲线 β_k 的长度通过在三角形中使用标准的双曲三角公式（参见 [Bus10] Bus定理 2.2.2 和图 1010），满足

$$\cosh\left(\frac{\ell(\beta_k)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{ks}{2}\right)\cosh\left(\frac{\ell(\beta)}{2}\right).$$

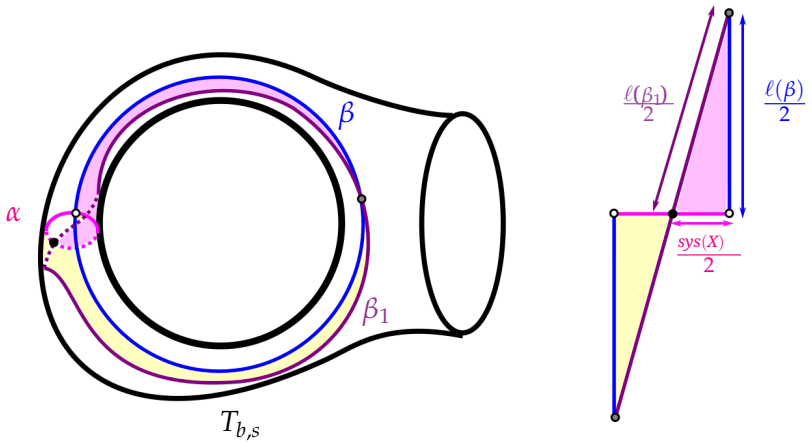


图 10：沿 $\beta_1 = T_\alpha(\beta)$、 α和 β 切割，得到两个直角三角形。

现在，我们通过取两个$T_{b,s}$ 的副本，并沿着 β_k 及其长度为b的边界曲线将它们粘合起来，构造一个曲面拼接体$X_{b,s,k}$；两处粘合均通过恒等映射完成。

我们注意到，所得的曲面拼接体的最短闭测地线长度为s，粘接长度等于$B := \ell(\beta_k)$。这是因为将长度为b 的边界分支粘合在一起时，并未引入奇异曲线。（事实上，这个曲面拼接体只有一个腔室，而它是一个四孔球面。）

利用上面的公式：

$$B = 2\,\mathrm{arccosh}\left(\cosh\left(\frac{ks}{2}\right)\cosh\left(\frac{\ell(\beta)}{2}\right)\right).$$

注意，测地线 β 在$T_{b,s}$ 上的提升，在$X_{b,s,k}$ 上至少有 2^k 条曲线，每条长度均为 $\ell(\beta)$。事实上，每当 β 与粘合曲线 β_k相交时， β的提升至少有两种不同的延伸方向，且不会发生回溯。不过，我们将通过考察另一条曲线的提升来得到“更好”的结果。

在$X_{b,s,k}$上构造许多曲线。我们回到$T_{b,s}$。我们不再将 β 绕 α扭转，而是考察沿 β 扭转$k' \in \mathbb{N}$次后得到的曲线，这里仍固定 β的定向。我们将这些曲线称为 $\alpha_{k'}$。同样，我们可以像计算 β_k那样精确计算它们的长度。

我们主要需要以下观察：

引理 3.8. 对于 $k,k' \in \mathbb{N}$， 我们有

$$i(\alpha_{k'}, \beta_k) = k'k + 1.$$

证明. 我们使用一个同调论证。由于 α 与 β 相交一次，它们的同调类构成 $H_1(S;\mathbb{Z})$ 的一组基。令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为代数交数；按照所选定向$\langle \alpha, \beta \rangle = 1$，于是 $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$，且 $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 0$。

根据定义， α_k 是由 α 沿 β 进行 k 次正向扭转得到的，因此其同调类为

$$[\alpha_k] = [\alpha] + k[\beta].$$

同理， $\beta_{k'}$ 是由 β 沿 α 进行 k' 次正向扭转得到的，因此

$$[\beta_{k'}] = [\beta] - k'[\alpha].$$

因此

$$\langle [\alpha_k], [\beta_{k'}] \rangle = \langle [\alpha] + k[\beta], [\beta] - k'[\alpha] \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle - k'\langle \alpha, \alpha \rangle + k\langle \beta, \beta \rangle - kk'\langle \beta, \alpha \rangle = 1 + kk'.$$

对于 k， $k' \in \mathbb{N}$ 这是正的，因此 $i(\alpha_k, \beta_{k'}) = 1 + kk'$。 □

例如，在图 11 中11，长度为 L 的粉色曲线 α_7 和蓝色粘合曲线 β_2 相交 15 次。（其中一次交点位于曲面的背面，图中未显示。）

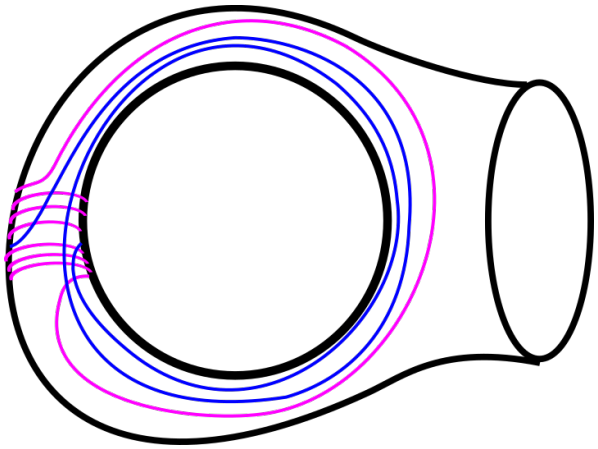


图11：定理3 8的一个例子3..8 其中 $k' = 7$ 且 $k = 2$。

我们利用三角不等式，对 $\alpha_{k'}$ 的长度作一个简单的近似：

$$\ell(\alpha_{k'}) < k'\ell(\beta) + \ell(\alpha) = k'\ell(\beta) + s.$$

令 $L = k'\ell(\beta) + s$，使用与之前相同的论证，$\alpha_{k'}$ 在 $X_{b,s,k}$ 上提升为至少 $2^{kk'+1}$ 条长度不超过 L 的闭测地线。要使这有意义，我们需要了解调整参数时这些数值如何变化。在进行计算之前，我们先说明总体策略。

策略。首先，我们说明如何定义 k，使得 s 和 k 都只取决于粘合曲线 B 的长度。我们固定 b，并令 k 大致为 1/s。这样，β_k 可以绕着 α 大约 k 圈，同时只增加长度 1 到 $\ell(\beta)$；也就是说，$B = \ell(\beta_k) \lesssim \ell(\beta) + 1$。现在构造 $X_{b,s,k}$ 所剩的唯一参数是 s，而 s 将趋于 0。注意，β 的长度大约是 α 的领圈长度的两倍，而后者又大约为 log(1/s)。因此，总粘接长度 B 在相差一个加法常数的意义下为 2 log(1/s)。于是，k 大约为 $e^{B/2}$。

现在我们令k' 增长。曲线 $\alpha_{k'}$ 的长度随k'线性增长，但前面的系数取决于s，且可用B来估计。现在我们可以综合这些结果：由于长度为$L(k')$的曲线至少有 $2^{kk'+1}$ 条，因此随着L 增长，曲线至少有$2^{C^{e^{B/2}}{}_B L}$ 条，其中C是某个普适常数。

—

使用显式估计实施这一策略。 在深入探讨其他参数之前，我们现在固定 $b := 2$反双曲正弦(1)。由此可得

$$\cosh\left(\frac{b}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

由此，我们得到

$$\ell(\beta) = 2\ \mathrm{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{\sinh\left(\frac{s}{2}\right)}\right).$$

由于我们关注的是s 较小的范围，现在进一步假设$0 < s \leq \frac{1}{2}$。利用这一点，我们可以估计 $\ell(\beta)$。

引理 3.9. 对于 $0 < s \leq \frac{1}{2}$，我们有

$$2\log\left(\frac{2}{s}\right) \leq \ell(\beta) \leq 2\log\left(\frac{7}{s}\right).$$

证明. 我们使用初等界

$$x \leq \sinh x \leq x\cosh x \qquad (x \geq 0)$$

and

$$\log t \leq \mathrm{arcsinh}(t) \leq \log(3t) \qquad (t \geq 1).$$

首先，由于双曲正弦$(s/2) \geq s/2$,

$$\ell(\beta) \leq 2\ \mathrm{arcsinh}\left(\frac{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{s}\right).$$

由于 $s \leq \frac{1}{2}$，该参数至少为 1，因此上面的第二个不等式给出

$$\ell(\beta) \leq 2\log\left(\frac{6\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{s}\right).$$

利用初等微积分（或直接数值计算）可以验证 $6\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} < 7$，由此得到

$$\ell(\beta) \leq 2\log\left(\frac{7}{s}\right).$$

对于下界，由于双曲正弦$(s/2) \leq (s/2)$双曲余弦$(s/2)$ 且 $s/2 \leq 1/4$,

$$\sinh(s/2) \leq (s/2)\cosh(1/4),$$

因此

$$\ell(\beta) \geq 2\ \mathrm{arcsinh}\left(\frac{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{s\cosh(1/4)}\right).$$

利用反双曲正弦$(t) \geq$ 对数t 并简化常数（再次通过直接数值检验），得到

$$\ell(\beta) \geq 2\log\left(\frac{2}{s}\right).$$

□

我们设定 $k = \lfloor 1/s \rfloor$，由前一个引理可立即得到 $\ell(\beta_k)$ 的上界和下界，进而得到B的上界和下界。

引理 3.10. 对于 $0 < s \leq \frac{1}{2}$ 和 $k = \lfloor 1/s \rfloor$，我们有

$$2\log\left(\frac{2}{s}\right) \leq \ell(\beta_k) = B \leq 2\log\left(\frac{12}{s}\right).$$

证明. 这些估计直接由下式得出

$$\ell(\beta) \leq \ell(\beta_k) \leq \ell(\beta) + ks$$

然后，由于 $ks \leq 1$，利用前面的估计，我们有

$$\ell(\beta) + ks \leq \ell(\beta) + 1 \leq 2\log\left(\frac{12}{s}\right).$$

□

From B的上界给出关于 B的 k 下界 .

引理 3.11. 对于上述 s 和 k，我们有

$$k \geq \frac{e^{B/2}}{12} - 1.$$

证明. 由前一个引理可得

$$B \leq 2\log\left(\frac{12}{s}\right).$$

两边取指数，得到

$$e^{B/2} \leq \frac{12}{s},$$

因此

$$s \leq 12e^{-B/2}.$$

由于 $k = \lfloor 1/s \rfloor$，我们有 $k \geq {}^{1}{}_{s} - 1$。代入 s 的上界，得到

$$k \geq \frac{e^{B/2}}{12} - 1.$$

□

现在取 $L > 0$，并令 k' 等于

$$k' = \max\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : m\,\ell(\beta) + s \leq L\}.$$

（这确保在$T_{b,s}$ 曲线 $\alpha_{k'}$ 的长度至多为L。）于是我们得到以下估计（该估计仅在L足够大时才有意义）。

引理 3.12. 假设 $0 < s \le \frac{1}{2}$。量 k' 满足

$$k' \ge \frac{L-1}{B} - 1.$$

证明。 根据k'的定义，

$$k' = \left\lfloor \frac{L-s}{\ell(\beta)} \right\rfloor,$$

因此

$$k' \ge \frac{L-s}{\ell(\beta)} - 1.$$

根据B的定义，我们有 $\ell(\beta) \le B$。因此

$$k' \ge \frac{L-s}{B} - 1.$$

由于 $0 < s \le \frac{1}{2}$，我们有 $L - s \ge L - 1$，因此

$$k' \ge \frac{L-1}{B} - 1.$$

□

现在回到 $X_{b,s,k}$ 并可证明定理 Theorem 1 313。。. 由于我们的曲面拼接体不再依赖于b，且我们已用B估计了s 和k，因此按它们的粘接长度为其编号，并令$X_B := X_{b,s,k}$。我们只关注B足够大的范围，因此令$B \ge 2\log 24$，并且我们关注L 增长的情形，所以假设$L \ge 2B + 5$。

证明。 由于

$$k \ge \frac{e^{B/2}}{12} - 1, \qquad k' \ge \frac{L-1}{B} - 1,$$

并且我们假设

$$B \ge 2\log 24, \qquad L \ge 2B + 5,$$

我们可以得到较弱的不等式：

$$k \ge \frac{e^{B/2}}{24}, \qquad k' \ge \frac{L-1}{2B}.$$

由此可得

$$kk' \ge \frac{(L-1)e^{B/2}}{48\,B} \ge \frac{Le^{B/2}}{96\,B},$$

因此

$$2^{kk'+1} \ge 2^{1+\frac{1}{96}\frac{e^{B/2}}{B}L},$$

这就证明了该定理。 □

最后，注意到定理 1 31。.3 中关于熵的陈述源自引言中的直接计算。

参考文献

[Bon88] Francis Bonahon. 通过测地流研究Teichmüller空间的几何。《数学发明》，92:139–162，1988.[Bow72] Rufus Bowen. 双曲流的周期轨道。《美国数学杂志》，94:1–30，1972.[BP18] Peter Buser and Hugo Parlier. 量化双曲曲面上简单测地线的稀疏性，2018。arXiv:1806.00998.[Bus10] Peter Buser. 紧黎曼曲面的几何与谱。现代Birkhäuser经典丛书。Birkhäuser Boston有限公司，波士顿，马萨诸塞州，2010。1992年版的重印本。[Buy05] S. Buyalo. 双曲图曲面的体积熵。《遍历理论与动力系统》，25(2):403–417，2005.[ES22] Viveka Erlandsson and Juan Souto. Mirzakhani曲线计数与测地流，数学进展第345卷。Springer，Cham，2022.[ES23] Viveka Erlandsson and Juan Souto. 给定交换子长度的测地线计数。《数学论坛：Sigma》，11:论文编号e114，47页，2023.[Hub59] Heinz Huber. 关于双曲空间形式与运动群的解析理论。Math. Ann., 138:1–26，1959.[Kee74] Linda Keen. 黎曼曲面上的领圈。载于《不连续群与黎曼曲面》（会议论文集，马里兰大学，马里兰州科利奇帕克，1973），《数学年刊研究丛书》第79卷，第263–268页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974.[Laf07] Jean-François Lafont. 自由群几何合并的图刚性。《纯粹与应用代数杂志》，209(3):771–780，2007.[Leu06] Enrico Leuzinger. 度量空间与Bruhat–Tits建筑的测地流熵。《几何学进展》，6(3):475–491，2006.[LL10] François Ledrappier and Seonhee Lim. 双曲建筑的体积熵。《现代动力系统杂志》，4(1):139–165，2010.[Mar04] G. A. Margulis. 关于Anosov系统理论的若干方面。Springer，2004.[Ric21] Russell Ricks. 紧秩一局部CAT(0)空间上唯一的最大熵测度。《离散与连续动力系统》，41(2):507–523，2021.[Ric22] Russell Ricks. 紧秩一局部CAT(0)空间中闭测地线的计数。《遍历理论与动力系统》，42(3):1220–1251，2022.

[Wu25] Yandi Wu. 曲面拼接体的标记长度谱刚性。美国数学会汇刊，378(10):7075–7106, 2025。