arXiv:2603.15813v1 [math.GR] 16 Mar 2026

关于有限线性群阶的 Jordan 界

PETER MÜLLER

摘要。1878 年，卡米耶·若尔当证明，每个有限子群 $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 都有一个阿贝尔正规子群 A，使得其 $|G/A|$ 以 n为界，但他没有给出明确的界。1904 年起，Blichfeldt 通过一系列论文运用表示论方法得出了明确的界。1911 年，Bieberbach 给出了一个几何证明，其方法与若尔当和 Blichfeldt 的方法截然不同，并同时给出了明确的界。同年，Frobenius 简化了这一证明，由此得到的论证至今仍是已知最简洁的。本文给出 Frobenius 论证的一种自成一体且更为精炼的变体，得到界 $|G/A| \leq 25^{n^2}$。

1. 引言

群论中的一个经典课题是研究 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的有限子群。固定 n后，这类群的阶可以任意大。例如，对每个 $m \geq 1$，数量矩阵群 $\{\zeta I_n \mid \zeta \in \mathbb{C}, \zeta^m = 1\}$ 的阶为 m。然而，根据卡米耶·若尔当的以下经典结果，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的大型有限子群必有大型阿贝尔正规子群：

定理 1.1 (若尔当，1878)。设 $G \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是一个有限群。那么，G 含有一个阿贝尔正规子群 A，使得 $|G/A| \leq f(n)$，其中 $f(n)$ 仅取决于 n。

这个定理的陈述见第 91 页，证明则见于若尔当的长篇论文 [10]的第二章。若尔当的证明纯粹是代数性的，没有给出显式的上界 $f(n)$。参见 [2]，其中对若尔当的原始论证作了现代阐述，并详细介绍了若尔当定理的历史。

从 1904 年起，Blichfeldt 发表的几篇论文运用表示论方法，得到了另一种证明以及显式上界 $f(n) = n!6^{(n-1)(\pi(n+1)+1)}$，其中 $\pi(n+1)$ 是小于或等于$n+1$的素数个数。关于这个上界，参见 [7, §30]；关于一个稍弱的上界（将 6 替换为 12），参见 [9, 定理 (14.12)] 和 [11, §70]。

1911年晚些时候，Bieberbach [1] 为Jordan定理找到了一个完全不同的证明，同时得到了界 $f(n) = (1 + 32^4 n^{10})^{2n^2}$。同年[1]

Frobenius [8]简化了比伯巴赫的证明，并得到了更好的界$f(n) = (\sqrt{8n+1})^{2n^2} - (\sqrt{8n-1})^{2n^2}$。

Frobenius 方法的一种现代阐述是狄克逊版本 [6, 定理 5.7], ，它给出了界 $f(n) = (49n)^{n^2}$ （这比前述界略弱）。

在 [12] 中，陶哲轩简述了 Frobenius 方法的一种变体。详细内容见 [3, 第 2]节。界 $f(n) = n^{Cn^3}$ （其中某个绝对常数尚未确定） C 比前述界更差。

这些证明无法为一般情形下的最优界 $f(n)$ 提供任何信息。迄今为止，布利希费尔特界是已知的渐近意义下最优的界，无需借助有限单群分类即可证明。注意，若 $c > 6$，则由素数定理可知， $f(n) = c^{n^2/\log n}$对所有充分大的 n 均成立。

在 Jordan 定理中，对于 $n \geq 4$，必有 $f(n) \geq (n+1)!$，理由如下：令对称群 Sym$(n+1)$ 通过置换坐标作用于 $\mathbb{C}^{n+1}$。由坐标和为 0 的向量组成的 n 维子空间在 Sym$(n+1)$ 的作用下保持不变。因此可将 Sym$(n+1)$ 嵌入 GL$_n(\mathbb{C})$。由于当 $n \geq 4$ 时，Sym$(n+1)$ 不含非平凡阿贝尔正规子群，因此可得 $f(n) \geq (n+1)!$。

反过来，借助有限单群分类，柯林斯 [4]证明，事实上，只要 $n \geq 71$，Jordan定理就成立，且 $f(n) = (n+1)!$。他还确定了所有 $n \leq 70$ 的最优情形。

尽管 Frobenius 的证明已有 100 多年历史，时至今日，它仍被认为是证明 Jordan 定理最简洁的方法。他的证明（以及 Bieber- bach 更早的先驱性证明）包含三个步骤：

步骤1：酉技巧——Bieberbach 和 Frobenius 早已知晓这一技巧——使我们可以假设 G 是酉群 U$_n(\mathbb{C})$ 的一个子群。步骤2：在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上使用适当的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 和充分小的正数常量 c，定义由所有满足 $\|I_n - g\| < c$ 的 $g \in G$ 生成的子群 A ，并证明它是 G 的阿贝尔正规子群。步骤3：简单的体积打包论证，或者抽屉原理，可以证明 $|G/A|$ 的上界仅取决于 n 和 c。

步骤 2 的关键部分是下面的引理 3.1（或其变体）。它的证明，无论是 Frobenius 所给出的证明，还是标准参考文献 [6, 定理 5.7 的证明，第 (a) 部分] 以及 [5, （36.17）引理] 中的证明，都相当复杂。下面我们给出另一种证明，我们认为这种证明更加自然。

此外，我们将步骤1替换为一个较弱的结果，该结果不需要谱定理，并且足以满足我们的目的。

我们证明Jordan定理，其界为 $f(n) = 25^{n^2}$。

2. 赋范向量空间与线性等距映射

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的有限维赋范向量空间。令 $\|v\|$ 表示 $v \in V$ 的范数。因此， $\|\cdot\|$ 是从 V 到 $\mathbb{R}$ 的函数，满足对每个 $v, w \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有：

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0, \\ \|v\| &= 0 \text{ if and only if } v = 0, \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \cdot \|v\|, \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned}$$

V 的线性等距映射是一个映射 $x \in \mathrm{GL}(V)$，满足对所有 $v \in V$，都有 $\|xv\| = \|v\|$。令 $\mathrm{Isom}(V)$ 表示 V 的线性等距映射群。

引理 2.1. 设 V 是有限维复向量空间，且 $G \leq \mathrm{GL}(V)$ 是有限群。那么可以在 V 上定义一个范数，使得 $G \leq \mathrm{Isom}(V)$，也就是说， G 在 V 上通过线性等距映射作用。

证明。令 $\|\cdot\|'$ 为 V 上任意一个范数。设

$$\|v\| = \sum_{h \in G} \|hv\|'$$

对于 $v \in V$。那么 $\|\cdot\|$ 是 V 上的一个范数，并且

$$\|gv\| = \sum_{h \in G} \|h(gv)\|' = \sum_{h \in G} \|(hg)v\|' = \|v\|,$$

因为如果 h遍历 G，那么 hg也会遍历 G。 □

我们回顾一下 $a \in \mathrm{End}(V)$ 的算子范数定义。由于 V是有限维的，集合 $\{ v \in V \mid \|v\| = 1 \}$ 是紧致的。因此，连续函数 $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|av\|$ 在该集合上取到最大值。相应地， a 的算子范数定义为 $\|a\|_{\mathrm{op}} = \max\{ \|av\| \mid \|v\| = 1 \}$。由此定义直接得到的结论是

$$\begin{aligned} \|av\| &\leq \|a\|_{\mathrm{op}} \cdot \|v\|, \\ \|\lambda a\|_{\mathrm{op}} &= |\lambda| \cdot \|a\|_{\mathrm{op}}, \\ \|a + b\|_{\mathrm{op}} &\leq \|a\|_{\mathrm{op}} + \|b\|_{\mathrm{op}}, \\ \|ab\|_{\mathrm{op}} &\leq \|a\|_{\mathrm{op}} \cdot \|b\|_{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

对所有 a， $b \in \mathrm{End}(V)$、 $v \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$。

我们指出算子范数定义的另外三个直接推论:

$$\begin{aligned}\|xay\|_{\mathrm{op}} &= \|a\|_{\mathrm{op}} \text{ for all } a \in \mathrm{End}(V) \text{ and } x, y \in \mathrm{Isom}(V),\\ \|x\|_{\mathrm{op}} &= 1 \text{ for all } x \in \mathrm{Isom}(V),\\ |\mu| &\leq \|a\|_{\mathrm{op}} \text{ for each eigenvalue } \mu \text{ of } a \in \mathrm{End}(V).\end{aligned}$$

3. 可交换元素

Jordan定理证明中的关键步骤是以下引理，它表明，有限子群 Isom(V) 中充分接近恒等映射的元素彼此可交换。

引理 3.1。设 V 是一个带有范数$\|\cdot\|$ 的有限维复向量空间，并且 id_V 是 V上的恒等映射。则有以下结论:

（a）若 $\|\mathrm{id}_V - x\|_{op} < 1$ 对于 $x \in \mathrm{End}(V)$，则 迹 $x \neq 0$。（b）设 x、$y \in \mathrm{Isom}(V)$ 生成一个有限群。若 $\|\mathrm{id}_V - x\|_{op} < 1/2$ 且 $\|\mathrm{id}_V - y\|_{op} < 1/2$，则 $xy = yx$。

证明。（a）若 λ 是 x的一个特征值，则 $1-\lambda$ 是 $\mathrm{id}_V - x$的一个特征值，因此 $|1-\lambda| \leq \|\mathrm{id}_V - x\|_{\mathrm{op}} < 1$。

设 λ_1，.....，λ_n 是 x 的特征值，其中 $n =$维数为 $V \geq 1$。于是

$$n > \sum |1-\lambda_i| \geq |\sum (1-\lambda_i)| = |n - \operatorname{trace} x|,$$

因此迹为 $x \neq 0$。

（b）我们对维数 V 使用归纳法证明该断言。基础情形 $\dim V = 1$ 显然成立。另外，若 x 是数量映射，则显然有 $xy = yx$。因此，设 x 不是数量映射。令 z 为由 x 和 y 生成的有限群中的一个非标量元素，并且 $\|\mathrm{id}_V - z\|_{\mathrm{op}}$ 取最小值。由

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_V - x^{-1}z^{-1}xz &= x^{-1}z^{-1}(zx - xz)\\ &= x^{-1}z^{-1}\left((\mathrm{id}_V - z)(\mathrm{id}_V - x) - (\mathrm{id}_V - x)(\mathrm{id}_V - z)\right)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{id}_V - x^{-1}z^{-1}xz\|_{\mathrm{op}} &\leq \|(\mathrm{id}_V - z)(\mathrm{id}_V - x) - (\mathrm{id}_V - x)(\mathrm{id}_V - z)\|_{\mathrm{op}}\\ &\leq 2 \cdot \|\mathrm{id}_V - x\|_{\mathrm{op}} \cdot \|\mathrm{id}_V - z\|_{\mathrm{op}}\\ &< \|\mathrm{id}_V - z\|_{\mathrm{op}}.\end{aligned}$$

根据 z 的最小性选择，我们看到 $x^{-1}z^{-1}xz$ 是数量映射 $\lambda \cdot \mathrm{id}_V$，因此

$$z^{-1}xz = \lambda x$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立。

取迹可得 $\lambda = 1$，因为根据 (a)，$\operatorname{trace} x \neq 0$。

因此， z 与 x可交换，出于同样的原因， z 与 y可交换。

由于 z 具有有限阶， V是 z的特征子空间的直和。这些特征子空间都是 V的真子空间，因为 z 不是数量映射。此外，由于元素 x 和 y 与 z 可交换，它们将 z 的每个特征子空间映射到自身。因此，要证明 x 与 y 可交换，只需证明对于 z的每个特征子空间 U， x 和 y 在 U上的限制 x_U 和 y_U 可交换。

因此，一旦验证x_U 和 y_U 满足引理的假设，便可通过对 $\dim V$ 运用归纳法得到该引理。

当然， x_U 和 y_U 生成一个有限群。

令 $\|\cdot\|_U$ 表示 $\|\cdot\|$ 在 U 上的限制，并令 $\|\cdot\|_{U,\mathrm{op}}$ 表示 $\mathrm{End}(U)$ 上相应的算子范数。

于是， $x_U, y_U \in$ 关于 $\|\cdot\|_U$ 属于 $\mathrm{Isom}(U)$。此外，算子范数的定义表明，对于每个将 U 映射到自身的 $a \in \mathrm{End}(V)$，都有 $\|\mathrm{id}_U - a_U\|_{U,\mathrm{op}} \leq \|\mathrm{id}_V - a\|_{\mathrm{op}}$。特别地， $\|\mathrm{id}_U - x_U\|_{U,\mathrm{op}} < 1/2$，且 $\|\mathrm{id}_U - y_U\|_{U,\mathrm{op}} < 1/2$。

因此，该引理对 x_U 和 y_U满足所有假设，所以根据归纳假设， x_U 和 y_U 可交换。

□

4. 球堆积论证

令 $V = \mathbb{C}^n$ 并设 $G \leq \mathrm{GL}(V)$ 为一个有限群。根据引理 2.1 ，我们在 V 上赋予一个范数，使得 $G \leq \mathrm{Isom}(V)$。令 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 为 $\mathrm{End}(V)$上相应的算子范数。

我们令

$$B(r) = \{\, a \in \mathrm{End}(V) \mid \|a\|_{\mathrm{op}} < r \,\}$$

为 $\mathrm{End}(V)$ 中以零映射为中心、半径为 r 的开球，其中使用算子范数。

令 $M = \{\, x \in G \mid \|\mathrm{id}_V - x\|_{\mathrm{op}} < 1/2\}$。由于

$$\|\mathrm{id}_V - y^{-1}xy\|_{\mathrm{op}} = \|y^{-1} \cdot (\mathrm{id}_V - x) \cdot y\|_{\mathrm{op}} = \|\mathrm{id}_V - x\|_{\mathrm{op}}$$

对所有 $x \in M$ 和 $y \in G$，我们看到 M 在 G的元素共轭作用下保持不变。此外，根据引理 3.1 ， M 中的任意两个元素都可交换。因此，由 M 生成的群 A是 G的一个阿贝尔正规子群。

设 x_1，……， x_m 是 G 中 A 的左陪集的代表元。

我们断言， m 个球 $x_i + B(1/4)$ 两两不交。假设存在 $y \in \mathrm{End}(V)$，它同时包含在 $x_i + B(1/4)$ 和 $x_j + B(1/4)$ 中。则

$$\|x_i - x_j\|_{\mathrm{op}} = \|(x_i - y) + (y - x_j)\|_{\mathrm{op}} \leq \|x_i - y\|_{\mathrm{op}} + \|y - x_j\|_{\mathrm{op}} < 1/4 + 1/4 = 1/2,$$

因此 $\|x_i \cdot x_j^{-1} - \mathrm{id}_V\|_{\mathrm{op}} < 1/2$，所以 $x_i \cdot x_j^{-1} \in M \subseteq A$，从而 $x_i = x_j$。

由于 $\|x_i\|_{\mathrm{op}} = 1$，我们得到对所有 i 都有 $x_i + B(1/4) \subseteq B(1 + 1/4)$。因此，半径为 $5/4$ 的球$B(5/4)$包含 m个两两不相交的半径为 $1/4$的球。

作为一个实向量空间，End(V) 同构于 $\mathbb{R}^{2n^2}$，因此带有一个勒贝格测度 λ。由于 $B(1/4)$ 是 End(V) 的一个开且非空子集，它具有正的勒贝格测度，记为 $\beta = \lambda(B(1/4))$。由勒贝格测度的平移不变性，我们有 $\lambda(x_i + B(1/4)) = \beta$。此外，由于 $B(5/4) = 5B(1/4)$，勒贝格测度的缩放性质推出$\lambda(B(5/4)) = 5^{2n^2}\lambda(B(1/4)) = 25^{n^2}\beta$。

因此，球 $B(5/4)$的勒贝格测度为 $25^{n^2}\beta$，其中包含 m 个两两不相交的、勒贝格测度为 β的球。由于 $\beta > 0$，可推出$|G/A| = m \leq 25^{n^2}$，如所要求。

注释 4.1。实际上可以得到稍好的界，因为 $\|x_i\| = 1$蕴含 $x_i + B(1/4) \subseteq B(1 + 1/4) \setminus B(1 - 1/4)$ 对所有 i 都成立，因此通过比较上述体积可得 $|G/A| = m \leq 25^{n^2} - 9^{n^2}$。

参考文献

[1] L. Bieberbach。《关于 C. Jordan 先生在线性代换有限群理论中的一个定理》。载于：《柏林科学院报告》1911年（1911），第 231–240 页。[2] E. Breuillard。《关于 Jordan 定理（有限子群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$）的 Jordan 的原始证明的阐释》。载于：《模型论》2.2（2023），第 429–447 页。doi：10.2140/mt.2023.2.429。[3] E. Breuillard 和 B. Green。《近似群 III：酉情形》。载于：《土耳其数学杂志》36.2（2012），第 199–215 页。[4] M. J. Collins。《关于复线性群的 Jordan 定理》。载于：《群论杂志》10.4（2007），第 411–423 页。doi：10.1515/JGT.2007.032。[5] C. W. Curtis 和 I. Reiner。《有限群与结合代数的表示论》。纯粹与应用数学，第 XI 卷。Interscience Publishers（John Wiley & Sons 旗下），纽约—伦敦，1962年，第 xiv+685。[6] J. D. Dixon。《线性群的结构》。Van Nostrand Reinhold 数学研究丛书，第 37 卷。伦敦等地：Van Nostrand Reinhold 公司。IV，183 页。£2.20（1971）。1971年。[7] L. Dornhoff。《群表示论》。A 部分：普通表示论。纯粹与应用数学，第 7 卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1971 年，vii+ 第 1–254 页。[8] G. Frobenius。《关于 L. Bieberbach 所发现的 C. Jordan 定理的证明》。载于：《柏林科学院报告》1911年（1911），第 241–248 页。[9] I. M. Isaacs。《有限群的特征标理论》。纯粹与应用数学，第 69 号。纽约：Academic Press，1976年。

[10] C. Jordan。《关于具有代数积分的线性微分方程的回忆录》。载于：《纯粹与应用数学杂志》84（1878），第 89–215 页。[11] A. Speiser。《有限阶群理论》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔和斯图加特，1956年，第 xi+271。[12] T. Tao。*Gromov* 定理的一个证明。 https://terrytao.wordpress.com/2010/02/18/a-proof-of-gromovs-theorem/。2010年2月。

维尔茨堡大学数学研究所电子邮箱地址：
peter.mueller@uni-wuerzburg.de