arXiv:2603.16004v1 [math.CO] 16 Mar 2026

带有反向应对和单调陷阱的排列避免游戏

HENNING ULFARSSON

Abstract. 我们研究公平博弈 PAP（“回避模式的排列”），在这个游戏中，玩家轮流选择要规避的模式。我们定义一个由长度为 k 的模式组成的集合 B_k，并证明它是 S_k的唯一最小单调强制子集：每个足够长且规避 B_k 的排列都是单调的，并且 S_k的每个单调强制子集都必须包含 B_k。我们证明单调强制阈值的二次上界，并确定 $k = 3$,4,5,6 的精确阈值。我们利用集合 B_k 的性质证明，当 $k = 4$ 对所有 $n \geq 10$成立时，反向应对策略能在 S_n 上赢得 PAP；对于 $k = 3$，则可以直接分析同一策略。我们猜想，对于所有 k 且 n充分大的情形，这都是一种必胜策略。

1. Introduction

固定 $n \geq 1$，并令 S_n 为长度为 n的排列集合，采用单行记法。对于 $\pi = \pi(1) \cdots \pi(n) \in S_n$，我们用 $\pi^r = \pi(n) \cdots \pi(1)$ 表示反转，用 $\pi^c = (n+1-\pi(1)) \cdots (n+1-\pi(n))$ 表示补。如果存在指标 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ 满足子序列 $\pi(i_1) \cdots \pi(i_k)$ 与 p序同构；否则 π 回避 p。关于排列模式和排列类的背景知识，参见 Vatter [12]。本文将研究以下正常玩法的无偏博弈。

定义 1.1。固定 $k \geq 1$。在回避模式的排列游戏（简称PAP）中，若模式长度为 k，则一个局面是子集 $X \subseteq S_n$。一步着法是选取一个模式 $p \in S_k$，该模式至少包含在 X中的一个排列中，并将 X 替换为 X 中回避 p的排列所构成的子集。

由于选定的长度为 k 的模式在游戏剩余过程中始终被禁止，且此类模式仅有 $k!$ 个，因此每局游戏最多经过 $k!$ 着法便会结束。

游戏同样可以采用更一般的模式概念，例如 Br¨and´en 和 Claesson [2], 提出的网格模式，但本文始终只讨论经典模式。相关的序列博弈和排列博弈早已出现在 Harary、Sagan 和 West [5] 提出的单调序列博弈中，以及 Albert 等人 [1]后来的研究中。最近，Pudwell [9] 研究了另一种基于

Date: 2026年3月18日。

Erd˝os–Szekeres 定理的双人排列博弈。在该博弈中，玩家每次添加一个元素来构造排列，并试图避免出现较长的单调子序列。Parton [7], 也研究了排列上的组合博弈，并提出了 Permu-Nim：一种在 $m \times n$ 棋盘上进行的公平排列避免博弈，玩家通过在尚未使用的行和列中放置点来避免出现固定模式。因此，Parton 的局面是棋盘上的部分排列矩阵；棋盘本身的几何结构起着核心作用，而非对固定对称群的子集进行操作 S_n。

我们主要关注初始局面 $X = S_n$。如果已经选定了一组 $F \subseteq S_k$模式，那么当前局面为

$$\mathrm{Av}_n(F) = \{\pi \in S_n : \pi \text{ avoids every pattern in } F\}.$$

因此，对于固定的 k ，该博弈可视为在 S_k的子集上进行的博弈。

我们将证明，对于 $k = 3$，一个简单的反向策略就足以让玩家 II（第二位玩家）获胜。对于 $k = 4$以及更一般的大-n反向应对问题，关键结构是一个唯一的极小单调强制模式集 $B_k \subseteq S_k$ ，我们将在下文给出定义。

从博弈论视角来看，主要结果如下。对于$k = 3$，反向应对对每个 $n \geq 3$都能获胜。对于 $k = 4$，完整情况是：逐步反向策略在 $n = 4$时有效，在$n = 5$、6、7、8、9时失效，之后对所有 $n \geq 10$又重新有效。小n时的失效分为两种不同情形：在 $n = 6$ 时，初始局面本身就是一个 N-局面；而在 $n = 5$、7、8、9时，初始局面仍是一个 P-局面，但反向着法未必是正确的制胜应对。关于 $n \geq 10$ 的$k = 4$ 定理，是通过结合结构 B_k 分析与有限验证证明的。

因此，本文围绕两个相互交织的主题展开。第3–5节和第7节探讨 B_k的结构理论：递归刻画、极小性、单调强制阈值的上下界，以及小 k对应的阈值数据。第2节和第6节则着眼于博弈论方面：第2节分析较小的初始局面，第6节则利用 B_k 的结构，证明适用于 $k = 4$的较大n 反向应对定理。 B_k 在博弈中的作用，恰恰在于它既提供了单调残局，也提供了近单调见证族，从而使大多数反向应对具有统一性。

对于一般的 k，本文仅将这一图景推广为一个猜想。对 $k = 4$ 之外情形的讨论，旨在指出下一个结构性障碍，而非声称已经得到一个可完全推广的定理。

论文中的若干结果采用了计算机辅助方法。所有计算都是穷尽式的；除单独的 N_6 阈值计算外，均可通过公共代码仓库 [11], 中收集的脚本复现，具体位于 code-permuta/ 目录下；参见第 9 节。

2. Basic PAP analysis

定义 2.1。 固定 $k \geq 1$。对于 PAP 局面 $X \subseteq S_n$，其后继局面$\mathcal{F}(X)$是指一步着法即可从 X 到达的所有局面的集合。 X 的***Sprague– Grundy*** 值 [10, 4] 递归定义如下:

$$\mathrm{sg}(X) = \mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(Y) : Y \in \mathcal{F}(X)\},$$

其中，mex(S) 表示最小排除数，即不属于 S 的最小非负整数。终局（即 $\mathcal{F}(X) = \varnothing$ 的局面）的 sg(X) $= 0$。在常规玩法下，若且唯若从 X 开始时 sg(X) $\neq 0$，则玩家 I（下一位行动者）获胜，该局面称为***N*-局面**。否则，当 sg(X) $= 0$ 时，该局面称为***P*-局面** （上一位行动者获胜）。

对于仅允许模式长度为 k 的初始局面，我们用 sg(S_n, k) 表示 S_n 的 Sprague–Grundy 值。

命题 2.2。对于每个 $n \geq 1$, $\mathrm{sg}(S_n, 1) = 1$。

证明。唯一的合法着法是选择模式 1，这会移除所有排列。□

命题 2.3. 对于 $n \geq 1$, $\mathrm{sg}(S_n, 2) = 0$。

证明。若 $n = 1$，则没有合法着法，因此 sg(S_1, 2) $= 0$。现在假设$n \geq 2$。长度为 2 的模式只有 12 和 21。选择 12 后，留下 Av$_n$($\{12\}$) $= \{\mathrm{id}_n^r\}$，此时唯一的合法着法是 21，之后局面为空。首先选择 21 的情形是对称的。因此， S_n 的每个后继局面的 Sprague–Grundy 值都是 1，并且 sg(S_n, 2) $=$ 最小排除数$\{1\} = 0$。□

根据上述命题，对于 $k = 2$ 和 $n \geq 2$，玩家 II 通过选择玩家 I 着法的反转来获胜。同样的反向应对思路已经可以解决 $k = 3$ 的情形。

引理 2.4. 对于 $n \geq 4$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Av}_n(123, 321, 132, 231) = \varnothing,\\
&\mathrm{Av}_n(123, 321, 213, 312) = \varnothing,\\
&\mathrm{Av}_n(132, 231, 213, 312) = \{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_n^r\}.
\end{aligned}$$

证明。 每个长度至少为 4 的排列都包含一个 4 点子模式，该子模式与 S_4 中的某个元素序同构，因此只需检查 S_4 中的 24 个排列。直接检查可知，S_4 中的每个元素至少包含 123、321、132、231 中的一个；同理，至少包含 123、321、213、312 中的一个。同样，除 1234 和 4321 外， S_4 中的每个元素都至少包含 132、231、213、312 中的一个。□

定理 2.5。对于每个 $n \geq 3$, $\mathrm{sg}(S_n, 3) = 0$。

证明。 当 $n = 3$ 时结论显然，因此假设 $n \geq 4$。玩家 II 对每一着都选择反转模式作为回应。

如果玩家 I 选择 123，玩家 II 就选择 321。如果 $n \geq 5$，那么玩家 II 已经获胜，因为根据 Erd˝os–Szekeres 定理 [3]，长度至少为 5 的每个排列都包含 123 或 321。如果 $n = 4$，则可以走一着；根据引理 2.4，第三着只能是 132、213、231、312，之后玩家 II 又可以选择反转模式并结束游戏。

如果玩家 I 选择 132，玩家 II 就选择 231。如果玩家 I 接着选择 123 或 321，那么根据引理 2.4，玩家 II 选择其反转项并清空集合。如果玩家 I 选择 213 或 312，那么玩家 II 再次选择其反转项，局面变为 $\{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_n^r\}$。在这个局面中，唯一的合法着法是 123 和 321，因此它仍是一个 P-局面。根据对称性，231、213、312 和 321 的情形也同理。□

备注 2.6。第 2、6 和 7 节中的计算机辅助结果，可通过公共代码仓库 [11]，（即 code-permuta/）中的专用脚本复现，但单独的 N_6 阈值计算除外；参见第 9 节。

在接下来的几页中，斯普拉格–格伦迪语言主要用于两个目的：记录小规模n数据，以及区分“S_n是一个 P-局面”这一说法与更强的说法——逐步按字面执行反转规则是一种必胜策略。后文针对 $n \geq 10$ 的定理 $k = 4$ 由推论 2.13 中的反向应手判据证明，该判据确立了更强的策略性结论。

一个自然的问题是，对于一般的 k，相同的反向策略是否仍然能获胜。表 1 记录了若干较小情形的 Sprague–Grundy 值。$k = 1$、2、3 对应的表项可由上述结果推出；$k = 4$对应的表项则通过穷举搜索计算得出；参见第 9 节。

n	$\mathrm{sg}(S_n, 1)$	$\mathrm{sg}(S_n, 2)$	$\mathrm{sg}(S_n, 3)$	$\mathrm{sg}(S_n, 4)$
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0
6	1	0	0	2
7	1	0	0	0
8	1	0	0	0
9	1	0	0	0
10	1	0	0	0

TABLE 1. PAP 在 S_n 不超过 n =10 时的斯普拉格–格伦迪值，以及 $k = 4$。

当 $k = 4$ 时，情况就已经变得更加复杂。这个例外值

$$\mathrm{sg}(S_6, 4) = 2$$

表明，对于固定的 k，认为 S_n 应当始终是 P-局面的朴素猜测并不成立。进一步计算可以解释这个值：在 24 个后继局面 $\mathrm{Av}_6(p)$ 中，有十二个的 Sprague–Grundy 值为 0，两个为 1，其余十个为 3；因此

$$\mathrm{sg}(S_6, 4) = \mathrm{mex}\{0, 1, 3\} = 2.$$

此外，即使初始局面是 P-局面，逐步反向策略也未必是必胜策略。

命题 2.7. 对于 $k = 4$，从初始局面 S_n 开始的测试表明，逐步反向策略在 $n = 4$ 中有效，但在 n =5、6、7、8、9 中失效。

证明。这是通过对 $4 \le n \le 9$ 的反向策略博弈树进行穷尽式计算机搜索得出的；参见第 9 节。□

例 2.8 展示了反向策略可能如何失效。

例 2.8. 在 $n = 9$ 中，反向应对甚至可能在下一着就失效，尽管它仍然合法。从 S_9 开始，假设玩家 I 选择 1234，玩家 II 以反转后的 4321 应对。接着，玩家 I 可以选择 1324。反向应对 4231 仍然合法，因为计数表明，在 4231 被禁止之前有 334 个规避者，此后则有 2 个，但它会进入一个 N-局面：

$$\mathrm{sg}(\{1234, 4321, 1324, 4231\}) = 2.$$

事实上，在 1324 之后的获胜应对是 3412、3421 和 4312。

第 6 节说明，例 2.8 中的现象会在某些见证族稳定下来之后（从 $n \ge 9$ 开始，针对非单调应对），以及单调残局可用之后（从 $n \ge 10$开始）消失。

精确计算还揭示了在 $k = 4$时最优博弈长度中一种固定的模式。图1展示了从 S_n 开始、对 $5 \le n \le 10$进行最优博弈时完整对局长度的分布，柱高采用对数刻度。这些分布的支撑尤其简单：在 $n = 5$处，长度为偶数 10、12、……、24；在 $n = 6$ 处，长度为奇数 7、9、……、23；在 $n = 7$，8、9 处，长度为偶数 4、6、……、24；而在 $n = 10$处，长度为偶数 2、4、……、24。因此，$n = 6$ 不仅在 Sprague–Grundy 值上与众不同，在最优对局长度的奇偶模式上也很特殊。

这些计算表明，反向策略并非对 n一致成立，但在大-n 博弈中仍可能适用。我们将在下文证明，对于 $k = 4$，反向策略确实对每个 $n \ge 10$都能奏效。

我们认为，对于一般的 k，也存在同样的现象：小-n 情形会对反向策略构成阻碍，但当 n 足够大时，它便是玩家 II 的必胜策略。因此我们提出以下猜想。

猜想 2.9. 对于每个 $k \ge 3$，都存在 $n_0(k)$，使得反向策略对于所有 $n \ge n_0(k)$，都是玩家 *II* 在 S_n 上的必胜策略。特别地，对于所有这样的 n，$\mathrm{sg}(S_n, k) = 0$。

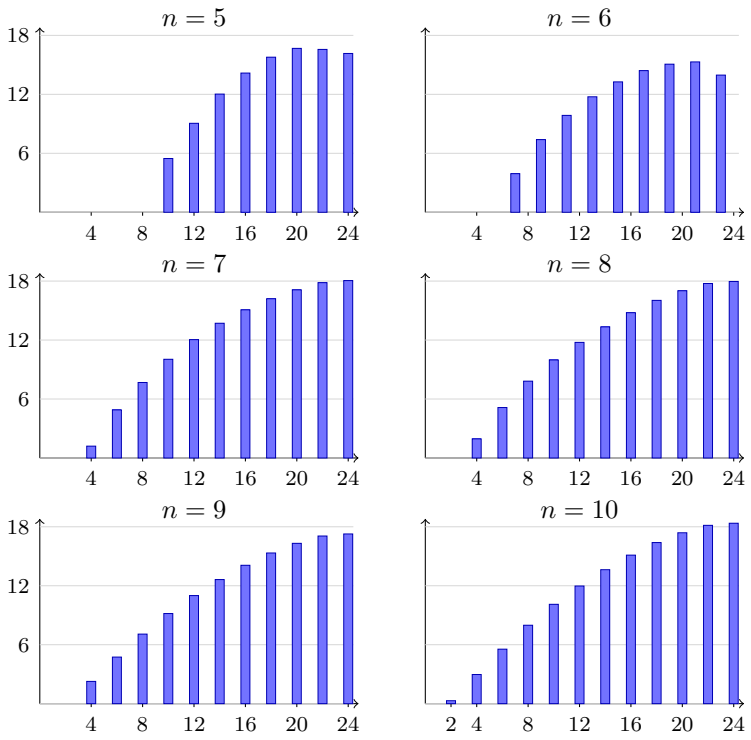


FIGURE 1. PAP 在 S_n 上采用最优博弈时，模式长度为 4、$5 \le n \le$10 时完整对局长度的分布。柱形高度为 $\log_{10}$，表示给定长度的最优对局线路数量。

为了为后续的 $k = 4$ 定理奠定理论基础，我们首先单独考察单调残局，然后提出实际将要使用的反向应手判据。

定义 2.10. 若一个集合 $F \subseteq S_k$ 满足：$p \in F$ 当且仅当 $p^r \in F$，则称其为反转封闭 的。对于固定长度 n，如果某个属于 $\mathrm{Av}_n(F)$ 的排列包含 p，则称模式 p 在长度为 n时从 F 合法 。若上下文已明确长度 n，则简称 p 从 F合法 。

引理2.11. 若 $F \subseteq S_k$ 是反转封闭的，则 $\mathrm{Av}_n(F)$ 也是反转封闭的：$\pi \in \mathrm{Av}_n(F)$ 当且仅当 $\pi^r \in \mathrm{Av}_n(F)$。特别地，模式 p 从 F 合法，当且仅当 p^r 从 F合法。

证明。 </style}排列 π避免 F 当且仅当 π^r避免 $F^r = F$。 □

命题 2.12. 设 $k \ge 2$，设 $F \subseteq S_k$ 是反转封闭的，并假设 F 不包含任何单调模式。那么，从 F出发，两种单调模式都是合法的。若 $n \ge (k-1)^2 + 1$，则选定一种单调模式后，另一种仍然合法；选定两种单调模式后，便不再有合法着法。

证明。 由于 F 不包含任何单调模式，递增排列 id_n 和递减排列 id_n^r 都属于 $\mathrm{Av}_n(F)$。因此，$12\cdots k$和 $k\cdots 21$ 从 F出发都是合法着法。

选定 $12\cdots k$ 后，排列 id_n^r 仍属于 $\mathrm{Av}_n(F\cup\{12\cdots k\})$，且包含 $k\cdots 21$，因此递减单调模式仍然合法。另一种情况是对称的。

如果两个单调模式都已选定，且 $n\geq(k-1)^2+1$，那么根据 Erd˝os–Szekeres 定理，每个长度为 n 的排列都至少包含其中一个，因此没有排列能够存留。□

推论 2.13. 固定 $k\geq 2$ 和 $n\geq(k-1)^2+1$。假设每当$F\subseteq S_k$是反转封闭的、不包含任何单调模式，且 $p\in S_k\setminus F$是从 F 出发合法的非单调模式时，反转模式 p^r 就能从$F\cup\{p\}$出发合法地进行。那么，逐步反向策略就是玩家 *II* 在 S_n 上的必胜策略。特别地， S_n 是一个 *P*-局面。

证明。 从空禁用集合开始，玩家 II 总是通过选择反转模式来回应玩家 I。在每个阶段，令 F 表示玩家 II 上一步着法之后当前的禁用集合；那么 F 是反转封闭的。

如果玩家 I 选择非单调模式，而 F 不包含任何单调模式，那么根据假设，存在一个合法的回应 p^r。

如果玩家 I 选择单调模式，那么命题 2.12 表明另一个单调模式是合法的，并且玩家 II 回应之后便不再有合法着法。

因此，玩家 II 可以用反转模式回应玩家 I 的每一步，且游戏在玩家 II 的回合结束。因此，逐步反向策略是必胜策略，特别是 S_n 是一个 P-局面。□

3. Definitions and the sets B_k

接下来的三节为博弈结果——定理 6.13——提供结构性依据，该定理将在第 6 节中证明。本节介绍集合 B_k及其递归描述；第 4 节通过见证族证明它们的极小性；第 5 节则推导关于阈值 N_k的单调模式强制界。

定义 3.1. 对于 $k\geq 3$，定义

$$\begin{aligned} p_k &= 12\cdots(k-2)\,k\,(k-1),\\ q_k &= 1\,k\,(k-1)\cdots 2,\\ r_k &= 21\,3\,4\cdots k,\\ s_k &= 23\cdots k\,1. \end{aligned}$$

我们定义

$$B_k=\{p_k,q_k,r_k,s_k,p_k^c,q_k^c,r_k^c,s_k^c\}.$$

Thus

$B_3 = \{132, 213, 231, 312\}$,
$B_4 = \{1243, 1432, 2134, 2341, 3214, 3421, 4123, 4312\}$,
$B_5 = \{12354, 15432, 21345, 23451, 43215, 45321, 51234, 54312\}$,
$B_6 = \{123465, 165432, 213456, 234561, 543216, 564321, 612345, 654312\}$.

注意，对于 $k = 3$，我们有 $p_3 = 132 = q_3$、$r_3 = 213 = s_3^c$、$s_3 = 231 = r_3^c$ 和 $p_3^c = 312 = q_3^c$，因此 B_3 只有四个不同的元素。对于 $k \geq 4$，很容易验证 B_k 中的八个模式各不相同，如图 2 中的 $k = 6$ 所示。另请注意，

$$r_k = (p_k^r)^c = (p_k^c)^r \qquad \text{and} \qquad s_k = q_k^r.$$

因此，p_k、p_k^c、r_k、r_k^c 构成一个反转/补全轨道，而 q_k、q_k^c、s_k、s_k^c 构成另一个。

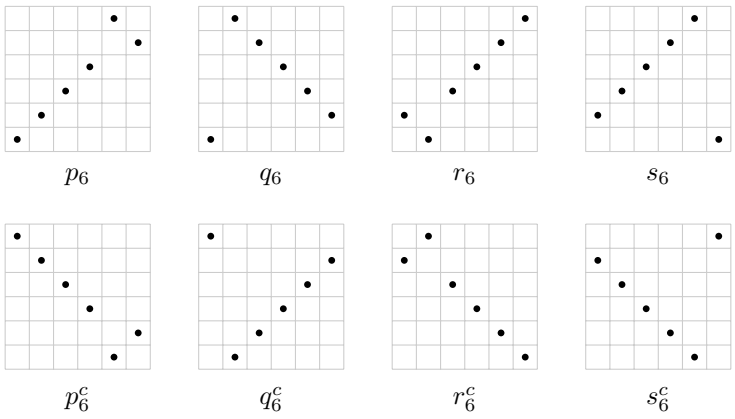


FIGURE 2. B_6中的八个模式。上排：p_6、q_6、r_6、s_6。下排：它们的补。

借助以下定义，我们可以递归地刻画集合 B_k。

定义 3.2。对于 $\pi \in S_n$ 和 $1 \leq \ell \leq n$，影子 $\mathsf{Sh}_\ell(\pi)$ 是包含在 π 中的 ℓ-模式所组成的集合。当 $\ell = n - 1$ 时，这恰好是从 π 中删除一个元素并将结果标准化后得到的集合。

命题 3.3。对于 $k \geq 4$，排列 $\pi \in S_k$ 属于 B_k 当且仅当 删点集合$_{k-1}(\pi)$ 恰好由一个单调模式和 B_{k-1} 中的一个元素组成。

证明。**正向**。影子操作与反转和补操作可交换，因此只需检查两个生成元 p_k，q_k。

对于 $p_k = 12\cdots(k{-}2)\ k(k{-}1)$：删除前 $k-2$ 个元素中的任意一个，都会得到形状相同的排列，即 p_{k-1}；删除元素 k 或元素 $k-1$ 会消去唯一的下降，得到 id_{k-1}。因此 $\mathsf{Sh}_{k-1}(p_k) = \{p_{k-1}, \mathsf{id}_{k-1}\}$。

对于 $q_k = 1\,k(k{-}1)\cdots 2$: 删除第一个元素 1 会得到 id_{k-1}^r; 删除递减尾部 $k(k{-}1)\cdots 2$ 中的任意元素，都会得到 q_{k-1}。因此 $\mathrm{Sh}_{k-1}(q_k) = \{q_{k-1}, \mathrm{id}_{k-1}^r\}$。

反向。设 $\mathrm{Sh}_{k-1}(\pi) = \{m, u\}$，其中 m 是单调的，且 $u \in B_{k-1}$。必要时取补，我们可以假设 $m = \mathrm{id}_{k-1}$。令 x为一个删去后会留下 id_{k-1}的项，并令 M 为其余项构成的递增（$k-1$）模式。相对于 M，点x 位于某个单元格（i, j）中，这意味着 M 中恰有 i 个点位于 x 左侧，且恰有 j 个位于 x下方。

由于从 u 中删去 x 后会留下 id_{k-2}，在第$k-1$ 层应用正向结论可知， u 必定是以下之一:

$$r_{k-1},\ q_{k-1}^c,\ s_{k-1},\ p_{k-1}.$$

等价地，在递增（$k-2$）模式中插入一个点会得到

$$r_{k-1} \text{ in cells } (0,1),(1,0),$$

$$q_{k-1}^c \text{ in cell } (0,k-2),$$

$$s_{k-1} \text{ in cell } (k-2,0),$$

$$p_{k-1} \text{ in cells } (k-3,k-2),(k-2,k-3).$$

现在删去 M中的一个点，而不是删去 x。相对于剩下的递增（$k-2$）模式，点 x 会移至以下位置之一:

$$(i,j),\ (i-1,j),\ (i,j-1),\ (i-1,j-1),$$

这取决于被删去的点位于 x的右侧还是左侧，以及其上方还是下方。由于每次这样的删除都会得到相同的模式 u，每个实际出现的单元格都必定是上文为 u列出的单元格之一。因此

$$u = r_{k-1} \text{ and } (i,j) \in \{(0,1),(1,0)\},$$

$$u = q_{k-1}^c \text{ and } (i,j) = (0,k-1),$$

$$u = s_{k-1} \text{ and } (i,j) = (k-1,0),$$

$$u = p_{k-1} \text{ and } (i,j) \in \{(k-2,k-1),(k-1,k-2)\}.$$

这些恰好分别是产生 r_k、 q_k^c、 s_k 和 p_k 的插入，因此 $\pi \in B_k$。□

定义 3.4。令 $X \subseteq S_k$。如果存在N，使得对于所有 $n \geq N$，我们称 X 单调强制，

$$\mathrm{Av}_n(X) = \{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_n^r\}.$$

单调强制集的一个平凡例子是 $S_k \setminus \{\mathrm{id}_k,\ \mathrm{id}_k^r\}$，因为对于$n \geq k$，唯一能避免所有长度为 k 的非单调模式的长度为 n 排列，就是两个单调排列。

4. Witness families and minimality

B_k 的每个元素都对应一个无限族，其中只包含该模式和一个单调模式。

定义 4.1。对于 $n \geq 2$，定义

$$\pi_n = 12\cdots(n-2)\,n\,(n-1), \qquad \rho_n = 1\,n\,(n-1)\cdots 2,$$
$$\sigma_n = 21\,3\,4\cdots n, \qquad \tau_n = 23\cdots n\,1.$$

显然 $\pi_k = p_k$、$\rho_k = q_k$、$\sigma_k = r_k$ 和 $\tau_k = s_k$，但为清晰起见，我们对见证排列的无限族与模式使用不同的记号。以下命题是命题 3.3 针对这些族的类似命题。

命题 4.2。固定 $k \geq 3$ 和 $n \geq k$。则

$$\mathrm{Sh}_k(\pi_n) = \{12\cdots k, p_k\}, \qquad \mathrm{Sh}_k(\rho_n) = \{k\cdots 21, q_k\},$$

$$\mathrm{Sh}_k(\sigma_n) = \{12\cdots k, r_k\}, \qquad \mathrm{Sh}_k(\tau_n) = \{12\cdots k, s_k\},$$

同理

$$\mathrm{Sh}_k(\pi_n^c) = \{k\cdots 21, p_k^c\}, \qquad \mathrm{Sh}_k(\rho_n^c) = \{12\cdots k, q_k^c\},$$

$$\mathrm{Sh}_k(\sigma_n^c) = \{k\cdots 21, r_k^c\}, \qquad \mathrm{Sh}_k(\tau_n^c) = \{k\cdots 21, s_k^c\}.$$

证明。对于 π_n，一个 k-模式的出现要么省略最后两个项中的至少一个，此时它位于一个递增子序列中，因此其模式为 $12\cdots k$；要么同时使用最后两个项，此时相对次序为 p_k。对于 ρ_n 的论证相同：要么省略特殊项或各项，从而得到一个单调子序列；要么将它们纳入，从而得到 q_k。其他族的结论可通过应用相应的对称性得出。□

定理 4.3. *S_k 的每个单调强制子集都包含 B_k。*

证明。设 $X \subseteq S_k$ 是单调强制的。

首先，X 不能包含任何一种单调模式：若 $12\cdots k \in X$，则递增排列 id_n $(n \geq k)$ 永远不会属于 $\mathsf{Av}_n(X)$；同理，若 $k\cdots 21 \in X$，则递减排列 id_n^r $(n \geq k)$ 永远不会属于 $\mathsf{Av}_n(X)$。

现在假设某个 $q \in B_k$ 不属于 X。根据命题 4.2，存在一个无限族 W_n，使得对于一个单独的单调模式 m，$\mathsf{Sh}_k(W_n) = \{q, m\}$。由于这两个单调模式都不属于 X 和 $q \notin X$，每个 W_n 都避开 X。此外，每个 W_n 都是非单调的。这与 X 是单调强制的假设矛盾。□

5. Why B_k eventually forces monotonicity

我们先给出一个引理:

引理 5.1. 令 $k \geq 4$，并令 M 为递增的$(k-1)$-模式。如果相对于 M 在其中一个单元格中插入一个点

$$(0,1),\ (1,0),\ (0,k-1),\ (k-1,0),\ (k-2,k-1),\ (k-1,k-2),$$

那么得到的 k-模式属于 B_k。

图3展示了 $k=5$ 情形下的这些单元格。

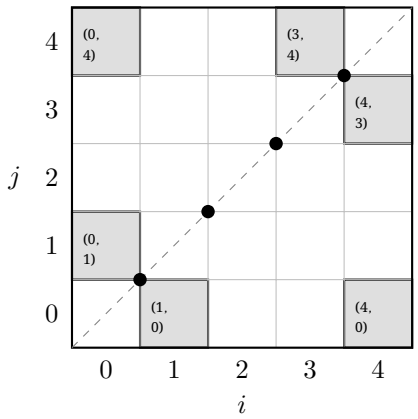


Figure 3. 由递增模式 $M = \mathsf{id}_4$ 在 $k=5$ 时确定的单元格分解。单元格 $(i,\ j)$ 表示 M 中有 i 个点位于左侧，且有 j 个点位于下方。阴影单元格是引理 5.1 中的六个单元格。

证明。将一个点插入单元格 (0，1) 和 (1，0) 中的任意一个，都会产生模式 r_k。插入单元格 (0，$k-1$) 会产生 q_k^c。插入单元格 ($k-1$，0) 会产生 s_k，而插入 ($k-2$，$k-1$) 或 ($k-1$，$k-2$) 中的任意一个，会产生 p_k。这四个不同的模式都属于 B_k。□

下一个定理给出了 B_k 迫使单调性的时间范围的一个一般且明确的界。分别用 LIS(π) 和 LDS(π) 表示 π 的最长递增子序列和最长递减子序列的长度。

定理 5.2。设 $k \geq 4$。如果排列 π 避免 B_k，并且具有长度为 $3k-7$ 的递增子序列，那么 π 是递增的。根据对称性，如果 π 避免 B_k，并且具有长度为 $3k-7$ 的递减子序列，那么 π 是递减的。

因此，

$$\mathrm{Av}_n(B_k) = \{\mathrm{id}_n, \mathrm{id}_n^r\} \qquad \textit{for all } n \geq (3k-8)^2 + 1.$$

证明。设 $M = (m_1 < \cdots < m_r)$ 是 π 的一个最长递增子序列，其中 $r \geq 3k-7$。对于不属于 M 的点 x，定义其单元格 $(i,\ j)$，使得 M 中恰有 i 个点位于 x 左侧，且 M 中恰有 j 个点位于 x 下方。

现在假设 x 位于对角线上方，因此 $i < j$。

如果 $j - i \geq k-1$，那么从 i 与 j 之间的间隔中选取 $k-1$ 个 M 的点，会得到一个更短的递增序列 M'。相对于 M'，点 x 位于单元格 $(0,\ k-1)$ 中，因此根据引理 5.1 得到一个来自 B_k 的模式。

如果 $r - j \geq k-2$，那么从间隔中选取 M 的一个点，并在 j 上方选取 $k-2$ 个点，会产生单元格 $(0,\ 1)$，并且根据引理 5.1 再次得到一个来自 B_k 的模式。

如果 $i \geq k-2$，那么在 i 下方选取 $k-2$ 个 M 的点，并从间隔中选取一个点，会产生单元格 $(k-2,\ k-1)$，并且根据引理 5.1 再次得到一个来自 B_k 的模式。

图 4 展示了在 $k = 5$ 和 $r = 8$的情况下这三种选择。

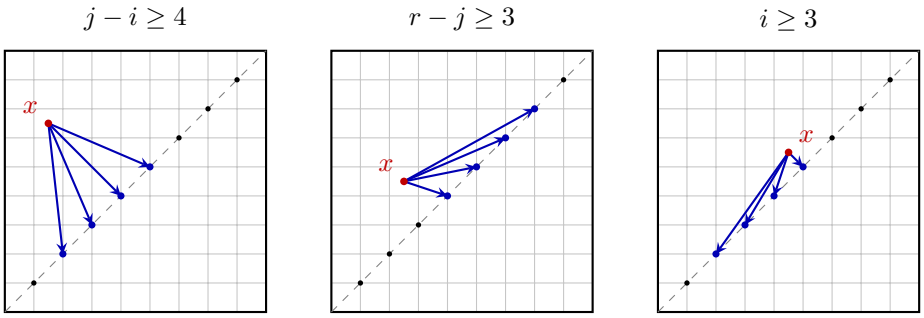


FIGURE 4. 定理 5.2 证明中的三种情况。选取的 4 点子序列将 x 置于引理 5.1 中的某个危险单元格内。

因此，如果 x不会由 B_k产生一个模式，那么这三个不等式都不成立，我们必须有

$$j - i \leq k-2, \qquad r - j \leq k-3, \qquad i \leq k-3.$$

因此

$$j \geq r - (k-3) \geq 2k-4,$$

但同时

$$j \leq i + (k-2) \leq 2k-5,$$

这就矛盾了。因此，没有点能位于对角线上方。反过来，同样的论证表明，没有点能位于对角线下方。

因此，π 中的每个点都位于由 M确定的对角线单元格上。但对角线单元格上的一个点与 M 一起意味着存在一个长度为 π 的单调

子序列，这与 M的极大性矛盾。因此，$\pi = M$ 是递增的。递减情形同理。

现在设 π 是一个避免 B_k 的非单调排列。第一部分表明

$$\mathrm{LIS}(\pi) \le 3k-8, \qquad \mathrm{LDS}(\pi) \le 3k-8.$$

根据 Erd˝os–Szekeres 定理，每个长度为 $(3k-8)^2+1$ 或更长的排列，都包含长度为 $3k-7$ 的递增或递减子序列。因此，该长度的非单调排列都无法避免 B_k。□

设 N_k 为满足以下条件的最小整数：对于所有 $n \ge N_k$，$\mathsf{Av}_n(B_k) = \{\mathsf{id}_n, \mathsf{id}_n^r\}$。定理 5.2 表明 $N_k \le (3k-8)^2+1$。我们将关于 N_k 的更精确上下界推迟到第 7 节讨论。现在，我们利用集合 B_k 的结构，证明对于 $k=4$ 以及充分大的 n，反向应对策略有效。

6. 证明 k = 4 时的反向应对策略

现在，我们利用集合 B_k 的结构分析，证明逐着反向策略对于 $k=4$ 有效。根据推论 2.13，只需验证：每当一个非单调模式在某个反向封闭的无单调模式状态下合法时，该着之后它的反转仍然合法。

证明分为三个步骤。首先，我们在 B_4 中处理四个反转对，并在引理 6.1 中使用定义 4.1 的见证族。接着，除 $\{2413, 3142\}$ 外，我们在引理 6.10 中使用定义 6.2 的扩展见证族处理其余六个非单调反向对。最后，我们在命题 6.12 中使用定义 6.11 的支撑集解决困难对 $\{2413, 3142\}$。

图 5 概述了这些情况的划分，以及各个分支所用的工具。

我们从 B_4 中的模式开始。

引理 6.1. 对于每个 $q \in B_k$，命题 *4.2* 中针对 q 的见证族都避开 q^r。特别地，禁止 q 后，q^r 仍然合法（由针对 q^r、且避开 q 的单例模式族见证）。

证明. 令 W_n 为命题 4.2 中针对 q 的见证置换。于是 $\mathsf{Sh}_k(W_n) = \{q, m\}$，其中 m 是一个单调模式；而针对 q^r 的见证 W_n' 满足 $\mathsf{Sh}_k(W_n') = \{q^r, m'\}$，其中 m' 是另一个单调模式。由于 q^r 是非单调的，$q^r \neq m$；又由于不存在长度为 ≥ 2 且等于其反转的排列，$q^r \neq q$，因此 $q^r \notin \{q, m\}$ 和 W_n 避开 q^r。对称地，q 是非单调的，因此 $q \neq m'$；而 $q \neq q^r$，所以 $q \notin \{q^r, m'\}$ 和 W_n' 避开 q。□

现在我们来处理非-B_4 模式。

定义 6.2。对于非单调 $p \in S_4 \setminus B_4$和指定的伴随项$q \in B_4$，$(p,\ q)$ 的扩展见证族 是指任意一组排列

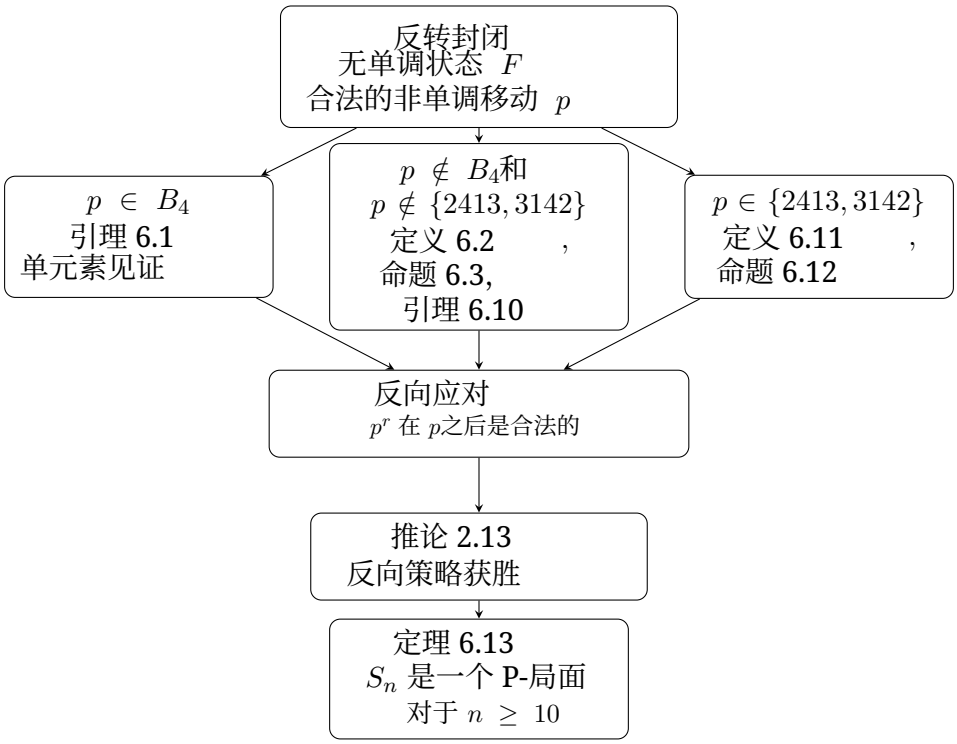


FIGURE 5. $k = 4$ 反向应答证明的逻辑流程。

$E_n(p, q)$，每个 $n \geq 7$ 对应一个，且满足

$$\mathrm{Sh}_4(E_n(p, q)) \subseteq \{p, q, 1234, 4321\}.$$

下面的构造解释了为何要设定截断值 $n \geq 7$ ：它确保此时长单调块的长度至少为 4，因此每个 4-模式要么完全位于该块中，要么由例外项与单调块共同构成。

命题 6.3. 对于除 $\{2413, 3142\}$ 以外的 *6* 个非B_4、非单调反向对$\{p, p^r\}$，存在两个来自不同反向对的伴随模式 q_1、$q_2 \in B_4$，以及排列族 $E_n(p、\ q_i)$，它们对所有 $n \geq 7$ 均成立，使得

$$\mathrm{Sh}_4\big(E_n(p, q_i)\big) \setminus \{1234, 4321\} = \{p, q_i\}.$$

此外，每个这样的族都避开 p^r。

例 6.4。对于

$$E_n(1324, 1243) = 1, 2, \ldots, n-3,\ n-1,\ n-2,\ n,$$

唯一的非单调 4-模式是 1243 和 1324。反转后得到

$$E_n(1324, 1243)^r = n,\ n-2,\ n-1,\ n-3, \ldots, 1,$$

其唯一的非单调 4-模式是 3421 和 4231。这个示例族展示了命题 6.3 中的一个见证族，以及引理 6.10 后文使用的反转步骤。图 6 展示了情况 $n = 9$ 及其反转。

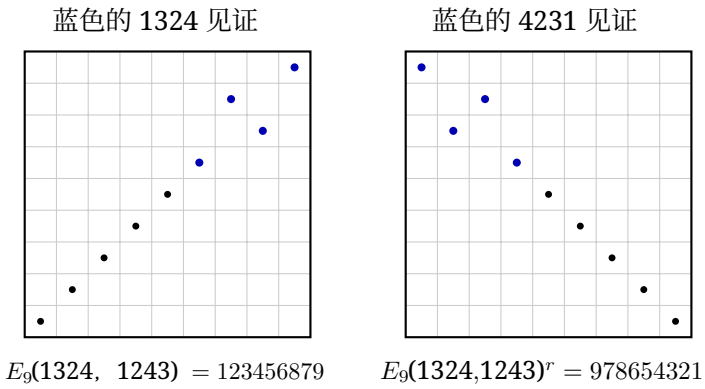


FIGURE 6. 族 $E_n(1324, 1243)$ 的一个实例及其反转，此处展示的是 $n = 9$。

证明。 表 2 中展示的每个族都由一个长单调块和至多三个例外项组成。因此，每个非单调 4-模式都必须包含至少一个例外项；固定所选的例外项后，尾部只会贡献单调顺序。于是，只需根据所用例外项的种类以及从尾部选取的项数，进行简短检查即可完成验证。

前面的例子验证了第一行。作为第二个代表性情形，考虑这一行：

$$E_n(2143, 1432) = 2,\ 1,\ n, n-1, \ldots, 3,$$

从递减尾部选取四项会得到单调模式 4321；从前两项中选取一项并与尾部的三项组合，总会得到 1432；将前两项都选入并与尾部的两项组合，则会得到 2143。因此，唯一的非单调模式仍是目标模式及其所述伴随模式。

其余两个展示的对称类也可用相同方法检验：固定例外项后，长尾部只会贡献单调顺序。其余 20 个有序对 $(p,\ q)$ 可由这四个代表通过反转、补和逆对称变换得到。□

例 6.5. 设

$$F = \{1432, 2341\}.$$

那么， F 是反转封闭的，不包含单调模式，并且遗漏了来自 B_4的反转对 $1243/3421$ 。上面的族 $E_n(1324, 1243)$表明

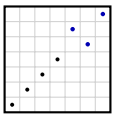
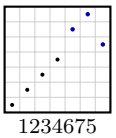
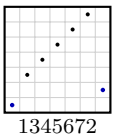
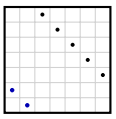
p	p^r	q	族 $E_n(p,\ q)$	$E_7(p,\ q)$
1324	4231	1243	1 $\underbrace{,2,\cdots,n-3}_{\cdots}$, $n-1$, $n-2$, n	 1234657
1342	2431	1243	1 $\underline{,2,\ldots,n-3}$, $n-1$, n, $n-2$	 1234675
1342	2431	2341	1, $\underline{3,4,\ldots,n}$, 2	 1345672
2143	3412	1432	2 , 1, $\underline{n,n-1,\ldots,3}$	 2176543

TABLE 2. 非-B_4 模式（排除 2413/3142）的扩展见证族，按正方形的对称变换列出。图中显示的四行代表全部 24 个有序对（p，q）：其余每一对都可通过对有序对（p，q）及见证族应用反转、补或逆中的一种变换得到。带下划线的线段是各族中的长单调块。在每幅 $E_7(p,\ q)$ 图中，蓝点是例外项，黑点构成长单调块。

1324 是从 $\mathrm{Av}_n(F)$ 出发的合法模式，因此，如果玩家 I 选择 1324，我们可以利用族 $E_n(4231,\ 3421) = E_n(1324,\ 1243)^r$（它属于 $\mathrm{Av}_n(F \cup \{1324\})$），看出反向应对 4231 是合法的。这是引理 6.10 中稍后所用的非B_4 论证的第一个分支。

为了处理剩余的状态（其中两个伴随反转对均已被禁止），我们现在引入单项膨胀族。

定义 6.6. 固定 $\beta \in S_6$、一个条目索引 $i \in \{1,\ldots,6\}$ 和一个符号$\varepsilon \in \{+,-\}$。对于 $t \geq 1$，令 $I_t(\beta,i,\varepsilon)$ 表示通过膨胀 β 的第 i 个条目得到的排列：若 $\varepsilon = +$，将其膨胀为长度为 t 的递增块；若 $\varepsilon = -$，则膨胀为长度为 t 的递减块。

定义稳定的非单调影子

$$\Sigma(\beta,i,\varepsilon) = \bigcup_{t=1}^{4} \big(\mathrm{Sh}_4(I_t(\beta,i,\varepsilon)) \setminus \{1234, 4321\}\big).$$

例 6.7。取 $\beta = 123465$、 $i = 5$ 和 $\varepsilon = -$。那么

$$I_1(\beta, 5, -) = 123465$$

具有非单调影子

$$\mathrm{Sh}_4(I_1(\beta, 5, -)) \setminus \{1234, 4321\} = \{1243\},$$

而稳定的非单调影子为

$$\Sigma(\beta, 5, -) = \{1243, 1432\}.$$

额外模式 1432 在块大小为 2 时就已出现，因为

$$I_2(\beta, 5, -) = 1234765$$

and

$$\mathrm{Sh}_4(I_2(\beta, 5, -)) \setminus \{1234, 4321\} = \{1243, 1432\}.$$

因此，在这个族中，普通的非单调影子取决于块大小，而 $\Sigma(\beta,\ 5,\ -)$ 记录了最终的取值。

为之后讨论困难对作准备，图 7 展示了两个块大小为 4 的族 $I_4(241356,\ 5,\ +)$ 和 $I_4(314256,\ 5,\ +)$。它们稳定的非单调影子为

$$\Sigma(241356, 5, +) = \{1324, 2134, 2314, 2413, 3124\},$$

$$\Sigma(314256, 5, +) = \{1324, 2134, 2314, 3124, 3142\}.$$

因此，这两个稳定影子唯一的区别在于是否包含 2413 或 3142。移除该困难对，再将剩余的非单调模式仅按反向对记录下来，两种情况下得到的集合相同：

$$\{1324/4231,\ 2134/4312,\ 2314/4132,\ 3124/4213\}.$$

这一观点在后文的定义 6.11 和命题 6.12 中很重要，因为对于反转封闭禁用集，相关问题在于哪些非困难反向对仍位于指定困难对 $\{2413, 3142\}$ 之外。

下一个引理说明，一旦膨胀块的长度至少为 4，非单调影子就稳定为 $\Sigma(\beta,\ i,\ \varepsilon)$。

引理 6.8。对于每个三元组 (β, i, ε) 以及每个 $t \geq 4$，

$$\mathrm{Sh}_4(I_t(\beta, i, \varepsilon)) \setminus \{1234, 4321\} = \Sigma(\beta, i, \varepsilon).$$

证明。对于某个 $0 \leq j \leq 4$，$I_t(\beta,\ i,\ \varepsilon)$ 的任意一个 4-子序列都恰好使用膨胀块中的 j 个元素。一旦 $t \geq j$，此类子序列的标准化模式就只取决于 j、符号 ε 以及其他 $4-j$ 个基序列元素的选取。因此，对于某个 $t \geq 4$ 出现的每个非单调 4-模式，在块大小为 $\max(1,\ j) \leq 4$ 时就已出现，所以它属于 $\Sigma(\beta,\ i,\ \varepsilon)$。根据 $\Sigma(\beta,\ i,\ \varepsilon)$ 的定义，反向包含关系显然成立。□

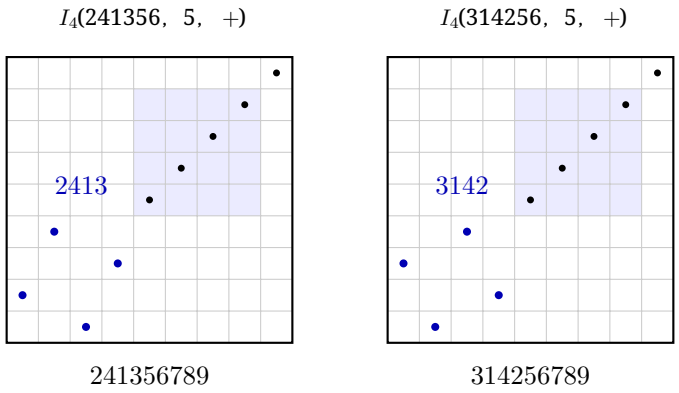


FIGURE 7.两个块大小为4的单元素膨胀示例。阴影方块标出膨胀块，蓝点显示特定困难模式：左侧为2413，右侧为3142。

命题6.9。设 $F \subseteq S_4$ 为反转封闭的，且不包含任何单调模式；设 $p \notin B_4 \cup \{2413, 3142\}$ 为一个非单调模式。假设 p 从 $\mathrm{Av}_7(F)$ 出发是合法的，并且命题 *6.3* 中与 p 对应的两个伴随反转对都完全包含在 F 中。那么存在一个三元组 (β, i, ε)，使得

$$p^r \in \Sigma(\beta, i, \varepsilon), \qquad p \notin \Sigma(\beta, i, \varepsilon),$$

并且，$\Sigma(\beta、i、\varepsilon)$ 中的其他所有非单调模式都属于与 F不相交的反转对。

证明。由于 F 是反转封闭的，我们可以将其视为它所包含的非单调反转对的集合。因此，该结论可通过有限计算得出。公共代码仓库 [11] 中的脚本 code-permuta/k4_reverse_reply_permuta.py 枚举了所有满足假设的配对 (F, p)；这样的配对共有1156个（按对称变换归约后为297个）。对于每一对，它都会找到一个三元组 (β, i, ε)，其中 $\beta \in S_6$，其稳定的非单调影子具有所需性质。关于可复现性的详细信息，请参见第 9 节。□

引理 6.10. 对于 $k = 4$ 和 $n \geq 9$，只要 $F \subseteq S_4$ 是反转封闭的、不包含任何单调模式，并且 $p \notin F$ 是一个满足 $p \notin \{2413, 3142\}$的非单调合法模式，那么反转模式 p^r 从 $\mathrm{Av}_n(F \cup \{p\})$出发是合法的。

证明。我们分两种情况讨论。

情形1： $p \in B_4$。由引理 6.1，p^r 的见证族具有删点集合$_4 = \{p^r, m\}$，其中 m 是单调的。由于 $p \neq p^r$ 和 $p \neq m$，该族避免 p。此外，由于 $p^r \notin F$（根据 F的反转封闭性）且 $m \notin F$，该族属于 $\mathrm{Av}_n(F \cup \{p\})$，并见证 p^r的合法性。

情形2： $p \notin B_4$，$p \neq 2413,\ 3142$。由命题 6.3，每个这样的 p 都有两个伴随对象 $q_1,\ q_2 \in B_4$，它们来自不同的反转对（表 2 中按对称性列出）。如果至少一个伴随对象 q_i 满足 $q_i \notin F$，那么反转后的族 $E_n(p,\ q_i)^r$ 具有删点集合 $_4 \setminus \{1234, 4321\} = \{p^r, q_i^r\}$，且避免 p。由于 $p^r \notin F$（反转封闭性），$q_i^r \notin F$（因为 $q_i \notin F$ 且具有反转封闭性），并且 F不包含单调模式，该族属于 $\mathrm{Av}_n(F \cup \{p\})$，并见证 p^r的合法性。

否则，两个伴随反转对都完全包含在 F 中。选择一个包含 p 的 $\pi \in \mathrm{Av}_n(F)$。将范围限制为 p 的某个出现中的元素，再加上 π 的任意三个额外元素，可知 p 对 $\mathrm{Av}_7(F)$ 是合法的。因此，由命题6.9可得一个三元组 (β, i, ε)，使得 $p^r \in \Sigma(\beta, i, \varepsilon)$ 且 $p \notin \Sigma(\beta, i, \varepsilon)$。此外，$\Sigma(\beta, i, \varepsilon)$ 中所有其他非单调模式都属于与 F 不相交的反转对。取块大小为 $t = n - 5 \geq 4$，由引理 6.8 可得一个长度为 n 的排列 $I_t(\beta, i, \varepsilon)$，其非单调 4-影子恰好是 $\Sigma(\beta, i, \varepsilon)$。因此，该排列避免 $F \cup \{p\}$ 且包含 p^r，所以 p^r 对 $\mathrm{Av}_n(F \cup \{p\})$ 是合法的。□

最后，我们处理困难对 $\{2413, 3142\}$。

定义 6.11。对于 $p \in \{2413, 3142\}$，令

$$\mathcal{E}_p = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma(\beta, i, \varepsilon) \setminus \{2413, 3142\} : \\ \beta \in S_6,\ i \in \{1, \ldots, 6\},\ \varepsilon \in \{+, -\}, \\ p \in \Sigma(\beta, i, \varepsilon),\ p^r \notin \Sigma(\beta, i, \varepsilon) \end{array} \right\},$$

其中，每个集合仅记录到反向对为止。换言之，$\mathcal{E}_p$ 是通过对所有单元素膨胀族$I_t(\beta,\ i,\ \varepsilon)$（其中 $\beta \in S_6$）取反向对集合，保留其稳定影包含 p但不包含p^r的集合，然后删除困难对 $\{2413, 3142\}$后得到的反转对集合。我们将 $\mathcal{E}_p$ 称为 p的外部反向对支撑集。

命题 6.12。两个集合 $\mathcal{E}_{2413}$ 和 $\mathcal{E}_{3142}$ 相等，且每个集合的大小均为138。此外，如果 $F \subseteq S_4$ 是反转封闭的，既不包含单调模式，并且2413 可从$\mathrm{Av}_7(F)$合法得到，那么与 F 对应的反转对集合与 $\mathcal{E}_{2413}$中的某个支撑不相交。通过反转，将2413 和3142 互换后，相应的结论同样成立。

证明。反转将 2413 映射为 3142，而对于每个单入口膨胀族$I_t(\beta, i, \varepsilon)$，其反转仍是一个单入口膨胀族：

$$I_t(\beta, i, +)^r = I_t(\beta^r, 7 - i, -), \qquad I_t(\beta, i, -)^r = I_t(\beta^r, 7 - i, +),$$

因此，$\mathcal{E}_p$ 的定义在反转下封闭。此外，取影子与反转可交换，而外部支撑仅按反向对记录。因此，反转给出了从 $\mathcal{E}_{2413}$中的族到 $\mathcal{E}_{3142}$中的族的双射，所以

$$\mathcal{E}_{2413} = \mathcal{E}_{3142}.$$

由于 F 是反转封闭的，我们将其视为它所包含的非单调反向对集合。其余断言均为有限精确

计算。公共代码仓库 [11] 中的脚本 code-permuta/k4_reverse_reply_permuta.py 枚举了全部 6!·6·2个单元素膨胀族，计算它们的稳定影子 $\Sigma(\beta, i, \varepsilon)$，并记录了那些包含 2413 但不包含 3142 的族所对应的不同外部反向对支撑集。它找到了 138 个这样的支撑集，因此根据上述等式， $\mathcal{E}_{3142}$ 中也有 138 个支撑集。

随后，该脚本枚举所有含有 2413， $3142 \notin F$ 且在 $n = 7$处 2413 合法的反向封闭单调模式自由集$F \subseteq S_4$ ； 共有 543 个这样的状态。对于其中每一个， $\mathcal{E}_{2413}$ 至少有一个成员与 F不相交。最后的对称性结论可通过反转每个剩余排列得到。参见第 9 节。□

定理 6.13。 对于每个 $n \geq 10$，逐步反向策略都是玩家 II 在 S_n 上、采用 $k = 4$的 *PAP* 中的必胜策略。这意味着，

$$\mathrm{sg}(S_n, 4) = 0 \qquad for\ n \geq 10.$$

例6.14。 假设 $F \subseteq S_4$ 是反转封闭的，既不包含任何单调模式，也不包含这些反向对

$$\{1324/4231,\ 2134/4312,\ 2314/4132,\ 3124/4213\}$$

并令 $n = 10$。那么

$$I_5(314256, 5, +) = (3, 1, 4, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

属于 $\mathrm{Av}_{10}(F \cup \{2413\})$，且包含 3142。定理 6.13 的证明表明，每个在 $n \geq 10$ 处合法的困难对状态都存在一个这种形式的见证：先取一个 7点子排列，再从命题 6.12 中选取一个适当的稳定支撑集。

证明。 根据引理 6.10，只剩下对 $\{2413, 3142\}$ 。令 $F \subseteq S_4$ 为反转封闭的，不包含任何单调模式，并设 2413 可从 $\mathrm{Av}_n(F)$ 中合法得到，其中 $n \geq 10$。

选择包含 2413 的 $\pi \in \mathrm{Av}_n(F)$，并在 π 中选取 2413 的一个 4点出现。将其与 π 的任意三个其他项结合，这些点构成一个仍然避免 F 且仍然包含 2413 的 7点子排列。因此，2413 可从 $\mathrm{Av}_7(F)$ 中合法得到。

根据命题 6.12， F 的反转对集合与某个支撑 $E \in \mathcal{E}_{2413}$ 不相交。由于 $\mathcal{E}_{2413} = \mathcal{E}_{3142}$，存在一个三元组（$\beta$， i， ε），其稳定影包含 3142、避免 2413，并具有外部支撑 E。取块大小 $t = n - 5 \geq 5$，引理 6.8 给出一个长度为 n 的排列 I_t（β， i， ε），其非单调4影由 3142 以及属于 E 中反转对的模式组成，因而避免 $F \cup \{2413\}$。所以，在选定 2413 后，3142 是合法的。交换 2413 与 3142 的情形是对称的。

现在可应用推论 2.13。 □

6.1. **迈向一般** k。 $k = 4$ 证明表明，可以采用一种颇为合理的方法来处理$k = 5$。首先，通过推论 2.13，将问题化归为反转封闭且不含单调模式的状态。接下来，利用

单点影子见证族，统一处理{v8}中的四个反转对。然后，可以尝试用有界见证族处理其余模式，这些见证族的非单调影子只涉及少量额外支撑；最后，找出并分析经过前几轮处理后仍然存在的困难反向对。

然而，随着 k 增大，最后一步的组合结构应当会变得复杂得多。总共有

$$\frac{k!-2}{2}$$

个非单调反向对；移除由 B_k 产生的四个反向对后，还剩下

$$\frac{k!-10}{2}$$

个可能成为困难对的非-B_k 反向对。对于 $k=4$，这个数是 7，而显式伴随族将其减少到只剩下单个对 $\{2413, 3142\}$。对于 $k=5$，相应的数目已经是 55。当前的计算表明，最简单的单伴随构造适用于其中 14 个，但仍有许多未解决的情况，因此不应指望最后只剩下一个困难对。

这表明，将 $k=4$ 的证明推广到 $k=5$ 应该仍然可行，但过程可能会更加微妙，并且需要按情况分类处理更多例外构型。然而，对于一般的 k，可能不应指望直接迭代 $k=4$ 的论证就足够了：要完整证明猜想 2.9，很可能需要提出一种新思路，超越当前的见证族分析。

一种可能的通用方法是利用这样一个事实：$k=4$ 的困难对恰好由长度为 4 的简单排列组成，因此或许可以利用简单排列理论将结果推广到一般的k。

7. Further bounds on N_k

现在我们回到阈值 N_k。定理 5.2 给出了上界 $N_k \le (3k-8)^2+1$。利用 B_k中的更多模式，我们可以改进这个上界。

命题 7.1。设 $k \ge 4$，且 $\pi \in \mathrm{Av}(B_k)$。若 $\mathrm{LIS}(\pi) \ge 2k-4$，则

$$\mathrm{LDS}(\pi) \le k-2.$$

由对称性，若 $\mathrm{LDS}(\pi) \ge 2k-4$，则 $\mathrm{LIS}(\pi) \le k-2$。

证明。令 $M=(m_1<\cdots<m_r)$ 为 π 的一个最长递增子序列，其中 $r \ge 2k-4$。对于不属于 M的点 x，定义其单元格 (i,j)，如定理 5.2 的证明中所述。

我们断言，每个这样的点都满足 $i \ge 1$ 和 $j \ge 1$。

如果 $i=0$ 且 $j=0$，那么 x 与 M 一起构成一个长度为 $r+1$的递增子序列，这与 M的极大性相矛盾。

如果 $i=0$ 且 $1\le j\le k-2$，那么 $r-j\ge k-2$，因此从 M 中选择一个位于 x 下方的点，并选择 $k-2$ 个位于 x 上方的点，得到单元格 (0，1)，从而根据引理 5.1得到一个来自 B_k 的模式。

若 $i=0$ 且 $j\ge k-1$，则选取 M中位于 x 下方的 $k-1$ 个点，会得到单元格 (0，$k-1$)，并再次由引理 5.1 得到一个来自 B_k 的模式。

因此 $i\neq 0$。由对称性，引理 5.1 中的情形 (1, 0) 和 ($k-1$,0) 表明 $j\neq 0$ 也成立。

因此 m_1 位于 π中所有其他点的左侧且下方。现在假设 π 有一个长度为 $k-1$的递减子序列。由于 m_1 是 π中最小的点，它不可能属于长度大于 1 的递减子序列。因此，将 m_1 添加到这样的子序列前面，便得到模式

$$q_k = 1\,k\,(k-1)\cdots 2,$$

它属于 B_k，矛盾。 □

推论 7.2。令 $k\ge 4$。则

$$\mathrm{Av}_n(B_k)=\{\mathrm{id}_n,\mathrm{id}_n^r\}\qquad \textit{for all } n\ge (2k-5)^2+1.$$

等价地，

$$N_k\le (2k-5)^2+1.$$

证明。 设 π 是一个避开 B_k 的非单调排列。由定理 5.2，

$$\mathrm{LIS}(\pi)\le 3k-8,\qquad \mathrm{LDS}(\pi)\le 3k-8.$$

若 $|\pi|>(2k-5)^2$, ，则 Erd˝os–Szekeres 定理给出以下两种情况之一：

$$\mathrm{LIS}(\pi)\ge 2k-4$$

or

$$\mathrm{LDS}(\pi)\ge 2k-4.$$

在第一种情况下，由命题 7.1 可得

$$\mathrm{LDS}(\pi)\le k-2,$$

so

$$|\pi|\le (3k-8)(k-2).$$

在第二种情况下，由命题 7.1 的对称命题可得

$$\mathrm{LIS}(\pi)\le k-2,$$

并且再次有

$$|\pi|\le (3k-8)(k-2).$$

但对于 $k\ge 4$ ，我们有

$$(3k-8)(k-2)<(2k-5)^2,$$

因为差值为（$k-3$）^{2}。这一矛盾表明，长度为（$2k-5$）$^2+1$ 的非单调排列无法避开 B_k。□

上述界仍远低于通过计算找到的最大避开排列。接下来的两个构造给出了二次下界。

定义 7.3. 对于 $k \geq 4$，令 E_k 为阶梯排列，它由一个长度为 $k-3$ 的递增块 A、接着 $k-2$ 个长度为 $k-2$ 的递增块 $C_1, \ldots, C_{k-2}$ 拼接而成，这些块的排列方式使得当 $i < j$ 时，C_i 中的每个元素都大于 C_j 中的每个元素，最后再接上一个长度为 $k-3$ 的递增块 B。因此

$$|E_k| = (k-3) + (k-2)^2 + (k-3) = k^2 - 2k - 2.$$

命题 7.4。对于每个 $k \geq 4$，阶梯排列 E_k 避免B_k。因此，

$$N_k \geq k^2 - 2k - 1.$$

证明。在此证明中，记

$$G(a; c_1, \ldots, c_m; b) = \mathrm{id}_a \oplus (\mathrm{id}_{c_1} \ominus \cdots \ominus \mathrm{id}_{c_m}) \oplus \mathrm{id}_b\,.$$

Then

$$E_k = G(k-3; \underbrace{k-2, \ldots, k-2}_{k-2}; k-3).$$

E_k 中包含的每个模式也具有 $G(a; c_1, \ldots, c_m; b)$ 的形式，其参数不大于 E_k 的参数。特别地，E_k 中的任意模式都满足

$$a \leq k-3, \qquad b \leq k-3, \qquad m \leq k-2, \qquad c_i \leq k-2 \ \text{ for all } i.$$

B_k 中的八个模式在这个族中呈现为

$$\begin{aligned}
p_k &= G(k-2; 1, 1; 0), & q_k &= G(1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}; 0),\\
r_k &= G(0; 1, 1; k-2), & s_k &= G(0; k-1, 1; 0),\\
p_k^c &= G(0; \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-2}, 2; 0), & q_k^c &= G(0; 1, k-1; 0),\\
r_k^c &= G(0; 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-2}; 0), & s_k^c &= G(0; \underbrace{1, \ldots, 1}_{k-1}; 1).
\end{aligned}$$

现在，p_k和 r_k不可能出现，因为它们要求 $a = k-2$或 $b = k-2$，而 E_k 中的每个模式都有 $a,\ b \leq k-3$。q_k、p_k^c、r_k^c和s_k^c 这些模式不可能出现，因为它们至少需要 $k-1$ 个斜和块，而 E_k 中的每个模式至多有 $k-2$ 个这样的块。最后，s_k 和 q_k^c 不可能出现，因为它们要求一个大小为 $k-1$的斜和块，而 E_k 中模式所含的每个块大小至多为 $k-2$。

因此，E_k 在 B_k中避开了所有八个模式。由于 $|E_k| = k^2 - 2k - 2$，阈值满足 $N_k \geq k^2 - 2k - 1$。□

命题 7.5。对于 $k \geq 4$，令

$$L_k = \underbrace{\mathrm{id}_{k-3} \ominus \cdots \ominus \mathrm{id}_{k-3}}_{k-2 \ summands}$$

并设

$$H_k = L_k \oplus L_k.$$

那么 H_k 避免 B_k。因此，

$$N_k \geq 2(k-2)(k-3)+1.$$

证明。 对于此证明，记作

$$D(a_1,\ldots,a_m\,;\,b_1,\ldots,b_n) = (\mathrm{id}_{a_1} \ominus \cdots \ominus \mathrm{id}_{a_m}) \oplus (\mathrm{id}_{b_1} \ominus \cdots \ominus \mathrm{id}_{b_n}),$$

其中任一列表都可以为空。于是

$$H_k = D(\underbrace{k-3,\ldots,k-3}_{k-2}\,;\,\underbrace{k-3,\ldots,k-3}_{k-2}).$$

H_k 中包含的每个模式仍具有 $D(a_1,\ .....,\ a_m\,;\ b_1,\ .....,\ b_n)$的形式，其参数不大于原参数。特别地， H_k 中的任意模式都满足

$$m \leq k-2, \qquad n \leq k-2, \qquad a_i \leq k-3, \qquad b_j \leq k-3.$$

B_k 中的八个模式在此族中出现为

$$\begin{aligned}
p_k &= D(k-2\,;\,1,1), & q_k &= D(1\,;\,\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}),\\
r_k &= D(1,1\,;\,k-2), & s_k &= D(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1}\,;\,1),\\
p_k^c &= D(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-2},2\,;\,), & q_k^c &= D(1,k-1\,;\,),\\
r_k^c &= D(\,;\,2,\underbrace{1,\ldots,1}_{k-2}), & s_k^c &= D(\,;\,\underbrace{1,\ldots,1}_{k-2},2).
\end{aligned}$$

现在， p_k 和 r_k 是不可能的，因为它们要求一个大小为 $k-2$的块，而 H_k 中的模式的每个块大小至多为 $k-3$。模式q_k、 s_k、 p_k^c和 s_k^c 是不可能的，因为它们要求一侧有 $k-1$ 个斜和块，而 H_k中的模式每一侧至多有 $k-2$ 个这样的块。最后， q_k^c 和 r_k^c 是不可能的，因为它们要求一个大小为 $k-1$的块，而这同样大于 H_k中的模式所出现的任何块。

因此， H_k 避免了 B_k 中的所有八个模式。由于

$$|H_k| = 2(k-2)(k-3),$$

阈值满足 $N_k \geq 2(k-2)(k-3)+1$。 □

例 7.6. 族 H_k 首次改进阶梯下界的情形是 $k=6$。这里

$$L_6 = 10\,11\,12\,7\,8\,9\,4\,5\,6\,1\,2\,3,$$

so

$$H_6 = L_6 \oplus L_6 = 10\,11\,12\,7\,8\,9\,4\,5\,6\,1\,2\,3\,22\,23\,24\,19\,20\,21\,16\,17\,18\,13\,14\,15.$$

因此， H_6 是两个 4 块分层排列的直和，每个块都是长度为 3 的递增序列。图 8 明确展示了这一点。

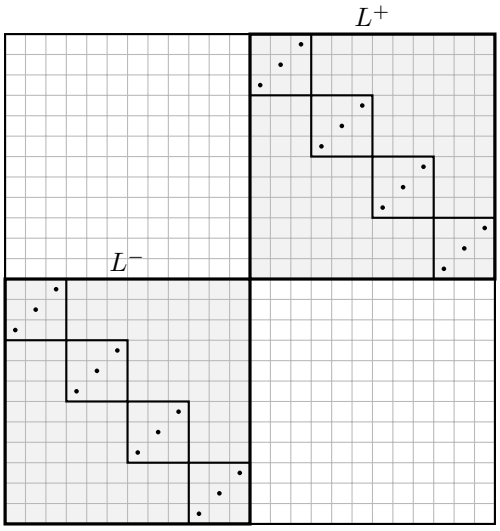


FIGURE 8. 排列 $H_6 = L_6 \oplus L_6$。每个 3×3 方框都是一个递增块；两个较大的高亮方块是副本 L^- 和 L^+。

现在我们有

$$\max\{k^2-2k-1,\ 2(k-2)(k-3)+1\} \le N_k \le (2k-5)^2+1$$ 对所有 $k \ge 4$，而 $N_3 = 1$。特别地，

$$7 \le N_4 \le 10, \qquad 14 \le N_5 \le 26, \qquad 25 \le N_6 \le 50.$$

命题 7.7。我们有

$$N_3 = 1, \qquad N_4 = 7, \qquad N_5 = 14, \qquad N_6 = 25.$$

证明。对于 $k = 3$，我们有 $B_3 = \{132, 213, 231, 312\}$，因此任何长度至少为 1 且避免 B_3 的排列都是单调的，并且 $N_3 = 1$。

对于 $k = 4$，5，6，命题 7.4 和命题 7.5 给出的下界已经足以得到

$$N_4 \ge 7, \qquad N_5 \ge 14, \qquad N_6 \ge 25.$$

随后对类 $\mathrm{Av}_n(B_k)$ 进行了枚举，直至达到阈值。对于 $k = 4$，5、6，分别在 $n = 7$、14、25 时达到该阈值。

一旦在某个长度 $m \ge k$ 时发生这种情况，它将在所有更大的长度下持续成立。这些计算在第 9 节中重现；但 $k = 6$除外，其使用了 Kuszmaul 的增量式快速避免者生成方法 [6]。□

8. CONCLUDING REMARKS

集合 B_k 似乎是单长度排列规避问题的合适有限障碍集。根据定理 4.3，它们是极小的；根据定理 5.2 和推论 7.2，它们最终具有单调强制性；而 $k = 3$，4、5、6 的阈值分别是$N_3 = 1$、 $N_4 = 7$、 $N_5 = 14$和 $N_6 = 25$。对于 $k = 3$，其反向策略

已完全明了（定理 2.5）；对于 $k = 4$，反向策略问题现在也已解决，例外情况为 $n = 5$、6、7、8、9；此外，还通过稳定单项膨胀族证明了一个关于大-n 的定理。命题 7.4 中的阶梯排列E_k 表明

$$N_k \geq k^2 - 2k - 1,$$

而命题 7.5 给出了更强的界

$$N_k \geq 2(k-2)(k-3) + 1$$

适用于 $k \geq 6$，并且已能推出 $N_6 \geq 25$。

下一步是将同一研究方案推进到 $k = 5$ 及更远处（猜想 2.9）。

此外，还有若干自然的博弈论变体，本文并未探讨。由于 PAP 局面是有限无偏博弈，且其斯普拉格–格伦迪值定义良好，因此可以考虑 PAP 局面的析取和，例如对模式长度不同的初始局面 S_n 求和。正常玩法约定也不是必不可少的：由于每局游戏的长度至多为 $k!$，失`尔玩法同样自然，不过本文使用的反向应招论证无法直接迁移到这种情形。最后，还可以研究有偏版本，其中两位玩家可以从不同的模式集合中选择，甚至可以从不同的允许模式长度中选择。这些变体似乎需要超出本文范围的新思路，但与本文所发展的观点十分契合。

Acknowledgements

感谢 Jay Pantone 运行 Kuszmaul 的代码以获得数值$N_6 = 25$。我们也感谢 Magn´us M´ar Halld´orsson、Hjalti Magn´usson、Joshua Sack 和 Einar Steingr´ımsson 在本工作的早期阶段参与讨论。我们还要感谢 Magn´us M´ar Halld´orsson，就猜想的计算检验与我们进行了有益的讨论。

本研究使用了大语言模型，具体来说是 ChatGPT- 5.4 和 Claude Opus 4.6。它们用于寻找实例、编写代码，以及精简和完善证明；在某些情况下，这带来了更好的论证。总的来说，只要严格把控，我们可以建议在数学研究中使用人工智能伙伴：这些系统可能会钻进死胡同、启动耗费高昂的计算后又将其抛诸脑后，还可能给出需要仔细梳理才能消除循环论证的论证。所有错误仍由人类作者独自承担。

9. Computational reproducibility

正文中的计算机辅助结论均为精确且穷尽的。code-permuta/ 中的脚本可在公开代码仓库 https://github.com/ulfarsson/Game_patterns 中获取。它们仅涵盖主论文所需的计算，唯一例外是

数值 $N_6 = 25$ 是单独得出的，并不包含在常规 Python 软件包中。此处引用的运行结果已使用 Python 3.11 和 permuta [8] 进行核验。安装 permuta 后，可直接在代码仓库根目录运行以下命令。

要复现第2节中的起始位置数据，包括表 1、命题 2.7、例 2.8 中的数字，以及图1所示的最优对局长度分布，请运行：

```
python code-permuta/pap_starting_data_permuta.py table python
code-permuta/pap_starting_data_permuta.py reverse-k4 python
code-permuta/pap_starting_data_permuta.py \
  optimal-dist n 4
python code-permuta/pap_启动_数据_permuta.py \
  查询 9 4 1234,4321,1324
python code-permuta/pap_启动_数据_permuta.py \
  查询 9 4 1234,4321,1324,4231
```

这两条查询命令会输出例 2.8 中的计数 334 和 2，以及该局面中的获胜回应；排列以 Permuta 原生的从零开始的记法打印。对于每个 $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，optimal-dist 命令都会输出从初始局面 S_n 出发、每种可能长度的最优对局线路数量。

要复现第 6 节中直接用于证明的 $k = 4$ 计算，即命题6.9中的残余 $n = 7$ 支撑分类以及命题 6.12 中的困难对计算，请运行：

```
python code-permuta/k4_反转_reply_Permuta.py all
此脚本会打印摘要行
间隔_情形检查=1156
困难_配对检查 支撑=138 合法_状态=543
```

若要复现命题 7.7 中截至 $k = 5$ 的阈值数据，请运行：python code-permuta/bk_thresholds_permuta.py 3 6 python code-permuta/bk_thresholds_permuta.py 4 10 python code-permuta/bk_thresholds_permuta.py 5 20

这些命令会输出计数 $|\mathrm{Av}_n(B_k)|$，以及只剩下两个单调排列时的最小长度，等价地说，就是阈值 N_k；对于 $k = 3$，该阈值为 1，因为 $\mathrm{id}_1 = \mathrm{id}_1^r$。数值 $N_6 = 25$ 是单独计算得出的，不属于常规的 Permuta 工具包。

若要复现讨论中定理 6.13 后以及结论中引用的全空间计算，请运行：

```
python code-permuta/k5_fullspace_data_permuta.py all
这会打印计数结果
一个_伴随者_目标=28 总计_非B5_非单调=110完整_空间_可分离_对数=59
总计_非单调_对数=59，并且还列出了相应的目标，并确认在 S8中没有反转
对是不可分离的。
```

References

1. M. H. Albert、R. E. L. Aldred、M. D. Atkinson、C. C. Handley、D. A. Holton、D. J. McCaughan 和 B. E. Sagan, *Monotonic sequence games*, 《毫无胜算的游戏 3》，剑桥大学出版社，2009 年，第 309–328 页。2. Petter Br¨and´en 和 Anders Claesson, *Mesh patterns and the expansion of permutationstatistics as sums of permutation patterns*, 《组合电子期刊》**18** （2011），第 2 期，P5。3. P. Erd˝os 和 G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, 《Compositio Mathematica》**2** （1935），463–470。4. P. M. Grundy, *Mathematics and games*, 《尤里卡》**2** （1939），6–8。5. Frank Harary、Bruce Sagan 和 David West, *Computer-aided analysis of monotonic sequence games* **61** 1983 ，《佩洛里塔纳·佩里科兰蒂科学院自然科学、物理与数学班会刊》（），67–78。6. William Kuszmaul, *Fast algorithms for finding pattern avoiders and counting pattern occurrences in permutations* **87** 2018 310, 987 ，《计算数学》（），第 期，– 1011。7. K. Parton, *PermuNim: an impartial game of permutation avoidance*，理学硕士论文，维多利亚大学，2010 年。8. PermutaTriangle 开发者，*Permuta*，https://github.com/PermutaTriangle/Permuta，2026 年，GitHub 代码库，访问日期：2026-03-15。9. Lara Pudwell, *On an Erdős–Szekeres game*，2025 年，预印本。10. R. P. Sprague, *Über mathematische kampfspiele*, 《东北数学杂志》，第一辑**41** （1935），438–444。11. Henning Ulfarsson，*Game patterns*，https://github.com/ulfarsson/Game_模式，2026 年，GitHub 代码库，访问日期：2026-03-15。12. Vincent Vatter, *Permutation classes*, 《枚举组合学手册》（Mikl´os B´ona 编），CRC出版社，2015 年，第 753–833 页。