arXiv:2603.16022v1 [math.GR] 17 Mar 2026

紧致不变随机子群

Tal Cohen ♠、Helge Gl¨ockner ♥、Gil Goffer ♦ 和 Waltraud Lederle ♣

2026年3月18日

摘要

我们研究将紧子群子集赋予满测度的遍历不变随机子群。我们证明，在实李群、紧生成 p-进李群、局部紧双曲群和无限端群中，这些子群总是包含于某个紧正规子群中。对于一般的 p-进李群，我们证明它们包含于局部椭圆根中。对于全不连通局部紧群，我们证明它们包含于所有内自同构 Levi 子群的交集中。

1 引言

局部紧群 G 的不变随机子群（IRS）是闭子群的 Chabauty 空间 Sub(G) 上的共轭不变的博雷尔概率测度，其中这些闭子群属于 G。Abert–Glasner–Vir´ag [AGV14]，引入了 IRS。IRS 同时推广了正规子群和格：正规子群 $N \trianglelefteq G$ 对应狄拉克质量 δ_N，而格 $\Gamma \leq G$ 则对应 Haar 测度在 G/Γ 上经稳定子映射推前所得的测度。自问世以来，不变随机子群已成为测度群论中的一个中心研究对象，与刚性理论、遍历理论以及局部紧群的结构有着深刻联系；例如参见 [AGV14,BDLW16, BCGM19,SZ94]。IRS 也自然地来自保概率测度（pmp）作用。事实上，给定 G 在 (X, μ) 上的一个 pmp 作用， μ-随机点的稳定子便定义了一个 IRS。实际上，每个 IRS 都以这种方式产生；参见 [ABB+17，定理 2.6]。

给定 μ 的一个不变随机子群 G，我们考察闭正规子群 $\langle\mu\rangle := \overline{\langle \bigcup \overline{\mathrm{supp}(\mu)}\rangle} \leq G$，通常称为的正规闭包。它是满足 $N \leq G$ 使得μ(Sub(N)) $= 1$ 的最小闭子群。

在许多情形下，关于不变随机子群的分类结果与格和正规子群的经典刚性定理相呼应，并对其加以拓展，参见 [SZ94、BDLW16、Bow15] 以及更多文献。一个

♠魏茨曼科学研究所。♥帕德博恩大学数学研究所。
♦加州大学圣迭戈分校。♣比勒费尔德大学。

一个令人振奋的例证是 Bader–Duchesne–L´ecureux 的结果：若某个不变随机子群 μ 几乎必然取到可解子群，$\langle\mu\rangle$则是可解的。

在本文中，我们研究紧致 *IRS*，即几乎必然选取紧子群的不变随机子群。本文围绕以下（非正式）问题展开：

问题。 如果 μ 是 G的紧不变随机子群，那么 $\langle\mu\rangle$ 距离紧有多近？ ？

今后我们假设 G 是局部紧致第二可数（简称 *lcsc* ）。在若干情形下，例如实李群、紧生成 p进李群以及局部紧双曲群，我们能够给出最强的可能结果，证明 $\langle\mu\rangle$是紧的；参见下文定理 1.1、1.2和1.3 。

更一般地，我们考虑 G 的以下拓扑特征子群；关于这一主题的精彩概述，参见 [Cor15, 第 2] 节。 G 的多紧根记作 $\mathcal{W}(G)$，是 G 的所有紧正规子群的并。它不一定是闭的，但当 G 是紧生成的（参见 [Cor15]）或是一个 p-进李群（注 4.3）时，它是闭的。 G 的局部椭圆根记作 $\mathcal{E}(G)$，是 G 的最大的局部椭圆正规子群；它总是闭的，并且包含 $\mathcal{W}(G)$。

为了衡量 $\langle\mu\rangle$ 离紧性有“多近”，我们区分三种可能的结论，并按从强到弱排序：

(1) 如果 μ 是 G 的紧致遍历 IRS，那么 $\langle\mu\rangle$是紧的。

(2) 如果 μ 是 G 的紧不变随机子群，那么$\overline{\langle\mu\rangle} \leq \overline{\mathcal{W}(G)}$。

(3) 如果 μ 是 G 的紧不变随机子群，那么$\overline{\langle\mu\rangle} \leq \mathcal{E}(G)$。

由于 $\overline{\mathcal{W}(G)} \leq \mathcal{E}(G)$, 结论 (2) 蕴含结论 (3)。结论 (1)蕴含结论(2) 这一事实可由遍历分解定理推出，参见引理 2.1。类似的证明表明，在结论 μ (2) 和 (3)中，假设其具有遍历性并无影响。不过，对于结论 (1)，假设遍历性很重要，这样才能避免直接的反例，例如选取越来越大的紧正规子群，同时令其概率递减。此外，如果 $\mathcal{W}(G)$ 是闭的，那么结论 (2)与结论 (1) 等价，正如引理 2.1的第二部分所述。

作为第一个结果，我们证明对于实李群，最强的结论成立；请注意，我们不对连通性作任何假设，但确实假设实李群和 p-进李群都是第二可数的。

定理 1.1. 设 G 是一个实李群， μ 是 G的一个紧致遍历 *IRS*。那么， $\langle\mu\rangle$是紧的。

作为推论，我们得出，对于任何满足 G 的 G/G^0为紧群或可数群的局部紧第二可数群，这一结论同样成立，其中 G^0 表示单位元的连通分支；参见推论3.5。对于 p-进李群，我们证明如下结论。

[1]若每个紧子集都包含于某个紧子群中，则称一个子群是局部椭圆的。

定理 1.2。设 G是一个 p-进李群。

(i) 如果 μ 是 G 的紧不变随机子群，那么 $\overline{\langle\mu\rangle} \leq \mathcal{E}(G)$。

(ii) 假设 G 是紧生成的或代数的。如果 μ 是 G 的紧致遍历 *IRS*，那么 $\langle\mu\rangle$ 是紧的。

紧生成情形的证明中，一个关键要素是一个具有独立研究意义的结构性结果（定理 4.5）：在一个紧生成的 p-adic 李群中，$\mathcal{W}(G)$ 是 lev(G) 的开子群，其中 lev(G) 是所有内自同构的 Levi 子群的交集。

利用双曲空间边界上的作用，我们进一步证明如下结果.

定理 1.3。设 G 是一个紧生成的局部紧第二可数群。假设 G 是双曲的或具有无穷多个端。如果 μ 是 G 的紧不变随机子群，那么 $\langle\mu\rangle$ 包含于 $\mathcal{W}(G)$ 中，而后者是紧的。

下面是局部紧第二可数群 G 的一个紧不变随机子群 μ 的例子，其中 $\langle\mu\rangle = \overline{G}$ 非紧。

例 1.4。考虑由保持与树边界中的点 η 对应的 horosphere $\mathcal{H}$ 的正则树自同构构成的群 G_η。等价地，G_η 由所有逐点固定代表 η 的某条射线的树自同构构成。该群是局部椭圆的，但并非紧群；其多紧根是一个真稠密子群。令 μ 为一个紧不变随机子群，它定义为随机选取 $\mathcal{H}$ 的顶点子集（依据伯努利乘积测度选取）[2] 的逐点稳定子。由于 μ 是 $2^{\mathcal{H}}$ 上伯努利测度的推前，且伯努利测度是遍历的，因此 μ 是遍历 IRS。注意，对于每个有限子集 $A \subset \mathcal{H}$，不固定 A 中任何元素的概率都大于零。因此，$\langle\mu\rangle = G_\eta$。由于 G_η 非紧且 ~~G_η~~ $= \mathcal{W}(G_\eta)$，我们得到 G_η 满足结论（2）~~，但~~不满足结论（1）。

注意到，群 G_η 来自例 1.4 并非紧生成。我们不知道以下问题的答案：

问题 1.5。如果 μ 是紧生成局部紧第二可数群 G 的遍历紧 IRS，那么 $\langle\mu\rangle$ 必然是紧的吗?

我们还提出：

问题 1.6。如果 μ 是局部紧第二可数群 G 的紧 IRS，那么 $\langle\mu\rangle$ 必然包含于 $\mathcal{W}(G)$ 中吗？它必然包含于 $\mathcal{E}(G)$ 中吗?

注 1.7。若 G 满足上述结论 (1)、(2)或 (3)，$\Gamma \leq G$ 是一个格，且 $N \trianglelefteq \Gamma$是有限正规子群，那么 N 包含于 G的某个紧正规子群中；分别对于 $\mathcal{W}(G)$ 或 $\mathcal{E}(G)$ 的情形也是如此。一般而言，一个非一致格的有限正规子群是否必然包含于环境群的多紧根中，似乎仍是一个未解决的问题。

[2]这个不变随机子群本质上是与顶点稳定子 G_η K相关联的交截不变随机子群，定义见 [HY18，第 3] 节。尽管他们只考虑可数群，只要 K 的正规化子是开群，他们的定义就适用。

给定 μ 的一个紧不变随机子群 G，我们可以通过先抽取一个 μ-随机子群 H，再抽取一个 Haar 随机元素 $h \in H$ <style id='22'/>（见命题 2.4），定义一个 ν上的、支撑于椭圆元素的共轭不变概率测度 G。反过来，给定 ν上的这类测度 G，我们通过映射 G，可以得到 $g \mapsto \langle g \rangle$ 的一个紧不变随机子群。因此，我们可以在紧致 IRS 与支撑于椭圆元素的共轭不变概率测度之间来回转换。请注意，即使 ν 支撑于单个元素的共轭类上，supp(ν) 是否紧致也并不明确；例如参见 [Raj25], ，其中证明了 (M)-扩张阿贝尔群的情形。

通过研究 supp(ν)，结合 Poincar´e 递归论证与 Willis 关于全不连通局部紧群的结构理论，我们证明：

定理 1.8. 设 G是一个全不连通的局部紧第二可数群，且 μ是 G的一个紧不变随机子群。$\langle \mu \rangle$ 则包含于 $\bigcap_{g \in G} \mathrm{lev}(g)$中，即所有内自同构的 *Levi* 子群的交集[3]。

致谢。 我们衷心感谢 Pierre-Emmanuel Caprace 提出这一问题，并与我们进行了许多有益的讨论。感谢 Romain Tessera 和 Tianyi Zheng 的宝贵讨论与真知灼见。第一作者的研究经费由欧盟（欧洲研究委员会，函数域，101161909）共同资助。第二作者感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过 CRC TRR 358 – 项目编号 491392403 提供支持。本研究部分工作是在第四作者访问加利福尼亚大学圣迭戈分校期间完成的，她感谢 Tianyi Zheng 的热情接待。她的访问部分得到美国国家科学基金会 DMS 2348143 的经费支持。此外，她还是比利时法语区科学研究基金的博士后研究员。

2 预备知识

给定一个局部紧群 G，我们用 Sub(G) 表示 G 的闭子群空间，并赋予其*Chabauty* 拓扑。该拓扑的一个子基如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{Hit}(V) &:= \{H \leq G \mid H \cap V \neq \varnothing\} && V \subset G \text{ open} \\ \mathrm{Miss}(K) &:= \{H \leq G \mid H \cap K = \varnothing\} && K \subset G \text{ compact.} \end{aligned}$$

该空间是紧的且为豪斯多夫空间。若 G 是第二可数的，则它也可度量化。有关介绍，请参见 [Gel18]。

引理 2.1. 设 G 是一个局部紧第二可数群。若每个遍历紧 *IRS* 都包含于某个紧正规子群中，则每个紧 *IRS* 都包含于 $\mathcal{W}$（G）中。若 $\mathcal{W}$（G）是闭的，则逆命题也成立。

证明。 第一部分由遍历分解定理直接得出 [Gla03，定理 3。22]。若要证明逆命题在 $\mathcal{W}(G)$ 为闭集时成立，只需注意，根据 [Cor15，定理 2 的证明中的 (1)。8]， $\mathcal{W}(G)$ 可写成紧集的递增并 $\mathcal{W}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$

[3]Willis 在 中将该子群称为近似中心，见 [Wil23]。

相对开子群 $O_n \triangleleft G$。由此可知 $\{K \leq \mathcal{W}(G) \mid K \text{紧}\} = \bigcup \text{Sub}(O_n)$，因此根据遍历性，存在 n 使得 $\mu(\text{Sub}(O_n)) = 1$。 □

若 G 是一个局部紧第二可数群，我们称子群 $H \leq G$ 是余有限的，若存在一个定义在 G/H 上的 Borel$G$- 不变概率测度。

引理 2.2. 设 $H \leq G$ 是一个子群。那么 H 的正规化子是余有限的，当且仅当存在一个支撑在其共轭类上的不变随机子群；也就是说，存在一个不变随机子群 μ 使得

$$\mu\left(\left\{gHg^{-1} \middle| g \in G\right\}\right) = 1.$$

证明。记 $N = N_G(H)$ 为 G 中 H 的正规化子。映射 $gN \mapsto gHg^{-1}$ 给出了商空间 G/N（其中 G 通过左乘作用）与子集 $\{gHg^{-1} \mid g \in G\} \subset \text{Sub}(G)$（其中 G 通过共轭作用）之间的可测同构。因此，在 G/N 上存在 G-不变概率测度，等价于存在一个支撑在 $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 上的 G 的不变随机子群。 □

令 $\mathcal{M}(G)$ 表示 G 上 Borel 概率测度构成的空间。对于紧子群 $H \leq G$，令 $m_H \in \mathcal{M}(G)$ 表示 H 上的归一化 Haar 概率测度，将其视为 G 上支撑集包含于 H 的测度。

引理 2.3。令 $\mathcal{C} \subseteq \text{Sub}(G)$ 表示紧子群构成的集合。那么 $\mathcal{C}$ 可测，且映射 $\mathcal{C} \to \mathcal{M}(G)$ $H \mapsto m_H$ 是 *Borel* 可测的。

证明。为证明 $\mathcal{C}$ 可测，回顾 G 是 σ-紧的，并写作 $G = \bigcup_n O_n$，其中 $O_0 \subset O_1 \subset \ldots$，且 $O_n \subset G$ 是开集并具有紧闭包。记 $K_n := O_n$。那么 $\mathcal{C} = \bigcup_n \{H \in \text{Sub}(G) \mid H \curlywedge K_n\}$ 是可数个闭子集的并集。

固定一个连续非负紧支撑函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$，满足 $f(1) = 1$。对于每个闭子群 $H \leq G$，令 $m_f(H) \in \mathcal{M}(G)$ 表示 H 上唯一的左 Haar 测度，并通过 $\int_G f\, dm_f(H) = 1$. 进行归一化。根据 [BT17，命题 A.2]，，映射 $H \mapsto m_f(H)$ 从 Sub(G) 到 $\mathcal{M}(G)$ 是连续的。

对于每个 n，映射 $H \mapsto m_f(H)(K_n)$（从 Sub(G) 到 $[0, \infty)$ 是 Borel 映射，因为 $H \mapsto m_f(H)$ 是连续的，并且对于固定的紧子集 C，求值映射 $\mu \mapsto \mu(C)$，从$\mathcal{M}(G)$ 到 $[0, \infty$，是 Borel 映射。因此，映射

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow (0, \infty) \\ H &\longmapsto m_f(H)(H) \end{aligned}$$

是 Borel 映射，因为 $m_f(H)(H) = \sup_n m_f(H)(K_n)$，并且可数个 Borel 映射的上确界仍然是 Borel 映射。现在，对于 $H \in \mathcal{C}$，我们有

$$m_H = \frac{1}{m_f(H)(H)}\, m_f(H),$$

因此，$H \mapsto m_H$ 是 Borel 的。 □

回忆一下，若 $\langle g\rangle$ 是紧的，则元素 $g \in G$ 称为椭圆元素。给定一个紧不变随机子群 μ，我们在 G 上定义一个共轭不变概率测度 ν，其支撑集包含于椭圆元素。

命题 2.4。设 μ 是局部紧第二可数群 G的一个紧不变随机子群。则在 G 上定义的 ν 公式为：对每个 *Borel* $A \subseteq G$,

$$\nu(A) = \int_{\mathrm{Sub}(G)} m_H(A \cap H)\mathrm{d}\mu(H)$$

定义了 G上的一个共轭不变概率测度。此外，$\bigcup$支撑 $\mu \subseteq$ 支撑 ν。

证明。由引理 2.3 可知，对任意 Borel $A \subseteq G$，映射 $H \mapsto m_H(A) = m_H(A \cap H)$ 是 Borel 的。因此，我们可以定义 $\nu(A) = \int \mathrm{Sub}(G)\ m_H(A \cap H)\mathrm{d}\mu.$。由于 μ是共轭不变的，该测度也是共轭不变的。现在，假设 $g \notin \mathrm{supp}\ \nu$，我们来证明 $g \notin \bigcup \mathrm{supp}\ \mu$。$g \notin \mathrm{supp}\,\nu$这一事实意味着存在一个包含 g的开邻域 V，使得 $\nu(V) = 0$。这意味着 $\mu(\mathrm{Hit}(V)) = 0$：如果 $\mu(\mathrm{Hit}(V))$ 为正，那么 $\nu(V) = \int \mathrm{Sub}(G)\ m_H(V \cap H)$ 也会为正，因为对于每个 $H \in \mathrm{Hit}(V)$，都有 $m_H(V \cap H) > 0$。因此，$\mu(\mathrm{Miss}(V)) = 1$。后者是一个测度为 1 的闭子集，所以它包含 $\mathrm{supp}(\mu)$。既然 $g \in V$，这就意味着$g \notin \bigcup \mathrm{supp}\ \mu$。 □

注记 2.5. 反过来，给定一个共轭不变概率测度 ν 在 G 上，且其支撑集位于椭圆元素集合中，则映射 $G \to \mathrm{Sub}(G)\ g \mapsto \langle g\rangle$ 定义了一个紧不变随机子群。不难验证该映射是可测的；Hofmann–Willis 证明，它连续当且仅当 G 是全不连通的 [HW15]。

U̇sakov [U̇sa70] 和 Wang [Wan71] 对一个引理的如下推广可见 [CGLT25]。

引理 2.6. 设 $H \leq G$ 是一个紧子群，且 $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 是$\mathrm{Sub}(G)$的闭子集。那么 $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 包含于 G的一个紧正规子群中。

若 $N \triangleleft G$ 是正规子群，则商映射 $G \to G/N$ 诱导出一个映射 $\mathrm{Sub}(G) \to \mathrm{Sub}(G/N)$，将 H 映至 HN/N的闭包；该映射通常并不连续（除非 N 是紧的），但它是可测的。给定 G的一个不变随机子群 μ，它前推为 G/N 的不变随机子群 μ/N；若 μ是紧的，显然 μ/N 也是。

引理 2.7。设 G 是一个局部紧第二可数群，$N \triangleleft G$ 是一个紧正规子群。设 μ 是 G 的一个紧不变随机子群。如果 μ/N 包含于某个紧正规子群中，那么 μ 也包含于某个紧正规子群中。

证明。设 $KN/N \triangleleft G/N$ 是一个包含 μ/N的紧正规子群。那么 KN 是 G 的一个包含 μ的紧正规子群。 □

3 李群与几乎连通群

回忆一下，若一个局部紧第二可数群 G满足几乎连通 的条件， G/G^0 便是紧的，其中 G^0 是单位元的连通分支。在这种情况下，我们有 $\mathcal{W}(G) = \mathcal{E}(G)$ 是 G的一个紧正规子群，参见 [Cor15，例 2。3]著名的格里森–山部定理指出，任何几乎连通的局部紧群都是 pro-Lie；因此，本节大部分内容都讨论李群。

定理 3.1。 在李群中，每个遍历紧不变随机子群都包含于某个紧正规子群中。

证明结合了文献中的三个结果：首先，紧子群只有可数多个共轭类；其次，每个可 amenable IRS 都包含于可 amenable 根中；第三，可 amenable 李群的每个余有限子群都是余紧的。

定理 3.2。 李群至多有可数多个紧子群的共轭类。

证明。 设 G 是一个几乎连通李群，并设 K 是 G的极大紧子群。由于 K 是一个紧李群，它至多有可数多个闭子群（参见[Pal60，推论 1.7，27] 或 [CG18，命题 2。4]）。由于 G 的每个紧子群都与 K的某个子群共轭，这就证明了几乎连通李群的情形。若 G是任意李群，则每个紧子群 K 都包含于 KG^0中，而后者是 G的一个几乎连通开子群。由于 G 至多有可数多个开子群，结论得证。

□

推论 3.3。 设 G是一个李群，且 μ是 G的遍历紧不变随机子群。则存在一个紧子群 $K \leq G$，使得 $\mu(\{gKg^{-1}|g \in G\}) = 1.$

证明。 由定理3.2，存在一个紧子群的可数集合 $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 G 的每个紧子群都与 K_i 共轭，其中某个 $i \in \mathbb{N}$满足这一性质。由于 μ 是紧不变随机子群，因此：

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{gK_ig^{-1}|g \in G\}\right) = 1.$$

由于 μ 是遍历的，存在 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(\{gK_{i_0}g^{-1}|g \in G\}) = 1.$ □

引理 3.4。 设 G 是一个可 *amenable* 李群。则每个遍历紧不变随机子群都包含于某个紧正规子群中。

证明。 设 μ 是可 amenable 李群 G的一个遍历紧不变随机子群。根据推论 3.3，存在一个紧子群 $K \leq G$，使得 $\mu(\{gKg^{-1} \mid g \in G\}) = 1$。根据引理2.2，其正规化子 $N_G(K)$ 在 G中余有限。根据 Bader–Caprace–Gelander–Mozes 的一项结果，

[BCGM19，推论 5。25], 可 amenable 李群的每个余有限子群都是余紧的。映射

$$G/N_G(K) \to \mathrm{Sub}(G)$$
$$gN_G(K) \mapsto gKg^{-1}$$

是连续的，且 $G/N_G(K)$ 是紧的，因此 $\{gKg^{-1}|g \in G\}$ 在 Sub(G) 中是紧的，因而是闭的。由引理2.6 可知，存在一个紧正规子群 N 包含$\{gKg^{-1} \mid g \in G\} = \bigcup \mathrm{supp}(\mu)$。由于 N是闭的， $\langle \mu \rangle \leq N$, 证毕。 □

定理 3.1 的证明。设 μ 是李群 G 的遍历紧不变随机子群。由推论 3.3，存在一个紧子群 $K \leq G$ ，使得 μ 支撑在 K 的共轭类 $[K]_G$ 上。根据 [BDLW16], ，每个 amenable 不变随机子群，尤其是每个紧不变随机子群，都包含于可 amenable 根 R 中。但 R 也是李群，且其紧子群只有可数多个共轭类。因此，存在可数多个 $g_i \in G$ 满足 $[K]_G = \bigsqcup_i [g_i K g_i^{-1}]_R$，于是 μ 可分解为直和 $\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \mu_i$，其中每个 μ_i 都是 R 的紧不变随机子群，支撑在 R-共轭类 $[g_i K g_i^{-1}]_R$ 上，并且特别地是遍历的。然而 R 是正规子群，因此 $[g_i K g_i^{-1}]_R = g_i [K]_R g_i^{-1}$；由 μ 的不变性可知，这些 R-共轭类的测度都相同且为正。因此，它们只能有有限多个。现在 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu) = \bigcup_i \mathrm{supp}(\mu_i)$，根据引理 3.4，这是有限个具有紧闭包的集合之并。由引理 2.6 即得结论。 □

推论 3.5。 设 G 是一个局部紧第二可数群，且 G/G^0 是紧的。那么， G 的每个紧不变随机子群都包含于多紧根中，而多紧根是紧的。

证明。 根据山边定理，存在一个紧正规子群 $N \triangleleft G$，使得 G/N是一个李群。结论现在由定理 3.1 和引理 2.7 得出。 □

推论 3.6。 设 G 是一个局部紧第二可数群，且 G/G^0 是离散的。那么， G 的每个遍历紧不变随机子群都包含于某个紧正规子群中。

证明。 设 μ是 G的一个遍历紧不变随机子群。根据定理 3.1，商不变随机子群 μ/G^0 包含于一个有限正规子群 $F \triangleleft G/G^0$中。于是 μ 是原像 N 的一个不变随机子群F。由于 $G^0 \leq N$是余紧的，群 N几乎连通，且 μ是 N的不变随机子群。根据推论 3.5，紧不变随机子群 μ 包含于紧群 $\mathcal{W}(N)$ 中。 □

4 全不连通群

为简洁起见，如果一个拓扑群$tdlc$ 全不连通且局部紧，我们就称其为全不连通局部紧群；如果它还满足第二可数性，则称其为第二可数全不连通局部紧群。

定义 4.1 (Willis). 设 G 是一个全不连通局部紧群，且 $g \in G$。 g 的抛物子群 为[4]

$$\begin{aligned}\mathrm{par}(g) &:= \{h \in G \mid \{g^n h g^{-n} \mid n \geq 0\} \text{ has an accumulation point}\} \\ &= \{h \in G \mid \overline{\{g^n h g^{-n} \mid n \geq 0\}} \text{ is compact}\}.\end{aligned}$$

[4]这些集合相等的证明见 [Wil94，命题 3]。

该*Levi* 子群属于 g 是

$$\mathrm{lev}(g) := \mathrm{par}(g) \cap \mathrm{par}(g^{-1}) = \{h \in G \mid \overline{\{g^n h g^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}} \text{ is compact}\}.$$

我们定义 $\mathrm{lev}(G) := \bigcap_{g \in G} \mathrm{lev}(g)$；这个子群由 [Wil23] 引入，并称为近似中心，记作 $AZ(G)$。元素的抛物子群和 Levi 子群都是闭的（见 [Wil94，命题 3]）。由此可知，$\mathrm{lev}(G)$ 是一个闭正规子群。我们总有

$$\mathcal{W}(G) \leq \mathrm{lev}(G). \tag{1}$$

为此，写作 $I_g(x) := gxg^{-1}$ 表示 $g,\ x \in G$。对于 G 的每个紧正规子群 K，给定 $x \in K$ 和 $g \in G$，我们有 $\{I_g^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$，因此 $x \in \mathrm{lev}(g)$，从而$x \in \mathrm{lev}(G)$。于是 $K \subseteq \mathrm{lev}(G)$，断言由此得证。

定理 4.2。设 μ 是 *tdlcsc* 群 G 的一个紧不变随机子群。那么 $\overline{\langle \mu \rangle} \leq \mathrm{lev}(G)$。

证明。我们考虑命题2.4 中定义的概率测度 ν G 上一个良定义的共轭不变概率测度，并且 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{supp}(\nu)$。由于 ν 是共轭不变的，对每个 $g \in G$，由庞加莱′复现定理可得

$$\nu(\{h \in G \mid g^n h g^{-n} \text{ accumulates at } h\}) = 1.$$

特别地，$\nu(\mathrm{par}(g)) = 1$。由于 $\mathrm{par}(g)$ 是闭的，这意味着 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{par}(g)$。由于 g 是任意的，我们有 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{lev}(G)$。由于 $\mathrm{lev}(G)$ 是一个闭子群，我们得到 μ 的正规闭包包含于 $\mathrm{lev}(G)$ 中。 □

4.1 p-adic 李群

现在我们转向 p-adic 李群，并注意到：[5]

注 4.3：$\mathcal{W}(G)$ 对每个 p-adic 李群 G都是闭的。

事实上，$\mathcal{W}(G) = \bigcup \mathcal{K}$ 对于 $\mathcal{K}$ 的紧正规子群 G，下面的引理适用。该引理推广了这样一个事实：的闭子群 $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$ 的递增并 p总是闭的（见 [Gl¨o18] 中的引理 6.5；另见 [Wan84] 中定理 3.5 的证明步骤 1）。

引理 4.4。设 G 是一个 p-进李群，$\mathcal{H}$ 是 G 的一个闭子群集合，并且在 $\subseteq$下有向。那么 $H := \bigcup \mathcal{H}$ 在 G中是闭的。

证明。如果 x 属于 H的闭包，则存在一个序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$，其中各项属于 H，且该序列收敛到 x。那么 $x_n \in H_n$ 对某个 $H_n \in \mathcal{H}$成立；由于 $\mathcal{H}$ 是有向的，我们可以假设 $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$。因为 $C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ 是闭的，所以得到 $x \in C \subseteq H$。 □

若每个单位元邻域都包含一个开正规子群，则称局部紧群 G 为前离散 群。

[5]我们指出，对于注记4.3 至引理4，第二可数性并非必要条件。 7.

定理 4.5. 若 G是一个紧生成的 p-进李群，则$\mathrm{lev}(G)$ 的每个单位元邻域都包含$\mathrm{lev}(G)$的一个紧开子群，该子群在 G中正规。特别地，$\mathrm{lev}(G)$是前离散的，且 $\mathcal{W}(G)$ 是$\mathrm{lev}(G)$的一个开子群。

接下来的两个引理将帮助我们证明该定理。

引理 4.6。 $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 是椭圆元素，当且仅当 $|\lambda| = 1$ 对于 $\mathbb{Q}_p$在 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包中 α 的每个特征值 λ，其中 $|\cdot|\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的p-进绝对值在 $\mathbb{Q}_p$上的唯一延拓。

证明。 若 $|\lambda| = 1$ 对所有 λ均成立，则 α 根据 [Glöo18]中的引理 3.9， α 是椭圆元素。反之，设 α 是椭圆元素，且 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{Q}_p$ 是 α的特征多项式的分裂域。若 $|\lambda| > 1$ 对于 α 在 $\mathbb{K}$ 中的某个特征值，以及 $v \in \mathbb{K}^n$ 相应的特征向量，则其轨道

$$\alpha^{\mathbb{N}_0}(v) := \{\alpha^m(v)\colon m \in \mathbb{N}_0\} = \{\lambda^m v\colon m \in \mathbb{N}_0\}$$

无界。但 $\alpha^{\mathbb{N}_0}(v)$ 相对紧，因此有界，因为 $\alpha^{\mathbb{N}_0}$ 包含于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ 的一个紧子集中，且作用 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, (\beta, x) \mapsto \beta(x)$ 是连续的；矛盾。改用 α 的负幂，我们还可知 $|\lambda| < 1$也不可能成立。 □

给定一个 p-进李群 G，记其李代数为 $\mathrm{Lie}(G)$。若 $\psi\colon G \to H$ 是 p-进李群之间的解析群同态，则 $\mathrm{Lie}(\psi) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ 表示其对应的李代数同态。若 M 是解析 p-进流形，记其切丛为 TM。若 $f\colon M \to N$ 是 p-进流形之间的解析映射，则将其切映射记为 $Tf\colon TM \to TN$。此外，$\mathrm{Aut}(G)$ 表示 p-进李群 G 的自同构群。

引理 4.7。 令 H 和 N 为 p-进李群， $\mathfrak{n} := \mathrm{Lie}(N)$ 以及

$$\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N), \quad h \mapsto \alpha_h$$

是群同态，且相应的作用 $\widehat{\alpha}\colon H \times N \to N, (h, x) \mapsto \alpha_h(x)$是解析的。假设 H 是紧生成的，且对每个 $h \in H$，$\mathrm{Lie}(\alpha_h)\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{n})$ 中的椭圆元素。那么，每个单位元邻域 $U \subseteq N$ 都包含 N 的一个紧开子群 V，使得

$$\alpha_h(V) = V \quad \textit{for all } h \in H.$$

如果对于所有 $x \in N$，内自同构 $I_x^N\colon N \to N, y \mapsto xyx^{-1}$都属于 $\alpha(H)$，那么前面提到的每个 V 都是 N 的正规子群，而且 N 是前离散的。

证明。 令 $K \subseteq H$为一个紧生成集。由于 $\widehat{\alpha}$是解析的， $T\widehat{\alpha}$也是解析的： $TH \times TN \cong T(H \times N) \to TN$，因此其限制 $H \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$（$h$， x） $\mapsto \mathrm{Lie}(\alpha_h)(x)$ 也具有相同性质。特别地，对于 x ，$\mathrm{Lie}(\alpha_h)(x)$ 在 $\mathfrak{n}$的一组基下是解析的，这意味着群同态

$$\beta\colon H \to \mathrm{GL}(\mathfrak{n}), \quad h \mapsto \beta_h := \mathrm{Lie}(\alpha_h)$$

是解析的，因此也是连续的。由此，$S := \beta(H)$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{n})$ 的一个紧生成子群，由 $\beta(K)$ 生成。根据假设，对于每个 α_h，$\mathrm{Lie}(\alpha_h)$ 都是椭圆元素。因此，根据 Parreau 定理（参见 $h \in H$。Par´theor`eme 1 in [Par03]；另见 [GW01] 中的命题 5.1），$\mathrm{GL}(S)$ 的紧生成子群 $\mathfrak{n}$是相对紧的。存在一个紧开 $\mathbb{Z}_p$-子模 $W \subseteq \mathfrak{n}$ 使得

$$g(W) = W \quad \text{for all } g \in S$$

（参见 [Ser92]第二部分，第四章，附录 1 中的定理 1）。于是 $\|0\| := 0$,

$$\|x\| := p^{-\max\{n \in \mathbb{Z}:\, x \in p^n W\}}$$

对于 $0 \neq x \in \mathfrak{n}$定义了一个超度量范数 $\|\cdot\|: \mathfrak{n} \to [0,\infty[$ 使得 $p^n W = \{x \in \mathfrak{n}: \|x\| \leq p^{-n}\}$ 对于每个 $n \in \mathbb{Z}$。根据 §8 第 3 节中 [Bou89], 第二章命题 3，存在$n_0 \in \mathbb{Z}$ 使 Baker-Campbell-Hausdorff 级数收敛为一个群乘法

$*$：对于所有整数 $n \geq n_0$。增大 n_0 后，我们可以假设存在一个指数映射 $\exp_N$: $p^{n_0} W \to N$，它是到一个开单位元邻域 $O \subseteq N$ 上的解析微分同胚（参见 [Bou89]第三章 §4 第 3 节中的定义 1）。增大 n_0 后，我们可以假设 O 是 N 的一个紧开子群，并且 $\exp_N : (p^{n_0} W, *) \to O$ 是 p-进李群之间的同构（参见 [Bou89]第三章 §7 第 2 节中的命题 3）。于是还有

$$U_n := \exp_N(p^n W)$$

对每个 $n \geq n_0$，都是 N 的一个紧开子群，并且 $\exp_N$ 限制为从 $p^n W$ 到 U_n 的同构。注意，每个连续同态

$$\gamma\colon \mathbb{Z}_p \to O$$

由 $\dot\gamma(0) := \frac{d}{dz}\Big|_{z=0} \gamma(z)$ 唯一确定。事实上，对于某个 $x \in p^{n_0} W$，$\gamma(1) = \exp_N(x)$。于是，对所有 $n \in \mathbb{Z}$，$\gamma(n) = \gamma(1)^n = \exp_N(x)^n = \exp_N(nx)$，因此

$$\gamma(z) = \exp_N(zx) \quad \text{for all } z \in \mathbb{Z}_p \tag{2}$$

根据连续性。因此，$\dot\gamma(0) = \frac{d}{dz}\Big|_{z=0} \exp_N(zx) = x$，这通过（）确定了2。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射 $\beta: H \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}, (h,x) \mapsto \beta_h(x)$ 是连续的，并且对紧集 $K \times \{0\}$ 中所有的 (h,x)，$\beta(h,x) = 0$ 成立。因此，存在 $m_0 \geq n_0$ 使得

$$\widehat{\beta}(K \times p^{m_0} W) \subseteq p^{n_0} W.$$

同理，增大 m_0 后，我们得到 $\widehat{\alpha}(K \times \exp_N(p^{m_0} W)) \subseteq O$。

Then

$$\exp_N(\beta_h(x)) = \alpha_h(\exp_N(x)) \quad \text{for all } h \in K \text{ and } x \in p^{m_0} W. \tag{3}$$

事实上，这两个映射 $\mathbb{Z}_p \to O$ 将 $z \in \mathbb{Z}_p$ 映为 $\exp_N(\beta_h(zx))$ 和 $\alpha_h(\exp_N(zx))$ 分别都是连续同态，在 $\beta_h(x$处的导数为 $z = 0$。因此它们相同，且 $z := 1$ 给出（3）。对于所有 $n \geq m_0$，我们对每个 $h \in K$ 可推得:

$\alpha_h(\exp_N(p^nW)) = \exp_N(\beta_h(p^nW)) = \exp_N(p^nW)$，利用 $\beta_h \in S$。因此 $\alpha_h(U_n) = U_n$对所有 $h \in K$ 成立，由此 $\alpha_h(U_n) = U_n$ 对所有 $h \in H$ 成立，因为 K 生成了 H。取足够大的 $n \geq m_0$，则有 $U_n \subseteq U$。于是 $V := U_n$ 正是所需。 □

推广内自同构的情形，若 $\alpha\colon G \to G$ 是全不连通局部紧群 G上的自同构，我们记 lev(α) 为其 Levi 因子，即所有满足以下条件的元素 $x \in G$： $\alpha^{\mathbb{Z}}(x)$ 在 G中相对紧。于是 lev(α) 是 G 的闭子群（参见 [Wil94]）。现在我们可以证明定理 4.5。

定理 *4.5* 的证明。考虑群同态 $I\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto I_g$。相应的作用 $\widehat{I}\colon G \times G \to G, (g, x) \mapsto I_g(x) = gxg^{-1}$ 是解析的。由于 $A := \mathrm{lev}(G)$ 是 G的正规子群，我们得到一个群同态

$$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(A), \quad g \mapsto \alpha_g := I_g|_A^A.$$

作为一个闭正规子群， A 是 G的李子群，因此其限制

$$\widehat{\alpha}\colon G \times A \to A, \quad (g, x) \mapsto \alpha_g(x)$$

$\widehat{\ }$ I 到 $G \times A$ 同样是解析的。令 $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ 为 G的李代数。我们将 $\mathfrak{a} := \mathrm{Lie}(A)$ 视为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，并同样将 $\mathfrak{l}_g := \mathrm{Lie}(\mathrm{lev}(g))$ 视为 $g \in G$的李子代数。考虑伴随表示 $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g := \mathrm{Lie}(I_g)$ G。由于 A 是 G的闭正规子群，对于所有 $g \in G$，我们有 $\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ 。因此得到一个群同态

$$\beta\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{a}), \quad g \mapsto \beta_g := \mathrm{Ad}_g|_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}}.$$

将 Lie(A) 识别为 Lie(G) 的向量子空间意味着 $\beta_g =$Lie(α_g)。

已知 Lie(lev(I_g)) $= \mathrm{lev}(\mathrm{Ad}_g)$ 对于 Ad_g 作为 tdlcsc 群（$\mathfrak{g}$, $+$）的自同构成立；参见 [Wan84] 中的定理 3.5 (iv)。因此

$$\beta_g^{\mathbb{Z}}(x) = \mathrm{Ad}_g^{\mathbb{Z}}(x)$$

对于每个 $x \in \mathfrak{a} \subseteq$lev($\mathrm{Ad}_g$)，在 $\mathfrak{g}$ 中相对紧（因而在 $\mathfrak{a}$中也相对紧）。令 $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ 为 Ad_g的特征多项式的分裂域。根据 [Gl¨o18], 中的定理 3.6 (b)，自同构 $(\beta_g)_{\mathbb{K}} := \beta_g \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{K}} := \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{K}$ 上的所有特征值在 $\mathbb{Q}_p$中的绝对值都为 1。因此，根据引理 4.6， β_g 是 GL($\mathfrak{a}$)中的椭圆元素。将引理 4.7 应用于 $H := G$ 和 $N := A$，我们得到： A 的每个单位元邻域 U 都包含一个 A 的紧开子群 V，该子群对于所有 $g \in G$都在 $\alpha_g = I_g^G|_A^A$ 作用下保持不变。由于对于所有 $g \in A$都有 $I_g^G|_A^A = I_g^A$，我们看到， V特别是 A的正规子群。□

定理 1.2(ii) 的证明，紧生成情形。由定理 4.5，lev(G) 有一个紧开子群 N ，它是 G的正规子群。设 μ是 G的一个遍历紧 IRS。由定理 4.2， $\langle\mu\rangle$ 包含于 lev(G)。因此，我们可以将 μ 推前，得到定义在可数群 lev(G)/N 上的 IRS μ/N；它在 G-作用下遍历。由于 μ 几乎必然是紧的，且 lev(G)/N 是离散的， μ/N 几乎必然是有限的。由于 lev(G)/N 是可数的，

它至多有可数多个有限子群；由于 μ/N 在 G对 Sub(lev(G)/N) 的作用下遍历，因此其支撑集必包含于某个有限的 G-共轭类。由乌沙科夫引理（引理 2.6）可知，存在一个有限正规子群 $F \subset \mathrm{lev}(G)/N$，使得 μ/N包含于 F。最后应用引理 2.7。 □

在第 6 节中，我们将证明一个 tdlcsc 群满足结论(3) 当且仅当它的每个紧生成子群都满足该结论（推论6.3），由此得到定理 1.2(i)。

4.2 代数群

定理 4.8 (定理1.2(ii)，代数情形)。 设 $\mathbf{G}$ 是定义在 k 上的连通代数群，其中该域是特征零局部域，并设 $G = \mathbf{G}(k)$。那么， G 的每个遍历紧 *IRS* 都包含在一个紧正规子群中。

证明。考虑命题 2.4 中定义的概率测度 ν。根据 [Sit75, 定理 3.1]，， G 上的每个共轭不变概率测度都支撑于 $B(G)$，即共轭类具有紧闭包的元素所成的子群。[6] 由于 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{supp}(\nu)$，因此 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu)$ 包含于 $B(G)$。我们已经知道 $\bigcup \mathrm{supp}(\mu)$ 包含于$P(G)$，即椭圆元素的子集。注意到 $B(G) \cap P(G) = \mathcal{W}(G)$ ([Cor15, 命题 2.4(2)])。回想注 4.3，可得 $\langle \mu \rangle \leq \mathcal{W}(G) = \mathcal{W}(G)$，证毕。 □

5 作用于度量空间的群

在本节中，(X, d) 表示一个度量空间，局部紧第二可数群 G 在该空间上连续地通过等距变换作用。对于子集 $A \subset X$，其 直径 定义为 $\mathrm{diam}(A) := \sup_{x,\ y \in A} d(x,\ y) \in [0, \infty]$；集合 A 称为有界的，如果其直径有限。回顾一下， G 的作用称为余有界的，如果存在有界集 $B \subset X$ 使得 $X = \bigcup_{g \in G} gB$。如果对于每个有界 $B \subset X$，集合 $\{g \in G \mid gB \cap B \neq \varnothing\}$ 都具有紧闭包，则称该作用为适当的。

引理 5.1。 设 μ 是 G 的遍历紧 *IRS*，且 $x \in X$。那么存在 $R > 0$，使得对于 μ-几乎处处的 $H \leq G$，存在 $g \in G$，满足 $\mathrm{diam}(H(gx)) \leq R$。

证明。 由于 G 的作用是连续的，对于每个紧 $H \leq G$ 和每个 $x \in X$，我们都有 $\mathrm{diam}(Hx) < \infty$。注意，映射 $\mathrm{Sub}(G) \to [0, \infty]$, $H \mapsto \mathrm{diam}(Hx)$ 是可测的。因此，对于每个 $x \in X$,

$$1 = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{H \mid \mathrm{diam}(Hx) < n\} \Big).$$

由此可知，存在 $n > 0$，使得 $\mu(\{H \mid \mathrm{diam}(Hx) < n\}) > 0$。由于 μ 是遍历的，对于某个 $g \in G\}$, $\mu(\{H \mid \mathrm{diam}(Hgx) < n) = 1$，如所述。 □

[6] 术语说明：Sit 使用“中心的”一词，而非“共轭不变的”，并且选择讨论有限测度，而非概率测度。

推论 5.2。 设 G 对 X 的作用是余有界的，并令 μ 为 G 的遍历紧不变随机子群。那么存在 $R>0$，使得对于任意包含任意大的球的子集 $A\subset X$，对于 μ-几乎所有的 $H\leq G$，集合 $\{x\in A \mid \text{直径}(Hx)\leq R\}$ 无界。

证明。 固定 $x\in X$ 并令 $R>0$ 为引理 5.1所给出的对象。首先我们证明，对于 μ-几乎处处，集合 $\{x\in A \mid \text{直径}(Hx)\leq R\}$ 非空。对于子群 H，记作$H_R=\{y\in X \mid \text{直径}(Hy)\leq R\}$。根据 R的选取，我们有 $H_R\neq\varnothing$ 对 μ-几乎所有H均成立。因此

$$\mu\Big(\bigcup_{n>0}\{H \mid H_R\cap B(x,n)\neq\varnothing\}\Big)=1,$$

且该并集是递增的。令 $\varepsilon>0$ $n>0$ $\mu(\{H \mid H_R\cap B\ x\ n\ \neq$，于是存在使得（，）。 $\varnothing\})>1-\varepsilon$ n
假设足够大，并且由于该作用是余有界的，存在
$g_n\in G$ $B\ g_n x\ n\ \subset A$ μ $\mu(\{H \mid H_R\cap B\ g_n x\ n\ \neq$使得（，）。由于其是不变的，我们得到（，）， $\varnothing\})>1-\varepsilon$
特别地，

$$\mu\big(\{H \mid H_R\cap A\neq\varnothing\}\big)>1-\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的， $\mu\big(\{H \mid H_R\cap A\neq\varnothing\}\big)=1$。

现在注意，对每个 $N\in\mathbb{N}$，集合 $A_N:=A\setminus B(x,\ N)$ 仍包含任意大的球；又由于可数个满测集的交集仍是满测集，因此对 μ-几乎所有 $H\leq G$，对所有 N 都满足 $H_R\cap A_N\neq\varnothing$。证明至此完成。

□

5.1 双曲空间

如果群 G 在一个适当的测地 Gromov 双曲空间（X,d）上适当地且余有界地作用，则称其为双曲群。不过，为了也涵盖无限端群的情形，本小节不要求空间 X 是适当的。基础知识请参见 [CDCMT15，第 3] 节。特别地，Gromov 边界 ∂X 并非通过测地射线的等价类来定义，而是通过 Cauchy–Gromov 序列的等价类来定义（此处不作定义）。只关注适当空间的读者可以将 Cauchy–Gromov 序列（x_n）视为点 $c(n)$，其中 $c\colon [0,\infty)\to X$ 是一条测地射线。由于 G 在 X 上的作用是等距变换，它在 ∂X 上诱导出连续作用。若存在两个双曲元素属于 G，且它们在边界上的不动点对不相同，则称 G 在 X 上的作用是非初等的（所有双曲元素仍可能有一个共同的不动点；此时该双曲群称为焦点型）。

本小节的目标是证明以下定理，而定理 1.3是它的一个特例：

定理 5.3。 设 G 是一个局部紧第二可数群，它在一个（不一定是正规）测地双曲空间 (X,d)上非初等地、恰当地且余有界地作用。那么，多紧根$\mathcal{W}(G)$ 是紧的，并且包含每个紧不变随机子群。

定理的证明5.3 在下面的引理之后给出。

引理 5.4. 设 G 是一个局部紧第二可数群，它余有界地作用在双曲空间 (X, d)上。设$\xi \in \partial X$，并设 μ 是 G的遍历紧 *IRS*。那么，对于 μ-几乎处处的子群，该子群固定 ξ。

证明。 取一个基点 $x \in X$。根据定义可知，给定满足 $d(x_n,\ x)\ d(y_n,\ x) \geq n$ 的柯西–格罗莫夫序列 (x_n)，(y_n)，如果它们不代表同一个边界点，那么对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $d(x_n,\ y_n) \geq n$。

设 (x_n) 是表示 ξ 的柯西–格罗莫夫序列。考虑集合 $A = \bigcup_{n\geq 0} B(x_n, \frac{1}{4}n)$。注意到 A包含任意大的球，因此由推论 5.2 可知，存在 $R > 0$，使得对于 μ-几乎处处的子群 H，集合 $H_R := \{x \in A \mid \mathrm{diam}(Hx) \leq R\}$ 无界。特别地，对于 μ-几乎处处的 H，存在无穷多个 k，使得对每个$h \in H$，都有 $d(x_k, hx_k) \leq d(x_k, x) + d(x, hx) + d(hx, hx_k) = 2d(x_k, x) + d(x, hx) \leq \frac{1}{2}k + R$，其中 $x \in H_R \cap B(x_k, \frac{1}{4}k)$。鉴于第一段，这意味着对每个$h \in H$，都有 $h\xi = \xi$。

□

注意， X 的双曲性仅用于保证定义边界点的两个不等价序列之间的距离增长得比某个函数更快。因此，引理 5.4 对满足此条件的任意度量空间 X都成立，不一定要求该空间是双曲的。现在我们可以证明定理 5.3。

定理 *5.3* 的证明。 由于 X 的边界是豪斯多夫的，且 G在其上的作用是连续的，因此 ∂X 中各点的稳定子都是闭的。由引理 5.4 可知， μ 包含于边界作用的核中，我们将其记为 K。

令 $B(G)$ 表示由满足以下条件的元素 $b \in G$ 组成的集合：其共轭类 $b^G = \{g^{-1}bg \mid g \in G\}$ 具有紧闭包；这是一个闭正规子群，参见 [Cor15，定理 2。8]。我们断言

$$B(G) = \{b \in G \mid \exists N > 0\, \forall x \in X\colon d(bx, x) < N\}.$$

事实上， $\subset$ 只用到了余有界性：令 $b \in B(G)$ 和 $y \in X$。存在 $R > 0$，使得对所有 $x \in X$，都存在 $g \in G$ 满足 $d(gx, y) < R$。于是 $d(bx, x) \leq d(bx, bg^{-1}y) + d(bg^{-1}y, g^{-1}y) + d(g^{-1}y, x) \leq 2d(x, g^{-1}y) + d(gbg^{-1}y, y) \leq 2R + \mathrm{diam}(b^G y)$，且该值与 x 无关。接着， $\supset$ 只用到了作用的真性：若对所有$x \in X$，都有 $d(bx, x) < N$，那么给定 $x \in X$ 和 $g \in G$，也有 $d(gbg^{-1}x, x) = d(bg^{-1}x, g^{-1}x) < N$。因此，$b^G \subset \{g \in G \mid B(x, N) \cap g(B(x, N)) \neq \varnothing\}$，其闭包是紧的。

用 $P(G)$ 表示 G 中椭圆元素的集合，并回顾 $\mathcal{W}(G) = B(G) \cap P(G)$。由于每个 $g \notin P(G)$ 都恰好固定两个边界点，尤其不会固定整个边界，因此不难看出 $g \notin B(G)$，从而 $B(G) \subset P(G)$。因此，我们有$\mathcal{W}(G) = B(G)$。此外，采用类似的论证可得， $B(G)$ 是所有在 X 上以有界轨道作用的正规子群之并。

由于 $B(G)$ 是正规子群，且 G 在 X 上的作用是非初等的， [CDCMT15, 引理 3.6] 推出：(i) $B(G)$ 在 X 上的作用具有有界轨道——特别地， $B(G)$ 是紧的；(ii) $B(G) = K$ (事实上，由于该作用是余有界的，按照参考文献中的记号， $\partial_X(G) = \partial X$)。由此可得 $\langle\mu\rangle \leq K = B(G) = \mathcal{W}(G)$，如所声称。

□

类似的论证应该适用于大多数 CAT(0) 群。

5.2 Cayley–Abels 图

如果 G 是一个紧生成的全不连通局部紧第二可数群，而 $U \leq G$ 是一个紧开子群，那么 G/U 就是一个局部有限连通图的顶点集， G 通过左乘作用于其上。这样的图称为 G 的 ***Cayley–Abels*** 图。由于 G 只有可数多个紧开子群，且每个紧子群都包含于某个紧开子群中，我们可知，对于 G 的任意遍历紧不变随机子群 μ ，都存在一个 Cayley–Abels 图，使得几乎每个由 μ 选取的子群都固定一个顶点。将子群映射到其几乎必然非空的不动点集，可以把这样的不变随机子群推送为 $\{0,1\}^{G/U}$ 上的移位不变概率测度。反过来，给定 $\{0,1\}^{G/U}$ 上任意一个在 $\{\varnothing\}$ 处没有原子的移位不变遍历概率测度，随机子集的逐点稳定子就是 G 的一个遍历紧不变随机子群。

下面给出这一构造的一个例子，在该例中我们能够证明，不变随机子群包含于局部椭圆根中。

例 5.5. 设 G 是一个紧生成的全不连通局部紧第二可数群， Γ 是 G 的一个 Cayley–Abels 图，其顶点集为 V。固定 $0 < p < 1$。我们得到 G 的一个遍历紧不变随机子群 μ ，它是 V的一个随机子集的逐点稳定子，其中每个顶点以 p的概率均匀随机选取。我们可以证明 $\langle\mu\rangle \leq \mathcal{E}(G)$：对于 x，若对每个 $m \geq n$ ，以 x 和 y 为中心的 m-球重合，则称 $y \in V$为$x \sim_n y$ ，并令 $\sim = \bigcup \sim_n$ 为关系 $\sim_n$的并所构成的等价关系。注意，对于每个 $x \in V$， $\sim_n$-等价类（记作 $[x]_n$）都是有限的，因此 $\mathrm{Stab}([x]) = \bigcup_n \mathrm{Stab}([x]_n)$ 是紧群的递增并，故为局部椭圆。现在，如果 $x \nsim y$，则存在无穷多个z_i满足 $d(z_i, x) \neq d(z_i, y)$。几乎必然，一个 μ-随机子群会固定至少一个z_i，因此 $Hx \neq Hy$。于是，对所有 $x \in V$，都有 $\mu(\{\bigcup_n \overline{\mathrm{Stab}}([x]_n)\}) = 1$ ，特别地， $\langle\mu\rangle \leq \bigcap_{x\in V} \bigcup_n \mathrm{Stab}([x]_n)$。这个（显然是正规）子群是局部椭圆子群的交集，因此 $\langle\mu\rangle \leq \mathcal{E}(G)$。

现在令 $F := \{g \in G \mid gx = x$ 对除有限多个 $x \in V\} \leq \mathcal{W}(G)$ 之外的所有情况成立。不难看出 $F \leq \langle\mu\rangle$。此外，若 $p > 1 - p_c$，其中 p_c 是 Γ 的临界顶点渗流概率，则 $\langle\mu\rangle \leq F$。我们将在随后的命题中证明 F 是紧的。

F 是紧的这一事实本身就很有意义，它源自 Trofimov 的一个深刻定理。值得一提的是，同一定理也是证明$\mathcal{W}(G)$是闭的关键要素。

命题 5.6. 设 Γ 是一个连通、局部有限的顶点传递图。那么， Γ 的有限支撑自同构群具有紧闭包。

证明。 Trofimov [Tro92，推论 4] 表明，在 $\sim$ 的顶点集上存在一个等价关系 Γ ，且该关系与自同构群的作用相容，即$x \sim y$ 当且仅当 $gx \sim gy$；其等价类均为有限集，并且 $\mathrm{Aut}(\Gamma/\sim)$ 中没有有界自同构能固定 $\Gamma/\sim$的顶点。这些性质保证 $\Gamma/\sim$ 是 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 的 Cayley–Abels 图。 Γ中任何固定 Γ某个顶点的自同构，也会固定该顶点在 $\Gamma/\sim$中的像。因此， Γ 的每个有限支撑自同构都作为 $\Gamma/\sim$的有限支撑、因而有界的自同构作用，于是属于 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 在 $\Gamma/\sim$上的作用的核。这个核是紧的，证明完成。

□

6 约化为紧生成子群

本节最后的目标是证明推论 6.3，它将结论 (3)归约到紧生成子群。

引理 6.1。设 G 是由开子群 $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ 递增并构成的局部紧第二可数群。那么 $\mathcal{E}(G)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}\mathcal{E}(O_n)$。

证明。为证明 $\mathcal{E}(G)\leq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}\mathcal{E}(O_n)$，设 $H\triangleleft G$ 是局部椭圆的。我们有 $H=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H\cap O_k$。因此，只需证明对每个 $k\in\mathbb{N}$，都有 $H\cap O_k\leq\bigcap_{n\geq k}\mathcal{E}(O_n)$。这是因为，对每个 k，我们都有 $H\cap O_k\in\mathcal{E}(O_k)$。因此，若 $n\geq k$，则 $H\cap O_k\leq H\cap O_n\leq\mathcal{E}(O_n)$，从而得到所需结论。

为证明 $S:=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}\mathcal{E}(O_n)\leq\mathcal{E}(G)$，我们证明 S是正规且局部椭圆的。由于序列 $A_k:=\bigcap_{n\geq k}\mathcal{E}(O_n)$ 递增，只要每个 $g\in G$ 在足够大的 k下正规化A_k，就可推出正规性。对于所有满足 $m\in\mathbb{N}$ 且使得 $g\in O_m$的 $k\geq m$，这都成立，因为 $O_m\leq O_n$，并且$\mathcal{E}(O_n)$对所有 $n\geq k$都是 O_n 中的正规子群。

为证明局部椭圆性，设 $K\subseteq S$ 是紧的。那么，对某个 m，有 $K\subseteq O_m$。我们断言 $O_m\cap S=O_m\cap A_m$。若此断言成立，则子群 S 是局部闭的，因而在 G中是闭的。此外，$K\subseteq A_m\subseteq\mathcal{E}(O_m)$。由于 S 在 G中是闭的，对于$\mathcal{E}(O_m)$中的紧闭包，我们有 $\langle K\rangle\leq S$。

为证明此断言，设 $k>m$。现在，对于所有 $n\in\{m,\dots,k-1\}$，$O_n\cap\mathcal{E}(O_k)$ 都是 O_n 的局部椭圆正规子群，因此 $\mathcal{E}(O_n)\geq O_n\cap\mathcal{E}(O_k)\geq O_m\cap\mathcal{E}(O_k)\geq O_m\cap A_k$，从而 $O_m\cap A_m=O_m\cap A_k\cap\bigcap_{n=m}^{k-1}\mathcal{E}(O_n)=O_m\cap A_k$。于是 $O_m\cap S=\bigcup_{k\geq m} O_m\cap A_k=O_m\cap A_m$。 □

命题 6.2。设 $G=\bigcup O_n$ 是开子群的递增并。设 μ 是 G 的一个紧不变随机子群。假设对于每个满足 $\mu(\mathrm{Sub}(O_n))>0$ 的 n，由 $\mu_n(A):=\mu(A)/\mu(\mathrm{Sub}(O_n))$ 定义的 O_n 的不变随机子群，对于 $A\subset\mathrm{Sub}(O_n)$，包含于 $\mathcal{E}(O_n)$ 中。那么 $\langle\mu\rangle\leq\mathcal{E}(G)$。

证明。令 μ 为 G的紧不变随机子群。不失一般性，假设 $\mu(\mathrm{Sub}(O_0))>0$。考虑 O_n 的紧不变随机子群 μ_n，定义为：对于 $A\subseteq\mathrm{Sub}(O_n)$，$\mu_n(A):=\mu(A)/\mu(\mathrm{Sub}(O_n))$。

由于子群 O_n 是开子群，且其并集为 G，因此对于每个紧子群 $K\leq G$，都存在 $n_K\in\mathbb{N}$ 使得 $K\leq O_{n_K}$。换言之，$\mathcal{C}(G)=\bigcup_n\mathcal{C}(O_n)$，其中 $\mathcal{C}(H)$表示群 H的紧子群集合。由于 $\mu(\mathcal{C}(G))=1$，这意味着对于每个$\varepsilon>0$，都存在 k_ε 使得 $\mu(\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon}))>1-\varepsilon$。

令 $n\geq k_\varepsilon$。注意，对于任意 $A\subseteq\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon})$，

$$\mu_{k_\varepsilon}(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon}))}\cdot\frac{\frac{1}{\mu(\mathrm{Sub}(O_n))}}{\frac{1}{\mu(\mathrm{Sub}(O_n))}}=\frac{\mu_n(A)}{\mu_n(\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon}))}.$$

特别是，

$$\mu_{k_\varepsilon}(\mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n)\cap O_{k_\varepsilon}))=\frac{\mu_n(\mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n))\cap\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon}))}{\mu_n(\mathrm{Sub}(O_{k_\varepsilon}))}.$$

根据假设，O_n 满足弱结论，因此 $\mu_n(\mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n)))=1$，由此可知右侧等于 1。

这意味着 $\mu_{k_\varepsilon}(\bigcap_{n\geq k_\varepsilon} \mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n) \cap O_{k_\varepsilon})) = 1$，尤其是

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq k_\varepsilon} \mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n))\Big) > 1-\varepsilon.$$

最后，这表明

$$1 = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}(\mathrm{Sub}(\mathcal{E}(O_n)))\Big) = \mu\Big(\mathrm{Sub}\Big(\underbrace{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq k}(\mathcal{E}(O_n))}_{=\mathcal{E}(G) \text{ by Lemma } 6.1}\Big)\Big) = \mu(\mathrm{Sub}(\mathcal{E}(G))).$$

□

我们得到：

推论 6.3. 设 G 是一个局部紧第二可数群，且 G 的每个紧生成子群都具有这样的性质：每个紧不变随机子群都包含于局部椭圆根中。那么， G 的每个紧不变随机子群都包含于局部椭圆根中。

由此可知，定理 1.2(i) 是定理 1.2(ii)的直接推论。

参考文献

[ABB+17] Miklos Abert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、Tsachik Gelander、Nikolay Nikolov、Jean Raim- bault 和 Iddo Samet，《李群中格序列的 L^2-不变量增长》，《数学年刊》（第 2 辑）185（2017），第 3 期，711–790 页。[AGV14] Mikl´os Ab´ert、Yair Glasner 和 B´alint Vir´ag，《不变随机子群的 Kesten 定理》，《杜克数学杂志》163（2014），第 3 期，465–488 页。MR3165420[BCGM19]Uri Bader、Pierre-Emmanuel Caprace、Tsachik Gelander 和 Shahar Mozes，《可和群中的格》，《基础数学》246（2019），第 3 期，217–255 页。[BDLW16] Uri Bader、Bruno Duchesne、Jean L´ecureux 和 Phillip Wesolek，《可和不变随机子群》，《以色列数学杂志》213（2016），第 1 期，399–422 页。[Bou89] Nicolas Bourbaki，《李群与李代数：第 1–3 章》，第 2 次印刷，柏林等地：施普林格出版社，1989。[Bow15] Lewis Bowen，《自由群的不变随机子群》，《群、几何与动力学》9（2015），第 3 期，891–916 页。[BT17] Ian Biringer 和 Omer Tamuz，《不变随机子群的单模性》，《美国数学会汇刊》369（2017），第 6 期，4043–4061 页。[CDCMT15] Pierre-Emmanuel Caprace、Yves De Cornulier、Nicolas Monod 和 Romain Tessera，《可和双曲群》，《欧洲数学会杂志》17（2015），第 11 期，2903–2947 页。[CG18] Tal Cohen 和 Tsachik Gelander，《紧群的 Gasch ¨utz 引理》，《代数杂志》498（2018），254–262 页。[CGLT25] Pierre-Emmanuel Caprace、Gil Goffer、Waltraud Lederle 和 Todor Tsankov，《关于紧一致递归子群》，《爱丁堡数学学会会刊》（2025），1–11 页。

[Cor15] Yves Cornulier，《可通约性与焦点局部紧群》，《印第安纳大学数学杂志》64（2015），第 1 期，115–150 页。[Gel18] Tsachik Gelander，《不变随机子群讲义》，《局部紧群的新方向》，2018，186–204 页。[Gla03] Eli Glasner，《通过联结的遍历理论》，《数学调查与专著》第 101 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[Gl¨o18] Helge Gl¨ockner，《局部域上的李群端同态》，《2016 MATRIX 年刊》，2018，101–165 页。[GW01] Helge Gl¨ockner 和 George A. Willis，《单模 p-进李群》，《论坛数学》13（2001），第 3 期，413–421 页。[HW15] Karl H. Hofmann 和 George A. Willis，《刻画全不连通局部紧群的连续性》，《李理论杂志》25（2015），第 1 期，1–7 页。[HY18] Yair Hartman 和 Ariel Yadin，《交集不变随机子群的 Furstenberg 熵》，《组合数学》154（2018），第 10 期，2239–2265 页。[Pal60] Richard S. Palais，《 G-空间的分类》，《美国数学会回忆录》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1960。[Par03] Anne Parreau，《赋值域上线性群的椭圆子群》，《李理论杂志》13（2003），第 1 期，271–278 页（法文）。[Raj25] C. R. E. Raja，《有界共轭类、支撑不变测度的共轭类与自同构》，《澳大利亚数学会通报》112（2025），第 3 期，509–514 页。[Ser92] Jean-Pierre Serre，《李代数与李群》，第 2 版，《数学讲义》第 1500 卷，柏林等地：施普林格出版社，1992。[Sit75] Kwan-Yuk Claire Sit，《线性代数群中的有界元素》，《美国数学会汇刊》209（1975），185–198 页。[SZ94] Garrett Stuck 和 Robert J Zimmer，《高秩半单群遍历作用的稳定子》，《数学年刊》（第 2 辑）（1994），723–747 页。[Tro92] V. I. Trofimov，《群在图上的作用》，《应用数学学报》29（1992），第 1–2 期，161–170 页。[U˘sa70] V. I. U˘sakov，《拓扑群中的共轭子群类》，《苏联数学》11（1970），第 1 期，48 页。[Wan71] S. P. Wang，《拓扑群的紧致性性质》，《美国数学会汇刊》154（1971），301–314 页。[Wan84] John S. P. Wang，《 p-进李群的 Mautner 现象》，《数学杂志》185（1984），403–412 页。[Wil23] George A Willis，《平坦秩大于 1 的群》，《李理论杂志》33（2023），第 1 期，433–452 页。[Wil94] George Willis，《全不连通局部紧群的结构》，《数学年鉴》300（1994），第 2 期，341–363 页。