arXiv:2603.16090v1 [cond-mat.quant-gas] 17 Mar 2026

调控自旋-1合成单极子的拓扑荷与规范场各向异性

Nicholas Milson,[1], * Arina Tashchilina,[1, 2], † Kathleen Tamura,[1] Douglas Florizone[1] 和 Lindsay J. LeBlanc[1], ‡
[1] *Department of Physics, University of Alberta, Edmonton T6G 2E1, Canada.*
[2] *Institut für Quantenoptik und Quanteninformation, .. Osterreichische Akademie der Wissenschaften, Innsbruck 6020, Austria*(日期：2026年3月18日)

在量子模拟中，更高维的希尔伯特空间与整个量子科学领域一样，拓展了可探测现象的范围。本研究利用超冷自旋-1系综，在实验中实现了合成单极子；其单极子荷由拓扑不变量第一陈数定量表征，并产生由贝里曲率定量表征的合成磁场。通过使用具有可调自旋张量耦合的三能级系统，我们为磁场引入各向异性，直接测量陈数，并观测到拓扑相变。我们验证了单极子的拓扑荷在形变下的稳健性，并通过自旋纹理和马约拉纳星测量观测到拓扑相的特征。本研究展示了自旋张量耦合作为调控参数，可用于设计几何各向异性以及丰富的拓扑相空间。

规范场理论构成了我们对物理学最深刻理解的基础 [1]。尽管证实这些理论的重要突破来自大规模物理实验 [2, 3], ，合成量子物质则提供了构造和探测人造规范场的机会，其中包括自然界中可能尚无已知对应物、但遵循相同普适物理规律的构型。对这些系统中几何相位的控制和测量 [4–8]，为研究阿贝尔与非阿贝尔结构，以及不同规范场相关的单极子源提供了机会。合成量子系统中的实验已展示 U（1）具有狄拉克磁单极子解的规范场 [9–11], 类似于杨–米尔斯理论、具有杨磁单极子解的非阿贝尔规范场 [12, 13], ，以及具有与弦理论相关的迪克斯米耶–杜阿迪张量单极子解的卡尔布–拉蒙德规范场 [14, 15]。

在这项工作中，我们将对拓扑狄拉克单极子的研究扩展到自旋-1量子系统。与传统的自旋-1/2系统不同，这种系统可能实现具有更高第一陈数的拓扑相，以及各向异性的合成规范场 [16, 17]。在实验上，我们利用经过设计、超越自旋矢量耦合并纳入自旋张量相互作用的哈密顿量，将自旋-1构型编码在凝聚态铷-87原子的三个微波耦合内部电子态中 [18]。这类自旋张量耦合哈密顿量的类似形式也存在于凝聚态物质系统中，可产生自旋张量霍尔电流 [19] 、亮孤子 [20], 、拓扑半金属中的奇异麦克斯韦-费米子准粒子激发 [21–24], ，以及 $SU(3)$ 拓扑绝缘体 [25]。

我们对合成各向异性磁单极子的演示，为理解这种独特形式的物质提供了基础性见解：我们直接测量了磁单极子的量子化电荷及其附近磁场的散度，并展示了改变自旋张量耦合参数如何引发不同陈数之间的拓扑相变，从而表征合成电荷。借助超冷原子平台，我们能够出色地获取量子态，从而测量多个与拓扑相关的特征。本工作建立了一个研究广泛一类拓扑非平庸合成物质系统的框架，其中的规范场超越了传统范式。

自旋-1哈密顿量的几何与拓扑结构所衍生的规范理论

为了开始讨论合成物质系统中的拓扑和几何相位，我们考虑一个由哈密顿量支配的量子系统，该哈密顿量随一个或多个参数的取值而变化。在参数空间的每一点，哈密顿量都可以对角化，并可求得本征态。在整个参数空间上对本征空间进行平滑赋值，便形成一个向量丛，它兼具局部（或几何）和整体（或拓扑）性质。

局部而言，由于系统内禀的几何曲率以及规范选择的任意性，本征态可能在参数空间中随位置而变化。如果哈密顿量的谱在整个参数空间内始终非简并，本征空间就是一维的，因此态可能仅相差一个相位因子，这种相位因子称为几何相位。几何相位是一种强大的工具，因为它与电磁学具有相同的数学结构：二者都属于 $U(1)$ 规范理论。几何相位直接类似于

* 这些作者贡献相同；nmilson@ualberta.ca
† 这些作者贡献相同。
‡ lindsay.leblanc@ualberta.ca

实空间中沿路径对磁矢势进行积分所得的结果。虽然几何相位通常依赖于规范，但沿参数空间中的闭合回路绝热演化时累积的相位无法通过规范变换消除；这称为贝里相位 [26–28]。这与穿过$\mathcal{S}$（即所经过回路所围曲面）的磁通量直接类似。正如磁通量可以表示为矢势的闭合线积分，也可以表示为磁场（或电磁场张量）的曲面积分，贝里相位也可以表示为曲面积分

$$\gamma = \int_{\mathcal{S}} \tilde{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} \; = \int_{\mathcal{S}} \tilde{B}_{\lambda\mu} d\lambda d\mu \; . \tag{1}$$

这里，$\tilde{\mathbf{B}}$ 是一个称为贝里曲率矢量的伪矢量，类似于磁场矢量；而$d\mathbf{S}$ 是垂直于曲面$\mathcal{S}$的微分面积元。同样，$B_{\lambda\mu}$ 是曲面坐标（λ, μ）下贝里曲率张量的分量，类似于电磁场张量的分量。（与电磁学中一样，张量形式和矢量形式通过霍奇星算子相互关联。）

从整体上看，可以对整个本征态丛进行定量分类；对于二维参数空间 $\mathcal{M}$上的复向量丛，相关的拓扑不变量是第一陈数 [29]

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \tilde{B}_{\lambda\mu} d\lambda d\mu \; , \tag{2}$$

本文将其简称为陈数。它可以理解为穿过包围曲面的场线总通量，类似于磁荷。

在本文中，我们采用自旋-1哈密顿量，它们是 $\mathfrak{su}(3)$和 [的元素；相比之下，自旋-1/2 在$\mathfrak{su}(2)$中的哈密顿量由三个泡利矩阵] 张成，而 [30]需要八个基矩阵的线性组合；其中一种选择是盖尔曼矩阵 [31]。此处更方便采用自旋矢量和自旋张量基：前三个自旋矢量元素构成一个 $\mathfrak{su}(2)$子代数，$\hat{\mathbf{F}} = \left(\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z\right)$。张成 $\mathfrak{su}(3)$ 的另外五个矩阵 [32]是自旋四极张量 [18]$\hat{N}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{F}_i \hat{F}_j + \hat{F}_j \hat{F}_i\right) - \frac{1}{3}\delta_{ij} \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}$。

为探索自旋-1 系统中的拓扑相，首先考虑简单自旋矢量耦合的哈密顿量 $H = \hbar \mathbf{m} \cdot \mathbf{F}$，其中 $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ 是笛卡尔参数空间。基态本征丛的合成磁场 netic vector field $\mathbf{B}(\mathbf{m})$ 是各向同性的，从参数空间中原点 $(m_x, m_y, m_z) = (0, 0, 0)$ 处的磁单极子向径向发散 [16]。转换为球坐标参数空间 $\mathbf{m} \to (m_r, m_\theta, m_\phi)$ 后，合成场为 $\mathbf{B}(\mathbf{m}) \propto \mathbf{m}/m_r^3$(图1A)。值得注意的是，$\mathbf{B}(\mathbf{m}) = (B^r(m_r), 0, 0)$ 始终指向远离原点的方向。对任意包围原点的二维曲面上的合成场进行积分，可得陈数为 $\mathcal{C}_1 = 2$。

自旋-1系统的丰富特性使其能够实现自旋矢量之外的额外耦合：自旋张量耦合为新的拓扑相以及合成场的各向异性开辟了可能性。在这里，我们考察自旋张量耦合的两个具体实例 [22, 33]：m_z 与 $\hat{F}_z^2$之间的耦合，其相对强度由 α参数化；以及 m_x 与 $\hat{N}_{xz}$之间的耦合，其相对强度由 β参数化。哈密顿量族

$$\hat{H}_{\alpha\beta} = \hbar \left[\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{F}} + \alpha m_z \hat{F}_z^2 + \beta m_x \hat{N}_{xz} \right] \tag{3}$$

在原点处的本征谱中始终存在一个三重简并点，它是一个磁单极子，充当贝里曲率的发散源；包围该磁单极子的闭合曲面具有定义良好的本征丛。当超参数调至非零值时，贝里场会变得各向异性（图 1B-D），但仍然，对于所有 α 和 β，只有径向分量 B^r 非零（因此 $\mathbf{B(m)}$ 指向原点处的磁单极子或背离它）。

除原点处的奇点外，在 α 和 β的临界值处，本征谱中还会出现额外的简并点。具体而言，当 $\alpha_c = \pm 1$ 或 $\beta_c = \pm 2$达到临界超参数值时，本征谱中的简并会沿着从原点 [22]向外延伸的参数空间线出现。这些简并线会穿过任何包围原点的曲面，导致本征谱中的能带接触，并使贝里曲率无法定义。跨越这些临界超参数值时，不同陈数态之间会发生拓扑相变。越过这些临界点后，部分贝里曲率场矢量会反向，此时指向磁单极子（图 1C 中的负 B^r），而陈数作为穿过包围曲面的场矢量总通量，也会随之改变。通过改变（α、β），可以实现陈数为 $\mathcal{C}_1 = 2$、1、0、-1 的拓扑相。随着超参数变化，我们不仅能够模拟具有不同合成电荷的磁单极子，还能使从磁单极子发出的合成场在参数空间中向各向异性形变（图 1D）。

哈密顿量的工程化

为合成式（3）的张量耦合自旋-1哈密顿量，我们使用 $\approx 10^5$ 玻色-爱因斯坦凝聚的铷-87原子，将其视为由相同且互不相互作用的量子系统组成的系综 [34]。超精细基态流形中的三个态$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ 构成赝自旋-1系统，它们通过两个独立的微波场 [34]耦合。该三能级系统由以下有效哈密顿量描述

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} \Delta_1 & \frac{\Omega_1}{2} e^{i\phi_1} & 0 \\ \frac{\Omega_1}{2} e^{-i\phi_1} & 0 & \frac{\Omega_2}{2} e^{i\phi_2} \\ 0 & \frac{\Omega_2}{2} e^{-i\phi_2} & \Delta_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

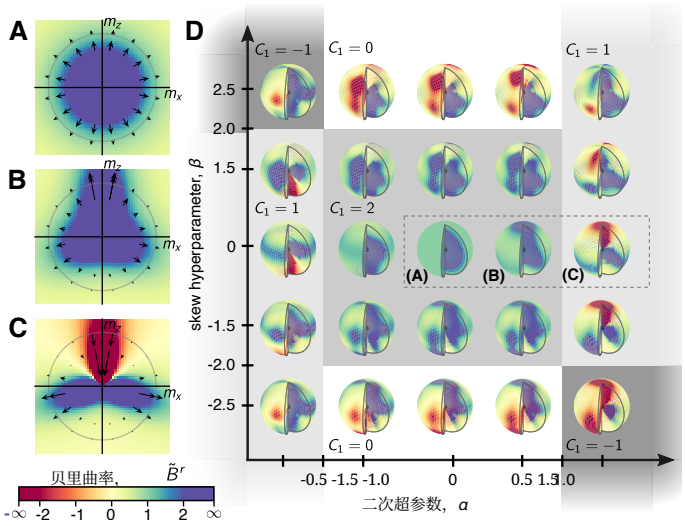

图 1. **各向异性磁单极子的贝里曲率。 ˜A-C. </style}在超参数取值为 且时，绘制了穿过原点的 -平面上的贝里曲率，分别对应(A)、(B)和(C)中的、，展示了随着增大，一条正贝里曲率（蓝色）“弦”从原点延伸至北极的过程，以及在处的相变之上，弦反向时曲率符号的变化（红色）。本图及所有图中的颜色条表示值；请注意，颜色在处有意饱和，尽管曲率值会远远超过该值并发散。D.** 对于一系列超参数取值（α，β），展示球面 $r = 1$上的贝里曲率分布，并通过剖切显示内部数值。所有情况下，原点处的 $\tilde{B}^r$ 均保持磁单极子发散，但超参数驱动的各向异性会在相图中形成不同结构。不同拓扑荷区域以阴影标示，$\mathcal{C}_1$ 的取值分别为 2、1、0 和 -1，如图所示。

其中，拉比频率 $\Omega_{1,2}$，、相位 $\phi_{1,\ 2}$以及相对于共振的失谐量 $\Delta_{1,\ 2}$ 都是经过精确控制的微波场参数。虽然可以完全控制这一包含六个参数的哈密顿量 [35]，，但我们将系统简化至由三参数构成的参数空间 [17, 33]，该空间由参数空间中以下坐标刻画：$\mathbf{m} = (m_r,\ m_\theta,\ m_\phi)$]，具体做法是将实验控制参数约束为

$$\Omega_1 = 2m_r \sin m_\theta \sqrt{\left[(1+\beta/2)^2 \cos^2 m_\phi + \sin^2 m_\phi\right]/2} \tag{5}$$

$$\Omega_2 = 2m_r \sin m_\theta \sqrt{\left[(1-\beta/2)^2 \cos^2 m_\phi + \sin^2 m_\phi\right]/2} \tag{6}$$

$$\Delta_1 = m_r(\alpha+1)\cos m_\theta,\ \Delta_2 = m_r(\alpha-1)\cos m_\theta \tag{7}$$

$$\phi_1 = -\arctan\left(\frac{\tan m_\phi}{1+\beta/2}\right),\ \phi_2 = -\arctan\left(\frac{\tan m_\phi}{1-\beta/2}\right). \tag{8}$$

在此映射下，式 4 化简为式 (3)，超参数 α 和 β 控制模拟中自旋张量项的贡献。

实验测量贝里曲率

对拓扑相进行定量表征，需要在参数空间的各个点测量贝里曲率；对其积分后即可揭示 $\mathcal{C}_1$和拓扑荷。我们采用略微偏离绝热的演化 [9, 11, 12, 36]，，其中绝热演化的一阶修正与参数空间中任意一点的贝里曲率相关，前提是没有能隙闭合。该方法的基本原理是：非绝热演化后测得的状态中出现的“误差”，与沿所经历轨迹的本征态变化成正比，而这正是贝里曲率矢量所表征的量。对于轻微的非绝热情形，λ 以速度 $v_\lambda = d\lambda/dt$变化时，会产生沿 μ方向的广义力 $\langle \mathcal{F}_\mu \rangle = -\langle \psi | \partial_\mu \hat{H} | \psi \rangle \approx \text{const} - v_\lambda \tilde{B}_{\lambda\mu}$。对于式 3 中的自旋-1哈密顿量，

$$\langle \mathcal{F}_\phi \rangle = m_r\big(\sin m_\theta \sin m_\phi \langle \hat{F}_x \rangle - \sin m_\theta \cos m_\phi \langle \hat{F}_y \rangle + \beta \sin m_\theta \sin m_\phi \langle \hat{N}_{xz} \rangle\big) \tag{9}$$

˜在实际操作中，只要 v_θ 给出的速率处于近绝热区间，就可以通过在不同的 ϕ 取值下调节 θ，并记录由此得到的自旋期望值 $\langle F_x \rangle$、$\langle F_y \rangle$、$\langle N_{xz} \rangle$，从而求得 $B_{\theta\phi}$：$\Omega_{21,2} \gg v_{\theta}^2$。对于所有$\beta = 0$的研究，常数零阶项会消失，且在主导阶下

$$\tilde{B}_{\theta\phi} = -\frac{m_r}{v_\theta}\left[\sin m_\theta \sin m_\phi \langle \hat{F}_x \rangle - \sin m_\theta \cos m_\phi \langle \hat{F}_y \rangle\right]. \tag{10}$$

贝里曲率向量是曲率张量的霍奇对偶，在球坐标中具有一个径向分量

$$\tilde{B}^r = \frac{\tilde{B}_{\theta\phi}}{m_r^2 \sin m_\theta}. \tag{11}$$

此外，$\beta = 0$ 哈密顿量具有方位˜对称性，因此贝里曲率 $B_{\theta\phi}$ 与 m_ϕ无关。在这种情况下，只需沿一条经线进行测量，就足以确定整个参数空间中的曲率，并且

$$C_1 = \int_0^\pi \tilde{B}_{\theta 0}\, dm_\theta = \int_0^T m_r \sin m_\theta(t) \left\langle \hat{F}_y(t) \right\rangle dt. \tag{12}$$

单极子奇点与拓扑保护

电磁单极子的两个典型特征是：无论包围它的闭合曲面形状如何，穿过该曲面的通量都保持不变；此外，场强会随距磁单极子距离的

平方反比而衰减。我们通过实验展示了陈数（即合成磁单极子荷）在超参数（$\alpha = 0, \beta = 0$）下的拓扑保护，这对应于各向同性的 $\mathbf{B(m)} = (B^r(m_r), 0, 0)$ 场。首先，我们测量 B^r 在半径为 $m_r = 1$ 的球壳上的取值。接着，我们通过拉伸参数空间中的m_z分量，使其相对于 m_x 和 m_y 分量发生形变，从而改变有效积分壳；这种方式在参数空间中有效地保持 $\mathbf{B(m)}$ 不变，但使 (m_θ, m_ϕ) 参数扫过一个椭球积分曲面。虽然 $\mathbf{B(m)}$ 在球壳上处处恒定，但在椭球壳上并非恒定（图 2(G)）。

我们首先在北极参数下制备基态本征态（m_r, $m_\theta = 0$, m_ϕ），这对应于频率为 $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$的简单非耦合哈密顿量。我们沿经线 $m_\phi = 0$改变极角 m_θ，其时间依赖关系为$m_\theta(t) = at^2$，其中 $a = \pi/T^2$，且在斜坡结束时 $m_\theta(T) = \pi$ [33]。在实验的多次重复中，我们在该路径上均匀选取二十个角度，并在每个角度停止演化，通过量子态层析（QST）测量 $\langle \hat{F}_y \rangle$ [34]。我们利用方程 10 计算贝里曲率 $B_{\theta 0}$，并通过数值计算积分方程 (12) 求得拓扑荷 $\mathcal{C}_1$。

图 2 展示了球形路径和椭圆形变路径在整个斜坡过程中的自旋分量$\langle \hat{F}_y \rangle$、贝里曲率 B^r以及张量 $B_{\theta\phi}$。球形路径与椭球轨迹的$B_{\theta\phi}$随 θ 变化时明显不同，但对曲面上所有通量线总和进行表征的积分结果均为 $C_1 = 2.5 \pm 0.2$。这一点可从图 2C 和 F 的数据看出：尽管曲线形状不同，但两条路径所描绘的 $B_{\theta\phi}$ 曲线下面积相同。虽然此处的结果与预测值 $C_1 = 2$ 存在小幅定量偏差，但两种测量结果相互吻合，强有力地定性证明了结果与积分体积无关。残余偏差与系统偏移相符，可能源于严格的校准要求，以及微小偏移经过两层计算后的传播。总体而言，这些测量揭示了该合成单极子中拓扑不变性的明确特征：陈数对拓扑荷进行分类，而拓扑荷是哈密顿

基态特征从对形变保持不变。

磁单极子的第二个特征可通过测量不同半径球壳上的$\mathbf{B(m)}$来揭示。贝里曲率$\mathbf{B(m)}$类似于磁单极子源附近发散的磁场矢量。我们通过固定参数(m_θ, m_ϕ)并改变半径 m_r，观察到预期的反平方标度。我们选取赤道上的一点 $(\theta = \pi/2, m_\phi = 0)$，并使用非完全绝热斜坡测量 $\langle \hat{F}_y \rangle$。图2G展示了 B^r 随半径的变化，其发散

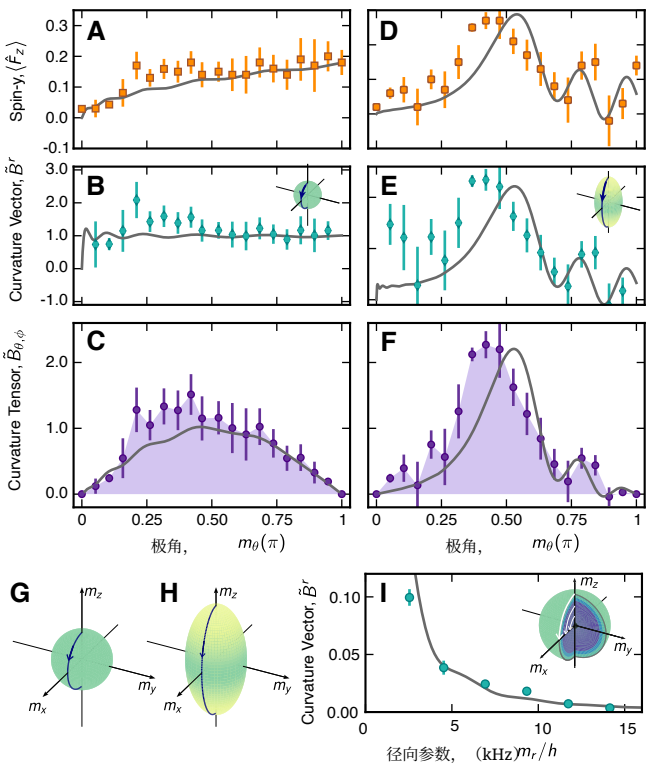

图2. **合成单极子的表征**。对于均匀磁单极子$(\alpha, \beta) = (0,0)$，沿路径$r = 1$ **(A-C)** 以及沿从 $m_z = 2$到-2、经由 $m_x = 1$ **(D-F)**的形变路径，均采用非完全绝热演化方法。测量自旋投影 $\langle \hat{F}_y \rangle$ (A、D)随最终极角 m_θ的变化，据此确定曲率向量 $\tilde{B}^r$ (B、E)和张量 $\tilde{B}_{\theta\phi}$ (C、F)。所有子图中的灰线均表示使用全部实验参数计算得到的演化；所示不确定度反映了重复测量的变化。(B、E)中的插图展示了用于测量的路径，以及参数空间球面上的计算结果 $\tilde{B}^r$。**(G)** 用于(A-C)测量的参数空间球面路径，叠加在表示 $B_r(\mathbf{m})$的球面上（色标同图1）。**(H)** 用于(D-F)测量的参数空间形变路径，以及 $B_r(\mathbf{m})$；**(I)** 采用与(A-C)相同的测量方案，在距磁单极子不同距离处测量 B^r，表明该场在原点处发散。实线为使用实验参数进行的计算。插图展示了参数空间中的三条代表性路径。

作为 $m_r \to 0$，这是参数空间原点处拓扑磁单极子和合成电荷的实验特征。

直接测量拓扑相变

在刻画了合成单极子的关键特征后，我们进一步研究引入自旋张量耦合后其各向异性的表现。随着˜超参数变化，**B(m)**不仅变得各向异性，我们还发现了与单极子荷变化相关的拓扑相变。

我们通过实验研究参数 α 从 0 变化到 2、跨越临界值 $\alpha = 1$ 的哈密顿量。由于系统具有关于 $\beta = 0$ 的方位对称性，我们通过对单条经线积分来提取陈数（式 12）。我们再次采用近绝热演化技术，测量 $\langle \hat{} F_y \rangle$ 随极角 θ 的变化，以提取贝里曲率。

当我们将自旋张量分量从 $\alpha = 0$ 改变到 $\alpha = 2$ 时，可以看到在 $\alpha = 1$ 处的 $C_1 = 2 \leftrightarrow 1$ 相变两侧，贝里曲率及由此得到的陈数都发生了明显变化。对于 $\alpha = 0.2$ 和 $\alpha = 2.0$，我们沿 m_θ 路径测得贝里曲率矢量值 $\mathcal{B}^r$(1， m_θ, 0)。尽管二者都具有一定程度的各向异性（与图 2B 中的 $\alpha = 0$ 情形不同），但对于 $\alpha = 0.2$，所有场值的大小均为正（图 3A）；而对于 $\alpha = 2.0$、˜，部分场值为负，表明 **B(m)** 指向内侧（图 3C）。图 3B 和图 3D 展示了相应的贝里曲率张量分量 ˜sor element$B_{\theta,\ 0}$。对这些数据进行数值积分，得到两个不同的陈数：对于 $\alpha = 0.2$ 和 2，分别为 $C_1 = 1.9 \pm 0.2$ 和 $C_1 = 0.8 \pm 0.2$ 。

通过对十种不同的自旋张量贡献（α值）重复这一测量过程，我们观察到陈数在 $\alpha = 1$ 处的相变两侧发生了明显变化（图3E），揭示了合成自旋-1 单极子系统中的拓扑相变。

拓扑相的特征

虽然直接计算陈数 C_1 能够为区分不同拓扑相提供定量信息，但这些相变的特征往往体现在其他度量中。对于自旋-1系统，三分量量子态不像自旋-1/2那样能够简单地几何映射到布洛赫球上，这意味着无法直接从直观的视觉特征（例如态绕行并包围立体角 [37],ˆ）推断几何相位和陈数；追踪自旋矢量 $\langle \mathbf{F} \rangle$ 也无法像在双态情形中那样揭示量子态的全部信息。然而，一些定性的视觉线索确实预示着三能级系统中的拓扑相变 [33],，包括参数空间中自旋矢量整体取向的变化，这种变化有时统称为自旋纹理 [38]: 随着跨越拓扑相边界，自旋纹理涡旋会出现或消失，如如图4所示。

为了测量超参数为 α 和 β 、因而处于不同拓扑相的系统之间的自旋纹理变化，我们将系统绝热制备在具有特定 (α， β) 的基态中，并进行量子态层析（QST），以测量 $\langle \mathbf{F} \rangle$ 在 m-参数空间中的变化。

我们在北极（m_r， m_θ =0， m_ϕ）制备系统。在这里，对于 $\alpha > 1$ 和 $\alpha < 1$，基态是裸原子本征态：对于 $\alpha < 1$，基态为 $|\psi\rangle = |3\rangle$；对于 $\alpha > 1$ ，则为 $|\psi\rangle = |2\rangle$ （此处的本征态不依赖于 β）。随后，我们通过在线性变化下调节 $\Omega_{1,\ 2}$， $\Delta_{1,\ 2}$， $\phi_{1,\ 2}$ ，在1.0毫秒内实施绝热快速通过，将系统带到参数空间中的目标点（图4A、B）。我们的计算 [34] 保证这一斜坡持续时间足够长，能够抑制非绝热效应并实现高保真度的态制备，同时又足够短，不会使环境场驱动的失谐在最终重构的自旋矢量中造成显著噪声。

对于（$\alpha = 0, \beta = 0$），测得的自旋矢量均沿径向指向位于 $r = 0$ 的磁单极子。（图 4A）。对于（$\alpha = 2$, $\beta = 0$），我们观察到北极周围的自旋纹理中出现了一个涡旋，这对应于预期的简并点线：它在本征谱中从原点沿正-m_z方向延伸。极点处的自旋矢量为零，而极点周围的自旋矢量则围绕涡旋中心旋转（图 4B）。为突出这一效应，我们还测量了距极点偏移 $m_\theta = 25°$的另一个环上的自旋矢量。从俯视角绘制这一切片（图 4B，插图）可见，自旋矢量均近似沿径向指向涡旋核心。

北极处的可观测量 $\hat{}\langle F_z \rangle$ 也揭示了这一相变：在 $\alpha = 1.0\hat{}$ 处出现了离散跃变（图 4C）。同样，将（$m_\theta = \pi/4, m_\phi$ =0）处的 $\langle F_z \rangle$ 作为 β 的函数进行测量，也揭示了 $C_1 = 2 \leftrightarrow 0$ 相变（图 4D）。

通过马约拉纳星表示（MSR） [39]对态进行可视化，可以找到区分拓扑相的另一种特征。MSR 将量子比特态立体投影到布洛赫球上的思想加以推广：虽然一般的自旋-s态无法表示为球面上的一个点，但 MSR 用球面上的 $2s$ 个点来表示该态。对于在 S_z 本征基中展开的一般自旋-s 态，$|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} \lambda_m |sm\rangle$，要立体投影到球面上的 $2s$ 复数是下列马约拉纳多项式的根$\{\zeta_k = \tan(\theta_k/2) e^{i\phi_k}\}_k$

$$p_\psi(Z) = \sum_{m=-s}^{s} (-1)^{s-m} \sqrt{\binom{2s}{s-m}} \lambda_m Z^{s+m} \,. \qquad (13)$$

这些星的轨迹对拓扑相十分敏感。对于穿过基参数空间的同一路径，这些星会描绘出显著不同的运动轨迹。我们通过绝热过程制备基态，并进行量子态层析（QST），以实验确定沿固定-r多个点处马约拉纳星的位置

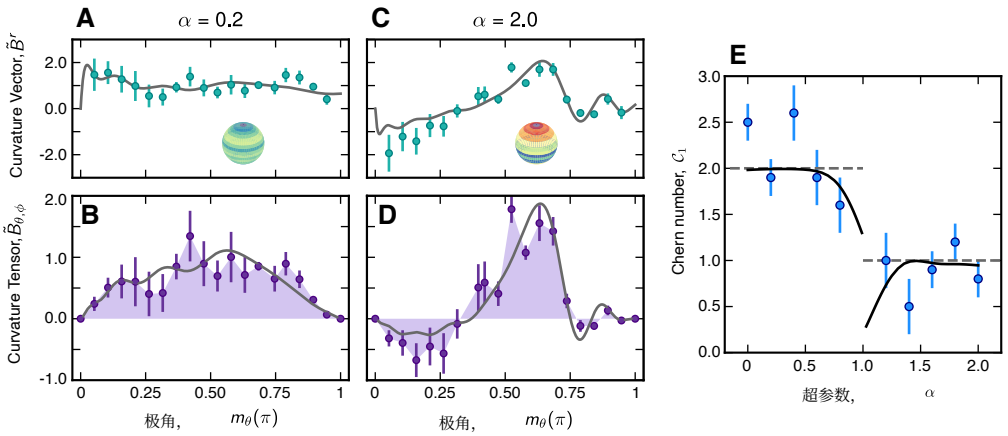

图 3. **各向异性磁单极子的拓扑相变**。通过测量极角 m_θ 下的贝里曲率矢量 $\tilde{B}^r$ **(A,C)**和张量 $\tilde{B}_{\theta\phi}$ **(B,D)** 的数值，取值为 (α, β) = (0.2,0) (A-B) 和 (2.0,0) (C-D)，通过对 $\tilde{B}_{\theta\phi}$进行数值积分得到第一陈数。**(A,C)** 中的插图展示了参数空间球面上的 $\tilde{B}^r$ $m_r = 1$，使用图 1 中的色标。所示不确定性反映了重复测量的变化。**(E)** 陈数 $\mathcal{C}_1$ 随 α 的测量结果（圆点），显示了在 $\alpha = 1$ 处发生的相变。实线表示纳入实验参数后的计算结果，虚线表示无限时间测量的理想化预期。

穿过参数空间的路径 [33],

$$\theta(\xi) = \frac{\pi}{4}\cos(2\pi\xi) + \frac{\pi}{4}, \tag{14}$$

$$\phi(\xi) = \frac{\pi}{3}\sin(2\pi\xi), \tag{15}$$

其中，ξ 的取值范围为 (0，1)。如图 4E 所示，对于 ($\alpha = 0$，$\beta = 0$)，两颗星在布洛赫球南半球内沿一个环路近似同步移动。然而，如图 4F 所示，对于 ($\alpha = 2$，$\beta = 0$)，星的轨迹明显分离。一颗星从赤道移至北极，另一颗则从赤道移至南极。

讨论与结论

本工作展示了一种合成自旋-1磁单极子的量子模拟器，其可具有不同的非零单极子荷，并由第一陈数表征。控制该单极子荷的自旋张量耦合，同时调谐了相关合成磁场的各向异性几何结构；该结构由贝里曲率表征，展示了该系统中几何与拓扑之间的内在关系 [40]。曲率变得奇异的临界点，与具有不同量子化单极子荷的系统之间发生的拓扑相变相一致。我们对贝里曲率、自旋纹理和马约拉纳星轨迹的测量，均提供了该超冷原子实验中随参数变化的拓扑和几何的特征信号。

具有自旋-张量–动量相互作用的合成量子物质，为探索高维系统中独特的拓扑相提供了丰富的研究基础。这项工作将各向异性突变磁场的磁单极子源纳入人工规范理论模拟工具箱，为高自旋哈密顿量中更丰富的相带来了可期前景；借助本文所展示的原子系统中额外且可独立控制的微波耦合，这一目标有望实现。通过构建哈密顿量随之变化的实空间势景来拓展这项工作 [4, 5, 41]，或可研究受到自旋张量耦合作用的高自旋系统中的量子动力学。此外，单原子操控方面的最新进展 [42–44] 为在多粒子系统中单独寻址原子的拓扑相提供了机会，而在粒子之间引入多体相互作用，则可能实现日益复杂的合成物质相。

致谢

作者感谢Logan W. Cooke、Joseph Lindon和Anna Prus-Czarnecka作出的初步实验贡献，尤其是在提升装置稳定性方面的贡献，这些改进使本工作得以实现。作为艾伯塔大学的研究人员，我们承认本工作是在第六号条约领地上开展的，并尊重加拿大第一民族、M´etis、因纽特人以及所有原住民的历史、语言和文化；他们的存在持续丰富着我们充满活力的社区。

资助：本研究获得以下机构的资助：NSERC（RGPIN-2021-02884 和 ALLRP 578462-22、ALLRP 578468-22、ALLRP 578460-22）、加拿大创新基金会（36130）、加拿大研究讲席计划（CRC Program）、阿尔伯塔创新机构以及

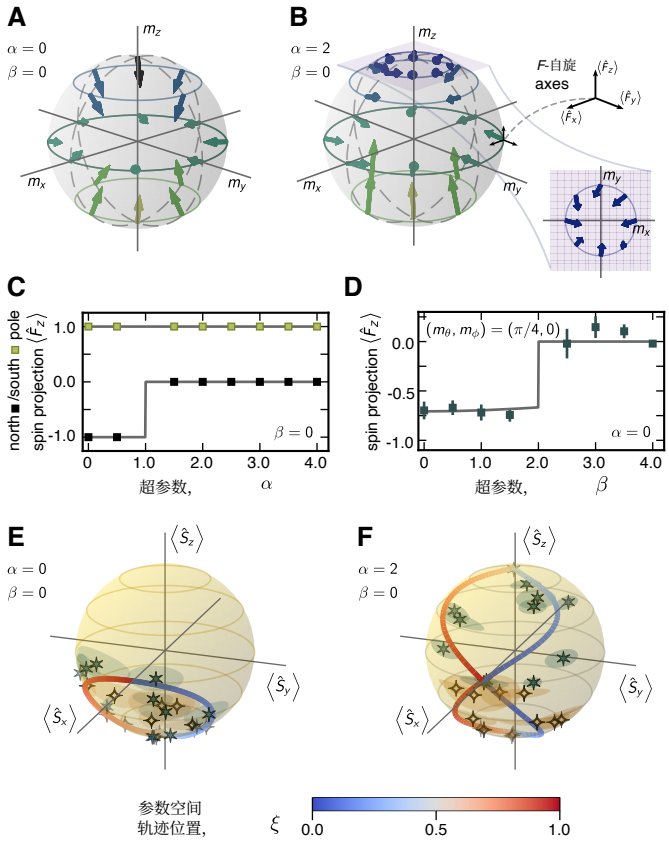

图 4. 各向异性磁单极子的互补特征。（A、B）对于 $\alpha = 0$ (A) 和 $\alpha = 2$ (B) 以及 $\beta = 0$，在 m 参数空间中绝热制备的系统的 F 自旋投影测量。每个箭头表示以箭尾为中心的一组自旋坐标轴中 F 的取向（取向如右图所示）。(B) 外侧插图为 m_x-m_y 平面上 $m_\theta = 0.436$ rad（$= 25°$）处的投影。(C) 对于 $\beta = 0$，北极（m $=(0, 0, m_z = 1)$，黑色）和南极（m $=(0, 0, m_z = -1)$，绿色）处的 $\langle F_z \rangle$ 投影测量随 α 的变化。误差棒小于数据点。(D) 对于 $\alpha = 0$，北 [m $=(0, 0, m_z = 1/\sqrt{2})$ 或 $(m_\theta, m_\phi) = (\pi/4, 0)$] 极处的 $\langle F_z \rangle$ 投影测量随 β 的变化。误差棒表示统计变化。(E、F) 沿路径 [式（15）] 穿过 m 参数空间绝热制备的系统在布洛赫球上的马约拉纳星投影。对于 $\alpha = 0$ (E) 和 $\alpha = 2$ (F) 以及 $\beta = 0$。两颗星分别以蓝色六角星和橙色四角星表示；实验统计不确定性以阴影椭圆表示。理论星位置以彩色曲线表示，轨迹位置（由 ξ 参数化）按照颜色条标示。两种情况下均存在两条轨迹：在（E）中，它们彼此重合；而在（F）中，它们位于相对的半球。

艾伯塔省和阿尔伯塔大学。A.T. 获奥地利科学基金（FWF）资助，项目编号为 10.55776/RIC1995124。

作者贡献： N.M. 和 A.T. 对本研究贡献相同。N.M. 负责实验、理论建模、形式分析和撰写（原稿）；A.T. 负责概念构思、理论建模、形式分析、可视化和撰写（审阅与编辑）；K.T. 协助开展实验和可视化；D.F. 协助开展实验；L.J.L. 负责指导本研究、获得经费，并负责可视化和撰写（审阅与编辑）。

附录A：定义自旋-1三能级系统

我们从铷-87的超精细基态 $5S_{1/2}$ 流形中选取三个态：$|f = 2,\ m_f = 2\rangle \equiv |1\rangle$，$|f = 1\ m_f = 1\rangle \equiv |2\rangle$ $|f = 2\ m_f = 1\rangle \equiv |3\rangle$ ，，以及，构成赝自旋-1系统（图 5）。外部磁场通过塞曼效应使具有相同总角动量 f 的态发生分裂，导致相邻子能级之间的能量差为 $\hbar\delta_z = 2\pi \times 3.9$ MHz。这三个态通过两个独立的微波场耦合（图 5(A)），每个微波场由三个参数表征：场强，以拉比频率 $\Omega_{1,2}$表示；相位 $\phi_{1,\ 2}$；以及中心频率（即相对于共振的失谐量）$\Delta_{1,\ 2}$。在以驱动频率旋转的参考系中，该耦合方案得到式 3 所示的有效哈密顿量。

附录B：实验流程

我们在先前的工作中 [35, 45–47]详细介绍了用于生成铷-87原子玻色-爱因斯坦凝聚态（BEC）的实验装置（图5(B)）及典型方法。图5(C)所示的实验流程会重复多次，以收集统计数据并调整各项测量的参数。简而言之，每次实验流程都从激光冷却开始：使用二维和三维磁光阱（MOT）冷却并俘获 ^{87}铷原子，持续10 s；随后进行20 ms的偏振梯度亚多普勒冷却、在磁阱中进行5 s 的强制射频蒸发，以及使用交叉光束光偶极阱（ODT）俘获5 s。每次实验中，我们都会制备一团温度约为350 nK、包含约 10^5 ^{87}个铷原子的超冷原子云。

接下来，我们以交流电源线为触发信号，并等待 60 Hz 信号到达相同相位后再继续，以确保在每个周期的下一阶段，原子所处的电磁背景场相同。随后，使用开口波导将微波辐射持续所需时长后传送至原子系综，从而形成有效的非偏振光束。输入信号由任意波形发生器（AWG）产生的双音基带信号对微波载波进行幅度调制而生成。到达原子的一个示例磁场，是靠近共振的相关边带，其双音频率为 ω_1 和ω_2，可表示为 $\mathbf{B}(t) = b_x [A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\cos(\omega_2 t + \phi_2)]\mathbf{e}_x + b_z [A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\cos(\omega_2 t + \phi_2)]\mathbf{e}_z$，其中 A 和 B是音调振幅（分别与拉比频率 Ω_1 和 Ω_2，成正比），而 b_x 和 b_z 描述

传播方向的横向平面内两个方向各自的偏振分数。因此，失谐量为 $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{12}$ 和 $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_{32}$，其中$\omega_{12}$是$|1\rangle$ 与 $|2\rangle$之间跃迁的共振频率，而 ω_{32} 是 $|3\rangle$ 与 $|2\rangle$之间跃迁的共振频率。

在主要微波序列开始之前，所有原子都处于 $|1\rangle$ 态，因为磁阱悬浮的正是这一状态。相反，如果需要将 $|2\rangle$态或 $|3\rangle$态作为初始态，则可在扫描偏置磁场的同时施加固定的微波音调，使原子发生绝热转移。

执行一系列微波脉冲后，我们利用类似斯特恩–盖拉赫的测量方法，确定裸原子基底 $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ 中各个状态的布居。在两个基态超精细流形中，所选磁子能级均具有不同的 z轴磁矩，其大小与磁量子数和朗德g因子的乘积成正比。当我们将原子从ODT中释放出来时，在飞行时间（TOF）期间施加磁场梯度，磁场梯度对原子施加力，使原子云根据其磁矩发生空间分离。为产生所需的场梯度，我们重新利用了磁光阱和磁阱所用的同一对反亥姆霍兹线圈。原子在27 G/cm的梯度中下落6 ms，随后继续飞行11 ms。经过17 ms后，原子系综在空间上分离成三个彼此分立的原子云，分别对应不同的磁矩。我们使用与D2 $f = 2 \leftrightarrow f' = 3$ 跃迁共振的探测光照射原子，并获取吸收成像。为确保处于 $f = 1$ 态的原子能够被成像，我们在飞行时间分离之后、成像探测光照射之前，使用与D2 $f = 1 \leftrightarrow f' = 2$ 共振的光束将 $f = 1$ 原子泵浦到 $f = 2$流形中。使用CCD相机记录所得的阴影图像后，我们可以估算每个子云中的原子数，从而推断三个状态之间的布居分布。图6展示了一幅示例吸收成像。

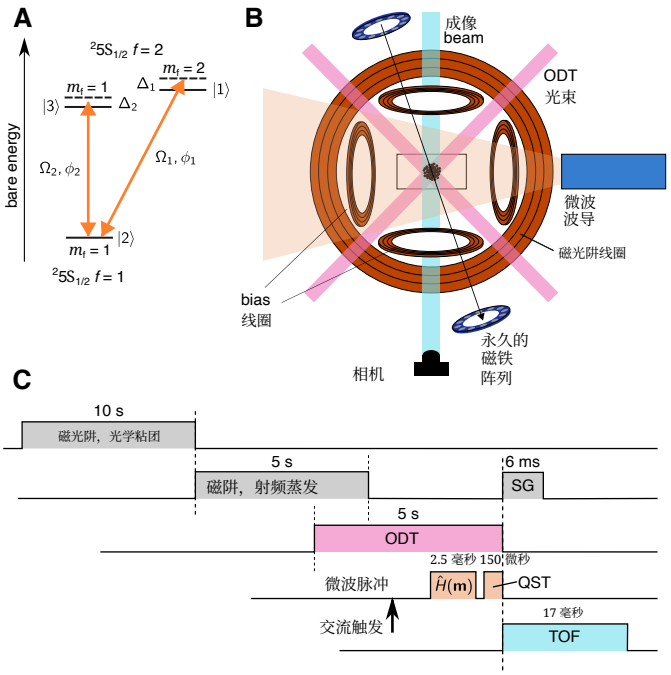

图 5. **实验示意图**。（**A**）我们为自旋-1系统选取的三个能级的能级图。（**B**）简化的实验示意图：将超冷原子云制备在光偶极阱中。永磁体产生塞曼分裂。开口波导用微波照射原子。（**C**）实验序列的时间顺序（不按比例）：MOT 为磁光阱；MT 为磁阱；rf evap 为射频蒸发；ODT 为光偶极阱；QST 为量子态层析；SG 为斯特恩-盖拉赫分离；TOF 为飞行时间。

附录 C：量子态层析

我们的吸收成像方法对裸原子哈密顿量（$\hat{F}_z$）本征基中的三个态实施投影测量，我们将其称为计算基。由于原子系综稀薄且近似无相互作用，斯特恩–盖拉赫飞行时间测量可同时对所有 $\sim 10^5$ 个量子三能级系统实施投影测量。每次采集

可得三个计算基态的相对布居，对应于一般为复数的振幅的模平方。然而，利用斯特恩-盖拉赫吸收成像技术测得的布居不足以重构完整的量子态，因为这还需要相对相位信息。因此，有必要进行完整的自旋-1量子态层析（QST）。

我们的层析序列详见 [35]。对于每个实现特定参数集的实验脉冲序列，我们重复进行六次 QST 序列。每次 QST 序列都在投影测量之前施加不同的附加“读出”幺正算符 R_i ^。这些 R_i ^经过选择，可有效地将量子态旋转至不同的测量基。也就是说，先施加一系列脉冲，再在计算基中进行投影测量，例如

$$\left|\langle j|\hat{R}_i\hat{U}|\psi_0\rangle\right|^2 \tag{C1}$$

^其中，U 是作用于初始态 $|\psi_0\rangle$ 的脉冲序列，而 $|j\rangle$，$j = 1$，2，3 是计算基态。因此，这也可以等价地视为在 ^$R_i^\dagger|j\rangle$ 基中对 ^ $U|\psi_0\rangle$ 进行测量。

具体的读出幺正算符列于参考文献 [35],中，其中还详细说明了如何根据由此得到的布居测量，推导出完整重构三能级密度矩阵所需的正交盖尔曼矩阵的期望值。随后，使用迭代最大似然估计技术 [48, 49]重构最终态。

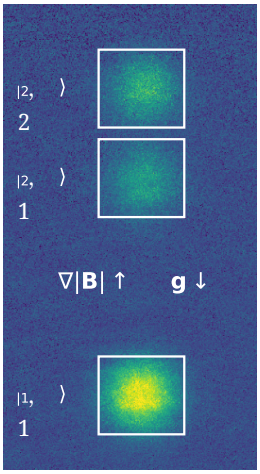

图 6。**飞行时间吸收成像**。一个示例性的飞行时间吸收成像。三个相关态通过斯特恩-盖拉赫技术分离。图中标出了磁场梯度和重力的方向。

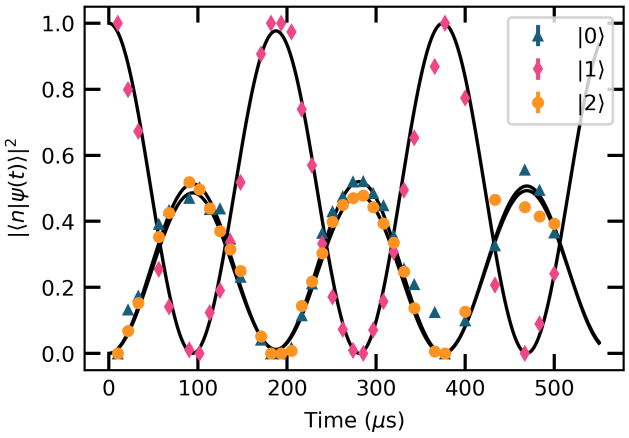

图7. **三能级拉比振荡**。一组实验测得的三态拉比循环样例，用于任意波形发生器校准。

附录 D：校准拉比频率和失谐

由于微波生成、放大和开关组件中的非线性，拉比频率 $\Omega_{1,2}$ 的校准并非易事；这些非线性意味着，同时施加两个音调时，每个音调的振幅都会受到另一个音调的影响。为此，我们构建了一个三次插值查找表 [50]，将输入到任意波形发生器的射频振幅（A，B）映射到相应的拉比频率（Ω_1,Ω_2）。通过拟合三能级拉比振荡，实验确定查找表中的每个数据点。图 7 展示了一个拉比振荡周期示例。

失谐校准较为直接，但其精度受到环境磁场漂移和波动的限制，这些漂移和波动会引起不期望的失谐。对于 ^{87}Rb，$f = 2$ 和$f = 1$的线性塞曼频移分别为 ± 0.7 MHz/G。

为减轻失谐漂移的不利影响，我们采用了多种方法。产生塞曼分裂的磁场由永磁体提供，因此无需依赖驱动电磁铁、可能发生波动的电流电源。此外，如前所述，我们将实验与60赫兹电源线同步，以尽量减小环境交流磁噪声的影响。我们还在每个实验周期后校准共振频率，因为背景磁场似乎始终存在缓慢漂移。校准时，我们扫描频率，直到使用 $n\pi$ 脉冲面积脉冲观察到最大的布居转移，其中 n 为奇整数。共振附近的布居转移对频率的敏感度会随着 n增大而提高；不过，由于逐次噪声，我们发现校准精度无法优于$\sim$ 100 Hz，因此认为使用5π个脉冲已足够。图8展示了一个具有代表性的

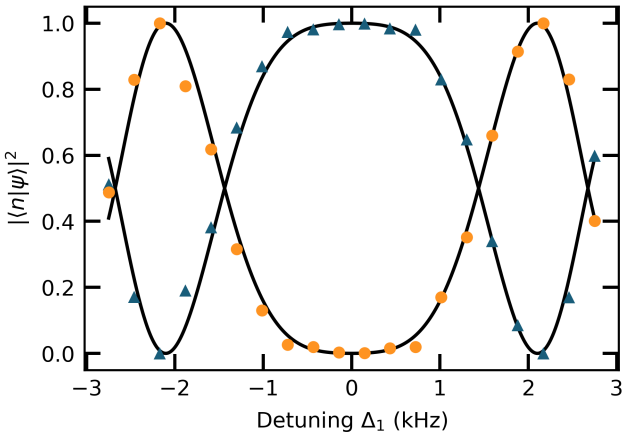

图 8. **共振校准**。对于 5π 面积脉冲，微波频率在共振附近扫描的实验示例。

共振扫描。

脉冲持续时间越长，非期望失谐的影响就越明显。对于短脉冲，失谐引起的相位累积可以忽略不计；但较长的脉冲会导致显著的相位失配，从而降低保真度。因此，我们尽量缩短脉冲序列。

附录 E：序列持续时间

值得注意的是，选择斜坡持续时间 T 以达到最终角度，需要在进动与沿斜坡不同角度处所进行测量的准确性之间取得平衡。受技术条件限制，我们能够实现的拉比频率存在上限，

因此，过短的斜坡会偏离线性区间，而过长的斜坡则会放大失谐误差。对于我们系统所能达到的参数，我们根据纳入正态分布失谐漂移的模拟，选择了 $T = 2.5$ ms。在持续时间为 T 的模拟中，我们发现，尽管当α接近相变（此时能量本征值之间的能隙变得非常小）时，非绝热线性展开开始失效，但在远离 $\alpha = 1$的取值下，线性近似仍然很好，因此即使存在技术噪声和不确定性，我们也能轻松分辨不同的拓扑相。

附录 F：模拟

本文各图所展示的理论曲线均通过直接对含时薛¨定谔方程进行数值积分获得。将符合实际的实验参数输入该模拟，可以看出量子系统的真实演化与针对近绝热情形的一阶展开之间的一致程度。

我们还对本研究所述实验中使用的全部层析序列进行了模拟。对每项实验重复模拟多次，再额外模拟一次层析读出脉冲，即可估算末态保真度。此外，实验模拟中还纳入了真实的失谐噪声。我们通过对实验进行完整模拟，从态制备到层析旋转，并加入方差与实验测量值一致的正态分布失谐噪声，来确定绝热制备脉冲的斜坡持续时间，以及用于测量贝里曲率的非绝热序列。图 9 展示了通过从北极到南极的非绝热演化测定贝里曲率，进而确定陈数的模拟结果。

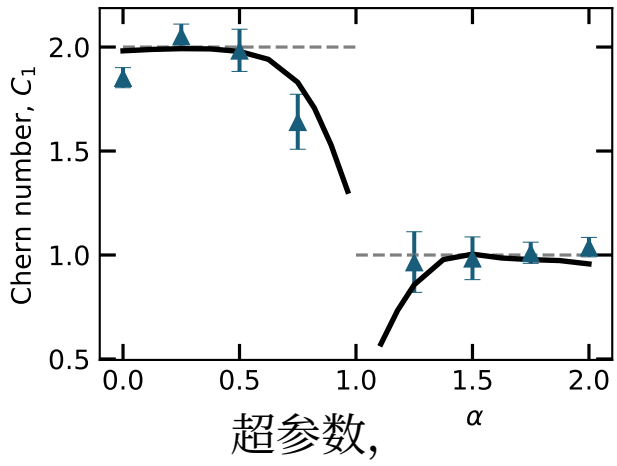

图 9. **实验模拟**。完整实验测定陈数的模拟（包括量子态层析），并以 α 为变量。采用现实的实验室参数，包括拉比频率强度和失谐校准误差。

[1] G. 't Hooft, 《标准模型的形成》, Nature **448**, 271 (2007). [2] D. E. Kharzeev 和 J. Liao, 《手征磁效应揭示重离子碰撞中规范场的拓扑》, Nature Reviews Physics **3**, 55 (2021). [3] B. Acharya, J. Alexandre, P. Benes, B. Bergmann, S. Bertolucci, A. Bevan, H. Branzas, P. Burian, M. Campbell, Y. Cho, *et al.*, 《寻找通过施温格机制产生的磁单极子》, Nature**602**, 63 (2022). [4] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeli¯unas, 和 P.

¨Ohberg, 《中性原子的人工规范势》, Reviews of Modern Physics **83**, 1523 (2011). [5] N. Goldman, G. Juzeli¯unas, P. ¨Ohberg, and I. B. Spiel- man, 《超冷原子的光诱导规范场》, Re- ports on Progress in Physics **77**, 126401 (2014). [6] Y.-J. Lin and I. Spielman, 《超冷中性原子的合成规范势》, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **49**, 183001 (2016). [7] A. Di Meglio, K. Jansen, I. Tavernelli, C. Alexandrou, S. Arunachalam, C. W. Bauer, K. Borras, S. Carrazza, A. Crippa, V. Croft, *et al.*, 《高能物理中的量子计算：现状与挑战》, PRX Quantum **5**, 037001 (2024). [8] M. Aidelsburger, S. Nascimbene, and N. Goldman, 《材料和工程化系统中的人工规范场》, Comptes Rendus Physique **19**, 394 (2018). [9] M. Schroer, M. Kolodrubetz, W. Kindel, M. Sandberg, J. Gao, M. Vissers, D. Pappas, A. Polkovnikov, and K. Lehnert, 《测量人工自旋-**1113**, 050402 2 2014/ 系统中的拓扑相变》, 《物理评论快报》（）。[10] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. M¨ott¨onen, and D. Hall, 《合成磁场中狄拉克单极子的观测》, Nature **505**, 657 (2014). [11] P. Roushan, C. Neill, Y. Chen, M. Kolodrubetz, C. Quin- tana, N. Leung, M. Fang, R. Barends, B. Campbell,

Z. Chen, *et al.*, 《相互作用量子电路中拓扑相变的观测》, Nature **515**, 241（2014）。[12] S. Sugawa、F. Salces-Carcoba、A. R. Perry、Y. Yue 和 I. Spielman, 《量子模拟非阿贝尔杨单极子的第二陈数》, 《科学》**360**, 1429（2018）。[13] S. Sugawa、F. Salces-Carcoba、Y. Yue、A. Putra 和 I. Spielman, 《非阿贝尔规范场中的威尔逊环与 Wilczek-Zee 相位》, npj《量子信息》**7**, 144（2021）。[14] X. Tan、D.-W. Zhang、W. Zheng、X. Yang、S. Song、Z. Han、Y. Dong、Z. Wang、D. Lan、H. Yan、*et al.*, 《Ex-

perimental 观测：利用超导量子比特实现张量单极子》，《物理评论快报》**126**，017702（2021）。[15] M. Chen、C. Li、G. Palumbo、Y.-Q. Zhu、N. Goldman 和 P. Cappellaro，《金刚石中Kalb-Ramond场的合成单极子源》，《科学》**375**，1017（2022）。[16] H. Hu 和 C. Zhang，《超冷原子参数空间中的自旋-1拓扑磁单极子》，Physical Review A **98**，013627（2018）。[17] G. Palumbo 和 N. Goldman，《通过量子度规测量揭示张量单极子》，《物理评论快报》**121**，170401（2018）。[18] D. M. Stamper-Kurn 和 M. Ueda，《旋量玻色气体：对称性、磁性与量子动力学》，Reviews of Modern Physics**85**，1191（2013）。[19] Y.-P. Fu、F.-J. Huang 和 Q.-H. Chen，《具有自旋-张量-动量耦合的内禀自旋霍尔效应》，Physica B: Condensed Matter **583**, 412046（2020）。[20] J. Sun、Y. Chen、X. Chen 和 Y. Zhang，《自旋-张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中的明亮孤子》，Physical Review A **101**，053621（2020）。[21] Y.-Q. Zhu、D.-W. Zhang、H. Yan、D.-Y. Xing 和 S.-L. Zhu，《光学晶格中具有三重简并的涌现赝自旋-1麦克斯韦费米子》，Physical Review A **96**，033634（2017）。[22] H. Hu、J. Hou、F. Zhang 和 C. Zhang，《自旋-张量-动量耦合诱导的拓扑三重简并点》，《物理评论快报》**120**，240401 2018（）。[23] B. Lv、Z.-L. Feng、Q.-N. Xu、X. Gao、J.-Z. Ma、L.-Y. Kong、P. Richard、Y.-B. Huang、V. Strocov、C. Fang、*et al.*，《拓扑半金属磷化钼中三分量费米子的观测》，Nature **546**，627（2017）。[24] I. Fulga、L. Fallani 和 M. Burrello，《光学晶格中受几何保护的三重点交叉》，Physical Review B **97**，121402（2018）。[25] R. Barnett、G. R. Boyd 和 V. Galitski，《超冷原子系统中的SU(3)自旋-轨道耦合》，《物理评论快报》**109**，235308（2012）。[26] M. V. Berry，《伴随绝热变化的量子相位因子》，Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **392**，45（1984）。[27] M. Berry，《几何相位的预示》，Physics Today **43**, 34（1990）。[28] D. Xiao、M.-C. Chang 和 Q. Niu，《贝里相位对电子性质的影响》，Reviews of Modern Physics **82**, 1959 2010（）。[29] S.-s. Chern，《厄米流形的特征类》，Annals of Mathematics **47**，85（1946）。[30] P. Peng、G.-Q. Li、B.-H. Wang 和 Z.-Z. Cao，《旋转下SU(3)自旋-轨道耦合自旋-1玻色-爱因斯坦凝聚体中的奇异基态》，Chaos, Solitons & Fractals **141**，110332（2020）。[31] M. Gell-Mann，《重子与介子的对称性》，载于*The Eightfold Way*（CRC Press，2018），第216–233页。[32] J.-G. Wang、Y.-Q. Li 和 Y.-F. Dong，《具有SU(3)自旋-轨道耦合的自旋-1玻色-爱因斯坦凝聚体中的晶格构型》，Chinese Physics B **29**，100304（2020）。[33] H. Hu 和 C. Zhang，《超冷原子参数空间中的自旋-1拓扑磁单极子》，Physical Review A **98**, 013627（2018）。[34] 有关更多实验细节，请参阅补充材料。[35]J. Lindon、A. Tashchilina、L. W. Cooke 和 L. J. LeBlanc，《超冷原子中的完整酉三能级量子比特控制》，Physical Review Applied **19**, 034089（2023）。[36] V. Gritsev 和 A. Polkovnikov，《参数空间中的动力学量子霍尔效应》，美国国家科学院院刊 **109**, 6457（2012）。[37] J. Hannay，《马约拉纳表示中的自旋贝里相位》，Journal of Physics A: Mathematical and General **31**, L53（1998）。[38] D. Petti、S. Tacchi 和 E. Albisetti，《人工设计自旋纹理的磁振子学综述》，Journal of Physics D: Applied Physics **55**, 293003（2022）。[39] E. Serrano-Ens´astiga 和 D. Braun，《混合态的马约拉纳表示》，Physical Review A **101**, 022332（2020）。[40] B. Mera、A. Zhang 和 N. Goldman，《狄拉克哈密顿量的拓扑与量子几何的关联：量子度量何时决定陈数和绕数》，SciPost Physics **12**, 018（2022）。[41] T. Grass、D. Bercioux、U. Bhattacharya、M. Lewenstein、H. S. Nguyen 和 C. Weitenberg，《非标准几何中的合成量子物质》，Reviews of Modern Physics **97**, 011001（2025）。[42] H. Labuhn、S. Ravets、D. Barredo、L. B´eguin、F. No- grette、T. Lahaye 和 A. Browaeys，《利用里德伯原子在微型陷阱中进行单原子寻址以实现量子态工程》，Physical Review. A **90**, 023415（2014）。[43] A. L. Shaw、R. Finkelstein、R. B.-S. Tsai、P. Scholl、T. H. Yoon、J. Choi 和 M. Endres，《通过编程局域旋转与原子移动实现多系综计量》，Nature Physics **20**, 195（2024）。[44] G. Wang、W. Xu、C. Li、V. Vuleti´c 和 P. Cappellaro，《通过相位调制实现阵列中的单原子控制》，Physical Review Applied **23**, 024072（2025）。[45] E. Saglamyurek、T. Hrushevskyi、A. Rastogi、L. W. Cooke、B. D. Smith 和 L. J. LeBlanc，《在玻色–爱因斯坦凝聚态中存储短单光子级光脉冲以实现高性能量子存储器》，New Journal of Physics **23**, 043028（2021）。[46] L. W. Cooke、A. Tashchilina、M. Protter、J. Lindon、T. Ooi、F. Marsiglio、J. Maciejko 和 L. J. LeBlanc，《整体量子计算的Floquet工程化非阿贝尔几何相位研究》，Physical Re- view Research**6**, 013057（2024）。[47] N. Milson、A. Tashchilina、T. Ooi、A. Czarnecka、Z. F. Ahmad 和 L. J. LeBlanc，《用于超冷量子气体优化与控制的高维强化学习》，Machine Learning: Science and Technol- ogy **4**, 045057（2023）。[48] Z. Hradil，《量子态估计》，Physical Review A **55**, R1561（1997）。[49] A. I. Lvovsky，《量子平衡零拍层析中的迭代最大似然重建》，Journal of Op- tics B: Quantum and Semiclassical Optics **6**, S556（2004）。[50] R. J. Renka、R. Renka 和 A. Cline，《一种基于三角形的插值方法》，The Rocky Mountain Journal of Mathematics，223（1984）。