arXiv:2603.16097v1 [math.CV] 17 Mar 2026

多面锥上的管状域中 Hardy空间的刻画

ZUNWEI FU[a]、LOUKAS GRAFAKOS[b]、WEI WANG[c] 和 QINGYAN WU[a]

Abstract. 本文旨在研究多面锥上的管状域中全纯 H^1Hardy空间各种刻画之间的等价性。我们建立了一种新的迭代泊松积分公式，可再现此类域上的全纯函数。然而，该公式表明，全纯 H^1 函数在其 Shilov边界 $\mathbb{R}^n$ 上具有边界值，且这些边界值属于一种新型的实变量 Hardy空间，无法通过标准的经典多参数调和分析来处理。为克服这一困难，我们发展了适用于这一结构的技术。我们以迭代泊松积分作为恒等近似，并采用提升技巧，引入了多种适用于管状域的多参数分析概念，例如扭曲矩形、新的非切向趋近区域、非切向极大函数和 Littlewood-Paley型函数。这些概念都体现了与多面锥相关的新几何特征，并且与旗结构中的情形一样，涉及隐藏参数。我们发展了研究这些新 Hardy空间所需的多参数工具。特别是，我们运用这些工具，通过非切向极大函数、Lusin-Littlewood-Paley 面积函数和 Littlewood-Paley g函数，获得了多面锥上的管状域中全纯 H^1 Hardy空间的等价刻画。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 7 2.1. 沿直线的部分卷积与偏拉普拉斯方程 7 2.2. 分部积分公式 9 3. 与扭曲矩形相关的新极大函数及迭代泊松积分公式 10 3.1. 扭曲矩形、迭代极大函数与扭曲极大函数 10 3.2. 迭代泊松积分与全纯 H^p-函数的边界增长估计 13 3.3. 迭代泊松积分公式与调和控制的证明 16 4. 极大函数刻画 19 4.1. 将 Fefferman-Stein 型 good-λ 不等式化归为积分估计 19

2020 Mathematics Subject Classification: 42B30, 42B35, 42B25, 32A35.*Keywords:* Hardy空间、多面锥上的管状域、迭代 Poisson 积分、扭曲矩形、Lusin-Littlewood-Paley 面积函数、Fefferman-Stein 型良好不等式、非切向极大函数。a 临沂大学数学系，中国山东省276005，电子邮箱：fuzunwei@lyu.edu.cn（Z. Fu）、wuqingyan@lyu.edu.cn（Q. Wu）；b 密苏里大学数学系，美国密苏里州哥伦比亚市65211，电子邮箱：grafakosl@missouri.edu；c 浙江大学数学系，中国浙江省310058，电子邮箱：wwang@zju.edu.cn。第一作者得到国家自然科学基金（NNSF）（编号：12431006）资助。第二作者得到西蒙斯基金会项目（编号：00012681）资助。第三作者得到 NNSF（编号：12371082）资助。第四作者得到 NNSF（编号：12171221）和山东省泰山学者青年专家计划（tsqn202507265）资助。

4.2. 利用微分恒等式估计积分 21 4.3. 一般情形下的估计 23 4.4. Fefferman-Stein 型 good-λ 不等式的证明 25 5. Littlewood-Paley g 函数与 S 函数 28 5.1. 面向 $\mathfrak{H}$-值函数的 Plancherel-P´olya 型不等式 28 5.2. 估计 $\|f\|_{L^1} \lesssim \|g(f)\|_{L^1}$ 296.
各种刻画等价性的证明 32 附录 A. 面向 $\mathfrak{H}$-值函数的 Plancherel-P´olya 型不等式 35 参考文献 38

1. Introduction

众所周知，上半平面 $\mathbb{R}^2_+$上的 Hardy空间 $H^p(\mathbb{R}^2_+)$ 中的全纯函数，可以用其非切向极大函数或 Lusin-Littlewood-Paley 面积函数来刻画；此类函数边界值的实部构成了定义在 $\mathbb{R}$上的实变函数 Hardy空间 $H^p(\mathbb{R})$。为了定义定义在 $\mathbb{R}^n$上的实变量 Hardy空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$，Stein 和 Weiss [39] 引入了广义解析函数 $u=(u_0,\dots,u_n)$的概念：$\mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}^{n+1}$，它满足

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{for } j \neq k,$$

并证明了，当$p \geq \frac{n-1}{n}$ 时，广义解析函数的 Hardy空间 $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 也可以用非切向极大函数或面积函数来刻画。此类函数边界值的各分量 u_0 构成了定义在 $\mathbb{R}^n$上的实变量 Hardy空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$。

将经典解析 Hardy空间的刻画推广到多复变数中更一般的伪凸域，并在解析 Hardy 函数的边界值与其 Shilov边界上适当的实变量 Hardy 空间之间建立对应关系，有着悠久的历史。对于 Siegel上半空间，Geller [13] 证明了这些刻画是等价的，并且全纯 H^p 函数的边界值属于 Heisenberg群上的 Hardy空间 H^p 。这类刻画可以推广到一大类具有光滑边界的光滑伪凸域（参见例如 [25, 35]）。

然而，对于具有非光滑边界的伪凸域，会出现新的现象。即使对于双圆盘，也存在由高维几何复杂性所导致的根本性困难。20世纪70年代，Malliavin 和 Malliavin [28] 证明，通过引入一种基于辅助函数的技巧，极大函数刻画蕴含了用 Lusin-Littlewood-Paley 面积函数表示的刻画。Gundy 和 Stein[16] 将这一结果推广到了双圆盘的 H^p 理论。双圆盘上的双调和函数或全纯 H^p 函数，其边界值属于其 Shilov边界（即一个环面）上的双参数 Hardy 空间。这些结果推动了多参数调和分析的发展（参见例如 [4, 9, 23, 26, 32]），该领域至今仍是活跃的研究方向。后来，Sato [33] 将这一理论推广到乘积 $\mathbb{R}^{n_1+1}_+ \times \mathbb{R}^{n_2+1}_+$上广义解析函数的 Hardy 空间刻画之间的等价性。

由于一般的 Siegel 域或对称空间具有非光滑边界，泊松积分的容许收敛变得非常复杂（参见例如 [24, 34, 37]），因此对全纯 H^pHardy空间的研究通常局限于齐性Siegel域以及 $p > 1$ （参见例如 [1, 2] 以及

其中的参考文献）。然而，在 [41], 中，排名第二和第三的作者证明，乘积两个 Siegel 上半空间上的任意全纯H^1 函数，在其 Shilov边界上都具有边界值，该边界是两个 Heisenberg 群的乘积，并且该边界值属于双参数 Hardy 空间 H^1 。通过运用双参数调和分析（参见例如 [6]），利用 Cauchy-Szeg˝o 投影将一个全纯 H^1函数分解为全纯原子之和。在 [42], 中，作者研究了一类新的类旗型奇异积分核，其中包括某些 Siegel 域上的 Cauchy-Szeg˝o 核。这些核在其 Shilov边界上既不是乘积型，也不是旗型；这些边界具有二步幂零 Lie 群的结构，记为 $\mathscr{N}$。在 [42] 中，作者还在这些群上引入了由迭代热核积分定义的新 Hardy空间 $\mathscr{N}$。

一般而言，不同域上的全纯 H^p 函数，其边界值在各自 Shilov边界上可能属于不同类型的实变量 Hardy 空间，因此需要采用不同类型的多参数调和分析来处理。Stein [38] 曾指出：“适当版本的多参数分析将提供奇异积分理论中缺失的部分，而这正是解决多复变数中各种问题所需要的。这确实是一个令人振奋的前景。”秉持这一理念，Nagel、Ricci 和 Stein [31] 引入并研究了一类重要的 Siegel 域：多面锥上的管状域。 $\mathbb{R}^n$ 中的多面锥 Ω是有限条以原点为交点的射线所张成的凸包的内部，其中至少有 n 条射线线性无关。Ω上的管状域是 $\mathbb{C}^n$ 中由下式定义的域

$$T_\Omega := \mathbb{R}^n + \mathbf{i}\Omega = \{x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}^n; x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Omega\},$$

其 Shilov 边界是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ +i0。全纯 Hardy 空间 $H^p(T_\Omega)$由 T_Ω 上的所有全纯函数 F 组成，且满足

$$\|F\|_{H^p(T_\Omega)} := \left(\sup_{y\in\Omega}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+\mathbf{i}y)|^p\ dx\right)^{1/p} < \infty. \tag{1.1}$$

有关管状域上的 Hardy空间的基本事实，请参见 [40, 第 3] 章。Cauchy-Szeg˝o 投影$L^2(\mathbb{R}^n) \to H^p(T_\Omega)$具有一个核，称为 *Cauchy-Szeg˝o* 核，其表达式为

$$C(x+\mathbf{i}y) = \int_{\Omega^*} e^{2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)\cdot\xi}\, d\xi,$$

其中 $\Omega^* := \{\xi \in \mathbb{R}^n :\ y\cdot\xi \geq 0,\ y \in \Omega\}$ 是 Ω 的对偶锥。Nagel、Ricci 和 Stein [31] 证明，将该核限制在 Shilov 边界上时，它是旗型核之和。然而，与旗型核之和相关的 Hardy空间研究仍处于早期阶段（例如参见 [22]及其中的参考文献）。本文旨在发展研究 Shilov 边界 $\mathbb{R}^n$上新型实变量 Hardy 空间所需的“适当版本的多参数分析”工具，将其应用于 T_Ω上的全纯 H^1 Hardy空间，并证明其各种刻画之间的等价性。

众所周知， [11] 实变量 Hardy 空间是根据恒等逼近来定义的。因此，我们的第一步是为 T_Ω上的全纯函数寻找一个积分表示公式，该公式也可以被视为 Shilov 边界 $\mathbb{R}^n$上的恒等逼近。我们利用这一表示来定义与 H^1 上的全纯 Hardy 空间相对应的新 Hardy 空间，并研究后者。为简便起见，本文仅考虑 $H^p(T_\Omega)$，其中 $p = 1$ ，并假设该多面锥由 $\mathbb{R}^n$中的单位向量 e_j 张成， $j = 1, \ldots, m$，即

$$\Omega = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0\},$$

并且 $e_1, \dots, e_m$ 中的任意 n 均线性无关，以避免退化（见图1）。我们必须有 $m \geq n$。根据定义，多面锥 Ω 具有如下形式 $\{\lambda y\,;\ \lambda > 0,\ y \in \mathcal{C}\}$，其中 $\mathcal{C}$ 是向量 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 的凸包。

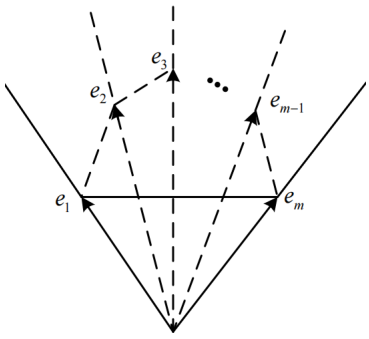

FIGURE 1. 多面锥

令 $P_t(s) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+s^2}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的标准泊松核。定义沿直线的泊松积分 e_μ为

$$f *_\mu P_t(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - se_\mu) P_t(s)\, ds \tag{1.2}$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$，以及 迭代 ***Poisson*** 积分 为

$$P_{\mathbf{t}}(f)(x) := f *_1 P_{t_1} \cdots *_m P_{t_m}(x), \tag{1.3}$$

这是空间 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$ 中关于变量 $(x, \mathbf{t})$ 的函数。我们通常将 $P_{\mathbf{t}}(f)(x)$ 写作 $f * P_{\mathbf{t}}(x)$。与旗情形或类旗情形（例如参见 [30, 42]）一样，我们考虑提升空间 $\mathbb{R}^m$ 和投影$\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，其定义为

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mapsto \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m. \tag{1.4}$$

定理 1.1。 设 T_Ω 是如上所述的多面锥上的管状域。对于 $F \in H^p(T_\Omega)$ 满足$p > 1$的情形，存在 $F^b \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$F(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t})) = F^b * P_{\mathbf{t}}(x), \tag{1.5}$$

对所有 $(x, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$均成立。此外，如果 F在 T_Ω 上连续，则有 $F^b = $极限$_{\mathbf{t}\to 0} F(x + \mathbf{i}(\mathbf{t}))$。

注 1.1。 (1) 这个再生公式不同寻常，因为我们必须使用提升锥$(\mathbb{R}_+)^m$；在该锥 Ω 中，一个点 y 表示为 $\pi(\mathbf{t})$。迭代 ***Poisson*** 积分具有 m-参数结构，尽管 $\mathbb{R}^n$ 只有 n维。也就是说，存在 $m - n$ 个隐藏参数。

(2) 这个公式刻画了 $\mathbb{R}^n$ 上的新型 ***Hardy***空间，全纯***Hardy***函数的边界值属于其中，并指出研究这些函数需要哪种多参数分析。我们将发展在 ***Shilov*** 边界 $\mathbb{R}^n$ 上进行相应多参数调和分析所需的工具，以解决有关管状域上全纯***Hardy***函数的问题。

迭代 Poisson 积分是我们对恒等算子的逼近；它使我们能够引入适用于管状域 T_Ω 的自然多参数分析概念，例如扭曲矩形、新的非切向区域、非切向极大函数、Lusin-Littlewood-Paley面积函数以及新型

Hardy空间。这些概念都不同于标准概念，并具有与多面锥相关的新几何特征。

~对于 $\mathbf{t}:=(t_1,\dots,t_m)\in(\mathbb{R}_+)^m$，$\mathbb{R}^m$ 中的标准矩形为 $R(\mathbf{0},\mathbf{t})=(-t_1,t_1)\times\cdots\times(-t_m,t_m)$。~在 (1.4) 中的投影 π 作用下，$R(\mathbf{0},\mathbf{t})$ 的像记为 $R(\mathbf{0},\mathbf{t})$，称为 $\mathbb{R}^n$中的扭曲矩形。对于 $x\in\mathbb{R}^n$，令 $R(x,\mathbf{t}):=x+R(\mathbf{0},\mathbf{t})$。那么

$$R(x,\mathbf{t}):=\{x+\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_me_m;|\lambda_1|<t_1,\dots,|\lambda_m|<t_m\}. \tag{1.6}$$

对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和任意 $\beta>0$，我们将 $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m$ 中的非切向区域定义为

$$\Gamma_\beta(x):=\{(x',\mathbf{t})\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m;x'\in R(x,\beta\mathbf{t})\}. \tag{1.7}$$

我们还为简便起见，将 $\Gamma_1(x)$ 记作 $\Gamma(x)$。在 $\mathbb{R}^n$ 上定义非切向极大函数为

$$N^\beta(f)(x):=\sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)}\left|(f*P_{\mathbf{t}})(x')\right|. \tag{1.8}$$

Hardy空间 $H^1_{\max;\Omega}(\mathbb{R}^n)$ 由满足 $N^\beta(f)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 构成。对于两个多面锥 Ω，Ω'，若 $\Omega\subset\Omega'$，则有 $H^1(T_{\Omega'})\overline{\subsetneq}H^1(T_\Omega)$ 以及 $H^1_{\max;\Omega'}(\mathbb{R}^n)\subsetneq H^1_{\max;\Omega}(\mathbb{R}^n)$（参见命题 3.5）。若无歧义，我们将省略 $H^1_{\max;\Omega}$ 对 Ω 的依赖。

定义 f 的*Lusin-Littlewood-Paley* 面积函数为

$$S(f)(x):=\left(\int_{\Gamma(x)}|\nabla_1\cdots\nabla_m(f*P_{\mathbf{t}})(x')|^2\,\frac{\mathbf{t}\,d\mathbf{t}\,dx'}{|R(x,\mathbf{t})|}\right)^{1/2}, \tag{1.9}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，其中 ∇_j 是由 e_j 和 t_j 张成的平面上的梯度，且$\mathbf{t}\,d\mathbf{t}=t_1\cdots t_m\,dt_1\cdots dt_m$。通过令 S-函数 *Hardy*空间 $H^1_S(\mathbb{R}^n)$ 为

$$H^1_S(\mathbb{R}^n):=\{f\in L^1(\mathbb{R}^n);S(f)\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

并赋予范数$\|f\|_{H^1_S(\mathbb{R}^n)}:=\|S(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. f的$Littlewood\text{-}Paley$ g-函数 定义为

$$g(f)(x):=\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m}|\nabla_1\cdots\nabla_m(f*P_{\mathbf{t}})|^2(x)\,\mathbf{t}\,d\mathbf{t}\right)^{1/2},$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^n$成立。我们定义 g-函数 *Hardy*空间

$$H^1_g(\mathbb{R}^n):=\{f\in L^1(\mathbb{R}^n);g(f)\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$$

并且该空间自然地赋予范数$\|f\|_{H^1_g(\mathbb{R}^n)}:=\|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。

注意，管状域 $T_\Omega=\mathbb{R}^n+\mathbf{i}\Omega$ 不同于 $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m$，但 $\Omega=\pi((\mathbb{R}_+)^m)$。如果将 T_Ω 上的函数 F提升为 $u(x,\mathbf{t})=F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))$上的函数 $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m$，那么根据定理 1.1，$u(x,\mathbf{t})=F^b*P_{\mathbf{t}}(x)$，若 $F\in H^p(T_\Omega)$且 $p>1$。受上述迭代 Poisson 积分的非切向极大函数、面积函数和 g-函数的启发，我们将全纯函数 F 在 T_Ω 上的非切向极大函数 定义为

$$\mathbb{N}^\beta(F)(x):=\sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)}|F(x'+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|, \tag{1.10}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^n$。我们还定义*Lusin-Littlewood-Paley* 面积函数为

$$\mathbb{S}(F)(x):=\left(\int_{\Gamma(x)}|\nabla_1\cdots\nabla_m(F(x'+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^2\,\frac{\mathbf{t}d\mathbf{t}dx'}{|R(x,\mathbf{t})|}\right)^{\frac12},$$

以及*Littlewood-Paley* g-函数为

$$\mathbb{G}(F)(x) := \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_1 \cdots \nabla_m (F(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^2 \, \mathbf{t} d\mathbf{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

建立上述记号后，我们现在可以陈述主要定理。

定理1.2. 设 T_Ω 是上述多面锥上的管状域。那么，对于 T_Ω上的全纯函数 F，以下性质等价:

(1) $F \in H^1(T_\Omega)$*; (2)* 对任意 $\beta > 0$， $\mathbb{N}^\beta(F) \in L^1(\mathbb{R}^n)$*; (3)* 对任意固定的 $y_0 \in \Omega$，$\lim_{|y|\to+\infty} F(x+iy) = 0$，且 $\mathbb{S}(F) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。$_{y\in y_0+\Omega}$ *(4)* 对任意固定的 $y_0 \in \Omega$，$\lim_{|y|\to+\infty} F(x+iy) = 0$，且 $\mathbb{G}(F) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。$_{y\in y_0+\Omega}$此外，

$$\|F\|_{H^1(T_\Omega)} \approx \|\mathbb{N}^\beta(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \approx \|\mathbb{S}(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \approx \|\mathbb{G}(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

注 1.2. 我们证明中的一个关键步骤，是用具有 $p > 1$ 的全纯函数来逼近全纯 H^1 函数。对于后一类函数，我们可以应用定理 *1.1*，建立它们与实变量 H^p 函数之间的对应关系；这些实变量函数是通过 *Shilov* 边界上的迭代 *Poisson* 积分定义的。然后，运用我们所阐述的多参数分析工具，并利用 F 的全纯性，我们便能完整刻画此类管状域上的全纯 H^1 *Hardy*空间。这种方法还对 *Shilov* 边界 $\mathbb{R}^n$上一类新型 *Hardy* 空间给出了部分刻画。

关于不同情形下实变量 Hardy 空间各种刻画的等价性，参见例如 [3, 5, 6, 8, 14, 19, 21, 43]。

定理1.2的证明如下。对于全纯函数 F，我们可以利用 $|F|^p$ 对 $p > 0$ 的次调和性来证明 (1) $\Rightarrow$ (2)。(2) $\Rightarrow$ (3) 的推论可归结为 Fefferman–Stein 型 good-λ 不等式：存在 $C > 0$ 和 $\beta > 1$，使得对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及所有$\lambda > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n; S(f)(x) > \lambda\}| \le C \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; N^\beta(f)(x) > \lambda\right\}\right| + \frac{C}{\lambda^2} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n; N^\beta(f)(x)\le\lambda\}} N^\beta(f)(x)^2 \, dx, \tag{1.11}$$

其中， C 是一个与 f 和 λ无关的常数。在单参数情形下，这个不等式由 Fefferman 和 Stein [10, 36] 通过光滑曲面逼近，并在光滑区域中应用 Green 公式证明。双参数情形的主要困难在于缺乏这类有效的逼近方法，这是由更高维度的几何复杂性所致。为克服双调和函数中的这一困难，Malliavin 和 Malliavin [28] 引入了一个辅助函数。迄今为止，只有少数情形通过证明（1.11）的类似结果建立了极大函数刻画：Merryfield [29], 处理了 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 情形；Doung、Li、Wick、Yang [8], 研究了 Muckenhoupt–Stein Bessel 算子框架；Han、Lee、Li、Wick [19, 20], 研究了多参数旗型情形；Cowling、Fan、Li、Yan [7], 研究了乘积分层李群；Chen、Cowling、Lee、Li、Ottazzi [5] 研究了 Heisenberg群上的旗结构；Li [27], 研究了有限型域乘积的 Shilov 边界，等等。在我们的框架中，困难在于参数个数任意，这与上述仅涉及两个参数的情形不同。因此，我们必须找到一般的归纳公式来克服这一困难。

在乘积情形 $\mathbb{R}_+^{n_1+1} \times \mathbb{R}_+^{n_2+1}$ 中，蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (1) 是通过对单变量希尔伯特空间值函数 $\mathfrak{f}$ [33] 使用估计式$\|\mathfrak{f}\|_1 \lesssim \|S(\mathfrak{f})\|_1$ 证明的。由于我们的非切向

区域 $\Gamma_\beta(x)$ 在 (1.7) 中无法写成乘积，因此我们不能采用这种方法。不过，由于 g-函数的积分域 $(\mathbb{R}_+)^m$ 具有乘积结构，我们加入了条件 (4)；这一条件通常不会出现在（广义）解析 Hardy 空间的刻画中（参见例如 [13, 33, 39]）。蕴含关系 (3) ⇒(4) 可由平均值公式得出：通过 $\mathbb{S}$-函数对 $\mathbb{G}$-函数进行逐点控制。条件 (4) ⇒ (1) 的实变量版本为

$$\sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}_+)^m} \|f * P_{\mathbf{t}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.12}$$

我们首先通过应用相应的一维 Plancherel-P´olya 型不等式，建立 Hilbert空间值函数的 (1.12) 的一维版本。随后，我们迭代地使用这一估计来证明 (1.12)。

本文结构如下。第2节讨论沿直线与泊松核的部分卷积，它们满足偏拉普拉斯方程。第3节刻画扭曲矩形的几何形状，并证明迭代极大函数与扭曲极大函数的等价性。我们还分别得到迭代 Poisson 积分和全纯 H^p-函数的边界增长估计，然后利用最大值原理表明迭代 Poisson 积分再现全纯函数。第4节借助一个辅助函数，将 Fefferman-Stein 型优-λ 不等式 (1.11) 化归为对 $\mathbb{R}^n \times(\mathbb{R}_+)^m$ 上的一个积分的估计。我们利用微分恒等式估计该积分中出现的项、这些估计后产生的新项，以及一般而言归纳过程中出现的所有项。第5节证明 Hilbert空间值函数的 (1.12) 的一维版本，并由此推出 (4) ⇒(1) 的实变量版本 (1.12)。第6节证明主定理1.2中各种刻画的等价性。为方便读者，附录中给出了 Hilbert空间值函数的 Plancherel-P´olya 型不等式的证明。

2. Preliminaries

2.1. **沿直线的部分卷积与偏拉普拉斯方程**。考虑复直线在 $\mathbb{C}^n$ 中，它包含e_μ:

$$L_\mu := \{(s + \mathbf{i}t)e_\mu; s, t \in \mathbb{R}\}, \tag{2.1}$$

及其上半平面

$$L_\mu^+ = \{(s + \mathbf{i}t)e_\mu; s \in \mathbb{R}, t > 0\}, \tag{2.2}$$

其边界 $\mathbb{R}e_\mu$ 包含于 T_Ω 的 Shilov 边界 $\mathbb{R}^n + \mathbf{i}0$ 中。于是，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$， $x + L_\mu^+$ 都可能包含在管状域的边界中，因为 e_μ 可能包含于 $\partial\Omega$ 中。但对于 $y \in \Omega$，我们总有 $x + iy + L_\mu^+ \subset T_\Omega$。

记 $f *_\mu g$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上沿直线 e_μ 的部分卷积，亦即对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及 $g \in L^1(\mathbb{R})$，

$$f *_\mu g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - se_\mu)\, g(s)ds, \tag{2.3}$$

对于几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$。显然，沿两条直线e_μ 和 e_ν 的部分卷积是可交换的:

$$f *_\mu g *_\nu h(x) = f *_\nu h *_\mu g(x), \tag{2.4}$$

对于任意 $g, h \in L^1(\mathbb{R})$。若记

$$e_\mu = (e_{\mu 1}, \ldots, e_{\mu n}) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

$\mu = 1, \dots, m$, 则该向量场

$$X_\mu := \sum_{k=1}^{n} e_{\mu k} \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.6}$$

是沿方向 e_μ 的导数。将函数 u 在 (2.2) 中上半平面 L^+_μ 上的 μ 阶拉普拉斯算子 和梯度定义为

$$\triangle_\mu := X_\mu^2 + \frac{\partial^2}{\partial t_\mu^2}, \qquad \nabla_\mu u := \left(X_\mu u, \frac{\partial u}{\partial t_\mu} \right),$$

分别为, $\mu = 1$, ..., m。

命题 2.1。 *(1)* 若 F 在管状域 T_Ω 上全纯, 则对固定的 $x + \mathbf{i}y \in T_\Omega$, F 在 $x + \mathbf{i}y + L^+_\mu$ 上的限制是全纯的, 即 $F(x + \mathbf{i}y + ze_\mu)$ 在 $z \in \mathbb{C}$ 中关于 虚部 $z > 0$ 全纯。*(2)* 对于 $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\triangle_\mu [f *_\mu P_{t_\mu}(x)] = 0, \qquad \text{and} \qquad \nabla_\mu \left[f *_\mu P_{t_\mu}(x) \right] = f *_\mu \widetilde{\nabla}_\mu P_{t_\mu}(x), \tag{2.7}$$

其中 $\widetilde{\nabla}_\mu$ 是变量为 s_μ、 t_μ 的平面上的梯度: $\widetilde{\nabla}_\mu v(s_\mu, t_\mu) = \left(\frac{\partial v}{\partial s_\mu}(s_\mu, t_\mu) \underline{\frac{\partial v}{\partial t_\mu}(s_\mu, t_\mu)} \right)\underline{.}$

证明。 (1) 如果我们将管状域的坐标写作 z_1, ..., z_n $z_j = x_j + \mathbf{i}y_j$ 和 $z = s + \mathbf{i}t$, 那么, 对于固定的 μ, 我们有

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} &= \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t} \right) [F(x + \mathbf{i}y + (s + \mathbf{i}t)e_\mu)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_{\mu k} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x + \mathbf{i}y + (s + \mathbf{i}t)e_\mu) + \mathbf{i}\sum_{k=1}^{n} e_{\mu k} \frac{\partial F}{\partial y_k}(x + \mathbf{i}y + (s + \mathbf{i}t)e_\mu) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e_{\mu k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)(x + \mathbf{i}y + (s + \mathbf{i}t)e_\mu) = 0, \end{aligned}$$

利用（2.5）以及 F 所满足的柯西-黎曼方程。

(2) 显然, $f *_\mu P_{t_\mu}(x)$ 位于 $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ 中。由于

$$\frac{\partial}{\partial s}[f(x - se_\mu)] = -X_\mu f(x - se_\mu), \tag{2.8}$$

根据定义 (2.6), 我们得到

$$\begin{aligned} \triangle_\mu [f *_\mu P_{t_\mu}(x)] &= \int_{\mathbb{R}} X_\mu^2 f(x - se_\mu) P_{t_\mu}(s) ds + \int_{\mathbb{R}} f(x - se_\mu) \frac{\partial^2}{\partial t_\mu^2} P_{t_\mu}(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial s^2}[f(x - se_\mu)] P_{t_\mu}(s) ds + \int_{\mathbb{R}} f(x - se_\mu) \frac{\partial^2}{\partial t_\mu^2} P_{t_\mu}(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x - se_\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_\mu^2} \right) P_{t_\mu}(s) ds = 0, \end{aligned}$$

通过分部积分，并且

$$\begin{aligned}\nabla_\mu[f *_\mu P_{t_\mu}(x)] &= \left(\int_{\mathbb{R}} X_\mu f(x-se_\mu)P_{t_\mu}(s)ds, \int_{\mathbb{R}} f(x-se_\mu)\frac{\partial}{\partial t_\mu}P_{t_\mu}(s)ds\right)\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial}{\partial s}[f(x-se_\mu)]P_{t_\mu}(s)ds, \int_{\mathbb{R}} f(x-se_\mu)\frac{\partial}{\partial t_\mu}P_{t_\mu}(s)ds\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-se_\mu)\widetilde{\nabla}_\mu P_{t_\mu}(s)ds.\end{aligned}$$

命题得证。 □

D记 $\mathfrak{m}:=\{1,\dots,m\}$。对于 $\mathfrak{m}$ 的子集 $\mathfrak{j}=\{j_1,\dots,j_a\}$，我们引入如下记号

$$\mathbf{t}_\mathfrak{j} := (t_{j_1},\dots,t_{j_a}), \qquad \nabla_\mathfrak{j} v := \nabla_{j_1}\cdots\nabla_{j_a} v, \qquad \mathbf{t}_\mathfrak{j} d\mathbf{t}_\mathfrak{j} := t_{j_1}\cdots t_{j_a} dt_{j_1}\cdots dt_{j_a}, \tag{2.9}$$

对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\phi\in L^1(\mathbb{R})$，我们定义

$$f *_\mathfrak{j} \phi_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}} := f *_{j_1} \phi_{t_{j_1}} \cdots *_{j_a} \phi_{t_{j_a}}(x),$$

其中 $\phi_t(s)=\frac{1}{t}\phi(\frac{s}{t})$。令

$$\mathfrak{m}_k = \{k,\dots,m\}.$$

根据上述记号，我们有 $\mathbf{t}_\mathfrak{m}=\mathbf{t}$。当 $\mathfrak{j}=\mathfrak{m}$ 时，我们将用 $f*\phi_\mathbf{t}$ 代替 $f*_\mathfrak{j}\phi_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}$。

对于 $\mathfrak{m}$ 的子集 $\mathfrak{j}$ 以及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$，定义 f 的部分 ***Littlewood-Paley*** g-函数 为

$$g_\mathfrak{j}(f)(x) := \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}} \left|\nabla_\mathfrak{j}(f *_\mathfrak{j} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}})(x)\right|^2 \mathbf{t}_\mathfrak{j} d\mathbf{t}_\mathfrak{j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

命题 2.2。对于满足 $1<p<\infty$ 的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，我们有 $\|g_\mathfrak{j}(f)\|_p \lesssim \|f\|_p$。

证明是标准的（例如参见 [21, 42]），反复利用向量值函数的 g-函数的 L^p 有界性即可。另请参见命题 5.5 的证明，以了解 $p=1$ 时的逆向部分。细节从略。

2.2. **分部积分公式**。在 good-λ 不等式的证明中将反复用到该公式。对于固定的 μ，我们采用坐标 $x=x^\perp+se_\mu$，其中 $x^\perp$ 是 x 中垂直于 e_μ 的部分。

命题 2.3. 假设 $U\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 满足以下三个性质：
(1) 对于固定的 $t_\mu>0$，有 $\nabla^a U(\cdot,t_\mu)\in L^1(\mathbb{R}^n)$、$a=0$、1、2以及 $X_\mu U(x^\perp+se_\mu,t_\mu)\to 0$，当 $s\to\infty$ 对几乎所有 $x^\perp\in e_\mu^\perp$ 都成立；(2) 当 $t_\mu\to+\infty$ 时，有 $U(\cdot,t_\mu)$ $t_\mu\partial_{t_\mu}U(\cdot,t_\mu)\to 0$ 于 $L^1(\mathbb{R}^n)$；(3) 当 $t_\mu\to 0$ 时，有 $U(\cdot,t_\mu)\to U(\cdot,0)$ 以及 $t_\mu\partial_{t_\mu}U(\cdot,t_\mu)\to 0$ 于 $L^1(\mathbb{R}^n)$。那么

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} \triangle_\mu U(x,t_\mu)t_\mu dt_\mu dx = \int_{\mathbb{R}^n} U(x,0)\,dx. \tag{2.10}$$

证明。设

$$\int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^n} \triangle_\mu U(x,t_\mu)t_\mu dt_\mu dx = \int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^n} X_\mu^2 U(x,t_\mu)t_\mu dt_\mu dx + \int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{t_\mu}^2 U(x,t_\mu)t_\mu dt_\mu dx =: \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

注意到 $x \to (x^\perp, s)$ 保持体积形式，因为我们假设 e_μ 是单位向量。因此 ,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} X_\mu^2 U(x,t_\mu)dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{ds^2}[U(x^\perp + se_\mu, t_\mu)]\, ds\, dx^\perp \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{s\to+\infty} X_\mu U(x^\perp + se_\mu, t_\mu) - \lim_{s\to-\infty} X_\mu U(x^\perp + se_\mu, t_\mu)\right) ds\, dx^\perp = 0\end{aligned}$$

利用（2.8） 以及假设（1）。因此，$\mathrm{I}_1 = 0$。对于项 I_2, , 通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2 &= -\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^T \partial_{t_\mu} U(x,t_\mu)dt_\mu dx + \int_{\mathbb{R}^n} T\partial_{t_\mu} U(x,T)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon\partial_{t_\mu} U(x,\varepsilon)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} U(x,T)dx + \int_{\mathbb{R}^n} U(x,\varepsilon)dx + \int_{\mathbb{R}^n} T\partial_{t_\mu} U(x,T)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon\partial_{t_\mu} U(x,\varepsilon)dx.\end{aligned}$$

然后令 $T \to +\infty$ 和 $\varepsilon \to 0$ 取极限，根据假设（2）和（3），我们得出所需的结论。□

3. New maximal functions associated to twisted rectangles and iterated Poisson integral formula

3.1. 扭曲矩形、迭代极大函数与扭曲极大函数。 记 $\nabla_\mu = (X_\mu^{(1)}, X_\mu^{(2)})$，即 $X_\mu^{(1)} = X_\mu$ 和 $X_\mu^{(2)} = \partial_{t_\mu}$。那么，(2.9) 中的 $\nabla_\mathfrak{j} v$ 是一个具有 $\mathbb{R}^{2^a}$ 个分量的向量值函数，其内积定义为

$$\nabla_\mathfrak{j} u \cdot \nabla_\mathfrak{j} v := \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_a=1,2} X_{j_1}^{(\alpha_1)}\cdots X_{j_a}^{(\alpha_a)} u \cdot X_{j_1}^{(\alpha_1)}\cdots X_{j_a}^{(\alpha_a)} v.$$

定义沿直线 e_μ 的极大函数为

$$M_\mu(f)(x) := \sup_{r_\mu\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{2r_\mu}\int_{|s|<r_\mu} |f(x+se_\mu)|ds,$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$。使用迭代极大函数 M_{it} 较为方便：$=M_m \circ \cdots \circ M_1$. 那么，对于 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，存在一个绝对常数 $C_0 > 0$，使得

$$|P_\mathfrak{t}(f)(x')| \le C_0 M_{it}(f)(x) \tag{3.1}$$

对于任意 $(x',\ \mathfrak{t}) \in \Gamma(x)$，由泊松核的性质 [36]。定义扭曲极大函数 为

$$M_t(f)(x) := \sup_{\mathbf{r}\in(\mathbb{R}_+)^m} \frac{1}{|R(x,\mathbf{r})|}\int_{R(x,\mathbf{r})} |f(x')|dx'.$$

注意，在旗或类旗情形中，提升空间内球的投影通常称为管（例如参见 [5, 42]）。但在本文中，为避免与管状域混淆，(1.6) 中的投影 $R(x,\ \mathbf{r})$ 称为扭曲矩形。给定 $\mathbf{r} = (r_1,\ \dots\dots,\ r_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$，令 $r_{l_1},\ \dots\dots,\ r_{l_n}$ 为 $\{r_1,\dots,r_m\}$ 中最大的 n 个数，即对于任意 $j \in \mathfrak{l} := \{l_1,\dots,l_n\}$ 以及任意 $\mu \notin \mathfrak{l},\ \ r_j \ge r_\mu$。设

$$R_\mathfrak{l}(x,\mathbf{r}) := \{x + \lambda_{l_1}e_{l_1} + \cdots + \lambda_{l_n}e_{l_n}; |\lambda_{l_1}| < r_{l_1},\dots,|\lambda_{l_n}| < r_{l_n}\}, \tag{3.2}$$

这是一个平行多面体。注意，给定 $\mathbf{r}$ 后，$\mathfrak{l}$ 的选择可能并不唯一。

另一方面，任取 $\mathfrak{m}$ 的子集 $\mathfrak{l} := \{l_1,\dots,l_n\}$，根据假设，$e_{l_1},\ \dots\dots,\ e_{l_n}$ 线性无关。因此，存在数 $A_{\mu j}^\mathfrak{l}$ 使得 $e_\mu = \sum_{j=1}^n A_{\mu j}^\mathfrak{l} e_{l_j}$，对于 $\mu \notin \mathfrak{l}$。由于

此类子集 $\mathfrak{l}$ 的选取方式有限，我们可以定义

$$\mathcal{A} := \sum_{\mathfrak{l}} \sum_{\mu \notin \mathfrak{l}} \sum_{j=1}^{n} \left| A_{\mu j}^{\mathfrak{l}} \right| < +\infty. \tag{3.3}$$

命题 3.1. 给定$\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+)^m$，令 $r_{l_1}, \ldots, r_{l_n}$ 为 $\{r_1, \ldots, r_m\}$中最大的 n 个数。那么

$$R_{\mathfrak{l}}(x, \mathbf{r}) \subset R(x, \mathbf{r}) \subset R_{\mathfrak{l}}(x, \widetilde{\gamma}_0^{-1}\mathbf{r}), \tag{3.4}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，其中 $\widetilde{\gamma}_0 = (1+\mathcal{A})^{-1} < 1$。

证明。 通过比较定义 (1.6) 和 (3.2)，显然可得第一个包含关系。对于第二个包含关系，注意到对于任意 $x' \in R(x,\mathbf{r})$，我们可以写成

$$x' = x + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = x + \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{l_j} + \sum_{\mu \notin \mathfrak{l}} A_{\mu j}^{\mathfrak{l}} \lambda_\mu \right) e_{l_j},$$

对某些 $|\lambda_1| < r_\mu \le r_1, \ldots, |\lambda_m| < r_m$。于是

$$\left| \lambda_{l_j} + \sum_{\mu=n+1}^{m} A_{\mu j}^{\mathfrak{l}} \lambda_\mu \right| \le (1+\mathcal{A}) r_{l_j} < \widetilde{\gamma}_0^{-1} r_{l_j},$$

根据定义，由于 $|\lambda_\mu| \le r_{l_j}$ for $\mu \notin \mathfrak{l}$。 □

作为推论，我们得到

$$|R(x,\mathbf{r})| \approx |R_{\mathfrak{l}}(x,\mathbf{r})| = 2^n r_{l_1} \cdots r_{l_n} \det(e_{l_1}, \ldots, e_{l_n}). \tag{3.5}$$

设 χ为区间 $[-1,1]$的示性函数，并设 $\chi_t(s) := \frac{1}{t}\chi(\frac{s}{r})$，其中 $t \in \mathbb{R}^+$且 $s \in \mathbb{R}$。回想一下， $|f| * \chi_{\mathbf{t}} := |f| *_{j_1} \chi_{t_{j_1}} \cdots *_{j_m} \chi_{t_{j_m}}$ 对于$\mathbf{t} = (t_{j_1}, \ldots, t_{j_m}) \in (\mathbb{R}_+)^m$。根据以下命题，迭代极大函数与扭曲极大函数等价。

命题 3.2. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$。那么对于任意 $n < m$、$x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}_+)^m$，

$$|f| * \chi_{\gamma_0 \mathbf{t}}(x) \lesssim \frac{1}{|R(x,\mathbf{t})|} \int_{R(x,\mathbf{t})} |f(x')| dx' \lesssim |f| * \chi_{\gamma_0^{-1}\mathbf{t}}(x),$$

其中 $\gamma_0 = (1+\mathcal{A})^{-2}$。因此， $M_t(f) \approx M_{it}(f)$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $t_1, \ldots, t_n$ 是 $\{t_1, \ldots, t_m\}$ 中最大的 n 个数。 $e_1, \ldots, e_n$ 的线性无关性意味着存在数 $A_{\mu j}$，使得

$$e_\mu = \sum_{j=1}^{n} A_{\mu j} e_j, \tag{3.6}$$

对任意 $\mu = n+1, \ldots, m$。那么

$$\begin{aligned} |f| * \chi_{\mathbf{t}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| f\left(x - \sum_{j=1}^{m} s_j e_j \right) \right| \chi_{t_1}(s_1) \cdots \chi_{t_m}(s_m) ds_1 \cdots ds_m \\ &= \frac{1}{t_1 \cdots t_m} \int_{[-t_1,t_1]\times\cdots\times[-t_m,t_m]} \left| f\left(x - \sum_{j=1}^{n} \left(s_j + \sum_{\mu=n+1}^{m} A_{\mu j} s_\mu \right) e_j \right) \right| ds_1 \cdots ds_m. \end{aligned} \tag{3.7}$$

取由下式给出的坐标变换 $\Theta:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$，$\mathbf{s}\mapsto\mathbf{s}'$

$$s'_j=\begin{cases} s_j+\sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j}s_\mu, & j=1,\dots,n,\\ s_j, & j=n+1,\dots,m.\end{cases} \tag{3.8}$$

显然，Θ 是一一映射，且其雅可比行列式恒等于 1。我们断言

$$\prod_{a=1}^m[-\widetilde{\gamma}_0t_a,\widetilde{\gamma}_0t_a]\subset\Theta\left(\prod_{a=1}^m[-t_a,t_a]\right)\subset\prod_{a=1}^m\left[-\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_a,\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_a\right], \tag{3.9}$$

其中 $\widetilde{\gamma}_0=(1+\mathcal{A})^{-1}$。对于第一个包含关系，注意到对于每个$\mathbf{s}'\in\prod_{a=1}^m[-\widetilde{\gamma}_0t_a,\widetilde{\gamma}_0t_a]$，在 $\prod_{a=1}^m[-t_a,t_a]$ 中都存在唯一的原像 $\mathbf{s}$，即 $\Theta(\mathbf{s})=\mathbf{s}'$。这是因为根据定义 (3.8)，对于 $j=n+1,\dots,m$，显然有 $|s_j|\le t_j$；而对于 $j=1,\dots,n$，我们有

$$|s_j|=\left|s'_j-\sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j}s'_\mu\right|\le\widetilde{\gamma}_0t_j+\mathcal{A}\widetilde{\gamma}_0t_j=t_j,$$

根据假设，对于任意 $\mu>n\ge j$，都有 $|s'_\mu|\le\widetilde{\gamma}_0t_\mu\le\widetilde{\gamma}_0t_j$。第二个包含关系的证明类似。现在由 (3.7) 和 (3.9) 可得

$$\begin{aligned}|f|*\chi_{\mathbf{t}}(x)&\ge\frac{1}{t_1\cdots t_m}\int_{[-\widetilde{\gamma}_0t_1,\widetilde{\gamma}_0t_1]\times\cdots\times[-\widetilde{\gamma}_0t_m,\widetilde{\gamma}_0t_m]}\left|f\left(x-\sum_{j=1}^n s'_je_j\right)\right|ds'_1\cdots ds'_m\\&=\frac{(2\widetilde{\gamma}_0)^{m-n}}{t_1\cdots t_n}\int_{[-\widetilde{\gamma}_0t_1,\widetilde{\gamma}_0t_1]\times\cdots\times[-\widetilde{\gamma}_0t_n,\widetilde{\gamma}_0t_n]}\left|f\left(x-\sum_{j=1}^n s'_je_j\right)\right|ds'_1\cdots ds'_n\\&=\frac{\widetilde{\gamma}_0^{m-n}2^m}{|R_{\mathrm{I}}(0,\mathbf{t})|}\int_{R_{\mathrm{I}}(0,\widetilde{\gamma}_0\mathbf{t})}|f(x-x')|dx'\\&\ge\frac{\widetilde{\gamma}_0^{m-n}2^m}{|R_{\mathrm{I}}(0,\mathbf{t})|}\int_{R(0,\widetilde{\gamma}_0^2\mathbf{t})}|f(x-x')|dx',\end{aligned}$$

通过采用坐标变换 (3.8)，并使用变换 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 给出

$$(s'_1,\dots,s'_n)\mapsto x'=\sum_{j=1}^n s'_je_j \tag{3.10}$$

以及命题 3.1。该变换的雅可比行列式为 $\det(e_1,\dots,e_n)\neq0$，因为 $e_1,\dots,e_n$ 线性无关。同理，

$$\begin{aligned}|f*\chi_{\mathbf{t}}(x)|&\le\frac{1}{t_1\cdots t_m}\int_{[-\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_1,\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_1]\times\cdots\times[-\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_m,\widetilde{\gamma}_0^{-1}t_m]}\left|f\left(x-\sum_{j=1}^n s'_je_j\right)\right|ds'_1\cdots ds'_m\\&\approx\frac{1}{|R_{\mathrm{I}}(0,\mathbf{t})|}\int_{R_{\mathrm{I}}(0,\widetilde{\gamma}_0^{-1}\mathbf{t})}f(x-x')\,dx'.\end{aligned}$$

所需结论可由应用命题 3.1 得出。 □

注 3.1. 在旗情形 [5] 和类旗情形 [42,命题 3.2]中，也证明了极大函数的这种等价性。不过，这里的证明比 [42] 中的证明更简单。

3.2. **边界 g 迭代 Poisson 积分和全纯 H^p-函数的增长估计。**

命题 3.3. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，令 $u(x, \mathbf{t}) := f * P_{\mathbf{t}}$。那么，对于 $b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{N}_0$，

$$
\begin{aligned}
t_1^{b_1} \cdots t_m^{b_m} \left\| \nabla_1^{b_1} \cdots \nabla_m^{b_m} u(\cdot, \mathbf{t}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \\
t_1^{b_1} \cdots t_m^{b_m} \left| \nabla_1^{b_1} \cdots \nabla_m^{b_m} u(x, \mathbf{t}) \right| &\lesssim \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{|R(0, \mathbf{t})|},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

对于 $(x, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$。

证明。以下我们使用记号 $\boldsymbol{\varepsilon} := (\varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in (\mathbb{R}_+)^m$，其中 $\varepsilon > 0$。若令 $f_\varepsilon := f * P_{\boldsymbol{\varepsilon}}$，则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，可写为 $u(x, \mathbf{t}) := f_\varepsilon * P_{\mathbf{t}-\boldsymbol{\varepsilon}}$，且 f_ε 是光滑的。因此，我们可假设 f 是光滑的。对固定的 μ，我们使用如上的坐标 $x = x^\perp + s e_\mu$。于是，

$$
\begin{aligned}
\left\| f *_\mu P_{t_\mu} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x^\perp + (s - s') e_\mu) P_{t_\mu}(s') ds' \right| ds \, dx^\perp \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \| f(x^\perp + \cdot e_\mu) * P_{t_\mu} \|_{L^1(\mathbb{R})} dx^\perp \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \| f(x^\perp + \cdot e_\mu) \|_{L^1(\mathbb{R})} \| P_{t_\mu} \|_{L^1(\mathbb{R})} dx^\perp \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \| f(x^\perp + \cdot e_\mu) \|_{L^1(\mathbb{R})} dx^\perp = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

反复应用此等式，我们得到 $\|u(\cdot, \mathbf{t})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。用 $t_\mu^{b_\mu} \widetilde{\nabla}_\mu^{b_\mu} P_{t_\mu}$ 替换 P_{t_μ}，由于我们还有 $\|t_\mu^{b_\mu} \widetilde{\nabla}_\mu^{b_\mu} P_{t_\mu}\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim 1$，上述论证给出了 (3.11) 中的第一个估计。

由命题 2.1 的 (2)，$u(x + s'_\mu e_\mu, \mathbf{t}')$ 在 $\{(s'_\mu, t'_\mu)$ 上是调和的；$t'_\mu > 0\}$，其包含圆盘 $|s'_\mu + \mathbf{i}(t_\mu - t'_\mu)| < t_\mu$。因此，我们可以应用平均值公式得到

$$
u(x, \mathbf{t}) = \frac{1}{\pi t_\mu^2} \int_{|s'_\mu + \mathbf{i} t'_\mu| < t_\mu} u\left(x + s'_\mu e_\mu, t_1, \ldots, t_\mu + t'_\mu, \ldots\right) ds'_\mu dt'_\mu.
$$

重复这一过程，我们便可推出

(3.13)

$$
\begin{aligned}
|u(x, \mathbf{t})| &\leq \frac{1}{\pi^m t_1^2 \cdots t_m^2} \int_{|s'_1 + \mathbf{i} t'_1| < t_1} \cdots \int_{|s'_m + \mathbf{i} t'_m| < t_m} \left| u\left(x + \sum_{\mu=1}^m s'_\mu e_\mu, \mathbf{t} + \mathbf{t}'\right) \right| ds'_m dt'_m \cdots ds'_1 dt'_1 \\
&\leq \frac{1}{\pi^m t_1^2 \cdots t_m^2} \int_{-t_1}^{t_1} \cdots \int_{-t_m}^{t_m} \int_{-t_1}^{t_1} \cdots \int_{-t_m}^{t_m} \left| u\left(x + \sum_{\mu=1}^m s'_\mu e_\mu, \mathbf{t} + \mathbf{t}'\right) \right| dt'_m \cdots dt'_1 ds'_m \cdots ds'_1.
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t_1 \cdots t_m} \int_{-t_1}^{t_1} \cdots \int_{-t_m}^{t_m} \left| u\left(x + \sum_{\mu=1}^m s'_\mu e_\mu, \mathbf{t} + \mathbf{t}'\right) \right| ds'_m \cdots ds'_1 &= |u(\cdot, \mathbf{t} + \mathbf{t}')| * \chi_{\mathbf{t}}(x) \\
&\lesssim \frac{1}{|R(x, \gamma_0^{-1} \mathbf{t})|} \int_{R(x, \gamma_0^{-1} \mathbf{t})} |u(x', \mathbf{t} + \mathbf{t}')| \, dx' \\
&\lesssim \frac{1}{|R(x, \gamma_0^{-1} \mathbf{t})|} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x', \mathbf{t} + \mathbf{t}')| \, dx' \\
&\lesssim \frac{1}{|R(x, \mathbf{t})|} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

通过应用命题 3.2 和式 (3.11) 中的第一个估计。将此估计代入式 (3.13)，即可得到式 (3.11) 中关于 $b_1 = \cdots = b_m = 0$ 的第二个不等式。

对于一般情形，注意到 $\nabla_1^{b_1} \cdots \nabla_m^{b_m} u(x + s'_\mu e_\mu,\ \mathbf{t}')$ 的每个分量在$\{(s'_\mu,\ t'_\mu)$上仍是调和的；$t'_\mu > 0\}$。使用 (3.11) 中的第一个估计，沿用同样的论证即可得到结论。□

推论 3.1。固定 $\varepsilon > 0$，并令 $f_\varepsilon := f * P_{\boldsymbol{\varepsilon}}$，其中 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$。则，

(a) $U(x, t_\mu) = (f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu}(x))^2$ 满足命题 *2.3* 中的条件。*(b)* 设 $\mathfrak{j}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的子集，且 $\mu \notin \mathfrak{j}$。那么，对于固定的 $t_\mathfrak{j}$，$U(x, t_\mu) = f_\varepsilon *_\mathfrak{j} \nabla_\mathfrak{j} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}} *_\mu \nabla_\mu P_{t_\mu}(x)$ 也满足命题 *2.3* 中的条件，只需将 $U(\cdot, t_\mu) \to U(\cdot, 0)$ 替换为 $U(\cdot, t_\mu) \to 0$。

证明. (a) 对于条件 (1)，写作 $U(x, t_\mu) = u^2(x, t_\mu)$，其中 $u(x, t_\mu) := f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu}(x)$。显然，它在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上光滑，因为 f_ε 是。由于根据命题 3.3，$u(\cdot, t_\mu)\ \nabla_\mu u(\cdot, t_\mu) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的范数仅依赖于 ε 和 $\|f\|_1$，我们得到 $U(\cdot, t_\mu)\ \nabla_\mu U(\cdot, t_\mu) = 2u(\cdot, t_\mu)\nabla_\mu u(\cdot, t_\mu) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$。类似地可得 $\nabla^2_\mu U(\cdot, t_\mu) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$。众所周知，对于 $x = x^\perp + se_\mu$，

$$X_\mu U(x, t_\mu) = 2u(x, t_\mu) \cdot \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x^\perp + (s - s')e_\mu)\partial_{s'} P_{t_\mu}(s')ds' \to 0,$$

对几乎所有的 $x^\perp \in e_\mu^\perp$，当 $s \to \infty$ 时，因为对几乎所有的 $x^\perp \in e_\mu^\perp$，$f_\varepsilon(x^\perp + \cdot e_\mu) \in L^1(\mathbb{R})$.

对于条件 (2)，将估计式 (3.11) 应用于 $u(x, t_\mu) = f * P_{\boldsymbol{\varepsilon}} *_\mu P_{t_\mu}(x)$，得到

$$\|t_\mu \partial_{t_\mu} U(\cdot, t_\mu)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u(\cdot, t_\mu)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|t_\mu \partial_{t_\mu} u(\cdot, t_\mu)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \frac{\|f\|^2_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\varepsilon^{n-1}(\varepsilon + t_\mu)} \to 0$$

当 $t_\mu \to +\infty$ 时。同理，$\|U(\cdot, t_\mu)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$，当 $t_\mu \to +\infty$ 时。

对于条件 (3)，注意到 $u(x, 0) = f_\varepsilon$。令 $\triangle(x) := \|f_\varepsilon(\cdot - x) - f_\varepsilon(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。众所周知，当 $|x| \to 0$ 时，$\triangle(x) \to 0$。因此，

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_\mu) - u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}} \left[f_\varepsilon(x^\perp + (s - s')e_\mu) - f_\varepsilon(x^\perp + se_\mu) \right] P_{t_\mu}(s')ds' \right| dx^\perp ds \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \triangle(s'e_\mu) P_{t_\mu}(s')ds' = \int_{\mathbb{R}} \triangle(t_\mu s' e_\mu) P_1(s')ds' \to 0, \end{aligned}$$

当 $t_\mu \to 0$ 时，通过重新缩放并使用勒贝格控制收敛定理（参见 [36, P. 63]）。我们看到，$\|t_\mu \partial_{t_\mu} u(\cdot, t_\mu)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$，当 $t_\mu \to 0$ 时，由同样的论证可得，因为

$$t_\mu \partial_{t_\mu} u(x, t_\mu) = \int_{\mathbb{R}} [f_\varepsilon(x - s'e_\mu) - f_\varepsilon(x)]\, t_\mu \partial_{t_\mu} P_{t_\mu}(s')ds'$$

由 $\int_{\mathbb{R}} t_\mu \partial_{t_\mu} P_{t_\mu}(s')ds' = 0$ 得出。关于 $U(x,\ t_\mu) = u^2(x,\ t_\mu)$ 的结果可由 $|u(x,\ t_\mu)|$ 仅依赖于 ε 的上界推出。

(b) 我们将 (a) 部分中的证明应用于把 P_{t_μ} 替换为 $\nabla_\mu P_{t_\mu}$、把 f_ε 替换为 $f_\varepsilon *_\mathfrak{j} \nabla_\mathfrak{j} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(x)$ 的情形；后者属于 $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，其范数仅依赖于 ε。□

命题 3.4。设 $F \in H^p(T_\Omega)$ 满足 $p \ge 1$。那么，对于 $(x, \boldsymbol{r}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$，有

$$|F(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{r}))| \lesssim \frac{\|F\|_{H^p(T_\Omega)}}{|R(0, \mathbf{r})|^{\frac{1}{p}}}. \tag{3.14}$$

证明。给定 $y \in \Omega$，记 $y = \pi(\mathbf{r}) = \sum_{\mu=1}^m r_\mu e_\mu \in \Omega$，其中某个 $\mathbf{r} \in (\mathbb{R}_+)^m$。注意，圆盘$\{x + \mathbf{i}\, y + (s_\mu + \mathbf{i}t_\mu)e_\mu; |s_\mu + \mathbf{i}t_\mu| < r_\mu\}$ 包含在管状域 T_Ω内。这是因为 $r_\mu + t_\mu >$

$r_\mu - r_\mu = 0$。因此，我们可以对复直线 $\mathbb{C}e_\mu$ 上的这个圆盘应用平均值公式，作用于 g　et

$$F(x+\mathbf{i}y) = \frac{1}{\pi\gamma_0^2 r_\mu^2}\int_{|s_\mu+\mathbf{i}t_\mu|<\gamma_0 r_\mu} F\left(x+\mathbf{i}y+(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu\right)ds_\mu dt_\mu.$$

重复这一过程，我们得到

$$\begin{aligned}|F(x+\mathbf{i}y)| &\le \int_{|s_1+\mathbf{i}t_1|<\gamma_0 r_1}\cdots\int_{|s_m+\mathbf{i}t_m|<\gamma_0 r_m}\frac{\left|F\left(x+\mathbf{i}y+\sum_{\mu=1}^m(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu\right)\right|}{\pi^m\gamma_0^{2m}r_1^2\cdots r_m^2}\,ds_m dt_m\cdots ds_1 dt_1\\ &\le \int_{-\gamma_0 r_1}^{\gamma_0 r_1}\cdots\int_{-\gamma_0 r_m}^{\gamma_0 r_m}\int_{-\gamma_0 r_1}^{\gamma_0 r_1}\cdots\int_{-\gamma_0 r_m}^{\gamma_0 r_m}\frac{\left|F\left(x+\mathbf{i}y+\sum_{\mu=1}^m(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu\right)\right|}{\pi^m\gamma_0^{2m}r_1^2\cdots r_m^2}\,dt_m\cdots dt_1 ds_m\cdots ds_1.\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma_0 r_1}^{\gamma_0 r_1}\cdots\int_{-\gamma_0 r_m}^{\gamma_0 r_m}\frac{\left|F\left(x+\mathbf{i}y+\sum_{\mu=1}^m s_\mu e_\mu+\mathbf{i}\sum_{\mu=1}^m t_\mu e_\mu\right)\right|}{\gamma_0^m r_1\cdots r_m}\,dt_m\cdots dt_1 &= \left|F\left(x+\sum_{\mu=1}^m s_\mu e_\mu+\mathbf{i}\cdot\right)\right| * \chi_{\gamma_0\mathbf{r}}(y)\\ &\lesssim \frac{1}{|R(y,\mathbf{r})|}\int_{R(y,\mathbf{r})}\left|F\left(x+\sum_{\mu=1}^m s_\mu e_\mu+\mathbf{i}y'\right)\right|dy',\end{aligned}$$

应用命题 3.2，得到，其中 $R(y,\ \mathbf{r})\subset\Omega$。对 s_1，…，s_m上的积分应用相同的过程，得到

$$\begin{aligned}|F(x+\mathbf{i}y)| &\lesssim \frac{1}{|R(0,\mathbf{r})|^2}\int_{R(x,\mathbf{r})}\int_{R(y,\mathbf{r})}|F(x'+\mathbf{i}y')|\,dy'\,dx'\\ &\le \frac{1}{|R(0,\mathbf{r})|^{1+\frac{1}{p}}}\int_{R(y,\mathbf{r})}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(x'+\mathbf{i}y')|^p\,dx'\right)^{\frac{1}{p}}dy' \qquad (3.15)\\ &\lesssim \frac{1}{|R(0,\mathbf{r})|^{\frac{1}{p}}}\|F\|_{H^p(T_\Omega)}.\end{aligned}$$

至此，(3.14) 的证明完成。　□

命题 3.5. 设 Ω 和Ω′ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个多面锥，且满足Ω $\subset$ Ω′，则 $H^1(T_{\Omega'})\subsetneqq H^1(T_\Omega)$且 $H^1_{max;\Omega'}(\mathbb{R}^n)\subsetneq H^1_{max;\Omega}(\mathbb{R}^n)$。

证明。由定义 (1.1)，有 $T_\Omega\subset T_{\Omega'}$, $H^1(T_{\Omega'})\subset H^1(T_\Omega)$。对于一个 $H^1(T_{\Omega'})$-函数 F，由边界增长估计 (3.14)，对固定的 $y\in\Omega$，有 $F(\cdot+\mathbf{i}y)\in H^2(T_{\Omega'})$。因此，根据 [40]中的定理3.1，关于变量 x 的傅里叶——变换 $F(\cdot+\mathbf{i}y)$ 必须支撑在 (Ω′)* 中。

注意，根据定义，(Ω′)* ⊊Ω* 。设 ψ 是一个支撑在 Ω*的有界子集内的光滑函数，但它不包含于 (Ω′)*中。考虑 T_Ω上的一个全纯函数

$$F_0(x+\mathbf{i}y)=\int_{\Omega^*}e^{2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)t}\psi(t)dt.$$

由以下估计可知 $F_0\in H^1(T_\Omega)$：对于 $|x|<1$, $|F_0(x+\mathbf{i}y)|\lesssim 1$，因为 $y\cdot t\ge 0$ 对于 $y\in\Omega$ $t\in\Omega^*$；而对于 $|x|>1$,

$$\begin{aligned}|F_0(x+\mathbf{i}y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\triangle^n e^{2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)t}}{(2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y))^{2n}}\psi(t)dt\right|\\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y))^{2n}}e^{2\pi\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)t}\triangle^n\psi(t)dt\right|\lesssim\frac{1}{|x|^{2n}},\end{aligned}$$

其中 $\triangle$ 是作用在 $\mathbb{R}^n_t$上的拉普拉斯算子，且隐常数与 y无关。由于$\widehat{F_0(\cdot+\mathbf{i}y)}(t) = e^{-2\pi yt}\psi(t)$ 的支撑不包含于 $(\Omega')^*$，因此有 $F_0 \notin H^1(T_{\Omega'})$。于是， $H^1(T_{\Omega'}) \neq H^1(T_\Omega)$。

由于对固定的 $y_0 \in \Omega$， $F_0(\cdot+\mathbf{i}y_0) \in H^2(T_\Omega)$，根据定理 1.1 中的积分表示，我们有$F_0(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}) + \mathbf{i}y_0) = F_0(\cdot+\mathbf{i}y_0) * P_{\mathbf{t}}(x)$。因此，根据定理1.2， $F_0(\cdot+\mathbf{i}y_0)|_{\mathbb{R}^n}$属于 $H^1_{max;\Omega}(\mathbb{R}^n)$，但不属于 $H^1_{max;\Omega'}(\mathbb{R}^n)$。否则，根据定理1.2， $F_0(\cdot+\mathbf{i}y_0) \in H^1(T_{\Omega'})$，这与$F_0 \notin H^1(T_{\Omega'})$这一事实矛盾。□

3.3. 迭代泊松积分公式与调和控制的证明。在积分表示公式 (1.5) 中，对于$\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$，若 $\pi(\mathbf{t}) = \pi(\mathbf{t}')$，则必有 $F^b * P_{\mathbf{t}} = F^b * P_{\mathbf{t}'}$。利用调和函数的最大值原理，这一公式可由满足相同边界条件的偏拉普拉斯方程的解的唯一性推出 $\triangle_\mu u = 0$ 。

定理 *1.1* 的证明。 对于 $F \in H^p(T_\Omega)$，我们有 $f_\varepsilon := F(\cdot+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \in L^p(\mathbb{R}^n)$，其中 $\varepsilon > 0$ 根据定义成立，并且它在 $\mathbb{R}^n$ 上显然是光滑的。于是

$$f_{\varepsilon,x^\perp}(\cdot) := F\left(x^\perp + (\cdot)e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})\right) \in L^p(\mathbb{R}) \tag{3.16}$$

对几乎所有 $x^\perp \in e_\mu^\perp \subset \mathbb{R}^n$ 都成立。现在固定这样一个点 $x^\perp \in e_\mu^\perp$，并令

$$v_{\varepsilon,x^\perp}(s_\mu,t_\mu) := (f_{\varepsilon,x^\perp} * P_{t_\mu})(s_\mu) = (f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu})(x^\perp + s_\mu e_\mu), \tag{3.17}$$

它在 $\mathbb{R}^2_+$ 上是光滑的。注意，当 $t_\mu \to 0$ 时，根据泊松积分的标准性质 [36,P. 62]，有 $v_{\varepsilon,x^\perp}(\cdot,t_\mu) \to f_{\varepsilon,x^\perp}$。也就是说，

$$v_{\varepsilon,x^\perp}(s_\mu,0) = f_{\varepsilon,x^\perp}(s_\mu) = F\left(x^\perp + s_\mu e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})\right). \tag{3.18}$$

我们断言，对于任意 $\delta > 0$，存在充分大的 $R, b > 0$，使得对于矩形 $\mathcal{R}_{2R,b} := \{(s_\mu,t_\mu) \in \mathbb{R}^2_+;\ |s_\mu| \le 2R, 0 < t_\mu < b\}$ 之外的 (s_μ,t_μ)，有

$$|v_{\varepsilon,x^\perp}(s_\mu,t_\mu)| < \delta, \qquad \left|F\left(x^\perp + (s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\right| < \delta. \tag{3.19}$$

那么 b 根据矩形 $\mathcal{R}_{2R,b}$ 上调和函数的极大值原理 [36] ，我们得到

$$|v_{\varepsilon,x^\perp}(s_\mu,t_\mu) - F\left(x^\perp + (s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})\right)| \le 2\delta.$$

由于 $\delta > 0$ 是任意选取的，我们得到

$$(f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu})(x^\perp + s_\mu e_\mu) = F\left(x^\perp + (s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})\right),$$

根据 (3.17)，对几乎所有 $x^\perp \in e_\mu^\perp$ 都成立。因此，由连续性可知，对任意 $x \in \mathbb{R}^n, t_\mu \in \mathbb{R}$，我们推出 $(f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu})(x) = F(x+\mathbf{i}t_\mu e_\mu + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))$。重复这一过程，我们得到

$$(f_\varepsilon *_1 P_{t_1} \cdots *_m P_{t_m})(x) = F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}) + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \tag{3.20}$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$， $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}_+)^m$。

为证明衰减结论 (3.19)，注意到根据定义，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+\mathbf{i}y)|^p\,dx \le \|F\|^p_{H^p(T_\Omega)}$$

对于任意 $y \in \Omega$，因此对于固定的 $b > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{y\in\Omega;|y|<2b\}} |F(x+\mathbf{i}y)|^p\,dxdy < \infty.$$

因此，对于任意 $\delta' > 0$，存在 $R > 0$ 使得

$$\int_{|x|>R} \int_{\{y\in\Omega;|y|<2b\}} |F(x+\mathbf{i}y)|^p \, dxdy < \delta'$$

若 R 充分大。

另一方面，对于任意 $y \in \Omega$，$R(x,\ \varepsilon) + \mathbf{i}R(y+\pi(\varepsilon)\ \varepsilon) \subset T_\Omega$，因为

$$R(y+\pi(\varepsilon),\varepsilon) = \left\{ y + \sum_{j=1}^m (\varepsilon+\lambda_j)e_j; |\lambda_j| < \varepsilon, j = 1,\dots,m \right\} \subset \Omega.$$

因此，对 $|x| > 2R,\ |y| < b$，利用命题 3.4 中类似于 (3.15) 的估计，我们得到

$$\begin{aligned} |F\left(x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}\pi(\varepsilon)\right)| &\lesssim \frac{1}{|R(0,\varepsilon)|^2} \int_{R(x,\varepsilon)} \int_{R(y,\varepsilon)} |F(x'+\mathbf{i}\pi(\varepsilon)+\mathbf{i}y')| \, dy' \, dx' \\ &\lesssim \frac{1}{|R(0,\varepsilon)|^{2-\frac{2}{q}}} \left(\int_{R(x,\varepsilon)} \int_{R(y,\varepsilon)} |F(x'+\mathbf{i}\pi(\varepsilon)+\mathbf{i}\hat{y})|^p \, dy' \, dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \frac{1}{|R(0,\varepsilon)|^{2-\frac{2}{q}}} \left(\int_{|\hat{x}|>R} \int_{\{\hat{y}\in\Omega;|y'|<2b\}} |F(x'+\mathbf{i}y')|^p \, dy' \right)^{\frac{1}{p}} dx' < \delta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

对于 $F(x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}\pi(\varepsilon))$，断言 (3.19) 已得证；而对于 $v_{\varepsilon,x^\perp}$，当 $p \geq 1$ 时，断言 (3.19) 由一个 L^p 函数的泊松积分的衰减性成立。

对于 $t_\mu > b$，当 b 足够大时，断言 (3.19) 直接由命题 3.3 和 3.4 中的估计得出。由于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 对于 $p > 1$ 是自反的，且 $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|F\|_{H^p(T_\Omega)}$，根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，存在一个子列 $\varepsilon_k \to 0$，使得 $\{f_{\varepsilon_k}\}$ 弱收敛到某个 $F^b \in L^p(\mathbb{R}^n)$。对于固定的 $\mathbf{t}$，我们可以假设 $t_1,\dots,t_n$ 是 $\{t_1,\dots,t_m\}$ 中最大的 n 数，并且 (3.6) 成立。于是有

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon_k} * P_{\mathbf{t}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} f_{\varepsilon_k} \left(x - \sum_{j=1}^m s_j e_j \right) P_{t_1}(s_1) \cdots P_{t_m}(s_m) \, d\mathbf{s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f_{\varepsilon_k} \left(x - \sum_{j=1}^n \left(s_j + \sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j} s_\mu \right) e_j \right) P_{t_1}(s_1) \cdots P_{t_m}(s_m) \, d\mathbf{s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f_{\varepsilon_k} \left(x - \sum_{j=1}^n s'_j e_j \right) \prod_{j=1}^n P_{t_j} \left(s'_j - \sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j} s'_\mu \right) \cdot \prod_{j=n+1}^m P_{t_j}(s'_j) \, d\mathbf{s}' \\ &= \frac{1}{\det(e_1,\dots,e_n)} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_k}\left(x-x'\right) \pi(P_{t_1} \cdots P_{t_m})(x') \, dx', \end{aligned} \tag{3.22}$$

利用坐标变换 (3.8)，其中

$$\pi(P_{t_1} \cdots P_{t_m})(x') := \int_{\mathbb{R}^{m-n}} \prod_{j=1}^n P_{t_j} \left(s'_j - \sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j} s'_\mu \right) \cdot \prod_{j=n+1}^m P_{t_j}(s'_j) \, ds'_{n+1} \cdots ds'_m$$

对于 $x'=\sum_{j=1}^n s'_j e_{j\circ}$ 由于该函数满足以下条件，因此对任意 $q>1$，它都属于 $L^q(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\|\pi(P_{t_1}\cdots)\|_{L^q}&\approx\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\prod_{j=1}^n P_{t_j}\left(s'_j-\sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j}s'_\mu\right)\prod_{j=n+1}^m P_{t_j}(s'_j)ds'_{n+1}\cdots ds'_m\right|^q ds'_1\cdots ds'_n\right)^{\frac{1}{q}}\\&\le\int_{\mathbb{R}^{m-n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\prod_{j=1}^n P_{t_j}\left(s'_j-\sum_{\mu=n+1}^m A_{\mu j}s'_\mu\right)\prod_{j=n+1}^m P_{t_j}(s'_j)\right|^q ds'_1\cdots ds'_n\right)^{\frac{1}{q}}ds'_{n+1}\cdots ds'_m\\&=(t_1\cdots t_n)^{\frac{1}{q}-1}\|P_1\|^n_{L^q(\mathbb{R})}<\infty,\end{aligned}$$

根据坐标变换 (3.10) 和闵可夫斯基不等式。

现在，由 $\{f_{\varepsilon_k}\}$ 到 $F^b\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 的弱收敛性，我们得到

$$f_{\varepsilon_k}*\pi(P_{t_1}\cdots P_{t_m})(x)\to F^b*\pi(P_{t_1}\cdots P_{t_m})(x),$$

for 任意 $x\in\mathbb{R}^n$。那么，由 (3.22) 可知，当 $k\to+\infty$ 时，$f_{\varepsilon_k}*P_{\mathbf{t}}(x)\to F^b*P_{\mathbf{t}}(x)$。另一方面 ,

$$f_{\varepsilon_k}*P_{\mathbf{t}}(x)=F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t})+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}_k))\to F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))$$

由 (3.20) 可知，因为 F 在 T_Ω 上光滑。积分表示公式 (1.5) 得证。 □

命题 3.6。 假设 $F\in H^1(T_\Omega)$。那么对于 $0<q<+\infty$，我们有

$$|F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon}))|^q\le|f_\varepsilon|^q*P_{\mathbf{t}}(x),\tag{3.23}$$

对任意 $(x,\boldsymbol{t})\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m$，其中 $f_\varepsilon(x):=F(x+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))$。

证明。 众所周知，若 h 在 $\mathbb{C}$中的区域 D 上全纯，则 $|h|^q$ 对 $q>0$ 在 D上是次调和的。我们注意到， $|F(x^\perp+(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^q$在 $\mathbb{R}^2_+$上是次调和的，因为根据命题 2.1， $F(x^\perp+ze_\mu+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))$在 $z\in\mathbb{C}$ 中对 $\mathrm{Im}\,z>0$ 全纯。与定理 1.1 的证明类似，令

$$v_{x^\perp,\varepsilon}(s_\mu,t_\mu):=(|f_\varepsilon|^q*_\mu P_{t_\mu})(x^\perp+s_\mu e_\mu+\mathbf{i}\pi(\varepsilon)),\tag{3.24}$$

在上半平面 $\mathbb{R}^2_+$上，它由命题 2.1 可知是调和的。因此

$$|F(x^\perp+(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^q-v_{x^\perp,\varepsilon}(s_\mu,t_\mu)$$

在 $\mathbb{R}^2_+$上也是次调和的。此外，它在 $t_\mu=0$处取值为零，即

$$v_{x^\perp,\varepsilon}(s_\mu,0)=|f_\varepsilon(x^\perp+s_\mu e_\mu)|^q=|F(x^\perp+s_\mu e_\mu+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^q,$$

根据定义（3.24）。对于 $p=1$ 和带有 $\frac{1}{q}>1$的 $|f_\varepsilon|^q\in L^{\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^n)$，由（3.21）可类似地得到断言（3.19）。于是，我们得到

$$|F(x^\perp+(s_\mu+\mathbf{i}t_\mu)e_\mu+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^q-v_{x^\perp,\varepsilon}(s_\mu,t_\mu)\le0$$

通过应用次调和函数的极大值原理。重复定理 1.1 证明中的步骤即可得到该结果。不过，此处无需最后取极限的步骤 $\varepsilon_k\to0$。□

4. The maximal function characterization

4.1. 将 Fefferman-Stein 型 good-λ不等式归约为积分估计。

定理 4.1. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及所有 $\lambda > 0$，如果我们选取足够大的 β s，则 *Fefferman-Stein* 型 *good-*λ不等式 (1.11) 成立。

以下是该定理的直接推论。

推论 4.1. 若我们选取 β充分大，则 $\|S(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|N^\beta(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

为证明定理 4.1 中 Fefferman-Stein 型 good-λ 不等式，令

$$E_\beta(\lambda) := \left\{x \in \mathbb{R}^n; N^\beta(f)(x) \le \lambda\right\},$$

对于满足 $N^\beta(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda \ge 0$ 的 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，并令

$$A_\beta(\lambda) := \left\{x \in \mathbb{R}^n; M_{it}(\chi_{E_\beta(\lambda)^c})(x) \le \frac{1}{10C_0}\right\},$$

其中 C_0 由 (3.1) 给出。根据定义， $E_\beta(\lambda)^c \subset A_\beta(\lambda)^c$，因此 $A_\beta(\lambda) \subset E_\beta(\lambda)$，除去一个零测集。此外，

$$|A_\beta(\lambda)^c| \lesssim \|M_{it}(\chi_{E_\beta(\lambda)^c})\|_{L^2}^2 \le C\,|E_\beta(\lambda)^c|,$$

由迭代极大函数的 L^2-有界性 性可知，其中 C 与 β 无关。因此，我们有

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n; S(f) > \lambda\}| &\le |\{x \in A_\beta(\lambda)^c; S(f)(x) > \lambda\}| + |\{x \in A_\beta(\lambda); S(f)(x) > \lambda\}| \\ &\le C\,|E_\beta(\lambda)^c| + \frac{1}{\lambda^2}\int_{A_\beta(\lambda)} S(f)^2(x)dx. \end{aligned} \tag{4.1}$$

考虑这些域（见图2）

$$W_\beta := \bigcup_{x \in A_\beta(\lambda)} \Gamma(x), \qquad \text{and} \qquad \widetilde{W}_\beta := \bigcup_{x \in E_\beta(\lambda)} \Gamma_\beta(x). \tag{4.2}$$

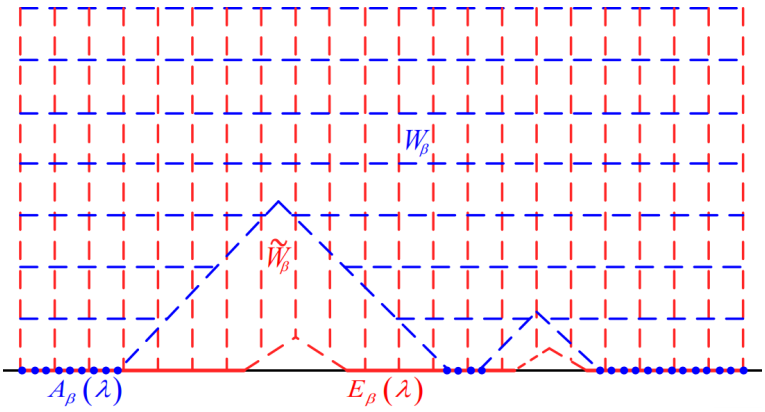

Figure 2. 域 W_β 和 W_β

命题 4.1。 (1) 如果 $(x,\ \mathbf{t})\ \in W_\beta$，则 $P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)\ >\ \frac{9}{10}$. —

(2) 如果取 β充分大，则存在常数 $C_1 \in (0, 9/10)$ 使得对任意 $(x, \mathbf{t})\ \in W_\beta^c = \widetilde{\ }(\mathbb{R}^n \times(\mathbb{R}_+)^m)\ \setminus W_\beta$，有 $P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)\ \le C_1$.

证明。 (1) 对于 $(x,\mathbf{t})\ \in W_\beta$，存在 $x' \in A_\beta(\lambda)$ 使得 $(x, \mathbf{t})\ \in \Gamma(x')$。因此

$$P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)^c})(x) \le C_0 M_{it}(\chi_{E_\beta(\lambda)^c})(x') \le C_0 \frac{1}{10C_0} = \frac{1}{10},$$

根据 (3.1)，从而 $P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)\ = P_{\mathbf{t}}(1 - \chi_{E_\beta(\lambda)^c})(x)\ = 1 - P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)^c})(x)\ > \frac{9}{10}$.

(2) 令给定 $\mathbf{s} \in \widetilde{\mathbb{R}}_+)^m$，如果 $x' = x - \pi(\mathbf{s})\ \in E_\beta(\lambda)$，则根据定义必有 $x\ \notin\ R(x',\ \beta\mathbf{t})$ $\widetilde{\ }$；否则，我们有（$x,\ \mathbf{t}$）$\in W_\beta$。因此，$\pi(\mathbf{s})\ \notin\ R(\mathbf{0},\ \beta\mathbf{t})$，即 $\mathbf{s}\ \notin\ R(\mathbf{0},\ \beta\mathbf{t})$。于是，$|s_\mu| \ge \beta t_\mu$ 至少对某个 μ成立。因此，

$$\begin{aligned} 0 \le P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x) &= \int \chi_{E_\beta(\lambda)} \left(x - \sum_{j=1}^m s_j e_j \right) P_{t_1}(s_1) \cdots P_{t_m}(s_m)\, d\mathbf{s} \\ &\le \sum_{\mu=1}^m \int_{|s_\mu| \ge \beta t_\mu} P_{t_\mu}(s_\mu)\, ds_\mu \prod_{\nu \ne \mu} \int_{\mathbb{R}} P_{t_\nu}(s_\nu)\, ds_\nu \\ &\le \sum_{\mu=1}^m \int_{|s_\mu| \ge \beta t_\mu} P_{t_\mu}(s_\mu)\, ds_\mu \le \frac{C}{\beta} \to 0, \end{aligned}$$

如 $\beta \to +\infty$。 □

注意到， f 的 Littlewood-Paley 面积函数（1.9）可写为

$$S(f)(x) := \left(\int_{\Gamma(x)} \left| f *_1 \widetilde{\nabla}_1 P_{t_1} *_2 \cdots *_m \widetilde{\nabla}_m P_{t_m}(x') \right|^2 \frac{\mathbf{t} d\mathbf{t} dx'}{|R(0,\mathbf{t})|} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立，这是由命题 2.1（2）得到的。对于 $\mathbf{t}\ \in (\mathbb{R}_+)^m$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，在 $\mathbb{R}^n \times(\mathbb{R}_+)^m$上定义函数:

$$U_1(x, \mathbf{t}) := f *_1 P_{t_1} *_2 \widetilde{\nabla}_2 P_{t_2} * \cdots *_m \widetilde{\nabla}_m P_{t_m}(x). \tag{4.4}$$

令 ϕ 为满足以下条件的非负 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 函数: 若 $r \ge \frac{9}{10}$，则 $\phi(r)\ = 1$；若 $r \leqq C_1$，则 $\phi(r)\ = 0$（参见 [28, 33]）。但是根据命题 4.1 (1)，对于 $(x,\ \mathbf{t})\ \in W_\beta$，我们有 $P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)\ > \frac{9}{10}$。因此，$\phi(P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)) = 1$，从而

$$\begin{aligned} \int_{A_\beta(\lambda)} S(f)^2(x)\, dx &= \int_{A_\beta(\lambda)} \int_{\Gamma(x)} \left| f *_1 \widetilde{\nabla}_1 P_{t_1} * \cdots *_m \widetilde{\nabla}_m P_{t_m} \right|^2 (x') \frac{\mathbf{t} d\mathbf{t} dx'}{|R(0,\mathbf{t})|}\, dx \\ &\lesssim \int_{W_\beta} \left| f *_1 \widetilde{\nabla}_1 P_{t_1} * \cdots *_m \widetilde{\nabla}_m P_{t_m} \right|^2 (x')\ \mathbf{t} d\mathbf{t} dx' \\ &= \int_{W_\beta} |\nabla_1 U_1(x, \mathbf{t})|^2\, \mathbf{t} d\mathbf{t} dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_1 U_1(x, \mathbf{t})|^2\, \phi^2(P_{\mathbf{t}}(\chi_{E_\beta(\lambda)})(x)\, \mathbf{t} d\mathbf{t} dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2. **利用微分恒等式估计积分**。 为证明定理 4.1 的 Fefferman-Stein 型不等式，我们需要用仅涉及 U_1 的积分来估计 (4.5) 右端的积分，而不是涉及 U_1 梯度的积分。这可以通过利用微分恒等式进行分部积分来实现。首先，我们将 (4.5) 中的积分估计为其中 $\chi_{E_\beta(\lambda)}$ 和 f 分别由其光滑化 $\chi_\varepsilon := P_\varepsilon(\chi_{E_\beta(\lambda)})$ 和 $f_\varepsilon := P_\varepsilon(f)$ 替代，然后取极限 $\varepsilon \to 0$。

引理 4.1. 设 $\varepsilon > 0$。假设 $f_\varepsilon := f * P_\varepsilon$，其中存在某个实值函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$， $\chi_\varepsilon := \chi * P_\varepsilon$，且 $\|\chi\|_{L^\infty} \le 1$ 和 $1-\chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$u := f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu}, \qquad v := \chi_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu}. \tag{4.6}$$

那么，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_\mu u|^2 \phi^2(v) t_\mu dt_\mu dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,0)\phi^2(v(x,0))dx + \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} u^2\Phi_1^2(v)\,|\nabla_\mu v|^2\, t_\mu dt_\mu dx, \tag{4.7}$$

其中 Φ_1 是满足 $\Phi_1(a) = 0$ 的 $\mathscr{C}^{2m+2}[0,1]$ 函数，对 $a \in [0, C_1]$ 以及对 $a \in [0,1$ 均成立 $]$，

$$\Phi_1(a) \ge |\phi(a)| + |\phi'(a)| + |\phi''(a)|. \tag{4.8}$$

证明。 通过直接求导，我们看到

$$\begin{aligned}(X_\mu^{(a)})^2(u^2\phi^2(v)) =& 2u(X_\mu^{(a)})^2 u\cdot\phi^2(v) + 2|X_\mu^{(a)}u|^2\phi^2(v) + 8u\phi(v)\phi'(v)X_\mu^{(a)}u\cdot X_\mu^{(a)}v\\ &+ 2u^2\phi(v)\phi'(v)(X_\mu^{(a)})^2 v + 2u^2(\phi'(v)^2+\phi(v)\phi''(v))|X_\mu^{(a)}v|^2,\end{aligned} \tag{4.9}$$

对于 $a = 1$,2。由于 u 和 v 满足偏拉普拉斯方程

$$\triangle_\mu u = 0, \qquad \triangle_\mu v = 0, \tag{4.10}$$

在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ 上，根据命题 2.1 (2)，将 (4.9) 对 $a = 1$,2 求和，得到

$$\begin{aligned}|\nabla_\mu u|^2\phi^2(v) =& \frac{1}{2}\triangle_\mu\left(u^2\phi^2(v)\right) - 4u\phi(v)\phi'(v)\nabla_\mu u\cdot\nabla_\mu v - u^2(\phi'(v)^2+\phi(v)\phi''(v))|\nabla_\mu v|^2\\ =:& T_1+T_2+T_3.\end{aligned} \tag{4.11}$$

But

$$|T_2| \le \frac{1}{10}|\nabla_\mu u|^2\phi^2(v) + 20u^2\phi'(v)^2|\nabla_\mu v|^2 := T_{21}+T_{22}.$$

积分 $\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} T_{21}(x,t_\mu)t_\mu dt_\mu dx$ 可以由 (4.11) 左侧的积分吸收，而

$$T_{22} + |T_3| \le 40u^2\Phi_1^2(v)\,|\nabla_\mu v|^2.$$

Then

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_\mu u|^2\phi^2(v)t_\mu dt_\mu dx \le \frac{5}{9}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}\triangle_\mu\left(u^2\phi^2(v)\right)t_\mu dt_\mu dx + \frac{400}{9}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} u^2\Phi_1^2(v)\,|\nabla_\mu v|^2\,t_\mu dt_\mu dx.$$

由于根据推论 3.1， $U = u^2\phi^2(v)$ 满足命题 2.3 的假设，我们可以将命题 2.3 应用于 $U = u^2\phi^2(v)$，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}\triangle_\mu\left(u^2\phi^2(v)\right)t_\mu dt_\mu dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^2(x,0)\phi^2(v(x,0))dx.$$

该估计由此得出。 □

If w在 (4.4) 中，我们对 $u = U_1$ 应用引理 4.1，并将 f 替换为 f_ε，于是出现了如下项:

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_2 U_2|^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_1 v|^2 t_\mu dt_\mu dx. \tag{4.12}$$

这里，对于 $k = 1,\dots,m$，我们定义函数

$$U_k(x,\mathbf{t}) := f_\varepsilon *_1 P_{t_1} *\cdots *_k P_{t_k} *_{k+1} \widetilde{\nabla}_{k+1} P_{t_{k+1}} *\cdots *_m \widetilde{\nabla}_m P_{t_m}(x), \tag{4.13}$$

在 $\mathbb{R}^n \times(\mathbb{R}_+)^m$ 上，它们满足

$$\nabla_k U_k(x,\mathbf{t}) = U_{k-1}(x,\mathbf{t}), \tag{4.14}$$

由命题位置 2.1 (3)。因此，为了进一步估计项 (4.12)，我们需要以下估计 .

引理 4.2. 假设与引理 *4.1* 中相同。设

$$u(x,t_\mu,t_\nu) = f_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu} *_\nu P_{t_\nu}, \qquad v(x,t_\mu,t_\nu) = \chi_\varepsilon *_\mu P_{t_\mu} *_\nu P_{t_\nu},$$

对于 $\mu \neq \nu$。那么对于固定的 t_μ，我们有，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_\nu u|^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2 \Big|_{(x,t_\mu,t_\nu)} t_\nu dt_\nu dx \lesssim & \int_{\mathbb{R}^n} u^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2 \Big|_{(x,t_\mu,0)} dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} u^2 \Phi_2^2(v) \Sigma_{\mu\nu}(v) \Big|_{(x,t_\mu,t_\nu)} t_\nu dt_\nu dx,\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中

$$\Sigma_{\mu\nu}(v) := |\nabla_\mu v|^2 |\nabla_\nu v|^2 + |\nabla_\mu \nabla_\nu v|^2,$$

且 Φ_2 是满足 $\Phi_2(a) = 0$ 的 $\mathscr{C}^{2m}[0,1]$ 函数，其中 $a \in [0, C_1]$，且对于 $a \in [0,1\ \ ]$，

$$\Phi_2(a) \geq |\Phi_1(a)| + |\Phi_1'(a)| + |\Phi_1''(a)|.$$

证明。 通过与 (4.11) 类似的直接求导，我们得到以下恒等式:

$$\begin{aligned}|\nabla_\nu u|^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2 =& \frac{1}{2}\triangle_\nu \left(u^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2\right) \\ & - 4u\Phi_1(v)\Phi_1'(v)\nabla_\nu u\cdot\nabla_\nu v |\nabla_\mu v|^2 - 4u\Phi_1^2(v)\nabla_\nu u\cdot(\nabla_\mu v\cdot\nabla_\nu\nabla_\mu v) \\ & - u^2((\Phi_1'(v))^2 + \Phi_1(v)\Phi_1''(v)) |\nabla_\nu v|^2 |\nabla_\mu v|^2 \\ & - 2u^2\Phi_1(v)\Phi_1'(v)\nabla_\nu v\cdot(\nabla_\mu v\cdot\nabla_\nu\nabla_\mu v) - u^2\Phi_1^2(v) |\nabla_\nu\nabla_\mu v|^2 \\ =: & \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \tilde{T}_3 + \tilde{T}_4 + \tilde{T}_5 + \tilde{T}_6,\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中 $\nabla_\nu u\cdot(\nabla_\mu v\cdot\nabla_\nu\nabla_\mu v) := \sum_{a,b=1,2} X_\nu^{(a)} u\cdot X_\mu^{(b)} v\cdot X_\nu^{(a)} X_\mu^{(b)} v.$。由于根据下面的引理 4.4，$U = u^2\Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2$ 满足命题 2.3 的假设，我们可以应用命题 2.3，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \triangle_\nu \left(u^2\Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2\right) t_\nu dt_\nu dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^2\Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2 \Big|_{(x,t_\mu,0)} dx.$$

应用柯西-施瓦茨不等式，得到

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} \tilde{T}_2 t_\nu dt_\nu dx\right| \leq \frac{1}{10}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_\nu u|^2 \Phi_1^2(v) |\nabla_\mu v|^2 t_\nu dt_\nu dx + C\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} u^2\Phi_2^2(v) |\nabla_\nu v|^2 |\nabla_\mu v|^2 t_\nu dt_\nu dx.$$

根据 Φ_2 的定义，同理可得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}\tilde{T}_3 t_\nu dt_\nu dx\right| \le \frac{1}{10}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\nabla_\nu u|^2\,\Phi_1^2(v)\,|\nabla_\mu v|^2\,t_\nu dt_\nu dx + C\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}u^2\Phi_1^2(v)|\nabla_\nu\nabla_\mu v|^2 t_\nu dt_\nu dx.$$

上式右端的前几项可由式 (4.16) 左端的积分吸收。$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}T_4$，T_5，T_6 的积分可直接由式 (4.15) 右端的第二项控制。引理得证。□

4.3. 一般情形下的估计。若将引理 4.1 应用于项 (4.12)，则会出现一项形如

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\nabla_3 U_3|^2\,\Phi_2^2(v)\Sigma_{12}(v)\,t_3 dt_3 dx. \tag{4.17}$$

因此，我们需要对以下一般估计进行归纳。对于 $\mathfrak{m}$ 的子集 $\mathfrak{j}$，记　e

$$\Sigma_{\mathfrak{j}}(v) := \sum_{\mathfrak{j}_1,\cdots,\mathfrak{j}_l}|\nabla_{\mathfrak{j}_1}v|^2\cdots|\nabla_{\mathfrak{j}_l}v|^2, \tag{4.18}$$

其中，求和遍历 $\mathfrak{j}$ 的所有划分 $\mathfrak{j}_1$，$\cdots$，$\mathfrak{j}_l$，即 $\mathfrak{j}$ 是 $\mathfrak{j}_1$，$\cdots$，$\mathfrak{j}_l$ 的不交并。

引理 4.3. 设定与引理 *4.1* 中相同。对于 $\{1,2,\dots,k-1\}$ 的子集 $\mathfrak{j}$，满足 $a=|\mathfrak{j}|$，令

$$u(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)=f_\varepsilon *_\mathfrak{j} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}} *_k P_{t_k}(x),\qquad v(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)=\chi_\varepsilon *_\mathfrak{j} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}} *_k P_{t_k}(x). \tag{4.19}$$

那么，对于固定的 $\mathbf{t}_\mathfrak{j}\in(\mathbb{R}_+)^a$，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\nabla_k u|^2\Phi_a^2(v)\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)}t_k dt_k dx \lesssim{}& \int_{\mathbb{R}^n}u^2\Phi_a^2(v)\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},0)}dx\\ &+\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}u^2\Phi_{a+1}(v)^2\Sigma_{\mathfrak{j}\cup\{k\}}(v)\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)}t_k dt_k dx,\end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 Φ_{a+1} 是一个 $\mathscr{C}^{2m+2-2a}[0,1]$ 函数，满足 $\Phi_{a+1}|_{[0,C_1]}=0$，且在 $[0,1]$ 上有 $\Phi_{a+1}\ge|\Phi_a|+|\Phi_a'|+|\Phi_a''|$。

证明。注意到 $\frac{1}{2}\triangle_k(u^2)=|\nabla_k u|^2$，并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle_k(\Phi_a^2(v)) &= (\Phi_a(v)\Phi_a''(v)+\Phi_a'(v)^2)\,|\nabla_k v|^2,\\ \frac{1}{2}\triangle_k(|\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2) &= 2\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v\cdot\triangle_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v+|\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2=|\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2,\end{aligned}$$

由 $\triangle_k u=0=\triangle_k v$ 和 $\triangle_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v=\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}\triangle_k v=0$ 可知，对任意 $\mathfrak{j}_\alpha$ 和 k。通过直接求导可得

$$|\nabla_k u|^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2=\frac{1}{2}\triangle_k\left(u^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\right)+\breve{T}_2+\breve{T}_3=:\breve{T}_1+\breve{T}_2+\breve{T}_3, \tag{4.21}$$

其中

$$\begin{aligned}\breve{T}_2 :=& -4u\Phi_a(v)\Phi_a'(v)\nabla_k u\cdot\nabla_k v\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\\ &-4u\Phi_a^2(v)\sum_\alpha\nabla_k u\cdot(\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v\cdot\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v)\prod_{\beta\neq\alpha}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2=:\breve{T}_{21}+\breve{T}_{22},\end{aligned} \tag{4.22}$$

是涉及 u 的一阶导数的项，而

$$\begin{aligned}\breve{T}_3 :=& -u^2(\Phi_a(v)\Phi_a''(v)+\Phi_a'(v)^2)|\nabla_k v|^2\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\\ &-4u^2\Phi_a(v)\Phi_a'(v)\sum_\alpha\nabla_k v\cdot(\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v\cdot\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v)\prod_{\beta\neq\alpha}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\\ &-u^2\Phi_a^2(v)\sum_\alpha|\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2\prod_{\beta\neq\alpha}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\\ &-4u^2\Phi_a^2(v)\sum_{\alpha\neq\gamma}(\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v\cdot\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v)\cdot(\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\gamma}v\cdot\nabla_{\mathfrak{j}_\gamma}v)\prod_{\beta\neq\alpha,\gamma}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\\ =:&\ \breve{T}_{31}+\breve{T}_{32}+\breve{T}_{33}+\breve{T}_{34},\end{aligned}\tag{4.23}$$

仅涉及 v的导数的项。

由于根据后续的引理 4.4，$U=u^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2$ 满足命题 2.3 中的假设，我们可以应用命题 2.3，得到 $\breve{T}_1$ 的积分由（4.20）右端的第一项控制。类似地，应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\breve{T}_{21}(x,\mathbf{t}_{\mathfrak{j}},t_k)|t_k\,dt_k dx\le&\frac{1}{10}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\nabla_k u|^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2t_k dt_k dx\\ &+C\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}u^2\Phi_{a+1}^2(v)|\nabla_k v|^2\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2t_k dt_k dx,\\ \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\breve{T}_{22}(x,\mathbf{t}_{\mathfrak{j}},t_k)|t_k dt_k dx\le&\frac{1}{10}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|\nabla_k u|^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2t_k\,dt_k dx\\ &+C\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}u^2\Phi_a^2(v)\sum_\alpha|\nabla_k\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2\prod_{\beta\neq\alpha}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2t_k dt_k dx.\end{aligned}\tag{4.24}$$

（4.24）右端的第一项可由（4.21）左端的积分吸收。根据 $\Sigma_{\mathfrak{j}\cup\{k\}}$的定义，（4.24）右端的第二项可由（4.20）右端的第二项控制。

$\breve{T}_{3j}$ 的积分可通过应用柯西-施瓦茨不等式，直接由 (4.20) 右端的第二项控制。(4.20) 中的估计得证。□

引理 4.4。设 $\varepsilon>0$，并设 u、v 如引理 *4.3* 中所述。则 $U=u^2\Phi_a^2(v)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2$ 满足命题 *2.3* 中的条件。

证明。尽管可能有 $\chi_\varepsilon:=\chi*P_{\boldsymbol{\varepsilon}}\notin L^1(\mathbb{R}^n)$，但必有 $\nabla_l\chi_\varepsilon=(1-\chi)*\widetilde{\nabla}_l P_{\boldsymbol{\varepsilon}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$。然而$v\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$。因此，根据命题 3.4 中的边界增长估计可知，对于 $\mathfrak{m}$ 的任意非空子集 $\mathfrak{l}$，$|\nabla_{\mathfrak{l}}v|\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，其范数仅依赖于 ε。注意

$$u^2,\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2\ \text{ satisfy conditions in Proposition 2.3,}\tag{4.25}$$

除 $\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2(\cdot,\ t_k)\to0$ 外，由推论 3.1 (1)-(2) 对于 $\mu=k$，且

$$\nabla_k U=\Big(\nabla_k u^2\Phi_a^2(v)+2u^2\Phi_a(v)\Phi_a'(v)\nabla_k v\Big)\prod_\beta\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2+\sum_\alpha u^2\Phi_a^2(v)\nabla_k(|\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2)\prod_{\beta\neq\alpha}\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2.$$

由（4.25）可知，$\nabla_k U(\cdot,t_k)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，因为 Φ,Φ'有界，且上述右端的所有因子都属于$L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$。类似地，对于 $a=0,2$，有 $\nabla^a U(\cdot,t_k)\in L^1(\mathbb{R}^n)$。

注意，对于 $a=0,1$，由（4.25）可知，$\lim_{t_k\to+\infty}\|t_k^a\partial_{t_k}^a U(\cdot,t_k)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$，因为 $t_\mu^a\partial_{t_k}^a(u^2)$、$t_k^a\partial_{t_k}^a(|\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v|^2)$属于$L^1(\mathbb{R}^n)$，且其他因子均由仅依赖于 ε 的常数控制。

再次由 (4.25)，由于 $t_k\to 0$, $u^2(\cdot,t_k)\to u^2(\cdot,0)$，$\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2(\cdot,t_k)\to\left|\nabla_{\mathfrak{j}_\beta}v\right|^2(\cdot,0)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中成立，且$\Phi_a^2(v)(\cdot,t_k)\to\Phi_a^2(v)(\cdot,0)$ 几乎处处成立。因此，$U(\cdot,t_k)\to U(\cdot,0)$。同理，$t_k\partial_{t_k}U(\cdot,t_k)\to 0$在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中成立，因为$t_k\to 0$。□

4.4. **Fefferman-Stein 型 good-λ 不等式的证明。**

命题 4.2. 设 $\varepsilon>0$。假设 $f_\varepsilon:=f*P_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 对某个 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$成立，$\chi_\varepsilon:=\chi_E*P_{\boldsymbol{\varepsilon}}$，其中 E^c具有有界测度，且 $v(x,\mathbf{t})=\chi_\varepsilon*P_{\mathbf{t}}$. 那么，我们有如下估计

$$I=\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m}\left|\nabla_{\mathfrak{m}}(f_\varepsilon*P_{\mathbf{t}})\right|^2\phi^2(v)\mathbf{t}d\mathbf{t}dx\lesssim\sum_{\mathfrak{j}}\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}}}(f_\varepsilon)^2\Phi_{|\mathfrak{j}|}^2(v)\Sigma_{\mathfrak{j}}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}})}\mathbf{t}_{\mathfrak{j}}d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}}dx,\tag{4.26}$$

其中求和 对 $\mathfrak{j}$ *of* $\mathfrak{m}$, $\Phi_0=\phi$, $\Sigma_{\mathfrak{j}}(v)$ 的子集进行，且由 (4.18) 给出，而 $\mathfrak{j}^c:=\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{j}$.

证明。 对固定的 $\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}$，将引理 4.1 中的估计式 (4.7) 应用于由 (4.13)-(4.14) 给出的 $U_1(x,t_1,\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2})$ 的实部和虚部，我们得到 (4.26) 中的积分 I 可估计为

$$\begin{aligned}I&=\int_{(\mathbb{R}_+)^{m-1}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}\left|\nabla_1U_1(x,t_1,\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2})\right|^2\phi^2(v)t_1dt_1dx\,\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}\\&\lesssim\int_{(\mathbb{R}_+)^{m-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+}|U_1|^2\Phi_1^2(v)\left|\nabla_1v\right|^2\Big|_{(x,\mathbf{t})}t_1dt_1dx+\int_{\mathbb{R}^n}|U_1|^2\phi^2(v)\Big|_{(x,0,\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2})}dx\right)\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}\\&=\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m}|\,U_1|^2\,\Phi_1^2(v)\left|\nabla_1v\right|^2\Big|_{(x,\mathbf{t})}\mathbf{t}d\mathbf{t}dx+\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{m-1}}\left|U_1\right|^2\phi^2(v)\Big|_{(x,0,\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2})}\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}dx.\end{aligned}\tag{4.27}$$

我们断言

$$I\lesssim\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{|\mathfrak{j}|=a}S_{\mathfrak{j}}^{(k)},\tag{4.28}$$

其中求和遍历 $\{1,2,\dots,k-1\}$ 的所有子集，并且

$$S_{\mathfrak{j}}^{(k)}:=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^{m-k+1+|\mathfrak{j}|}}\left|U_{k-1}\right|^2\Phi_{|\mathfrak{j}|}^2(v)\Sigma_{\mathfrak{j}}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}_k^c},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k})}\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k}d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k}dx,\tag{4.29}$$

$k=2,\dots,m+1$. 此处 $\Sigma_{\mathfrak{j}}(v)=1$ 若 $\mathfrak{j}=\emptyset$，U_k 由（4.13）给出，$U_{k-1}=\nabla_kU_k$、$\mathfrak{m}_k=\{k,\dots,m\}$，并且

$$\mathfrak{j}_k^c:=\{1,2,\dots,k-1\}\setminus\mathfrak{j}.$$

我们通过归纳法证明断言（4.28）。由（4.27）可知，断言（4.28）对于 $k=2$ 已经成立。假设（4.28）对于正整数 $k\le m+1$ 成立。令

$$\hat{u}(x,\mathbf{t}_{\mathfrak{j}},t_k)=\hat{f}_\varepsilon*_{\mathfrak{j}}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}}}*_kP_{t_k}(x),\qquad\hat{v}(x,\mathbf{t}_{\mathfrak{j}},t_k)=\hat{\chi}_\varepsilon*_{\mathfrak{j}}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}}}*_kP_{t_k}(x),$$

对于固定的$\mathbf{t}^{\mathfrak{m}_{k+1}}$，其中

$$\hat{f}(x)=f*_{k+1}\widetilde{\nabla}_{k+1}P_{t_{k+1}}*\cdots*_m\widetilde{\nabla}_mP_{t_m}(x),\qquad\hat{\chi}(x)=\chi*_{k+1}P_{t_{k+1}}*\cdots*_mP_{t_m}(x).$$

注意，通过反复应用 (3.12)，可得 $\hat{} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$；类似地，$\|\hat{}\chi\|_{L^\infty} \le 1$ 和 $1 - \hat{}\chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$。此外，它们的 L^1-范数与$\mathbf{t}$无关。于是，根据定义，

$$U_k|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c_k},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k})} = \hat{u}(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k), \qquad v|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c_k},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k})} = \hat{v}(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)$$

对于固定的 $\mathbf{t}^{\mathfrak{m}_{k+1}}$。A 将估计式 (4.20) 应用于引理 4.3 中的 $u = \hat{}u$ and $v = \hat{}v$，对于固定的 $\mathbf{t}^\mathfrak{j}$ and $\mathbf{t}^{\mathfrak{m}_{k+1}}$，得到

$$\begin{aligned}
S^{(k)}_\mathfrak{j} =& \int_{(\mathbb{R}_+)^{m-k+|\mathfrak{j}|}} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\nabla_k \hat{u}|^2 \, \Phi^2_{|\mathfrak{j}|}(\hat{v})\Sigma_\mathfrak{j}(\hat{v})\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)} t_k dt_k dx \, \mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} \\
\lesssim& \int_{(\mathbb{R}_+)^{m-k+|\mathfrak{j}|}} \Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 \, \Phi^2_{|\mathfrak{j}|}(\hat{v})\Sigma_\mathfrak{j}(\hat{v})|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},0)} dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} |\hat{u}|^2 \, \Phi^2_{|\mathfrak{j}|+1}(\hat{v})\Sigma_{\mathfrak{j}\cup\{k\}}(\hat{v})\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j},t_k)} t_k dt_k dx \Bigg) \mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} \\
=& \int_{(\mathbb{R}_+)^{m-k+|\mathfrak{j}|}} |U_k|^2 \, \Phi^2_{|\mathfrak{j}|}(v)\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c_{k+1}},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}})} \mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_{k+1}} dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{m-k+|\mathfrak{j}|+1}} |U_k|^2 \, \Phi^2_{|\mathfrak{j}|+1}(v)\Sigma_{\mathfrak{j}\cup\{k\}}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c_k},\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k})} \mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k} d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\cup\mathfrak{m}_k} dx \\
=& S^{(k+1)}_\mathfrak{j} + S^{(k+1)}_{\mathfrak{j}\cup\{k\}}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

由此可得

$$\sum_{a=0}^{k-1}\sum_{|\mathfrak{j}|=a} S^{(k)}_\mathfrak{j} \lesssim \sum_{a=0}^{k}\sum_{|\mathfrak{l}|=a} S^{(k+1)}_\mathfrak{l}$$

根据定义，右侧的求和遍历 $\{1,2,\dots,k\}$ 的子集 $\mathfrak{l}$。对于 $k = m+1$，估计式 (4.26) 的右端恰好是 (4.28)，因为根据定义 (4.13)，$U_m|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c},\mathbf{t}_\mathfrak{j})} = P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(f)$。□

命题 4.2 中的积分可以进一步估计如下。

引理 4.5。 作与命题 *4.2* 中相同的假设。则对于 $\mathfrak{m}$ 的非空子集 $\mathfrak{j}$、$E = E_\beta(\lambda)$ 以及 $\lambda > 0$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(f_\varepsilon)^2 \Phi_{|\mathfrak{j}|}(v)^2\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c},\mathbf{t}_\mathfrak{j})} \mathbf{t}_\mathfrak{j} d\mathbf{t}_\mathfrak{j} dx \lesssim \lambda^2 |E_\beta(\lambda)^c|. \tag{4.31}$$

证明。 对于 $\Phi_a(P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(\chi_\varepsilon))(x) \neq 0$，有

$$P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}+\boldsymbol{\varepsilon}}(\chi)(x) = P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(\chi_\varepsilon)(x) > C_1$$

根据 Φ_a 的定义。这里为简化记号，我们将 $(\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c},\mathbf{t}_\mathfrak{j})$ 简记为 $\mathbf{t}^\mathfrak{j}$。因此，$\widetilde{\ }(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j}+\boldsymbol{\varepsilon}) \in W_\beta$ 由命题 4.1 得。于是，存在 $x' \in E_\beta(\lambda)$ 使得 $(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j}+\boldsymbol{\varepsilon}) \in \Gamma_\beta(x')$，从而

$$P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(f_\varepsilon)(x) = P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}+\boldsymbol{\varepsilon}}(f)(x) \le N^\beta(f)(x') \le \lambda.$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}} P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(f_\varepsilon)^2 \Phi^2_{|\mathfrak{j}|}(v)\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j})} \mathbf{t}_\mathfrak{j} d\mathbf{t}_\mathfrak{j} dx \le C \sum_{\mathfrak{j}_1,\cdots,\mathfrak{j}_l} \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}} |\nabla_{\mathfrak{j}_1} v|^2 \cdots |\nabla_{\mathfrak{j}_l} v|^2\Big|_{(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j})} \mathbf{t}_\mathfrak{j} d\mathbf{t}_\mathfrak{j} dx$$

其中 $C=\max_a \max_{[0,1]} \Phi_a^2$，求和遍历 $\mathfrak{j}$ 的划分 $\mathfrak{j}_1,\cdots,\mathfrak{j}_l$，并且

$$v(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j})=P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(\chi_\varepsilon)(x)=P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}+\boldsymbol{\varepsilon}}(\chi)(x).$$

回忆一下，对于 $h\in L^1(\mathbb{R})$，$|P_{t_\lambda}(h)|\lesssim M_\lambda(h)$ $|t_\lambda\nabla_\lambda P_{t_\lambda}(h)|\lesssim M_\lambda(h)$。结合

$$\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha} v(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j})=\chi_\varepsilon *_{\mathfrak{j}_1} P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_1}}\cdots *_{\mathfrak{j}_\alpha}\widetilde{\nabla}_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}*\cdots *_{\mathfrak{j}_l}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_l}}=\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}\left(\chi_\varepsilon *_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}\right)*_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}},$$

部分卷积的交换性 (2.4) 和 (3.1)，可得

$$|\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}v(x,\mathbf{t}_\mathfrak{j})|^2\lesssim\left|M_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}\left(\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}(\chi_\varepsilon)\right)\right|^2,$$

其中，$\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha$是 $\mathfrak{j}$中 $\mathfrak{j}_\alpha$的补集；若$\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_a\}$，则 $M_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}=M_{\lambda_a}\circ\cdots\circ M_{\lambda_1}$是迭代极大函数。对于 $\mathfrak{m}$的子集 $\mathfrak{j}=\{j_1,\ldots,j_a\}$，记 $^d_{\mathbf{t}\mathfrak{t}\mathfrak{j}}:=\begin{smallmatrix}dt_{j_1}\cdots dt_{j_a}\\ t_{j_1}\cdots t_{j_a}\end{smallmatrix}$. 于是，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}}|\nabla_{\mathfrak{j}_1}v|^2\cdots|\nabla_{\mathfrak{j}_l}v|^2\,\mathbf{t}_\mathfrak{j}d\mathbf{t}_\mathfrak{j}dx&\lesssim\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}|}}\prod_{\alpha=1}^l\left|M_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}\left(\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}(\chi_\varepsilon)\right)\right|^2dx\frac{d\mathbf{t}_\mathfrak{j}}{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{\alpha=1}^l\int_{(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}_\alpha|}}\left|M_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}\left(\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}(\chi_\varepsilon)\right)\right|^2\frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}dx\\
&\le\prod_{\alpha=1}^l\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^{|\mathfrak{j}_\alpha|}}\left|M_{\mathfrak{j}\setminus\mathfrak{j}_\alpha}\left(\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}\nabla_{\mathfrak{j}_\alpha}P_{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}(1-\chi_\varepsilon)\right)\right|^2\frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{j}_\alpha}}\right)^l dx\right|^{\frac{1}{l}}\\
&\lesssim\prod_{\alpha=1}^l\left|\int_{\mathbb{R}^n}g_{\mathfrak{j}_\alpha}^{2l}(1-\chi_\varepsilon)dx\right|^{\frac{1}{l}}\\
&\lesssim\|1-\chi_\varepsilon\|_{L^{2l}(\mathbb{R}^n)}^{2l}\to\|1-\chi\|_{L^{2l}(\mathbb{R}^n)}^{2l}=|E_\beta(\lambda)^c|.
\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式、Hardy–Littlewood 极大函数的向量值不等式，以及命题 2.2 中部分 Littlewood–Paley g-函数的 L^{2l} 有界性。□

定理 *4.1* 的证明。 由于 $f_\varepsilon=f*P_{\boldsymbol{\varepsilon}}$在 T_Ω上光滑，根据非切向极大函数的定义，我们有 $f_\varepsilon(x)\le N^\beta(f_\varepsilon)(x)\le N^\beta(f)(x)$，类似地，$v(x,\mathbf{0})=(\chi_{E_\beta(\lambda)})_\varepsilon$。因此，

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m}|\nabla_\mathfrak{m}(f_\varepsilon*P_\mathbf{t})|^2\,\phi^2(v)\mathbf{t}d\mathbf{t}dx\\
&\lesssim\int_{\mathbb{R}^n}f_\varepsilon^2\phi^2(v)(x)dx+\sum_{a=1}^m\sum_{|\mathfrak{j}|=a}\int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^a}P_{\mathbf{t}_\mathfrak{j}}(f_\varepsilon)^2\Phi_a^2(v)\Sigma_\mathfrak{j}(v)\Big|_{(x,\mathbf{0}_{\mathfrak{j}^c},\mathbf{t}_\mathfrak{j})}\mathbf{t}_\mathfrak{j}d\mathbf{t}_\mathfrak{j}dx\\
&\lesssim\int_{\mathbb{R}^n}N^\beta(f)^2\phi^2\left((\chi_{E_\beta(\lambda)})_\varepsilon\right)(x)dx+\lambda^2|E_\beta(\lambda)^c|,
\end{aligned}\tag{4.32}$$

由命题 4.2 和引理 4.5 得出。由于 $\varepsilon\to0$, $\nabla_\mathfrak{m}(f_\varepsilon*P_\mathbf{t})\to\nabla_\mathfrak{m}(f*P_\mathbf{t})$ 且 $v(\cdot,\mathbf{t})\to\chi*P_\mathbf{t}$ 几乎处处成立。由不等式 (4.5) 以及对 (4.32) 中的 $\varepsilon\to0$ 取极限所得的不等式，并应用 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理，可得不等式 (1.11)。□

5. Littlewood-Paley g function and S functions

5.1. Plancherel-P´olya 型不等式（适用于 $\mathfrak{H}$ 值函数）。设 $\mathfrak{H}$为可分希尔伯特空间，$\{h_1, h_2, \dots\}$ 为 $\mathfrak{H}$的一组正交归一基。称一个 $\mathfrak{H}$值函数 $\mathfrak{f}$为可测的，如果$\mathfrak{f} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)h_j$ 几乎处处收敛，且每个 f_j 都是可测的。若可测函数 $\mathfrak{f} \in L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$满足$\|\mathfrak{f}\|_{L^p(\mathbb{R},\ \mathfrak{H})} := (\int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$，则称其为可测函数。特别地，$\int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^2 dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^2 dx$。

固定 $0 < \beta < 1$和 $\gamma > 0$，我们称定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的 $\mathfrak{f}$属于 $\mathcal{M}(\beta,\ \gamma,\ r,\ x_0;\ \mathfrak{H})$，且满足 $r > 0$和 $x_0 \in \mathbb{R}^1$，如果它满足$\int_{\mathbb{R}^1} \mathfrak{f}(x)dx = 0$ 并且

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}} &\le C\frac{r^\gamma}{(r+|x-x_0|)^{1+\gamma}},\\
|\mathfrak{f}(x)-\mathfrak{f}(x')|_{\mathfrak{H}} &\le C\left(\frac{|x-x'|}{r+|x-x_0|}\right)^{\beta}\frac{r^\gamma}{(r+|x-x_0|)^{1+\gamma}},
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

对 $|x-x'| \le \frac{r+|x-x_0|}{2}$成立。记$\|\mathfrak{f}\|_{\mathcal{M}(\beta,\gamma,r,x_0;\ \mathfrak{H})} := \inf\{C;\ (5.1)\text{成立}\}$.。与标量情形一样，它是一个巴拿赫空间。特别地，$\mathcal{M}(\beta,\ \gamma,\ r,\ x_0) = \mathcal{M}(\beta,\ \gamma,\ r,\ x_0;\ \mathbb{R})$。

记 $\rho_t := t\frac{\partial P_t}{\partial t}$。回顾（例如参见 [19, 第2节3]），存在函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得：(1) $\operatorname{supp}\ \varphi \subseteq [-1,1]$; (2) $\int_{\mathbb{R}} s^a\varphi(s)ds = 0$对 $a = 0,\ 1,\ 2$; (3) $\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi = 1$。

于是，对于 $\mathbb{R}$ 上取值于 $\mathfrak{H}$ 的函数，我们有 Calder´on 再生公式：

$$
\mathfrak{f}(x) = \lim_{\substack{T\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}} \int_{\varepsilon}^{T} \varphi_t * \rho_t * \mathfrak{f}(x)\,\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \varphi_t * \rho_t * \mathfrak{f}(x)\,\frac{dt}{t},
\tag{5.2}
$$

对 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R},\ \mathfrak{H})$。这是因为 $\mathfrak{f} = \sum_i f_i h_i$，且每个分量 $f_i \in L^2(\mathbb{R})$ 都满足 $\mathbb{R}$ 上通常的 Calder´on 再生公式。这里 $\phi * \mathfrak{f} = \sum_i \phi * f_i h_i$ 对于 $\phi \in L^1(\mathbb{R})$，其衰减方式类似于泊松核。$\phi * \mathfrak{f} \in L^p(\mathbb{R},\ \mathfrak{H})$，如果 $\mathfrak{f} \in L^p(\mathbb{R},\ \mathfrak{H})$。这是因为

$$
\begin{aligned}
\|\phi * \mathfrak{f}\|_{L^p(\mathbb{R},\mathfrak{H})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_i |\phi * f_i|^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_i |M(f_i)|^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_i |f_i|^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathfrak{f}\|_{L^p(\mathbb{R},\mathfrak{H})},
\end{aligned}
$$

根据 Hardy–Littlewood 极大函数的向量值不等式。

我们有适用于取值于 $\mathfrak{H}$ 的函数的小波 Calder´on 再生公式。其证明见附录。下文中，对于 $j \in \mathbb{Z}$，一个边长为 ℓ 的二进区间 I $(I) = 2^{-\alpha(j+N)}$ 表示：对于某个 $l \in \mathbb{Z}$，$I = [0,\ 2^{-\alpha(j+N)}] + l2^{-\alpha(j+N)}$。

命题 5.1。存在一个固定的小数 $\alpha > 0$ 和一个足够大的整数 N，使得对于每个边长为 $\ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}$ 的二进区间 I、$j \in \mathbb{Z}$，以及 I 中任意给定的点 x_I，存在 $\phi_j(x,\ x_I) \in \mathcal{M}(\beta,\ \gamma,\ 2^{-\alpha j},\ x_I;\ \mathfrak{H})$，满足

$$
\mathfrak{f}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{I} \mathfrak{f}_{j;I}\phi_j(\cdot, x_I),
\tag{5.3}
$$

whe其中求和遍历所有边长为 $\ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}$ 的二进区间，并且

$$\mathfrak{f}_{j;I} = c_\alpha \ell(I) |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}, \qquad \widetilde{\rho}_j := \frac{1}{c_\alpha} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \rho_t \frac{dt}{t}, \qquad c_\alpha = \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \frac{dt}{t} = \alpha \ln 2. \tag{5.4}$$

级数(5.3) 在 $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 中收敛，并且在巴拿赫空间 $M(\beta, \gamma, r, x_0; \mathfrak{H})$中收敛。

我们还需要带紧支撑 ψ的 Calder´on 再生公式:

$$\mathfrak{f}(x) = \int_0^{+\infty} \psi_t * \psi_t * \mathfrak{f}(x) \frac{dt}{t},$$

对任意 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$。这里可以要求 ψ 光滑且紧支撑。与 ψ 相关的 S-函数，以及与泊松核相关的 g-函数（用于 $\mathbb{R}$ 上取值于 $\mathfrak{H}$ 的函数）定义如下

$$S_\psi(\mathfrak{f})(x) := \left(\int_0^{+\infty} \int_{|x-x'|<t} |\psi_t * \mathfrak{f}(x')|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dtdx'}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad g_P(\mathfrak{f})(x) := \left(\int_0^{+\infty} |\rho_t * \mathfrak{f}|_{\mathfrak{H}}^2 (x) \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

分别地，其中 $\psi_t(x) = \frac{1}{t}\psi(x/t)$。例如，参见 [21] 关于向量值 Littlewood-Paley g 函数和 S函数的讨论。小波 Calder´on 再生公式 (5.1) 给出以下 Plancherel-P´olya 型不等式（例如参见 [19, 定理 2.16-2.17] ，标量情形）。

命题 5 .2. 令 $\alpha > 0$ 和 N 如命题 *5.1* 中所述。对于固定的 $C_0 > 0$ 以及任意的 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$,

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \sup_{u\in C_0 I} |\psi_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dt}{t} \chi_I(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1} \lesssim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \inf_{u\in I} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} |\rho_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dt}{t} \chi_I(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^1},$$

其中求和遍历所有边长为 $\ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}$ 的二进区间 I，且 χ_I 是 I的示性函数。隐含常数取决于 α、N 和 C_0。

这个不等式实际上对某些分布也成立，但对于我们的目的而言，针对 L^2 函数的不等式已足够。证明见附录。

5.2. **估计** $\|f\|_{L^1} \lesssim \|g(f)\|_{L^1}$. 首先，我们使用 Plancherel-P´olya 型不等式，证明对于取值于 $\mathfrak{H}$ 的函数，可用 g-函数控制 S-函数。

命题 5.3。 对于 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 且满足 $g_P(\mathfrak{f}) \in L^1(\mathbb{R})$，有 $S_\psi(\mathfrak{f}) \in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $\|S_\psi(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim \|g_P(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})}$。

证明。 我们可以写成

$$S_\psi(\mathfrak{f})(x) = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \int_{\mathbb{R}} \chi_t(x-x') |\psi_t * \mathfrak{f}(x')|_{\mathfrak{H}}^2 \chi_I(x) \frac{dx'dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中求和遍历所有边长为 $\ell(I)$ 的二进区间 $I = 2^{-\alpha(j+N)}$。注意，存在一个仅依赖于 α, N 的固定常数 C_0，使得对于 $2^{-\alpha j} \le t \le 2^{-\alpha(j-1)}$ 和 $x' \in \mathbb{R}$,

$$\chi_t(x-x') |\psi_t * \mathfrak{f}(x')|_{\mathfrak{H}} \chi_I(x) \le \chi_t(x-x') \sup_{u\in C_0 I} |\psi_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}} \chi_I(x).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\|S_\psi(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})} &\le \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \int_{\mathbb{R}} \chi_t(\cdot - x') \sup_{u\in C_0 I} |\psi_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}}^2 \chi_I(\cdot) \frac{dx'dt}{t} \right)^{\frac12} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \sqrt{2} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \sup_{u\in C_0 I} |\psi_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}}^2 \chi_I(\cdot) \frac{dt}{t} \right)^{\frac12} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \inf_{u\in I} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} |\rho_t * \mathfrak{f}(u)|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dt}{t} \chi_I(\cdot) \right)^{\frac12} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\le \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} |\rho_t * \mathfrak{f}(\cdot)|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dt}{t} \chi_I(\cdot) \right)^{\frac12} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \left\| \left(\int_0^{+\infty} |\rho_t * \mathfrak{f}(\cdot)|_{\mathfrak{H}}^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac12} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|g_P(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

由命题 5.2 中的 Plancherel-P´olya 型不等式可得。 □

命题 5.4. 对于任意 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 满足 $S_\psi(\mathfrak{f}) \in L^1(\mathbb{R})$的情形，我们有 $\mathfrak{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 以及 $\|\mathfrak{f}\|_{L^1(\mathbb{R},\mathfrak{H})} \lesssim \|S_\psi(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})}$。

证明。 这可由 $\mathfrak{H}$值函数的原子分解以及具有 L^1 可积 S函数的情形推出。与标量情形完全相同，可用标准方法证明（例如参见 [8, 42]）。细节从略。□

命题 5.3 和命题 5.4 推出以下推论。

推论 5.1. 对于 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 满足 $g_P(\mathfrak{f}) \in L^1(\mathbb{R})$的情形，有 $\mathfrak{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ 以及 $\|\mathfrak{f}\|_{L^1(\mathbb{R},\mathfrak{H})} \lesssim \|g_P(\mathfrak{f})\|_{L^1(\mathbb{R})}$。

命题 5.5. 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 $g(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$的情形，有 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。

证明. 令 $\mathfrak{H} := L^2\big((\mathbb{R}_+)^{m-1}, \frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}\big)$，赋予通常的 L^2-范数。它是一个可分希尔伯特空间。给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，满足 $g(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义可测函数

$$\mathfrak{f}_{x^\perp}(s)(t_2, \dots, t_m) := f *_2 t_2 \partial_{t_2} P_{t_2} * \cdots *_m t_m \partial_{t_m} P_{t_m}(x^\perp + s e_1).$$

对于几乎所有的 $x^\perp \in e_1^\perp$， $f_{x^\perp}$ 都是 $\mathfrak{H}$值的，因为

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{f}_{x^\perp}(s)|_{\mathfrak{H}}^2 ds dx^\perp &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{(\mathbb{R}_+)^{m-1}} \left| f *_2 t_2 \partial_{t_2} P_{t_2} * \cdots *_m t_m \partial_{t_m} P_{t_m}(x^\perp + s e_1) \right|^2 \frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}} ds dx^\perp \\
&\le \|g_{\mathfrak{m}_2}(f)\|_{L^2}^2 \lesssim \|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

由 Pro 位置 2.2。因此，对于几乎所有的 $x^\perp \in e_1^\perp$， $\mathfrak{f}_{x^\perp} \in L^2(\mathbb{R},\ \mathfrak{H})$。另一方面 ，

$$
\begin{aligned}
g_P(\mathfrak{f}_{x^\perp})(s) &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\mathfrak{f}_{x^\perp} * t_1\partial_{t_1}P_{t_1}(s)|_{\mathfrak{H}}^2 \,\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} \left|f *_2 t_2\partial_{t_2}P_{t_2} * \cdots *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m} *_1 t_1\partial_{t_1}P_{t_1}(x^\perp + se_1)\right|^2 \frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.6)\\
&= \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |f *_1 \partial_{t_1}P_{t_1} *_2 \cdots *_m \partial_{t_m}P_{t_m}|^2\,(x^\perp + se_1)\mathbf{t}d\mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}} \le g(f)(x^\perp + se_1),
\end{aligned}
$$

根据沿直线的部分卷积的交换性 (2.4)，因此，由 $g(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，可知对于几乎所有 $x^\perp \in e_1^\perp$， $g_P(\mathfrak{f}_{x^\perp}) \in L^1(\mathbb{R})$。然后应用推论 5.1，得到对于几乎所有 $x^\perp \in e_1^\perp$， $\mathfrak{f}_{x^\perp} \in L^1(\mathbb{R},\mathfrak{H})$，并且

$$
\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{f}_{x^\perp}|_{\mathfrak{H}}(s)\,dsdx^\perp \lesssim \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}} g_P(\mathfrak{f}_{x^\perp})(s)\,dsdx^\perp = \int_{\mathbb{R}^n} g(f)(x^\perp + se_1)\,dsdx^\perp.
$$

它可以改写为

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^{m-1}} |f *_2 t_2\partial_{t_2}P_{t_2} * \cdots *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m}(x)|^2 \,\frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
$$

若定义 $\mathfrak{H}_1 := L^2\big((\mathbb{R}_+)^{m-2},\, {}^{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_3}}\!\big/_{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_3}}\big)$，并赋予通常的范数，再定义函数 $\mathfrak{f}_{1;x'}:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{H}_1$，对于几乎所有 $x' \in e_2^\perp$，满足 $\mathfrak{f}_{1;x'}(s) = f *_3 \overline{t_3\partial_{t_3}P_{t_3}} * \cdots *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m}(x' + se_2)$. 同样地，如 (5.5)-(5.6) 中那样，可得 $\mathfrak{f}_{1;x'} \in L^2(\mathbb{R},\mathfrak{H}_1)$，并且对于几乎所有 $x' \in e_2^\perp$， $g_P(\mathfrak{f}_{1;x'}) \in L^1(\mathbb{R})$，且

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^{m-2}} |f *_3 t_3\partial_{t_3}P_{t_3} * \cdots *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m}(x)|^2 \,\frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_3}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_3}}\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
\lesssim &\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^{m-1}} |f *_2 t_2\partial_{t_2}P_{t_2} * \cdots *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m}(x)|^2 \,\frac{d\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}{\mathbf{t}_{\mathfrak{m}_2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned}
$$

重复这一过程，最终得到

$$
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f *_m t_m\partial_{t_m}P_{t_m}(x)|^2 \frac{dt_m}{t_m}\right)^{\frac{1}{2}} dx \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
$$

命题得证。 □

推论 5.2. 对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $g(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$
\sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}_+)^m} \|f * P_{\mathbf{t}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
$$

证明。 对于固定的$\mathbf{t} \in (\mathbb{R}_+)^m$，根据极大函数的 L^2-有界性， $f * P_{\mathbf{t}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$，并且

$$
g(f * P_{\mathbf{t}})(x) = \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}(f * P_{\mathbf{t}} * P_{\mathbf{t}'})(x)|^2\,\mathbf{t}'d\mathbf{t}'\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}(f * P_{\mathbf{t}+\mathbf{t}'})(x)|^2\,\mathbf{t}'d\mathbf{t}'\right)^{\frac{1}{2}}
$$

根据 $P_t * P_{t'} = P_{t+t'}$。因此，它等于

$$\left(\int_{\mathbf{t}+(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}(f * P_{\mathbf{t}'})(x)|^2 (\mathbf{t}' - \mathbf{t}) d\mathbf{t}'\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}(f * P_{\mathbf{t}'})(x)|^2 \mathbf{t}' d\mathbf{t}'\right)^{\frac{1}{2}} = g(f)(x),$$

即 $g(f * P_{\mathbf{t}}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。因此，我们可以应用命题 5.5 得到 $f * P_{\mathbf{t}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 一个 d

$$\|f * P_{\mathbf{t}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

其中隐含常数与$\mathbf{t}$无关。 □

6. Proof of the equivalence of various characterizations

本节证明定理1.2中各种刻画的等价性 .

(1) 推出 (2)。设 $f_\varepsilon := F(\cdot + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。应用命题 3.6 可得

$$|F(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}))|^q \leq |f_\varepsilon|^q * P_{\mathbf{t}}(x)$$

对于 $(x, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$，若我们选取 $0 < q < 1$。那么， $|f_\varepsilon|^q \in L^r(\mathbb{R}^n)$，其中 $r = \frac{1}{q} > 1$，并且

$$\sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)} |F(x' + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}))|^q \leq \sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)} |f_\varepsilon|^q * P_{\mathbf{t}}(x') \lesssim M_{it}\left(|f_\varepsilon|^q\right)(x),$$

利用 (3.1)，其中 M_{it} 是 $\mathbb{R}^n$上的迭代极大函数。因此，

$$\left\| \sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)} |F(x' + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}))|^q \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n, dx)}^r \lesssim \|M_{it}\left(|f_\varepsilon|^q\right)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r \lesssim \| \, |f_\varepsilon|^q \, \|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r = \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.1}$$

其中隐常数与 F 和 ε无关。令 (6.1) 中的 $\varepsilon \to 0$ ，得到

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)} |F(x' + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n, dx)} &= \left\| \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(x',\mathbf{t})\in(0,\boldsymbol{\varepsilon})+\Gamma_\beta(x)} |F(x' + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^q \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n, dx)}^r \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \left\| \sup_{(x',\mathbf{t})\in\Gamma_\beta(x)} |F(x' + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}))|^q \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n, dx)}^r \\ &\lesssim \liminf_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

由 Fatou定理可知，因为当 $\varepsilon \downarrow 0$时，域 $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \Gamma_\beta(x)$ 单调递增，且其极限为集合 $\Gamma_\beta(x)$。因此， $\|\mathbb{N}^\beta(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|F\|_{H^1(T_\Omega)}$。

(2) 推出 (3)。首先，对于任意固定的 $y_0 \in \Omega$，由命题 3.4 中的边界增长可知，当 $|y| \to +\infty$ 在 Ω 中时，$F(x + \mathbf{i}y) \to 0$。记 $F_\varepsilon(x + \mathbf{i}y) := F(x + \mathbf{i}y + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))$。那么 F_ε 在 T_Ω上光滑。由命题 3.4 中的估计可得，

$$|F_\varepsilon(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))| \lesssim \frac{\|F\|_{H^1(T_\Omega)}}{|R(0, \boldsymbol{\varepsilon})|}, \quad \text{for} \quad (x, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m,$$

即， F_ε 在 T_Ω上有界，因此对任意 $p > 1$，它都属于 $H^p(T_\Omega)$。于是由定理 1.1，得到$F_\varepsilon(x + \mathbf{i}\pi(\mathbf{t})) = f_\varepsilon * P_{\mathbf{t}}$，其中 $f_\varepsilon(\cdot) = F(\cdot + \mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \in L^p(\mathbb{R}^n)$。应用推论 4.1 得到

$$\|S(f_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|N^\beta(f_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbb{N}^\beta(F_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbb{N}^\beta(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.3}$$

另一方面，根据定义，$\|S(f_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbb{S}(F_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^2(F_\varepsilon)(x) &= \int_{\Gamma(0)} |\nabla_{\mathfrak{m}}(F(x+x'+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t})+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^2 \frac{\mathbf{t}d\mathbf{t}dx'}{|R(0,\mathbf{t})|} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}(F(x+x'+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^2 \chi_{(0,\boldsymbol{\varepsilon})+\Gamma_\beta(x)}(x',\mathbf{t}) \frac{(t_1-\varepsilon)\cdots(t_m-\varepsilon)d\mathbf{t}dx'}{|R(0,\mathbf{t}-\boldsymbol{\varepsilon})|}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

给定 $\mathbf{t}$，设 l 为满足 $\{l_1,\dots,l_n\}$ 的数，使得 $t_{l_1},\dots,t_{l_n}$ 是 $\{t_1,\dots,t_m\}$ 中最大的 n 个数。那么，$(t_{l_1}-\varepsilon,\dots,t_{l_m}-\varepsilon)$ 也同样是 $\{t_1-\varepsilon,\dots,t_n-\varepsilon\}$ 中最大的 n 个数。因此，

$$\frac{(t_1-\varepsilon)\cdots(t_m-\varepsilon)}{|R(0,\mathbf{t}-\boldsymbol{\varepsilon})|} \to \frac{t_1\cdots t_m}{|R(0,\mathbf{t})|},$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，由命题 3.1 和 (3.5) 得。因此，

$$\mathbb{S}^2(F_\varepsilon)(x) \to \int_{\Gamma(0)} |\nabla_{\mathfrak{m}}(F(x+x'+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^2 \frac{\mathbf{t}d\mathbf{t}dx'}{|R(0,\mathbf{t})|} = \mathbb{S}^2(F)(x),$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理。在 (6.3) 中令 $\varepsilon\to 0$ 取极限，即得所需结果。

(3) 推出 (4)。

命题6.1。对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，有 $g(f)(x)\lesssim S(f)(x)$。特别地，若 F 在 T_Ω 上全纯，则 $\mathbb{G}(F)(x)\lesssim \mathbb{S}(F)(x)$。

证明。通过平移，只需证明 $x=0$ 的不等式。根据命题 2.1，$\triangle_\mu u(x,\mathbf{t})=0$ 对于 $u(x,\mathbf{t})=f_\varepsilon * P_{\mathbf{t}}$ 与 x，其中 $\varepsilon>0$，$f_\varepsilon = f*P_{\boldsymbol{\varepsilon}}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且为光滑函数。因此 $\triangle_\mu\nabla_\nu u(x,\mathbf{t})=0$，即 $\nabla_\nu u(x)$ 在由 e_μ 和 t_μ 张成的半平面内也是调和的。于是对于给定的 $\mathbf{t}\in(\mathbb{R}_+)^m$，我们得到

$$\nabla_{\mathfrak{m}}u(0,\mathbf{t}) = \frac{2^{2m}}{\pi^m\gamma_0^{2m}t_1^2\cdots t_m^2}\int_{D_1(\gamma_0t_1/2)\times\cdots\times D_m(\gamma_0t_m/2)} \nabla_{\mathfrak{m}}u\left(\sum_{j=1}^m s_j'e_j,\mathbf{t}'\right)d\mathbf{s}'d\mathbf{t}'. \tag{6.5}$$

通过反复使用调和函数的平均值公式，其中圆盘 $D_j(r):=\{(s_j',t_j');|s_j'|^2+|t_j'-t_j|^2\le r^2\}$。注意，当 $(s_j',t_j')\in D_j(\gamma_0t_j/2)$ 时，$t_j'/2\le t_j\le 2t_j'$。对 (6.5) 应用柯西 - 施瓦茨不等式，得到

$$\begin{aligned}g^2(f_\varepsilon)(0) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}u(0,\mathbf{t})|^2\mathbf{t}\,d\mathbf{t} \\ &\lesssim \int_{(\mathbb{R}_+)^m}\int_{D_1(\gamma_0t_1/2)\times\cdots\times D_m(\gamma_0t_m/2)} \left|\nabla_{\mathfrak{m}}u\left(\sum_{j=1}^m s_j'e_j,\mathbf{t}'\right)\right|^2 d\mathbf{s}'d\mathbf{t}'\frac{d\mathbf{t}}{t_1\cdots t_m} \\ &\lesssim \int_{(\mathbb{R}_+)^m}\int_{|s_1'|\le\gamma_0t_1'}\cdots\int_{|s_m'|\le\gamma_0t_m'} \left|\nabla_{\mathfrak{m}}u\left(\sum_{j=1}^m s_j'e_j,\mathbf{t}'\right)\right|^2 ds_m'\cdots ds_1'\,d\mathbf{t}' \\ &\lesssim \int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathfrak{m}}u(\cdot,\mathbf{t}')|^2 * \chi_{\gamma_0\mathbf{t}'}(0)\,\mathbf{t}'d\mathbf{t}' \\ &\lesssim \int_{(\mathbb{R}_+)^m}\int_{R(0,\mathbf{t}')} |\nabla_{\mathfrak{m}}u(x',\mathbf{t}')|^2dx'\frac{\mathbf{t}'d\mathbf{t}'}{|R(0,\mathbf{t}')|} \\ &= \int_{\Gamma(0)} |\nabla_{\mathfrak{m}}u(x',\mathbf{t}')|^2\frac{\mathbf{t}'d\mathbf{t}'dx'}{|R(0,\mathbf{t}')|} = S^2(f_\varepsilon)(0).\end{aligned}$$

利用命题 3.2。令 $\varepsilon \to 0$ 取极限即可得到结论。 □

(4) 推出 (1)。对于 $0 < \varepsilon < M$，令

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon M}(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t})) &:= \sum_{\mathfrak{j}} (-1)^{|\mathfrak{j}|} F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}+\mathbf{M}_{\mathfrak{j}})) \\ &= \int_{t_1+\varepsilon}^{t_1+M} \cdots \int_{t_m+\varepsilon}^{t_m+M} \partial_{t_1'} \cdots \partial_{t_m'}(F)(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}'))d\mathbf{t}', \end{aligned} \tag{6.6}$$

其中求和遍历 $\{1,2,\ldots,m\}$ 的子集 $\mathfrak{j}$，且

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{j}} = (M_1,\ldots,M_m), \qquad M_j = \begin{cases} M, & j \notin \mathfrak{j}, \\ \varepsilon, & j \in \mathfrak{j}. \end{cases}$$

将柯西-施瓦茨不等式应用于 (6.6)，得到

$$\begin{aligned} |F_{\varepsilon M}(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))| &\le \left(\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\int_{t_1+\varepsilon}^{t_1+M} \cdots \int_{t_m+\varepsilon}^{t_m+M} |\partial_{t_1'} \cdots \partial_{t_m'}(F)(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}'))|^2 \mathbf{t}' d\mathbf{t}'\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}} \mathbb{G}(F)(x) < \infty. \end{aligned}$$

因此，

$$\sup_{\mathbf{t}\in(\mathbb{R}_+)^m} \|F_{\varepsilon M}(\cdot+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \left(\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}} \|\mathbb{G}(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$$

即 $F_{\varepsilon M} \in H^1(T_\Omega)$。因此，与 (2) 推出 (3) 的情形一样，根据定义 (6.6)，$F_{\varepsilon M}(\cdot+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))$ 在 T_Ω 上光滑；由命题 3.4 中的估计，它在 T_Ω 上有界，因此属于 $H^2(T_\Omega)$。然后由命题 1.1，得到

$$F_{\varepsilon M}(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon})) = f_{\varepsilon M} * P_{\mathbf{t}}, \tag{6.7}$$

其中 $f_{\varepsilon M}(\cdot) = F_{\varepsilon M}(\cdot+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \in L^2(\mathbb{R}^n)$。此外，$\|g(f_{\varepsilon M})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathbb{G}(F_{\varepsilon M})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 由 (6.7) 可得，因此

$$\begin{aligned} g(f_{\varepsilon M})(x) &= \mathbb{G}(F_{\varepsilon M}(\cdot))(x+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon})) \\ &= \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathbf{m}}(F_{\varepsilon M}(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t})+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^2 \mathbf{t} d\mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\sum_{\mathfrak{j}} \int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathbf{m}}(F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}+\mathbf{M}_{\mathfrak{j}})+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))|^2 \mathbf{t} d\mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^m} |\nabla_{\mathbf{m}}(F(x+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}))|^2 \mathbf{t} d\mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \mathbb{G}(F)(x), \end{aligned} \tag{6.8}$$

根据 $F_{\varepsilon M}$ 的定义 (6.6)，并按 (6.4) 进行坐标变换。因此，由命题 5.5 可知，$f_{\varepsilon M} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f_{\varepsilon M}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbb{G}(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$。

另一方面，由推论 5.2 和 (6.7)，我们有

$$\|F_{\varepsilon M}(\cdot+\mathbf{i}\pi(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon}))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g(f_{\varepsilon M})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbb{G}(F)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

对任意 $\mathbf{t} \in (\mathbb{R}_+)^m$。由于对 $y \in \Omega$， $F(x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}y') \to 0$ as $|y'| \to +\infty$，根据假设，由定义 (6.6) 可得

$$F_{\varepsilon M}(x+\mathbf{i}y) \to (-1)^m F(x+\mathbf{i}y)$$

作为 $\varepsilon \to 0$ 和 $M \to +\infty$。因此我们得出

$$\|F(\cdot+\mathbf{i}y)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \liminf_{\substack{\varepsilon\to 0\\ M\to+\infty}} \|F_{\varepsilon M}(\cdot+\mathbf{i}y+\mathbf{i}\pi(\boldsymbol{\varepsilon}))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\mathbb{G}(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

由Fatou定　　理，其中隐常数与 $y \in \Omega$无关。这就完成了证明。

Appendix A. The Plancherel-Pólya type inequality for $\mathfrak{H}$-valued functions

例如，关于Plancherel-P´olya型不等式，见 [12, 17, 18, 19] 。对于 $\mathfrak{f} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)h_j$，根据定义，$\mathfrak{f}_k = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)h_j$ 在范数 $L^p(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$下收敛到 $\mathfrak{f}$，即 $\int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_k|_{\mathfrak{H}}^p\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\sum_{j=k+1}^{\infty} |f_j(x)|^2)^{\frac{p}{2}} dx \to 0$。由 $\mathbb{R}$ 上的小波Calder´on再生公式(5.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(x) =& \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_t * \rho_t * \mathfrak{f}(x) \frac{dt}{t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \varphi_t * \rho_t * \mathfrak{f}(x) \frac{dt}{t} \\ =& c_\alpha \sum_j \widetilde{\varphi}_j * \widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} (\varphi_t * \rho_t - \widetilde{\varphi}_j * \widetilde{\rho}_j) * \mathfrak{f}(x) \frac{dt}{t} := \mathcal{T}_\alpha \mathfrak{f}(x) + \mathcal{R}_\alpha \mathfrak{f}(x),\end{aligned}$$

对于 $\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$，其中

$$\widetilde{\varphi}_j := \frac{1}{c_\alpha} \int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}} \varphi_t \frac{dt}{t}. \tag{A.1}$$

现在将 $\mathbb{R}$ 分解为互不相交的二进区间 I，其中 $\ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}$，这里 N 是稍后固定的一个较大正整数。于是

$$\begin{aligned}T_\alpha \mathfrak{f}(x) :=& c_\alpha \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widetilde{\varphi}_j * \widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x) = c_\alpha \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_I \widetilde{\varphi}_j(x-x') \widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x') dx' \\ =& c_\alpha \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \ell(I) \left(\frac{1}{\ell(I)} \int_I \widetilde{\varphi}_j(x-x') dx' \right) \widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I) + \mathcal{R}'_{\alpha,N} \mathfrak{f}(x)\end{aligned}$$

其中 x_I 是 I中的任意一个固定点，并且

$$\mathcal{R}'_{\alpha,N} \mathfrak{f}(x) := c_\alpha \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_I \int_I \widetilde{\varphi}_j(x-x') \Big(\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x') - \widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I) \Big) dx'.$$

现在我们可以写成

$$\mathfrak{f}(x) = \mathcal{T}\mathfrak{f}(x) + \mathcal{R}_\alpha \mathfrak{f}(x) + R'_{\alpha,N} \mathfrak{f}(x), \qquad \text{where} \qquad \mathcal{T}\mathfrak{f}(x) = \sum_j \sum_I \mathfrak{f}_{j;I} \widetilde{\phi}_j(\cdot, x_I), \tag{A.2}$$

其中 $\mathfrak{f}_{j;I}$由 (5.4) 给出，且

$$\widetilde{\phi}_j(x, x_I) := \frac{1}{\ell(I)} \int_I \widetilde{\varphi}_j(x-x') dx' \frac{\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)}{|\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}} \in \mathcal{M}(\beta, \gamma, 2^{-\alpha j}, x_I; \mathfrak{H}). \tag{A.3}$$

~这里我们取 $\phi_j(\cdot, x_I) \equiv 0$当 $|\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}} = 0$。由于 φ是紧支撑且光滑的，很容易~看出，根据标量情形， $\phi_j(\cdot, x_I)$ 在 $\mathcal{M}(\beta, \gamma, 2^{-\alpha j}, x_I;\ \mathfrak{H})$ 中的范数一致有界。为了求 $\mathcal{T}$ 的逆，我们现在需要证明 $\mathcal{R}'_{\alpha,N}$ 和 $\mathcal{R}_\alpha$ 在 $M(\beta, \gamma, r, x;\ \mathfrak{H})$ 上有界且范数较小。这里 $\mathcal{R}'_{\alpha,N}$的核为

$$\mathcal{R}'_{\alpha,N}(x,u) = c_\alpha \sum_j \sum_I \int_I \widetilde{\varphi}_j(x-x') \left[\widetilde{\rho}_j(x'-u) - \widetilde{\rho}_j(x_I-u)\right] dx'. \tag{A.4}$$

设 T 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子，它与定义在 $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\ x \neq y\}$ 上的标量核 $K(x,y)$ 相关，最初由 $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$ 或 $x \in$supp $f$for $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 给出，其中 $K(x,y)$ 满足以下条件：存在常数 $C>0$，使得对所有 $x \neq y$,
(i) $|K(x,\ y)| \leq C|x-y|^{-1}$
；(ii) $|K(x,y) - K(x',y)| \leq C|x-x'||x-y|^{-2}$，若 $|x-x'| \leq |x-y|/2$；(iii) $|K(x,y) - K(x,y')| \leq C|y-y'||x-y|^{-2}$，若 $|y-y'| \leq |x-y|/2$；(iv) $|K(x,y) - K(x',y) - K(x,y') + K(x',y')| \leq C|x-x'||y-y'||x-y|^{-3}$，若 $|x-x'|, |y-y'| \leq |x-y|/2$；(v) $T(1) = T^*(1) = 0$。

我们将满足上述 (i)-(iv) 的最小常数记为 $\|K\|_{\mathbb{R}}$。T 的算子范数定义为 $\|T\|_* := \|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} + \|K\|_{\mathbb{R}}$。已知当 $C \to 0$ 时，$\|T\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} \to 0$。

命题 A.1。设 T 是如上所述的算子。则对于 $\beta, \gamma \in (0,\ 1)$ $r>0$ 以及 $x_0 \in \mathbb{R}$，T 在测试函数空间 $M(\beta, \gamma, r, x_0;\ \mathfrak{H})$ 上有界。此外，存在一个与 β, γ, r, x_0 无关的常数 C，使得

$$\|T(f)\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})} \leq C\|T\|_*\|f\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})}.$$

证明。对于标量情形，这就是 [19, 引理 2.9]，，即该定理对 $M(\beta, \gamma, r, x_0)$ 成立。对于 $\mathfrak{H}$-值函数 $\mathfrak{f} = \sum_{j=1}^\infty f_j(x)h_j \in M(\beta, \gamma, r, x_0;\ \mathfrak{H})$，根据定义，对于每个 i，必须有 $f_i \in M(\beta, \gamma, r, x_0)$，以及 $\|\mathfrak{f}\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})} = (\sum_i \|f_i\|^2_{M(\beta,\gamma,r,x_0)})^{\frac{1}{2}}$。由于 $T\mathfrak{f} = \sum_{j=1}^\infty Tf_jh_j$，我们看到

$$\begin{aligned}
\|T(\mathfrak{f})\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})} &= \left(\sum_i \|T(f_i)\|^2_{M(\beta,\gamma,r,x_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|T\|_* \left(\sum_i \|f_i\|^2_{M(\beta,\gamma,r,x_0)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\|T\|_*\, \|\mathfrak{f}\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})}.
\end{aligned}$$

结论随即得证。 □

命题 *5.1* 的证明。注意到，由大小与光滑性条件，对于 $x' \in I$, $\widetilde{\rho}_j(x'-u) - \widetilde{\rho}_j(x_I-u) \sim 2^{-\alpha N}\widetilde{\rho}_j(x'-u)$，我们得到

$$R'_{\alpha,N}(x,u) \sim 2^{-\alpha N} \sum_j \widetilde{\varphi}_j * \widetilde{\rho}_j(x-u) \tag{A.5}$$

根据定义 (A.4)，其中 $\sim$ 表示关于$R'_{\alpha,\ N}(x,\ u)$的大小与光滑性条件的等价关系。容易验证，核 $R'_{\alpha,\ N}(x,\ u)$ 满足条件 (i)-(iv) 以及消去条件，例如，若对于某个 $l \in \mathbb{Z}$，$|s| \approx 2^{-\alpha l}$，则

$$\sum_j |\widetilde{\varphi}_j * \widetilde{\rho}_j|(s) \lesssim \sum_j \frac{2^{-\alpha j\gamma}}{(2^{-\alpha j} + |s|)^{1+\gamma}} \leq \sum_{j>l} \frac{2^{-\alpha j\gamma}}{|s|^{1+\gamma}} + \sum_{j\leq l} 2^{\alpha j} \approx \frac{2^{-\alpha l\gamma}}{|s|^{1+\gamma}} + 2^{\alpha l} \approx \frac{1}{|s|}.$$

类似地，$\mathcal{R}_\alpha$ 具有 t 与 (A.5) 类似的表达式，其中以 α 代替 $2^{-\alpha N}$，并满足相同的条件。

因此，应用命题 A.1，我们得到

$$\|\mathcal{R}_\alpha\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})} \lesssim \alpha \le \frac{1}{3}, \tag{A.6}$$

只要我们选取 α 足够小，然后

$$\|R'_{\alpha,N}\|_{M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})} \lesssim 2^{-\alpha N} \le \frac{1}{3}, \tag{A.7}$$

如果我们选取 N 足够大。因此，$\mathcal{T} = id - R'_{\alpha,N} - \mathcal{R}_\alpha$ 可逆，且其逆 $\mathcal{T}^{-1}\widetilde{\ }$在 $M(\beta,\gamma,r,x_0;\mathfrak{H})$ 上也有界，其界与 r, x_0 无关。因此，对于由 (A.3) 给出的 $\phi_j(\cdot,x_I)\widetilde{\ }$，$\mathcal{T}^{-1}(\phi_j(\cdot,x_I))$ 也属于 $M(\beta,\gamma,2^{-\alpha j},x_I;\mathfrak{H})$。将其记为 $\phi_j(x,x_I)$。此外，$\mathcal{T}$ 可逆，且其逆 $\mathcal{T}^{-1}$ 在 $L^2(\mathbb{R},\mathfrak{H})$ 上也有界。然后将 $\mathcal{T}^{-1}$ 应用于 (A.2)，得到

$$\mathfrak{f}(x) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\mathfrak{f} = \sum_j \sum_I c_\alpha |I| |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}} \widetilde{\phi}_j(x,x_I). \tag{A.8}$$

由命题 A.1，$\|\phi_j(\cdot,\ x_I)\|_{M(\beta,\gamma,2^{-\alpha j},x_I;\ \mathfrak{H})}$ </style}一致有界。 □

命题 *5.2* 的证明。 将小波 Calder´on 再生公式 (5.3) 与 ψ_t 卷积，得到

$$\psi_t * \mathfrak{f}(x) = \sum_j \sum_I \mathfrak{f}_{j;I} \psi_t * \widetilde{\phi}_j(\cdot,x_I)(x). \tag{A.9}$$

但是，对于 $2^{-\alpha k} \le t < 2^{-\alpha(k-1)}$，我们有如下关于 $\widetilde{\phi}_j(\cdot,x_I)$ 和 ψ_t 的几乎正交估计（参见 [21, 引理 6]），

$$\left|\psi_t * \widetilde{\phi}_j(\cdot,x_I)(x)\right|_{\mathfrak{H}} \le C 2^{-\alpha|k-j|\beta} \frac{2^{-\alpha(j\wedge k)\gamma}}{(2^{-\alpha(j\wedge k)} + |x-x_I|)^{1+\gamma}}. \tag{A.10}$$

令 $\mathfrak{T}_0 := \left\{I; \ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}, \frac{|x-x_I|}{2^{-\alpha(j\wedge k)}} \le 1\right\}$，对于 $l \in \mathbb{N}$，令

$$\mathfrak{T}_l := \left\{I; \ell(I) = 2^{-\alpha(j+N)}, 2^{\alpha(l-1)} \le \frac{|x-x_I|}{2^{-\alpha(j\wedge k)}} \le 2^{\alpha l}\right\}. \tag{A.11}$$

那么，$\bigcup_{I\in T_l} I$ 包含在以 x 为中心、长度为 $\left|\bigcup_{I\in\mathfrak{T}_l} I\right| \lesssim 2^{-\alpha(j\wedge k)} 2^{\alpha l}$. 的区间 $\widetilde{I}$ 中。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell(I)=2^{-\alpha(j+N)}} \frac{2^{-\alpha(j\wedge k)\gamma}}{(2^{-\alpha(j\wedge k)} + |x-x_I|)^{1+\gamma}} c_\alpha \ell(I) |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}} \\
&\lesssim \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\alpha l(1+\gamma)} 2^{\alpha(j\wedge k - j)} \sum_{I\in\mathfrak{T}_l} |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}} \\
&\lesssim \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\alpha l(1+\gamma)} 2^{\alpha(j\wedge k - j)} \left(\sum_{I\in\mathfrak{T}_l} |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\alpha l(1+\gamma)} 2^{\alpha(j\wedge k - j)} \left(\frac{1}{\ell(I)} \int_{\mathbb{R}} \sum_{I\in\mathfrak{T}_l} |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}^r \chi_I\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\alpha l(1+\gamma-\frac{1}{r})} 2^{\alpha(j\wedge k - j)\left(1-\frac{1}{r}\right)} \left\{M\left(\sum_{\ell(I)=2^{-\alpha(j+N)}} |\widetilde{\rho}_j * \mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}^r \chi_I\right)(x^*)\right\}^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

对于任意 $|x^*-x|\le 2C_0 2^{-\alpha(k+N)}$ 和 $0<r<1$。在最后一个不等式中，我们将积分替换为区间 $C_0 I$ 上的~平均值，然后再替换为极大函数。上述隐含常数取决于 α， N， C_0。

注意，若选择 $1>r>\frac{1}{1+\gamma}$，则 (A.12) 中关于 l 的求和收敛。将 (A.10) 和 (A.12) 代入 (A.9)，对于给定的二进区间 J，满足 $\ell(J)=2^{-\alpha(k+N)}$，可得，

$$\sup_{v\in C_0J}|\psi_t*\mathfrak{f}(v)|_{\mathfrak{H}}\chi_J(u)\lesssim\sum_j 2^{-\alpha|k-j|\beta}2^{\alpha(j\wedge k-j)\left(1-\frac{1}{r}\right)}\left\{M\left(\sum_{\ell(I)=2^{-\alpha(j+N)}}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x_I)|_{\mathfrak{H}}^r\chi_I\right)(u)\right\}^{\frac{1}{r}}\chi_J(u)$$

对任意 $u\in J$均成立。仿照离散杨不等式证明中的做法应用 H¨older 不等式$\|a*b\|_{l^2(\mathbb{Z})}\le\|a\|_{l^1(\mathbb{Z})}\|b\|_{l^2(\mathbb{Z})}$，并利用

$$\sum_k 2^{-\alpha|k-j|\beta}2^{\alpha(j\wedge k-j)\left(1-\frac{1}{r}\right)}<C<\infty$$

对于某个与 j无关的 $C>0$，我们得到

$$\sum_k\sum_J\int_{2^{-\alpha k}}^{2^{-\alpha(k-1)}}\sup_{v\in C_0J}|\psi_t*\mathfrak{f}(v)|_{\mathfrak{H}}^2\chi_J(u)\frac{dt}{t}\lesssim\sum_j\left\{M\left(\sum_I\inf_{x\in I}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^r\chi_I\right)(u)\right\}^{\frac{2}{r}},$$

其中，求和分别取遍满足 $\ell(J)=2^{-\alpha(k+N)}$ 和 $\ell(I)=2^{-\alpha(j+N)}$的二进区间 J 和 I。于是

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_k\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-\alpha k}}^{2^{-\alpha(k-1)}}\sup_{v\in C_0J}|\psi_t*\mathfrak{f}(v)|_{\mathfrak{H}}^2\chi_J\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}\right\|_{L^1}&\lesssim\left\|\left(\sum_j\left\{M\left(\sum_I\inf_{x\in I}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^r\chi_I\right)\right\}^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{2}}\right\|_{L^{\frac1r}}^{\frac1r}\\&\lesssim\left\|\left(\sum_j\sum_I\inf_{x\in I}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^2\chi_I\right)^{\frac{r}{2}}\right\|_{L^{\frac1r}}^{\frac1r}\\&=\left\|\left(\sum_j\sum_I\inf_{x\in I}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^2\chi_I\right)^{\frac12}\right\|_{L^1}\end{aligned}$$

根据 Fefferman-Stein 向量值极大函数不等式 [15]，当 $1/r>1$时。我们通过

$$\begin{aligned}\inf_{x\in I}|\widetilde{\rho}_j*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^2&=\frac{1}{c_\alpha^2}\inf_{x\in I}\left|\int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}}\rho_t*\mathfrak{f}(x)\frac{dt}{t}\right|_{\mathfrak{H}}^2\le\frac{1}{c_\alpha^2}\inf_{x\in I}\left\{\int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}}|\rho_t*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}\frac{dt}{t}\right\}^2\\&\le\frac{1}{c_\alpha}\inf_{x\in I}\int_{2^{-\alpha j}}^{2^{-\alpha(j-1)}}|\rho_t*\mathfrak{f}(x)|_{\mathfrak{H}}^2\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

使用闵可夫斯基不等式和柯西-施瓦茨不等式。 □

References

[1] Békollé, D. and Sehba, B.，关于对称锥上管状域的 Hilbert-Hardy 空间的若干 Carleson 测度， *Eur. J. Math.*. **5** (2019)，585-610。

[2] Calzi, M. and Peloso, M.，齐性Siegel域上的全纯函数空间， *Diss. Math.* **563** (2021)，1-168。[3] Chang, D.-C., Han, Y. S. and Wu, X. 与双旗核相关的Hardy空间， *Math. Res. Lett.* **32**(2025)，81-134。[4] Chang, S.-Y. and Fefferman, R.，乘积域上的傅里叶分析与 H^p理论近期发展，*Bull. Amer. Math. Soc.* **12**(1985)，1-43。[5] Chen, P., Cowling, M., Lee, M.-Y., Li, J., and Ottazzi, A.，Heisenberg 群上的旗型Hardy空间理论及其应用，arXiv:2102.07371v3。[6] Chen, P., Duong, X. T., Li, J., Ward, L. and Yan, L.，齐性型空间上与具有热核界的算子相关的乘积Hardy空间， *Math. Z.* **282** (2016)，1033-1065。[7] Cowling, M., Fan, Z., Li, J. and Yan, L.，通过奇异积分和极大函数刻画分层群上的乘积Hardy空间，载于 *The mathematical heritage of Guido Weiss*，Hern´andez、E.等编，Birkh¨user，（2025），193-227。[8] Duong, X., Li, J., Wick, B. D. and Yang, Do.，Bessel情形下乘积Hardy空间的刻画， *J. Fourier Anal. Appl.* **27** (2021)，第2期，论文编号24。[9] Fefferman, R. and Stein, E.M.，乘积空间上的奇异积分， *Adv. Math.* **45**(1982)，117-143。[10] Fefferman, C. and Stein, E. M., H^p 多变量空间， *Acta Math.* **129** (1972)，137-193。[11] Folland, G. and Stein, E. M., *Hardy spaces on homogeneous groups*，数学笔记28，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982。[12] Frazier, M. and Jawerth, B.，广义函数空间的离散变换与分解， *J. Funct. Anal.* **93** (1990)，第1期，34-170。[13] Geller, D.，Heisenberg群上的 H^p 理论的一些结果， *Duke Math. J.* **47** (1980)，365-390。[14] Grafakos, L., Liu L., Yang D.，RD空间上Hardy空间的极大函数刻画及其应用， *Sci. China Ser. A* **51**(2008)，2253-2284。[15] Grafakos, L., *Fundamentals of Fourier analysis*，数学研究生教材302，施普林格出版社，柏林，2024。[16] Gundy, R. and Stein, E. M., H^p 多圆盘上的理论， *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **76** (1979)，1026-1029。[17] Han, Y. S.，Calder´on型再生公式与 T_b 定理， *Rev. Mat. Iberoam.* **10** (1994)，51-91。[18] Han, Y. S.，齐性型空间上的Plancherel-P´olya型不等式及其应用， *Proc. Amer. Math.Soc.* **126** (1998)，第11期，3315-3327。[19] Han, Y. S., Lee, M. Y., Li, J. and Wick, B. D.，多参数旗结构中的极大函数、Littlewood-Paley理论、Riesz变换与原子分解， *Mem. Amer. Math. Soc.* **279**(2023)，第1373号，106页。[20] Han, Y. S., Lee, M. Y., Li, J. and Wick, B. D.，多参数旗结构中Calder´o-Zygmund算子的端点估计， *Adv. Math.* **482** (2025)，文章编号110629。[21] Han, Y. S., Lu, G. and Sawyer, E.，Heisenberg群上的旗型Hardy空间与Marcinkiewicz乘子，*Analysis PDE* **7**(2014)，1465-1534。[22] He, S, and Chen, J.，与两个旗型奇异积分之和相关的三参数Hardy空间的对偶性，*Front. Math.* **18** (2023)，第4期，837-862。[23] Journé, J.-L.，乘积空间的覆盖引理， *Proc. Amer. Math. Soc.* **96**(1986)，593-598。[24] Korányi, A.，对称空间上泊松积分的边界行为， *Trans. Am. Math. Soc.* **140** (1969)，393-409。[25] Krantz, S. and Li, S.-Y.， $\mathbb{C}^n$域上Hardy空间中函数的面积积分刻画， *ComplexVar. Theory Appl.* **32** (1997)，373-399。[26] Lacey, M. T., Petermichl, S. Pipher, J. and Wick, B. D.，多参数Div-Curl引理， *Bull. Lond. Math.Soc.* **44** (2012)，1123-1131。[27] Li, J.，关于Shilov边界上的Fefferman-Stein型不等式及其应用，即将发表于 *Ann. Sc. Norm. Super.Pisa*。[28] Malliavin, M.-P. and Malliavin, P.，双调和函数的Lusin-Calder´on积分， *Bull. Sci. Math.*101 (1977)，357-384。[29] Merryfield, K.，关于多圆盘上的面积积分、Carleson 测度与 H^p ， *Indiana Univ. Math. J.* **34**，（1985），663-685。[30] Müller, D. Ricci, F. and Stein, E. M.，Heisenberg（-型）群上的Marcinkiewicz乘子与多参数结构 I， *Invent. Math.* **119** (1995)，199-233。[31] Nagel, A., Ricci, F. and Stein E. M.，具有旗型核的奇异积分与二次CR流形上的分析，*J. Funct. Anal.* **181** (2001)，29-118。

[32] Pipher, J., Journ´e 的覆盖引理及其向高维的推广， *Duke Math. J.* **53**(1986), 683-690.[33] Sato, S., 上半空间乘积上的 H^p 理论中的 Lusin函数和非切向极大函数，*Tohoku Math. J.* **37** (1985), 1-13.[34] Sjögren, P., 对称空间中泊松积分的容许收敛， *Ann. of Math.* **124**(1986), 313-335.[35] Stout, E., H^p-函数在严格伪凸域上， *Amer. J. Math.* **98** (1976), 821-852.
[36] Stein, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*，普林斯顿数学丛书第30卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970年。[37] Stein, E. M., 对称空间上调和函数的边界行为：泊松积分的极大估计，
Invent. Math. **74**(1983), 63-83.[38] Stein, E. M., 奇异积分：Calder´on 和 Zygmund 的作用， *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998), 1130-1140.[39] Stein, E. M. and Weiss, G., 多变量调和函数理论， *Acta Math.* **103** (1960), 25-62.[40] Stein, E. M. and Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*，普林斯顿数学丛书第32卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1971年。[41] Wang, W. and Wu, Q. Y.，乘积 Siegel 上半空间上的 Hardy空间及双参数Hardy空间的原子分解定理， *J. Geom. Anal.* **33** (2023), 第11期，论文编号351。[42] Wang, W. and Wu, Q. Y.，二步幂零 Lie 群上一类旗型奇异积分及相关 Hardy空间， *J. Geom. Anal.* **34** (2024), 第12期，论文编号373。[43] Yang, D. and Zhou, Y.，RD空间上 Hardy空间的径向极大函数刻画及其应用， *Math. Ann.* **346** (2010), 第2期，307-333。