arXiv:2603.16135v1 [math.SP] 17 Mar 2026

关于欧几里得凸区域上拉普拉斯算子诺伊曼特征值分布的一则说明

KEI FUNANO

Abstract. 我们为欧几里得凸区域上拉普拉斯算子的诺伊曼特征值建立了两个普适不等式。

1. Introduction

本文主要研究欧几里得空间中有界区域上拉普拉斯算子特征值的普适不等式。对于狄利克雷特征值，Payne、P´olya 和 Weinberger [14] 开创了普适不等式的研究。自他们的开创性工作以来，狄利克雷情形下已建立了大量普适不等式（参见 [1]）。这类狄利克雷普适不等式的一个显著特点是，它们适用于任意区域，而无需满足任何特定的几何条件。

相比之下，诺伊曼特征值的情形则截然不同。Colin de Verdi`ere [4] 的一项著名结果表明，对于任意给定的有限递增非负数列，都存在一个区域，使其初始诺伊曼特征值恰好与该数列一致。因此，若不对区域施加几何限制，就不能指望诺伊曼特征值存在任何一般性的普适不等式。

对于 $\mathbb{R}^n$ 中边界足够规整的有界区域 Ω（例如具有 Lipschitz 边界的区域），我们将其拉普拉斯算子的诺伊曼特征值按非递减顺序排列（按重数重复），记为

$$0 = \mu_0(\Omega) < \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq \cdots \leq \mu_k(\Omega) \leq \mu_{k+1}(\Omega) \leq \cdots \to \infty.$$

本文的主定理如下。

定理 1.1。 存在一个通用数值常数 $c > 0$，满足以下条件。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$中的有界凸域。则

日期：2026年3月18日。2010 数学主题分类。35P15, 53C23, 58J50。关键词。拉普拉斯算子的特征值；诺伊曼边界条件；普适不等式；区域单调性；凸区域。

对于任意 $k \geq l$，我们有

$$\frac{1}{cn^{10}}\Big(\frac{k}{l}\Big)^{\frac{2}{n}}\mu_l(\Omega) \leq \mu_k(\Omega) \leq cn^{10}\Big(\frac{k}{l}\Big)^{2}\mu_l(\Omega).$$

下面介绍特征值之间相关的已知不等式。以下 c_1，c_2，$\cdots$表示具体的普适常数。在 [7,定理 1.1 和备注 1.1] 中，基于 Milman（[13]）和 Cheng-Li（[3]）的定理，作者证明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意有界凸域 Ω，不等式 $\mu_k(\Omega) \geq c_1 k^{\frac{2}{n}}\mu_1(\Omega)$成立，并且除一个乘法普适常数因子外，该不等式是尖锐的。上述定理中的第一个不等式推广了这一不等式，但该不等式中出现了维数常数 n^{10}。在 [12, 定理 1.1], 中，Liu 对于 $\mathbb{R}^n$中的任意有界凸域 Ω，证明了尖锐的无维数普适不等式 $\mu_k(\Omega) \leq c_2 k^2 \mu_1(\Omega)$。在 [6, 定理 1.2] 中，作者证明了

$$\mu_{k+1}(\Omega) \leq c_3 n^4 \mu_k(\Omega) \tag{1.1}$$

在与 Liu 的情形相同的条件下。上述定理中的第二个不等式统一了 Liu 不等式和不等式（1.1），但其中包含维数常数 n^{10}，该常数甚至大于（1.1）中出现的 n^4。

在 [8, 定理 1.1 和 1.2] 中，作者证明了平面凸区域的定理 1.1。定理 1.1 的证明大体沿用了论文中的证明。首先，我们利用区域单调性和标准凸几何，将问题化归为正交多面体的情形。其次，我们为该正交多面体构造一个“良好”的凸分割，从而用各部分的第一特征值给出该正交多面体诺伊曼特征值的下界。在 [8] 中，我们只在平面情形下构造了这样的分割；本文则通过归纳构造分割，将结果推广至更高维，见引理 3.1 和 3.2。

2. Preliminaries

本节汇集若干将在主要定理证明中用到的结果。

我们使用以下关键命题。Hatcher 指出，有界凸区域在某种意义下可以用正交多面体逼近。这是约翰定理的推论；该定理断言，有界凸区域可以用椭球逼近（[10, 定理 III]）。

命题 2.1 ([9, 命题 2.3])。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸域。必要时适当选取坐标轴，

我们可以找到一列正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$\Big[-\frac{a_1}{\sqrt{n}}, \frac{a_1}{\sqrt{n}}\Big] \times \cdots \times \Big[-\frac{a_n}{\sqrt{n}}, \frac{a_n}{\sqrt{n}}\Big] \subseteq \Omega \subseteq [-a_1 n, a_1 n] \times \cdots [-a_n n, a_n n].$$

上述命题与下一个定理表明，主定理的证明可归结为区域为正交多面体的情形。下一个定理指出，在凸性假设下，较小区域的特征值更大，差一个乘法常数因子。

定理 2.2 ([5, 定理 1。1])。 存在一个普适常数 $c > 0$ 满足以下条件。对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个有界凸区域 $\Omega \subseteq \Omega'$，它们的拉普拉斯算子的诺伊曼特征值满足

$$\mu_k(\Omega') \leq c n^2 \mu_k(\Omega).$$

常数 c 可取为 $c = (92)^2$。

在凸性假设下，拉普拉斯算子的诺伊曼特征值与直径的关系如下：

定理 2.3 (Payne–Weinberger, [15, (1.9)])。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界凸区域。则有 $\mu_1(\Omega) \geq \frac{\pi^2}{(\mathrm{Diam}\Omega)^2}$。

我们还使用以下以体积表示的诺伊曼特征值上界。

定理 2.4 (Kr¨oger, [11, 推论 2])。 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界区域（不一定是凸区域），其边界为 *Lipschitz* 边界。那么对于任意自然数 k，有

$$\mu_k(\Omega) \leq (2\pi)^2 \Big(\frac{n+2}{2}\Big)^{\frac{2}{n}} \Big(\frac{k}{\omega_n \operatorname{vol}\Omega}\Big)^{\frac{2}{n}} \lesssim \Big(\frac{k}{\omega_n \operatorname{vol}\Omega}\Big)^{\frac{2}{n}},$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

设 Ω 是欧几里得空间中的一个有界区域，且 $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$ 是 Ω 的一个由子区域构成的有限划分；$\Omega = \bigcup_i \Omega_i$，并且对于不同的 $i \neq j$，有 $\mathrm{vol}(\Omega_i \cap \Omega j) = 0$。Buser 给出了拉普拉斯算子的特征值下界，该下界以有限划分各部分的第一特征值表示：

定理 2.5 (Buser, [2, 定理 8.2。1])。 在上述情形下，我们有

$$\mu_k(\Omega) \geq \min_i \mu_1(\Omega_i).$$

3. Proof of the Main Theorem

本节将证明主定理。以下两个引理是证明该定理的关键。

引理 3.1. 存在一个通用数值常数 $c>0$，使得以下结论成立。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意正交多面体 Ω 以及任意 $k\geq l$，存在一个凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$，将 Ω 分割为若干部分，使得 $l'\leq l$ 并且

$$\operatorname{Diam}\Omega_i\leq cn^{\frac{3}{2}}\frac{k}{l\sqrt{\mu_k(\Omega)}}.$$

引理 3.2. 存在一个通用数值常数 $c>0$，使得以下结论成立。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意正交多面体 Ω 以及任意 $k\geq l$，存在一个凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{k'}$，将 Ω 分割为若干部分，使得 $k'\leq k$ 并且

$$\operatorname{Diam}\Omega_i\leq cn^{\frac{3}{2}}\left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{\mu_l(\Omega)}}.$$

定理 *1.1* 的证明。 由命题 2.1，存在一个正交多面体 R，选择坐标轴后，我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}R\subseteq\Omega\subseteq nR.$$

由引理 3.1，存在一个凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$，将 R 分割为若干部分，使得 $l'\leq l$ 并且

$$\operatorname{Diam}\Omega_i\leq cn^{\frac{3}{2}}\frac{k}{l\sqrt{\mu_k(R)}}\ \text{ for all } i.$$

因此，Buser定理（定理 2.5）和 Payne-Weinberger不等式（定理 2.3）表明

$$\mu_l(R)\geq\mu_{l'}(R)\geq\min_i\mu_1(\Omega_i)\geq\min_i\frac{\pi^2}{(\operatorname{Diam}\Omega_i)^2}\geq\frac{l^2\mu_k(R)}{c^2n^3k^2}.$$

根据定理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}\mu_l(\Omega)\geq\frac{\mu_l(nR)}{(92n)^2}=\frac{\mu_l(R)}{(92)^2n^4}\geq\frac{l^2\mu_k(R)}{(92)^2c^2n^7k^2}&=\frac{l^2\mu_k(\frac{1}{\sqrt{n}}R)}{(92)^2c^2n^8k^2}\\&\geq\frac{l^2\mu_k(\Omega)}{(92)^4c^2n^{10}k^2},\end{aligned}$$

由此可得定理 1.1 的第二个不等式。同理，利用引理 3.2 可得该定理的第一个不等式。定理得证。

□

引理 *3.1* 的证明。取一个普适常数 $C>0$，使得

$$C \geq \left((2\pi)^n \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_n)^2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sim \text{ const.}$$

对任意 $n \geq 2$。另取一个普适常数 $c>0$，使得

$$c \geq 4C \text{ and } c > \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \text{ for any } n \geq 2.$$

对于这样的 c，我们用关于 n 的归纳法证明该引理。$n=1$ 的情形是显然的。

假设该引理的结论对 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的任意正交多面体 Ω 均成立，也就是说，假设对于这样的 Ω，总能找到 Ω 的一个凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$，使得 $l' \leq l$ 且 $\operatorname{Diam}\Omega_i \leq c(n-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt[k]{\mu_k(\Omega)}$。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个正交多面体。适当选择坐标轴后，我们可以假设 $\Omega = [-a_1,a_1]\times[-a_2,a_2]\times\cdots\times[-a_n,a_n]$ 且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。

令 $r := \frac{Cnk}{l\sqrt[k]{\mu_k(\Omega)}}$。我们先考虑 $a_1 \leq 2r$ 的情形。设 $\Omega' := [-a_2,a_2]\times[-a_3,a_3]\times\cdots\times[-a_n,a_n]$。根据归纳法的假设，存在 Ω' 的一个凸分割 $\{\Omega'_i\}_{i=1}^{l'}$，使得 $l' \leq l$ 且 $\operatorname{Diam}\Omega'_i \leq c(n-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt[k]{\mu_k(\Omega')}$。注意，$\mu_k(\Omega) \leq \mu_k(\Omega')$（这由正交多面体特征值的具体表达式可得）。因此我们得到 $\operatorname{Diam}\Omega'_i \leq c(n-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt[k]{\mu_k(\Omega)}$。令 $\Omega_i := [-a_1,a_1]\times\Omega'_i$，我们看到 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$ 覆盖 Ω。我们还有

$$\operatorname{Diam}\Omega_i \leq \sqrt{4^2C^2n^2 + c^2(n-1)^3}\frac{k}{l\sqrt{\mu_k(\Omega)}} \leq cn^{\frac{3}{2}}\frac{k}{l\sqrt{\mu_k(\Omega)}},$$

其中第二个不等式由我们对常数 c 和 C 的选择得出。因此，$\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$ 是 Ω 的一个所需凸分割。

考虑 $a_1 > 2r$ 的情形。在这种情况下，我们令

$$\widetilde{\Omega} := \{x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) \geq r\},$$

其中

$$d(x,\partial\widetilde{\Omega}) := \inf\{|x-y| \mid y \in \partial\widetilde{\Omega}\}.$$

注意，$\widetilde{\Omega}$ 是一个非空（未塌缩的）正交多面体。设 $\{x_i\}_{i=1}^{l'}$ 是 $\widetilde{\Omega}$ 中一组极大的（$2r$）-分离点。由于 $\{B(x_i,\ r)\}_{i=1}^{l'}$ 是 Ω 中不相交球，因此我们有

$$\frac{l'\omega_n(Cnk)^n}{l^n\mu_k(\Omega)^{\frac{n}{2}}} = l'\omega_n r^n = \sum_{i=1}^{l'} \operatorname{vol} B(x_i,r) \leq \operatorname{vol}\Omega.$$

将定理 2.4 应用于上述不等式，我们得到

$$l' \leq (2\pi)^n \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_n)^2} \cdot \frac{l^{n-1}}{C^n n^n k^{n-1}} \cdot l \leq \frac{l^{n-1}}{k^{n-1}} \cdot l \leq l,$$

其中第二个不等式由我们对 C 的选择得出，而 $k \geq l$蕴含了最后一个不等式。

这些点的极大性给出 $\{x_i\}_{i=1}^{l'}$ $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{l'} B(x_i, 2r)$。另请注意，$\Omega$ 的 $\sqrt{n}r$-邻域覆盖 Ω（注意，Ω 的 r-邻域并不覆盖 Ω）。因此我们有 $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{l'} B(x_i, (2+\sqrt{n})r)$。因此，若引入沃罗诺伊单元

$$\Omega_i := \{x \in \Omega \mid |x - x_i| \leq |x - x_j| \text{ for all } j \neq i\},$$

则 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$ 是 Ω 的凸分割。由于 $\Omega_i \subseteq B(x_i, (2+\sqrt{n})r)$，我们对 c的选择蕴含

$$\operatorname{Diam} \Omega_i \leq 2(2+\sqrt{n})r \leq cn^{\frac{3}{2}} \frac{k}{l\sqrt{\mu_k(\Omega)}}.$$

因此，我们得到了所需的 Ω 的凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{l'}$。证明完毕。□

尽管上述证明中的相同方法也适用于引理 3.2 的证明，为使本文完整起见，我们仍给出证明。

引理 *3.2* 的证明。我们取常数 $c, C > 0$，如引理 3.1 的证明中所述，也就是说，$C > 0$ 是一个满足以下条件的常数:

$$C \geq \left((2\pi)^n \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_n)^2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

对于任意 $n \geq 2$，$c > 0$ 是一个满足以下条件的常数:

$$c \geq 4C \text{ and } c > \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \text{ for any } n \geq 2.$$

对于常数 $c > 0$，我们通过对 n 使用归纳法来证明该引理。$n = 1$ 的情形显然。

假设该引理的结论对 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的任意正交多面体 Ω 都成立，也就是说，假设对于这样的 Ω，我们总能找到 Ω 的一个凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{k'}$，使得 $k' \leq k$ 且 $\operatorname{Diam} \Omega_i \leq c(n-1)^{\frac{3}{2}} \binom{l}{k}^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\mu_l}^{-1}(\Omega)$。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个正交多面体。我们可以假设 $\Omega = [-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$ 且 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$。

令 $r := Cn\binom{l}{k}^{-\frac{1}{n}} \sqrt{\mu_l}^{-1}(\Omega)$。证明 Ω 存在所需凸分割的过程分为两种情况。第一种情况是

当 $a_1 \le 2r$ 时的情况。令 $\Omega' := [-a_2, a_2] \times [-a_3, a_3] \times \cdots \times [-a_n, a_n]$。根据归纳法的假设，存在 Ω' 的一个凸分割 $\{\Omega'_i\}_{i=1}^{k'}$，使得 $k' \le k$ 且 $\operatorname{Diam} \Omega'_i \le c(n-1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{\mu_l(\Omega')}}$。由于 $\mu_l(\Omega') \ge \mu_l(\Omega)$ 且 $k \ge l$，我们得到 $\operatorname{Diam} \Omega'_i \le c(n-1)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_l(\Omega)}}$。令 $\Omega_i := [-a_1, a_1] \times \Omega'_i$，则有

$$\operatorname{Diam} \Omega_i \le \sqrt{4^2 C^2 n^2 + c^2 (n-1)^3} \left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_l(\Omega)}} \le c n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{l}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{\mu_k(\Omega)}}.$$

因此 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{k'}$ 是 Ω 的一个所需凸分割。

第二种情形是 $a_1 > 2r$ 的情形。在这种情况下，如引理 3.1 的证明中一样，我们考虑子域

$$\widetilde{\Omega} := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \ge r\}$$

并在 $\widetilde{\Omega}$ 中取一组极大的 $2r$-分离点 $\{x_i\}_{i=1}^{k'}$。如果我们证明了 $k' \le k$，那么如引理 3.1 的证明中一样，我们得到所需的凸分割 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{k'}$。由于 $\{B(x_i,\ r)\}_{i=1}^{k'}$ 是 Ω 中的不相交球，因此我们有

$$k' \omega_n r^n = \sum_{i=1}^{k'} \operatorname{vol} B(x_i, r) \le \operatorname{vol} \Omega.$$

将 Kr¨oger 不等式（定理 2.4）应用于上述不等式，我们得到

$$k' \le \frac{\operatorname{vol} \Omega}{w_n R^n} \le \frac{(2\pi)^n k}{C^n n^n \omega_n^2} \cdot \frac{n+2}{2} \le k,$$

其中，最后一个不等式由我们对 C 的选择得到。引理得证。□

致谢。本研究得到日本学术振兴会科研费（项目编号 JP24K06731）的资助。

References

[1] M. S. Ashbaugh，《特征值的等周不等式与普适不等式》，载于：E.B. Davies、Yu. Safarov（编），《谱理论与几何》，爱丁堡，1998年，收入《伦敦数学学会讲义丛书》，第273卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年，第95–139页。[2] P. Buser，《紧黎曼曲面的几何与谱》。1992年版本的重印本。现代 Birkhauser Classics。Birkhauser Boston, Ltd.，波士顿，马萨诸塞州，2010年。[3] S. Y. Cheng和P. Li，《热核估计与特征值下界》。Comment.Math. Helv. 56（1981），第3期，327–338页。

[4] Y. Colin de Verdi`ere, 《构造使谱的一部分为给定值的拉普拉斯算子》´。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.（第4辑）20（1987），第4期，599–615页。[5] K. Funano, 《关于拉普拉斯算子的诺伊曼特征值的区域单调性的一则注记》。《伊利诺伊数学杂志》 67 （ 2023 ），第 4 期，677–686 页。[6] K. Funano, 《欧几里得空间中凸区域上的拉普拉斯算子诺伊曼特征值的一个普适不等式》。《加拿大数学通报》 67 （ 2024 ），第 1 期，222–226 页。[7] K. Funano, 《拉普拉斯算子特征值的若干普适不等式及特征函数范数的上界》，预印本。在线获取地址：“https://arxiv.org/abs/2310.02938”。[8]K. Funano, 《平面凸区域上诺伊曼特征值的两个新普适不等式》，预印本。在线获取地址：“https://arxiv.org/abs/2511.18043”。[9] L. Hatcher, 《狄利克雷特征值与诺伊曼特征值之间的几何不等式》，预印本。在线获取地址：“https://arxiv.org/abs/2504.18517”。[10] F. John, 《以不等式为附加条件的极值问题》。为庆祝R. Courant六十岁生日（1948年1月8日）而编的《论文与文集》，187–204页，Interscience Publishers，纽约，1948年。[11] P. Kr¨oger, 《欧几里得空间中有界区域上的诺伊曼特征值上界》。《泛函分析杂志》106（1992），第2期，353–357页。[12]S. Liu, 《特征值比的最优无维数依赖的上界》，预印本。在线获取地址：“https://arxiv.org/abs/1405.2213”。[13] E. Milman, 《凸性在等周不等式、谱隙与集中现象中的作用》，《数学发明》177（2009），1–43页。[14] L. E. Payne、G. P´olya和H. F. Weinberger, 《关于相邻特征值之比》，《数学与物理杂志》35（1956），289–298页。[15] L. Payne和H. Weinberger, 《凸区域上的最优庞加莱´不等式》，《理性力学与分析文档》5（1960），286–292页。

Division of Mathematics & Research Center for Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Sciences, Tohoku Uni-versity, 6-3-09 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan电子邮箱地址: kfunano@tohoku.ac.jp