arXiv:2603.16175v1 [math.AC] 17 Mar 2026

仙人掌图和弦图的无混合奇偶二项式边理想分类

DEBLINA DEY、A. V. JAYANTHAN 和 SARANG SANE

Abstract. 本文根据图的结构性质，刻画了仙人掌图和弦图的所有无混合及 Cohen-Macaulay 奇偶二项式边理想。

1. Introduction

设 G 是一个有限简单图，其顶点集为 $V(G) = [n] = \{1, \ldots, n\}$，边集为 $E(G)$。Kahle、Sarmiento 和 Windisch 在 2016, [9], 中引入了奇偶二项式边理想：

$$\mathcal{I}_G := (x_i x_j - y_i y_j : \{i, j\} \in E(G)) \subset R = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n],$$

其中 K 是一个域。这个理想是另一类二项式理想的微妙变体，称为二项式边理想，由 Herzog 等人于 [8] 定义：

$$J_G := (x_i y_j - x_j y_i : \{i, j\} \in E(G)) \subset R = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n],$$

人们已经观察到，这些边理想的若干代数性质和/或不变量，与图 G 的组合性质和/或不变量之间存在密切联系。

若 G 是二部图，则其奇偶二项式边理想可通过简单的变量代换由其二项式边理想得到。正如 Kahle 等人在论文中指出的，奇偶二项式边理想具有许多与二项式边理想相同的性质，但其组合结构更加微妙。在 [9], 中，作者为 $\mathcal{I}_G$ 描述了一个 Gr¨obner 基。他们证明，若 char$(K) \neq 2$，则 $\mathcal{I}_G$ 是根理想，并明确给出了极小素理想的结构，该结构由图的断开集（见定义 2.3）刻画。我们对 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性质的研究关键地依赖于这一极小素理想描述，因此本文假设 char$(K) \neq 2$。

在 [12], Kumar 研究了 $\mathcal{I}_G$ 的一些结构性质。他证明，对于二部图 G，$\mathcal{I}_G$ 是完全交，当且仅当 G 是路径的不交并；而对于非二部图，$\mathcal{I}_G$ 是完全交，当且仅当 G 是一个顶点数为奇数的圈。他还对具有近完全交奇偶二项式边理想的图进行了分类，并确定了其关联的 Rees代数 $\mathcal{R}(I_G)$ 何时是 Cohen-Macaulay。

在同调不变量中，Betti数、Castelnuovo-Mumford正则性和深度已在多类多项式环的齐次理想中得到深入研究。虽然深度的计算通常颇具挑战，但其中一种特殊情形——极大深度，即满足 Cohen-Macaulay 性——受到了广泛关注。

若理想 I 属于诺特环 R，且 R/I 是 Cohen-Macaulay，则称该理想为 Cohen-Macaulay。研究理想的 Cohen-Macaulay 性是一个经典课题。对于与某些几何／拓扑／组合结构相关联的理想，人们试图根据与该理想相关联的结构来刻画其 Cohen-Macaulay 性。当 G 是二部图时，Bolognini、Macchia 和 Strazzanti 完全根据 G、[1] 的结构，刻画了二项式边理想 J_G（因而也包括奇偶二项式边理想 $\mathcal{I}_G$）何时为 Cohen-Macaulay。对于任意图 G，Bolognini 等人猜想，J_G 为 Cohen-Macaulay，当且仅当 G 是可达的（详情见 [2] ）。他们证明了该猜想的“仅当”部分，并

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 05E40；次要分类 13C13、13C14。*Key words and phrases.* 弦图、断开集、奇偶二项式边理想、无混合性、Cohen-Macaulay 性。

证明了弦图以及包含哈密顿路径的图满足该猜想的“如果”部分。一般情形仍未解决。对于奇偶二项式边理想，目前尚无这方面的相关结果，甚至连猜想也没有。

任何 Cohen-Macaulay 理想都必定是无混合的。因此，要理解其 Cohen-Macaulay 性，也应了解该理想的无混合性质。本文首先研究非二部弦图的奇偶二项式边理想的无混合性。通过这项研究，我们也得以刻画这些理想的 Cohen-Macaulay 性。

奇偶二项式边理想的无混合性质比二项式边理想的复杂得多。对于二项式边理想，决定关联素理想是否为极小素理想的组合对象称为割集，并且每个割集唯一对应一个素理想。对于奇偶二项式边理想，相应的对象称为断开集，而一个断开集对应多个素理想。我们对无混合性的研究关键取决于合适断开集的构造。

我们简要介绍本文的结构。在第 2 节讨论预备知识之后，我们在第 3 节研究仙人掌图的奇偶二项式边理想的无混合性。我们证明，对于连通非二部仙人掌图 G, $\mathcal{I}_G$ ，其无混合当且仅当它是 Cohen-Macaulay，当且仅当它是 Gorenstein，当且仅当它是完全交，当且仅当 G 是一个奇圈，见定理 3.10。

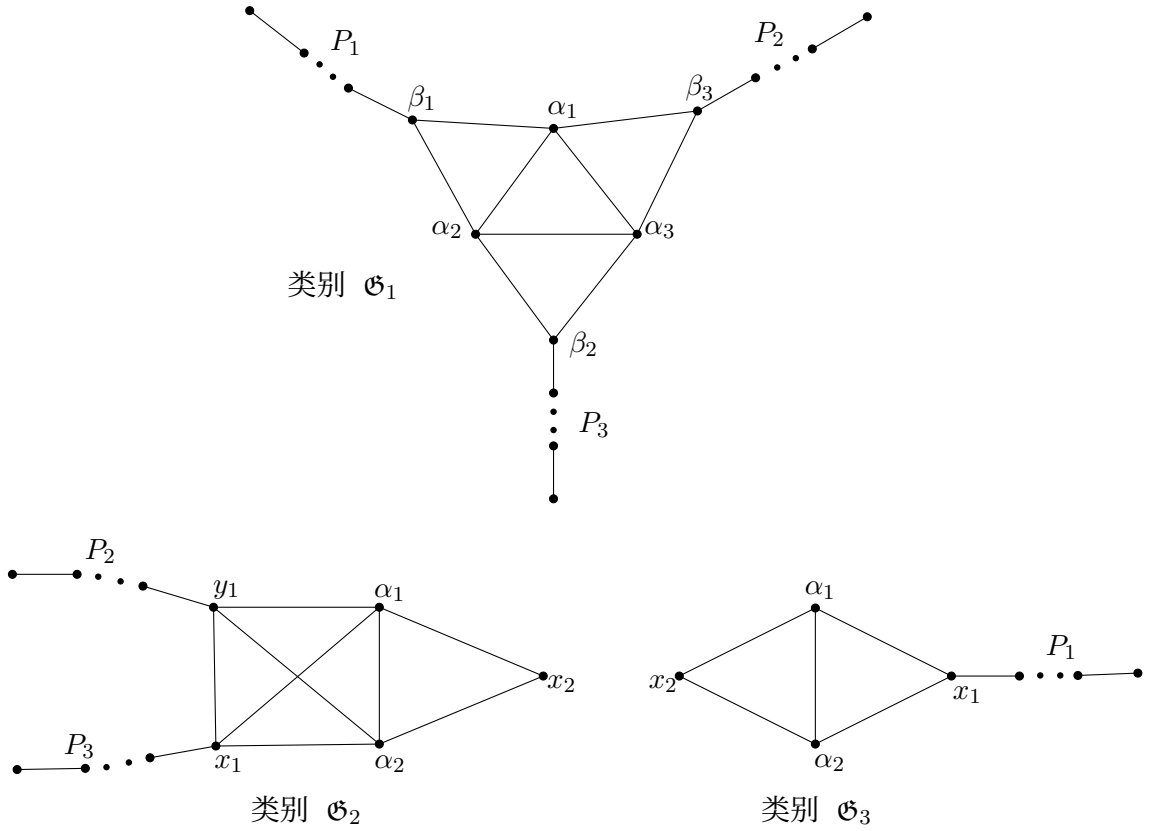

FIGURE 1. 无混合弦图类： $\mathfrak{G}_1$， $\mathfrak{G}_2$ 和 $\mathfrak{G}_3$，其中 P_1， P_2， P_3 是长度至少为一的路径图

弦图可以表示为完全图的团和（这是定理 5.3 的直接推论）。我们利用这一结构描述一些断开集，并进一步利用它们对奇偶二项式边理想何时无混合进行分类。删除" 设 G 是 K_{n1}、K_{n2}、.....、K_{nt}. 的团和。对于 $j \geq 2$，我们定义 $K_{r_j} = (\cup_{i<j} K_{n_i}) \cap K_{n_j}$。注意， $V(K_{r_j})$ 是一个断开集，我们在若干证明中利用它来得到矛盾或结构性结论。首先我们证明，如果 G 是一条路径、一个 K_3 或者 $\mathfrak{G}_1$、$\mathfrak{G}_2$ 或 $\mathfrak{G}_3$ 中的一个图（见图 1），那么 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，见定理 4.6。本文的主要目的是证明这一结论的逆命题。

在第4节中，我们首先提出一种算法，用于构造一棵极大树，使其顶点包含在尽可能多的极大团中。该构造确保那些不在树中、但与树中某个顶点相邻的顶点所组成的集合，是 $S(G)$ 的一个断开集，而这棵树是 $G \setminus S(G)$ 的一个连通分支。若 $\mathcal{I}_G$ 无混合，我们便证明，在 $S(G)$ 中，至多有一个顶点仅与树中的顶点相邻。利用这一点，我们证明了第4节的主要定理，即若 $\mathcal{I}_G$ 无混合，则任何这样的树都必须是一条路径（定理 4.34）。所有这些结果将在下一节中用于描述那些二项式边理想 $\mathcal{I}_G$ 不无混合的弦图。

在第5节中，我们考察所有极大团在 G 中没有公共交点的弦图。本节的大部分内容是艰深且技术性很强的分析，旨在证明：若 $G \setminus K_{r_i}$ 至少有三个连通分支，则 $\mathcal{I}_G$ 不无混合。因此，若对某个 i， $|V(K_{r_i})| \geq 3$ ，则 $\mathcal{I}_G$ 不可能无混合。本节末尾我们还证明，若对所有 i， $|V(K_{r_i})| = 1$ ，则 $\mathcal{I}_G$ 不可能无混合。

在第 6 节中，我们完成了对非二部弦图的奇偶二项式边理想无混合性的刻画。首先，我们证明，若给定的非二部弦图 G 的所有极大团均有非空交集，则 $\mathcal{I}_G$ 无混合当且仅当它是 K_3，见定理 6.1。尚待分类的弦图仅有满足 $|V(K_{r_i})| \leq 2$ 且 $G \setminus K_{r_i}$ 有两个连通分支的那些。我们证明，在这种情况下， $\mathcal{I}_G$ 无混合仅当 $G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$，见定理 6.3、6.4。为了刻画 Cohen-Macaulay 性，我们还需要考虑 K_3 以及属于这三个类别的图。我们借助计算交换代数软件 Macaulay2，[6], 证明 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$ 中最基本的图不是 Cohen-Macaulay，而 $\mathfrak{G}_3$ 中最基本的图是 Cohen-Macaulay，见图 8。最后，我们证明，对于非二部弦图 G， $\mathcal{I}_G$ 是 Cohen-Macaulay 当且仅当 $G = K_3$ 或 $G \in \mathfrak{G}_3$，见定理 7.3。

2. Preliminaries

本节回顾本文其余部分所需的图论定义和基本结果。本文中， G 表示一个顶点有限的简单连通图。 G 的顶点集和边集分别记为 $V(G)$和 $E(G)$。若图 H 满足 $V(H) \subseteq V(G)$，且对于 $u, v \in V(H)$， $\{u, v\} \in E(H)$当且仅当$\{u, v\} \in E(G)$，则称 H 是 G 的诱导子图。若图 G 不包含长度为4或更长的诱导圈，则称其为弦图 。弦图是完全图的团和。

定义 2.1。 设 G_1 和 G_2 是两个图。那么， G_1 和 G_2 的团和 表示通过将 G_1 中由 m 个顶点构成的团与 G_2中同样大小的团的顶点相识别而得到的图。在这种情况下，我们称 G 是 G_1 和 G_2 沿团 K_m的团和，并记为 $G = G_1 \cup_{K_m} G_2$。

如果任意两个圈至多有一个顶点公共，则称简单图为仙人掌图。

设 H_1 和 H_2 是 G 的两个子图。于是， $H_1 \cap H_2$ 和 $H_1 \setminus H_2$ 分别表示 G 在 $V(H_1) \cap V(H_2)$ 和 $V(H_1) \setminus V(H_2)$ 上的诱导子图。对于 $S \subseteq V(G)$， $G \setminus S$ 表示 G 在顶点集 $V(G) \setminus S$ 上的诱导子图，而 $G[S]$ 表示 G 在顶点集 S 上的诱导子图。对于 $S \subseteq V(G)$，我们采用以下记号：

(1) $\mathcal{C}_G(S)$ 表示 $G \setminus S$ 的所有连通分支的集。(2) $\mathcal{B}_G(S)$ 表示 $G \setminus S$ 的所有二分连通分支的集。

(3) $c_G(S) = |\mathcal{C}_G(S)|$。(4) $b_G(S) = |\mathcal{B}_G(S)|$。(5) 对于 $s \in S$， $\mathcal{C}_{G\setminus S}(s)$ 表示 $G \setminus S$ 中在 $G \setminus (S \setminus \{s\})$ 中变为一个连通分支的所有连通分支的集，即，当我们将 s 加回 $G \setminus S$ 时重新连接起来的所有连通分支。(6) 我们使用记号 $b(G)$ 和 $c(G)$ 分别表示 G 的二部连通分支数和连通分支总数。

现在我们来定义割点、割集和断开集。割集决定二项式边理想的极小素理想，而断开集则推广了割集，并用于描述 $\mathcal{I}_G$ 的极小素理想。我们将在给出定义后详细阐述这些联系。

定义 2.2. [8] 子集 $S \subseteq V(G)$ 称为 G 的割集，如果对于每个 $s \in S$， s 都连接了 $G \setminus S$ 的至少两个连通分支。也就是说，对于每个 $s \in S$，都有 $c_G(S) > c_G(S \setminus \{s\})$。顶点 $s \in V(G)$称为割点，如果 $\{s\}$ 是 G 的割集。

图的一个块是一个没有割点的极大连通诱导子图。例如，仙人掌图的块是圈或边。

定义 2.3. [9, 定义 4.5] 集合 $S \subseteq V(G)$ 称为 G 的断开集，如果对于每个 $s \in S$，都有 $b_G(S) + c_G(S) > b_G(S \setminus \{s\}) + c_G(S \setminus \{s\})$。空集始终是任意图的断开集。

对于顶点集 $[n]$ 上的图 G，令 $\mathcal{J}_G := \mathcal{I}_G : (\prod_{i\in V(G)} x_i y_i)^\infty \subset K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$. 在本文中，我们始终假设 $\operatorname{char}(K) \neq 2$。对于含有奇圈的图 G，令 $\mathfrak{p}^+(G) := (x_i + y_i : \ i \in V(G))$，且 $\mathfrak{p}^-(G) := (x_i - y_i : \ i \in V(G))$。设 G 是一个图，其二部连通分支为 B_1、.....、B_r，非二分连通分支为 N_1、.....、N_t。文献 [9], 证明， $\mathcal{J}_G$ 的极小素理想具有 $\sum_{i=1}^r \mathcal{J}_{B_i} + \sum_{i=1}^t \mathfrak{p}^{\sigma_i}(N_i)$ 的形式，其中 $\sigma_i \in \{+, -\}$。设 $S \subset V(G)$ 是 G 的一个断连集。设 $\mathfrak{q} = \sum_{i=1}^r \mathcal{J}_{B_i'} + \sum_{i=1}^t \mathfrak{p}^{\sigma_i}(N_i')$ 是 $\mathcal{J}_{G\setminus S}$ 的一个极小素理想。那么，如果对于所有满足 $C_{G\setminus S}(s)$ 不含二部图的 $s \in S$， $C_{G\setminus S}(s)$ 中各连通分支对应的 $\mathfrak{q}$ 的素理想项并非全都等于 $\mathfrak{p}^+$，也并非全都等于 $\mathfrak{p}^-$，则称 $\mathfrak{q}$ 是符号分裂的。并非每个图的断开集都对应着 $\mathcal{J}_G$ 的符号分裂极小素理想，参见例 4.14]。对于 $S \subset [n]$，令 $\mathfrak{m}_S = (x_i, y_i : \ i \in S)$。Kahle 等人证明， $\mathcal{I}_G$ 的极小素理想是理想 $\mathfrak{m}_S + \mathfrak{p}$，其中 $S \subset V(G)$ 是 G 的一个断开集，且 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{J}_{G\setminus S}$ 的一个符号分裂极小素理想，参见定理 4.15]。

记号 2.4。 若断开集 $S \subseteq V(G)$ 的 $\mathcal{J}_{G\setminus S}$ 具有满足符号分裂性质的极小素理想，则称其为符号分裂断开集。我们用 $\mathcal{D}(G)$ 表示 G 的所有符号分裂断开集组成的集。

定义 2.5。 如果理想 $I \subseteq R$ 的所有关联素理想具有相同的高度，则称 $I \subseteq R$ 为无混合理想。

如果 $char(K) \neq 2$，则 $\mathcal{I}_G$ 是根理想。因此，在这种情况下， $\mathcal{I}_G$ 的关联素理想与极小素理想构成相同的集合。$\mathcal{I}_G$ 的极小素理想的高度由 [12]给出。设 $Q_S^\sigma(G) = m_S + \mathfrak{q}$ 是 $\mathcal{I}_G$ 的一个极小素理想。那么，高度 $Q_S^\sigma(G) = |S| + n - b_G(S)$。因此，当且仅当对于所有 $S \in \mathcal{D}(G)$， $b_G(S) = |S| + b(G)$ 时， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。

2.1. **断开集与无混合性**。 虽然断连集并不总是满足符号分裂性质，但对该集合施加某些限制后，便可使其具有符号分裂性质，如下文所述。

注记 2.6。 [9, 注记 4.12]设 S 是 G 的一个断开集，且 S 的每个顶点都与 $G \setminus S$的某个二部连通分支连通。那么， S 显然满足符号分裂性质。

命题 2.7。 设 S 是 G 的一个断开集，且 S 的每个元素都与 $G \setminus S$的某个固定非二部连通分支的顶点相邻。那么， S 满足符号分裂性质。

证明。 设 Q 是 $G\setminus S$ 的非二分连通分支，使得对于所有 $s \in S$， $\mathcal{C}_{G\setminus S}(s) \ni Q$。然后，对应于 Q，我们选择 $\mathfrak{p}^+(Q)$；对于 $G \setminus S$ 的任意其他非二分连通分支Q'，取 $\mathfrak{p}^-(Q')$。因此，符号分裂性质得以保持。□

对于非二分图 G，当且仅当对于所有 $S \in \mathcal{D}(G)$， $|S| = b_G(S)$ 时， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。下面的结果给出了 S 满足上述等式的一个必要条件。

命题 2.8。 设 G 是非二分图，且 $S \in \mathcal{D}(G)$。如果存在 $T \subseteq S$，使得$\mathcal{I}_{G\setminus T}$是无混合的，并且 $G \setminus T$ 恰好具有 $|T|$ 个二部连通分支 $(b(G \setminus T) = |T|)$，那么 $|S| = b_G(S)$。

证明。 由于 $S \in \mathcal{D}(G)$、 $S \setminus T \in \mathcal{D}(G \setminus T)$ 和 $b_G(S) = b_{(G\setminus T)}(S \setminus T)$。由于 $\mathcal{I}_{G\setminus T}$是无混合的，$|S \setminus T| = b_{(G\setminus T)}(S \setminus T) + b(G \setminus T)$。根据给定的假设， $b(G \setminus T) = |T|$。因此， $|S \setminus T| = b_G(S) + |T| \implies |S| = b_G(S)$。□

下面的备注表明，对$\mathcal{I}_G$ 的无混合性质和 Cohen-Macaulay 性质的研究可以归结为连通图的情形。

备注 2.9。令 t $G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \cdots \sqcup G_m$ 为一个图，其中 G_i 是其连通分支 .

(i) 根据定义可得 $\mathcal{D}(G) = \{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m \colon S_i \in \mathcal{D}(G_i)\}$。(ii) 由 (i) 可得，当且仅当对所有 $1 \le i \le m$， $\mathcal{I}_{G_i}$ 均为无混合时， $\mathcal{I}_G$ 才是无混合的。(iii) 注意到 $\frac{R}{\mathcal{I}_G} \equiv \frac{R_1}{\mathcal{I}_{G_1}} \otimes_K \frac{R_2}{\mathcal{I}_{G_2}} \otimes_K \overline{\cdots} \otimes_K \frac{R_m}{\mathcal{I}_{G_m}}$，其中 $R_i = \overline{K[x_j, y_j \colon j \in V(G_i)]}$。因此，根据定理 2.1], $\mathcal{I}_G$ 是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当对每个 $1 \le i \le m$ [3, ， $\mathcal{I}_{G_i}$ 都是 Cohen-Macaulay 的。

对于 本文其余部分中，除非另有说明， G 表示一个连通简单图。

3. Cohen-Macaulay parity binomial edge ideal of cactus graphs

本节研究仙人掌图的奇偶二项式边理想。关于二部仙人掌图所关联的 Cohen-Macaulay 奇偶二项式边理想的分类，已由 Rinaldo [14]的工作给出。因此，我们假设所讨论的图是非二部仙人掌图。奇圈的奇偶二项式边理想是完全交，因而是 Cohen-Macaulay[12, 定理 3.5]。我们证明，在连通非二部仙人掌图中，只有这些情形具有 Cohen-Macaulay 性质。

首先，我们注意到，在仙人掌图 G中，任意给定两个顶点，连接这两个顶点的路径具有某种唯一性。设 G 为一个仙人掌图，且 $u, v \in V(G)$。对于从 u 到 v的任意路径 P，令 $\mathcal{C}_P = \{C \colon C$ 是 G 中的一个圈，使得 $C \cap P$ 是 $G\}$中的一条边。于是，集合 $\mathcal{C}_P$ 与路径 P的选取无关。假设存在两条不同的路径 P_1 和 P_2，它们都从 u通向 v，且满足 $\mathcal{C}_{P_1} \neq \mathcal{C}_{P_2}$。如果 $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u = x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = v\}$，那么存在一个 $i \in \{0, \ldots, r-1\}$，使得对于 P_j 的部分 $\mathcal{P}_{ij}$，连接 x_i和 x_{i+1}， $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_{i1}} \neq \mathcal{C}_{\mathcal{P}_{i2}}$。现在考虑 $V(\mathcal{P}_{i1}) \cup V(\mathcal{P}_{i2}) \cup (\cup_{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_{i1}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{P}_{i2}}} V(C))$ 上的诱导子图，它是 G 中的一个块，既不是边，也不是圈。这与 G 是仙人掌图的假设矛盾。因此，给定 G中的任意两个圈 C 和 C'，存在唯一的两个顶点 $u \in V(C)$ 和 $u' \in V(C')$，使得连接 C 与 C' 的任意路径总是经过 u 和 u'。我们称 u和 u' 为 G中 C 与 C' 的连接顶点。

定义 3.1。 如果图 G 的一个奇圈 C 满足：存在 $v \in V(C)$，使得从 C 中的某个顶点到 $G \setminus \{v\}$ 中任意一个奇圈的顶点的任何路径都必经过 v，则称该奇圈为悬挂奇圈。我们将这样的悬挂奇圈记为(C, v)。

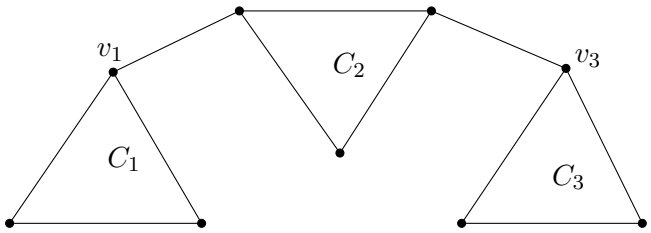

FIGURE 2. 一个仙人掌图。注意，(C_1, v_1) 和 (C_3, v_3) 是 G 的悬挂奇圈，但 C_2 不是。

注 3.2。 请注意，上述定义与图论中悬挂顶点的标准概念相似，但并不完全相同。例如，在上面的图 2 中，可以有偶圈或边连接到 C_1 或 C_3中的顶点上，但它们仍然满足悬挂奇圈的定义。由悬挂奇圈的定义可知，如果 G 只有一个奇圈，那么该奇圈就是悬挂奇圈。假设存在多于一个奇圈。回顾上面的讨论，任意奇圈 C 都通过唯一的顶点 $v \in V(C)$与另一个奇圈 C' 相连。定义 $\epsilon(C)$为 $V(C)$中与其他奇圈相连的不同顶点的数量。于是，当且仅当 $\epsilon(C) = 1$时， C 是悬挂奇圈。由仙人掌图的结构可知，悬挂奇圈总是存在的。下面给出证明。

命题 3.3. 设 G 是一个至少含有两个奇圈的仙人掌图。那么 G 有一个悬挂奇圈。

证明。 我们假设 G 是连通的。设 C 和 C' 是 G 中两个不同的奇圈，且 $u \in V$（C）和 $u' \in V$（C'）是连接顶点。定义

$$\delta(u, u') = \min\{n(P) : P \text{ is a path between } u \text{ and } u'\},$$

其中， n（P）是 G 中与路径 P 相交的不同奇圈的数量。考虑所有奇圈对以及连接顶点 $u \in V$（C）和 $u' \in V$（C'）所对应的集合 {δ（u, u'）}。假设最大值由顶点 $v_1 \in V$（C_1）和 $v_2 \in V$（C_2）取得。

断言：(C_1, v_1) 是一个悬挂奇圈。
证明：假设结论不成立。那么存在另一个奇圈 $C_3 \neq C_1, C_2$, $v_1 \neq v_1' \in V(C_1)$ 和 $v_3 \in V(C_3)$，使得 C_1 和 C_3 通过 v_1' 和 v_3 连通。因此，存在一条路径连接 C_3 中的 v_3 与 C_2 中的 v_2 ，且经过 C_1 中的 v_1' 。由于 G 是一个仙人掌图，从 C_3 到 C_2 的任意路径都经过 C_1。所以，从 v_3 到 v_2 的任意路径都经过 v_1' 和 v_1。由于 C_3 与从 v_3 到 v_2 的任意路径相交，且与从 v_1 到 v_2 的任意路径不相交，我们得到 $\delta(v_2, v_3) \geq \delta(v_2, v_1) + 1 > \delta(v_2, v_1)$。这与 v_1 和 v_2 的选取矛盾。因此，(C_1, v_1) 是一个悬挂奇圈。□

记号 3.4。设 G 是一个仙人掌图，(C, v) 是 G 的一个悬挂奇圈。注意， v 是一个割点，且 $\{v\} \in \mathcal{D}(G)$。由此可知， $C \setminus \{v\}$ 必须包含在 $G \setminus \{v\}$ 的某个二部连通分支中，记作 G_0。记 $G \setminus \{v\} = G_0 \sqcup G'$。这里， G' 是 $G \setminus \{v\}$ 中除 G_0 之外的所有连通分支的并集。

我们的目标是证明无混合性从 $\mathcal{I}_G$ 传递到 $\mathcal{I}_{G'}$。为此，我们先证明几个技术引理。

引理 3.5. 采用定理 *3.4* 中的记号，设 $S \subseteq V(G')$。则 $c_G(S \cup \{v\}) = c_{G'}(S) + 1$且 $b_G(S \cup \{v\}) = b_{G'}(S) + 1$。

证明。 由于 $G \setminus \{v\} = G_0 \sqcup G'$ 且 $S \subseteq V(G')$，我们有

$$\mathcal{C}_G(S \cup \{v\}) = \mathcal{C}_{G\setminus\{v\}}(S) = \mathcal{C}_{G_0 \sqcup G'}(S) = \mathcal{C}_{G'}(S) \sqcup \{G_0\}.$$

类似地， $B_G(S \cup \{v\}) = B_{G'}(S) \sqcup \{G_0\}$。因此，断言得证。 □

引理 3.6. 采用定理 *3.4* 中的记号，若 $S \in \mathcal{D}(G')$，则 $S \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G)$。

证明。 设 $S \in \mathcal{D}(G')$。因此， S 是 G' 的符号分裂断开集，并且对于每个 $s \in S$，$c_{G'}(S) + b_{G'}(S) > c_{G'}(S \setminus \{s\}) + b_{G'}(S \setminus \{s\})$。由定理 3.5 可知，对于每个 $s \in S$,

$$c_G(S \cup \{v\}) + b_G(S \cup \{v\}) > c_G((S \cup \{v\}) \setminus \{s\}) + b_G((S \cup \{v\}) \setminus \{s\}).$$

由于 G_0 是二部图，而 G 是非二部的， $c_G(S \cup \{v\}) + b_G(S \cup \{v\}) > c_G(S) + b_G(S)$。现在证明 $S \cup \{v\}$ 满足符号分裂性质。注意， S 在 G'中具有符号分裂性质。令$s \in S \cup \{v\}$。若 $s \neq v$，则 $\mathcal{C}_{G\setminus(S\cup\{v\})}(s) = \mathcal{C}_{G'\setminus S}(s)$。若 $s = v$，则 $\mathcal{C}_{G\setminus(S\cup\{v\})}(s) = \mathcal{C}_{G'\setminus S}(s) \cup \{G_0\}$，且 G_0 是二部图。因此，在这两种情况下， $S \cup \{v\}$ 在 G中都满足符号分裂性质。因此$S \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G)$。□

现在我们证明无混合性会遗传。

命题 3.7. 沿用定理 *3.4* 中的记号，若 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，则 $\mathcal{I}_{G'}$也是无混合的 .

证明。 由于 $\{v\} \in \mathcal{D}(G)$且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的， $b_G(\{v\}) = 1$。因此，$G \setminus \{v\}$ 中除 G_0 之外的连通分支必须是非二部的。特别地， G' 必须是非二部的。由定理 3.6 可知，对于所有 $S \in \mathcal{D}(G')$， $S \cup \{v\} \in \mathcal{D}(G)$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的， $b_G(S \cup \{v\}) = |S \cup \{v\}|$。根据定理 3.5，这意味着 $b_{G'}(S) = |S|$。因此， $\mathcal{I}_{G'}$ 是无混合的。□

现在我们继续 刻画具有无混合奇偶二项式边理想的仙人掌图。

命题 3.8. 设 G 是仅含一个奇圈的非二部仙人掌图。那么， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，当且仅当 G 是一个奇圈。

证明. “若”部分由 [12, 定理 3.5] 得出。现在假设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。设 G 中的奇圈为 C。若存在一个 $v \in V(C)$，使得 $\deg_G(v) > 2$，则 v 是一个割点。因此，$\{v\} \in \mathcal{D}(G)$。此外， $G \setminus \{v\}$ 是二部图，且至少有两个连通分支，即 $b_G(\{v\}) \geq 2$。这与 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性矛盾。因此，对每个 $v \in V(C)$，都有 $\deg_G(v) = 2$。所以，$G = C$。□

现在我们证明，若仙人掌图含有多个奇圈，则其奇偶二项式边理想不是无混合的。

定理 3.9. 设 G 是一个至少含有两个奇圈子图的仙人掌图，则 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。

证明。我们对 G 中奇圈的数量 $r(G)$ 使用归纳法证明该结论。首先，假设 $r(G) = 2$，且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。由于 G 是一个仅有两个奇圈的仙人掌图，这两个奇圈都必须是悬挂奇圈，记为 (C_1, v_1) 和 (C_2, v_2)。若 $v_1 = v_2$，则 $\{v_1\} \in \mathcal{D}(G)$ 和 $b_G(\{v_1\}) = 2$，这与 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性矛盾。假设 $v_1 \neq v_2$。首先，取断开集 $\{v_1\}$。假设 $G \setminus \{v_1\} = G_0 \sqcup G'$，其中 G_0 是包含 $C_1 \setminus \{v_1\}$ 的二部连通分支，而 G' 是包含 C_2 的非二部图。由于 $b_G(\{v_1\}) = 1$，且 G 中只有两个奇圈，因此 G' 也是连通的。此外，定理 3.7 表明 $\mathcal{I}_{G'}$ 是无混合的。但 G' 是一个仅有一个奇圈的连通仙人掌图。因此，由定理 3.8 可知， G' 是一个奇圈，即 $G' = C_2$。对 $\{v_2\}$ 使用同样的论证，可得 $G \setminus \{v_2\} = (C_2 \setminus \{v_2\}) \sqcup C_1$。因此， $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$，且 $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{e\}$，其中 $e = \{v_1, v_2\}$ 是 C_1 与 C_2 之间唯一的边。取 $x_1 \in V(C_1) \setminus \{v_1\}$ 和 $x_2 \in V(C_2) \setminus \{v_2\}$。于是 $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{D}(G)$，但 $b_G(\{x_1, x_2\}) = 1$，这与 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性矛盾。因此， $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。

现在令 $r(G) \geq 3$，并假设根据归纳法，若 H 是一个满足 $2 \leq r(H) < r(G)$ 的连通非二分仙人掌图，则 $\mathcal{I}_H$ 不是无混合的。假设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。令 (C, v) 为一个悬挂

奇圈。则 $\{v\} \in \mathcal{D}(G)$。如果 v 包含在多个悬挂奇圈中，那么 $b_G(\{v\}) > 1$，这与 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性矛盾。因此我们可以写作 $G \setminus \{v\} = G_0 \sqcup G'$，其中 G_0 是包含 $C \setminus \{v\}$ 的二部连通分支，而 G' 是一个非二分图，其每个连通分支都是非二分仙人掌图。注意，G' 不会有任何二部连通分支，否则 $b_G(\{v\}) > 1$，这与 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性矛盾。注意，对于 G' 的任意非二分连通分支 H，$r(H) < r(G)$。由定理 3.7 可知，$\mathcal{I}_{G'}$ 是无混合的。现在分两种情况讨论。

情形 1： 如果 G' 的任一连通分支至少含有两个奇圈，那么根据归纳假设，$\mathcal{I}_{G'}$ 不是无混合的，这与定理 3.7 矛盾。

情形 2： 假设 G' 的每个非二分连通分支都只含有一个奇圈。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，根据定理 3.7，$\mathcal{I}_{G'}$ 也是无混合的。因此，根据定理 3.8，我们得到 G' 的所有这些连通分支都是圈。记作 $G' = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_k$，其中 C_i 是奇圈。设 $v_i \in V(C_i)$ 满足 $\{v, v_i\} \in E(G)$。由于 G 是仙人掌图，这些 v_i 是 C_i 中与 v 相邻的唯一顶点。因此，(C_i, v_i) 都是 G 的悬挂奇圈，其中 $1 \leq i \leq k$。现在考虑 $G \setminus \{v_1\} = G'_0 \sqcup G''$，其中 G'_0 是包含 $C_1 \setminus \{v_1\}$ 的二部连通分支，而 G'' 是包含 C, C_2、.....、C_k 的非二分连通分支。由于 $r(G) \geq 3$，$k \geq 2$。因此，根据归纳法，$\mathcal{I}_{G''}$ 不是无混合的。但这与定理 3.7 得出的 $\mathcal{I}_{G''}$ 是无混合的结论矛盾。因此，$\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。□

总结以上所有结果，我们得到：

推论 3.10. 设 G 是一个非二部仙人掌图。那么，下列命题等价 *t:*

(1) $\mathcal{I}_G$ 是无混合的；(2) $\mathcal{I}_G$ 是 ***Cohen-Macaulay***；(3) $\mathcal{I}_G$ 是 ***Gorenstein***；(4) $\mathcal{I}_G$ 是完全交；

(5) G是一个奇圈。

证明。(4) ⇒ (3) ⇒(2) ⇒ (1) 这些蕴含关系总是成立。由 [12], (4) 与 (5) 等价。(1) ⇒ (5) 这一蕴含关系由定理 3.8 和定理 3.9 得出。□

4. The algorithm

与仙人掌图不同，对于弦图而言，如何利用遗传行为研究 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性质并不明确。为了理解无混合性质，我们首先提出一种针对弦图的算法，用于构造极大诱导树 H_{n} 以及一个断开集 $S^{\mathrm{n}}(G)$。我们证明，如果 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，那么这些树总是路径图。

记号 4.1。 设 G 是一个弦图，它是 K_{n_1}、.....、K_{n_t}. 的团和。对于 $j \geq 2$，我们定义 $K_{r_j} = (\cup_{i<j} K_{n_i}) \cap K_{n_j}$，即，图 G 是沿着 K_{r_j} 将 K_{n_j} 附加到 $\cup_{i<j} K_{n_i}$ 上得到的。

在本文余下部分，我们固定使用上述记号。

定义 4.2。 设 $j \in \{2, \ldots, t\}$。那么，$\lambda(j) = \{i < j : \ K_{r_j} \subset K_{n_i}\}$。

因此，$K_{r_j} = K_{n_j} \bigcap K_{n_l}$。不失一般性，我们可以假设对于每个$l \in \lambda(j) i \leq j$，都有 $K_{r_j} \neq K_{n_i}$。

注记 4.3. 设 $i, j \in [t]$ 满足 $i < j$，则

$$K_{n_i} \cap K_{n_j} = K_{n_i} \cap K_{r_j} = K_{n_i} \cap (K_{n_j} \bigcap_{l \in \lambda(j)} K_{n_l}).$$

引理 4.4. 对于任意 $i \in [t] \setminus \{1\}$, $V(K_{r_i}) \in \mathcal{D}(G)$.

证明。设 $j \in \lambda(i)$。令 G_i 和 G_j 为 $G \setminus V(K_{r_i})$ 中分别包含 $V(K_{n_i}) \setminus V(K_{r_i})$ 和 $V(K_{n_j}) \setminus V(K_{r_i})$ 的连通分支。则对于所有 $v \in V(K_{r_i})$, v 同时连接 G_1 和 G_2。因此，如果其中任意一个是二部的，那么根据定理 2.6, $V(K_{r_i}) \in \mathcal{D}(G)$。如果二者都是非二部的，那么固定 G_1 或 G_2 并应用定理 2.7，可得 $V(K_{r_i}) \in \mathcal{D}(G)$。□

命题 4.5。设 i、$j \in [t]$ 满足 $i < j$。那么对于任意 $x \in V(K_{n_i})$ 和 $y \in V(K_{n_j})$，如果 $x \neq y$ 和 $\{x, y\} \in E(G)$，则 x 或 y 必须属于 K_{r_j}。

证明。令 H 为 G 的诱导子图，其中 G 是从 K_{n_i} 到 j 的团和。于是， K_{n_j} 中与 H 的其他顶点相邻的顶点，必须属于 K_{r_j}。□

现在我们介绍弦图的三个子类 $\mathfrak{G}_1$、$\mathfrak{G}_2$ 和 $\mathfrak{G}_3$，如图 1 所示。其中， P_1、P_2 和 P_3 是任意路径图。

定理 4.6。设 G 是一个弦图。若 G 是以下任意一种图，则 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的：

(1) 路径图。(2) K_3

(3) $G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$。

证明。若 G 是二部图，则它必定是树图。在这种情况下， $\mathcal{I}_G \equiv J_G$。因此， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，当且仅当 J_G 是无混合的，当且仅当 G 是路径图 [5, 推论 1.2]。现在令 G 为非二部的。若 $G = K_3$，则根据 [12, 定理 3.5]， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。接下来我们证明，若 G 具有图 1 的结构，则 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。为此，只需证明对于所有 $S \in \mathcal{D}(G)$， $b_G(S) = |S|$。注意，若 $S \in \mathcal{D}(G)$ 且 $T \subseteq S$，则 $S \setminus T \in \mathcal{D}(G \setminus T)$。

情形 1： 设 $G \in \mathfrak{G}_3$。那么根据 [12, 定理 4.13 (i)], $\frac{R}{\mathcal{I}_G}$ 是 Cohen-Macaulay。因此， $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。

情形 2： 设 $G \in \mathfrak{G}_2$ 和 $S \in \mathcal{D}(G)$。

$x_1 \in S$ **或** $y_1 \in S$：那么 $G \setminus \{x_1\}$ 和 $G \setminus \{y_1\}$ 都恰有一个二部连通分支。根据情形 1， $\mathcal{I}_{G\setminus\{x_1\}}$ 和 $\mathcal{I}_{G\setminus\{y_1\}}$ 是无混合的。因此， $b_G(S) = |S|$ (定理 2.8)。

$x_1, y_1 \notin S$：由于 S 是一个断开集， $\alpha_1 \in S$ 当且仅当 $\alpha_2 \in S$。假设 α_1, α_2 都属于 S。此时 $G\setminus\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 是一个路径图与一个单点图的并。因此，根据定理 2.8， $b_G(S) = |S|$。现在若 $\alpha_1, \alpha_2 \notin S$，则 $S \subset V(P_2) \cup V(P_3)$。这意味着 S 不含 P_2 和 P_3 的连续顶点。因此， $b(P_2 \setminus S) = c(P_2 \setminus S) = |P_2 \cap S| + 1$ 且 $b(P_3 \setminus S) = c(P_3 \setminus S) = |P_3 \cap S| + 1$。注意，在 $G \setminus S$ 中， $P_2 \setminus S$ 和 $P_3 \setminus S$ 的两个连通分支分别包含端点 y_1 和 x_1，且它们包含在同一个非二部连通分量中。因此 $b_G(S) = |S|$。

情形 3： 令 $G \in \mathfrak{G}_1$ 和 $S \in \mathcal{D}(G)$。

$\{\beta_i, \beta_j\} \subseteq S$ **对于某个** $i, j \in [3]$：那么 $G\setminus\{\beta_i, \beta_j\}$ 是两个路径图和属于类 $\mathfrak{G}_1$ 的一个连通分支的并。因此，由定理 2.8，取 $T = \{\beta_i, \beta_j\}$，可得 $b_G(S) = |S|$。

$\beta_i \in S$ 恰有一个 $i \in [3]$：不失一般性，假设 $\beta_1 \in S$ 和 $\beta_2, \beta_3 \notin S$。若 $\alpha_3 \in S$，则在定理 2.8 中取 $T = \{\beta_1, \alpha_3\}$，可得 $b_G(S) = |S|$。因此，现在假设 $\alpha_3 \notin S$。注意，若 $\alpha_1, \alpha_2 \in S$，则在定理 2.8 中取 $T = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，可得 $b_G(S) = |S|$。因此，我们可以假设 α_1 和 α_2 均不属于 S。由于 α_3, β_2 或 β_3 不属于 S，当且仅当 $\alpha_2 \in S$ 时， $\alpha_1 \in S$。因此， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3$ 均不属于 S。于是 $S \subset V(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$。因此 $b_G(S) = |S|$。

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \notin S$：当且仅当 $\alpha_i \in S$ 时， $\alpha_j \in S$ 对于 $j \neq i$ 和 $i, j \in [3]$ 成立。假设 $\{\alpha_i, \alpha_j\} \subseteq S$。于是，在定理 2.8 中取 $T = \{\alpha_i, \alpha_j\}$，可得 $b_G(S) = |S|$。假设 α_1、α_2、α_3 不属于 S。由于我们已经知道 $\beta_1\beta_2$, $\beta_3 \notin S$、$S \subseteq V(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$。因此 $b_G(S) = |S|$。□

上述定理给出了一些无混合奇偶二项式边理想的类别。稍后我们将证明，在弦图中，这些是唯一可能的类别。$\mathcal{I}_G$ 的无混合性质取决于 G 的符号分裂断开集。与二项式边理想不同，对于弦图的奇偶二项式边理想，

断开集在 [2]中研究的图运算下表现并不理想。此外，我们也没有 [5] 和 [13] 这些论文中给出的短正合列，因而无法对某些相关图使用归纳法。简而言之，我们发现，适用于二项式边理想的标准技巧并不真正适用于奇偶二项式边理想。因此，为了理解断开集的行为，我们根据图的结构构造了一种算法，而该算法导出了一些特定的断开集。这些断开集满足某些组合性质；当 $\mathcal{I}_G$无混合时，这些性质对于刻画 G 起着重要作用。

为进一步简化后续论述，我们定义如下函数 m。

$$m : \mathcal{P}([t]) \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \text{where} \qquad m(\Gamma) = |V(\cap_{i\in\Gamma} K_{n_i})|.$$

这里， $\mathcal{P}([t]$表示 $[t] = \{1, 2, \ldots, t\}$的幂集。

4.1. 算法： 下面我们描述该算法。回顾一下， G 是 K_{n_1}、.....、 K_{n_t}.的团和。在算法的每一步和每次迭代中，我们选择 $\{1, \ldots, t\}$ 的一个极大子集，使得函数 m在该子集上取非零值。然后，我们从与该集合对应的所有完全图的交集中选取一个顶点。该算法的构造确保所有这些选出的顶点构成 G的一个连通子图。稍后我们将证明，这个连通图是一棵诱导树，并且是 G的一棵极大树。为了更好地理解该算法，我们建议读者在阅读算法的同时参阅例 4.8:

全局输入： 函数 m 和图 G。

Step 0: *Iteration* 1 : Define

$T_1^0 = [t]$,

$\Gamma_1^0 = \{L \subseteq [t] : m(L) > 0\}$,

$M(\Gamma_1^0) = \{\text{maximal elements of } \Gamma_1^0 \text{ with respect to the order relation } \subseteq\}$.

Fix $L_1^0 \in M(\Gamma_1^0)$.

Outputs of iteration 1*:* L_1^0.

Proceed to Iteration 2 *in Step* 0.

第 $q \geq 2$: 输入： $L_i^0,\ i < q$.

定义

$T_q^0 = T_{q-1}^0 \setminus L_{q-1}^0 = [t] \setminus (\bigcup_{j=1}^{q-1} L_j^0)$,

$\Gamma_q^0 = \{L \subseteq [t] :\ L \cap T_q^0 \neq \emptyset,\ \ m\ (L)\ > 0\}$,

$M\ (\Gamma_q^0)\ = \{\ \Gamma_q^0$ 中关于序关系 $\subseteq\}$ 的极大元,

$M_1\ (\Gamma_q^0)\ = \{L \in M\ (\Gamma_q^0)\ :\ L \cap L_i^0 \neq \emptyset$ 恰好对于一个 $i < q\}$,

若 $M_1\ (\Gamma_q^0)\ = \emptyset$, 则 0th 步骤终止。

否则 $M_2\ (\Gamma_q^0)\ = \{L \in M_1\ (\Gamma_q^0)\ :\ |L \cap L_i^0|$ 为最小值$\}$.

Choose $L_q^0 \in M_2(\Gamma_q^0)$ and $x_q^0 \in \bigcap_{i\in L_q^0} V(K_{n_i})$.

迭代 q 的输出: L_q^0.

继续执行步骤 0 中的第 $q + 1$ 次迭代。

当第 0th 步终止后，定义

$$D_0 = \{1\} \cup \{q : M_1(\Gamma_q^0) \neq \emptyset\} \text{ and } H_0 = G[\{x_q^0 : q \in D_0\}].$$
$$A_2^0 = \{i \in [t] : i \in (L_{q_1}^0 \cap L_{q_2}^0) \text{ for } q_1 \neq q_2 \in D_0\},$$
$$A_1^0 = \{i \in [t] : i \in L_q^0 \text{ for exactly one } q \in D_0\},$$
$$A_0^0 = \{i \in [t] : i \notin L_q^0 \text{ for all } q\}.$$

步骤 0 的输出： A_2^0, A_1^0, A_0^0, H_0, D_0。
继续执行步骤 1。

Step p for $p \geq 1$: Inputs: $A_0^{p-1}, A_1^{p-1}, A_2^{p-1}$.
Define
$T_0^p = A_1^{p-1} \cup A_0^{p-1}$,
$L_0^p = \emptyset$,
Iteration $q, q \geq 1$: Inputs: $L_i^p,\ i < q$.
Define
$T_q^p = T_{q-1}^p \setminus L_{q-1}^p$
$$\Gamma_q^p = \{L \subseteq T_q^p : L \cap A_1^{p-1} \neq 0 \text{ and } \bigcap_{i \in L} V(K_{n_i}) \setminus \bigcup_{j \in A_2^{p-1} \cup_{s=0}^{q-1} L_s^p} V(K_{n_j}) \neq \emptyset\}.$$
If $\Gamma_q^p = \emptyset$, then the pth step terminates.
Else $M(\Gamma_q^p) = \{\text{maximal elements of } \Gamma_q^p \text{ with respect to the order relation } \subseteq\}$,
Choose $L_q^p \in M(\Gamma_q^p)$ and $x_q^p \in \bigcap_{i \in L_q^p} V(K_{n_i}) \setminus \bigcup_{j \in A_2^{p-1} \cup_{s=0}^{q-1} L_s^p} V(K_{n_j})$.
Outputs of Iteration q: L_q^p.
Proceed to Iteration $q+1$ *in Step p.*

当 p^{th} 步骤终止后，定义

$$D_p = \{q : M(\Gamma_q^p) \neq \emptyset\} \text{ and } H_p = G[\{x_q^i : i \in [p], q \in \cup_{j \in [p]} D_j\}].$$
$$A_2^p = A_2^{p-1} \cup A_1^{p-1},$$
$$A_1^p = \{i \in A_0^{p-1} : i \in L_q^p \text{ for some } q \in D_p\},$$
$$A_0^p = [t] \setminus (A_2^p \cup A_1^p).$$

步骤 p 的输出： A_2^p， A_1^p， A_0^p， D_p， H_p。
如果 $A_1^p = \emptyset$，则算法终止。否则，继续执行步骤 $p+1$。
注记 4.7. (1) 请注意，集合 A_0^p、 A_1^p、 A_2^p，图 H_p 以及算法的步骤数会因L_q^p 和x_q^p的选择而有所不同。令 $\mathcal{L}$ 为在固定选择 L_q^p 的情况下，算法一次运行中所有数据构成的集，记作 $L_q^p(\mathcal{L})$；令 $\mathbf{n}(\mathcal{L})$ 表示这些固定选择下算法的最后一步。具体而言， $\mathcal{L}$ 表示算法的一次迭代运行。如果固定 $\mathcal{L}$，则我们用 $\mathbf{n}$ 代替 $\mathbf{n}(\mathcal{L})$，用 L_q^p代替 $L_q^p(\mathcal{L})$。

(2) 注意， $A_0^p \sqcup A_1^p = A_0^{p-1}$ 和 A_2^p， A_1^p 和 A_0^p 是 $[t]$的一个划分。(3) 在算法的每一步中，我们构造 G 的一个子图 H_p；对于 $p < p'$， H_p 是 $H_{p'}$的一个子图。

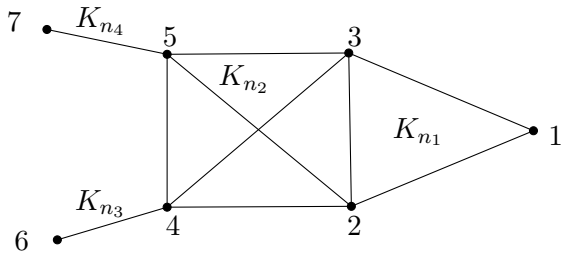

FIGURE 3. 该类中最小的图 G $\mathfrak{G}_2$

例 4.8. 设 G为 K_{n_1}、 K_{n_2}、 K_{n_3} 和 K_{n_4} 的团和，如图 3 所示。**步骤 0：** 迭代 1： $T_1^0 = \{1,2,3,4\}$, 因此， $\Gamma_1^0 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$。这意味着 $M(\Gamma_1^0) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$。选择 $L_1^0 = \{1,2\} \in M(\Gamma_1^0)$ 和 $x_1^0 = 2 \in V(K_{n_1}) \cap V(K_{n_2})$。迭代 *1* 的输出： $L_1^0 = \{1,2\}$。

迭代 2：输入： L_1^0.$T_2^0 = T_1^0 \setminus L_1^0 = \{3,4\}$。因此， $\Gamma_2^0 = \{\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\}$ 和 $M\ (\Gamma_2^0)$ $= \{\{2,3\},\{2,4\}\}$。所以， $M_1\ (\Gamma_q^0)\ = \{\{2,3\},\{2,4\}\}$。我们选择 $L_2^0 = \{2,3\}$ 和 $x_2^0 = 4 \in V\ (K_{n_2})$ $\cap V\ (K_{n_3})$ 。迭代 *2* 的输出： $L_2^0 = \{2,3\}$。

迭代 3：输入： L_1^0, L_2^0.$T_3^0 = T_2^0 \setminus L_2^0 = \{4\}$ 以及 $M\ (\Gamma_3^0)\ = \{\{2,4\}\}$，但 M_1 $(\Gamma_3^0)\ = \emptyset$。因此，步骤0终止。

步骤0的输出： $D_0 = \{1,2\}$, $H_0 = G[\{x_q^0 :$ $q \in D_0\}] = G[\{2,4\}]$。 $A_2^0 = \{2\}$, $A_1^0 = \{1,3\}$ 和 $A_0^0 = \{4\}$,

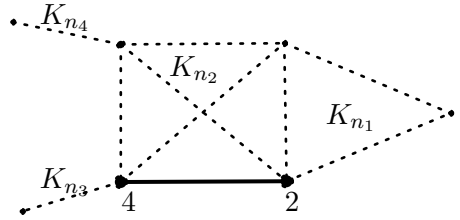

FIGURE 4. 步骤0： H_0

步骤1： 输入： A_2^0, A_1^0, A_0^0.迭代 1： $T_1^1 = A_1^0 \cup A_0^0 = \{1,3,4\}$。然后 $\Gamma_1^1 = M(\Gamma_1^1)\ = \{\{1\},\{3\}\}$.选择 $L_1^1 = \{1\}$ 和 $x_1^1 = 1 \in V(K_{n_1}) \setminus V$ (K_{n_2})。迭代 *1* 的输出： $L_1^1 = \{1\}$

迭代 2：输入： L_1^1。
$T_2^1 = T_1^1 \setminus L_1^1 = \{3,4\}$。然后 $\Gamma_2^1 = M(\Gamma_2^1)\ = \{\{3\}\}$。

选择 $L_2^1 = \{3\}$ 和 $x_2^1 = 6$。迭代
2 的输出： $L_2^1 = \{3\}$

迭代 3：输入： L_1^1， $L_2^1 T_3^1 = T_2^1 \setminus L_2^1 = \{4\}$. 由于 $T_3^1 \cap A_1^0 = \emptyset$, $\Gamma_3^1 = \emptyset$. 因此，步骤 1 终止。

步骤 1的输出： $D_1 = \{1,2\}$ 以及诱导子图 $H_1 = G[x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1] = G[\{2,4,1,6\}]$. $A_2^1 = A_2^0 \cup A_1^0 = \{1,2,3\}$, $A_1^1 = \emptyset$ 以及 $A_0^1 = \{4\}$。

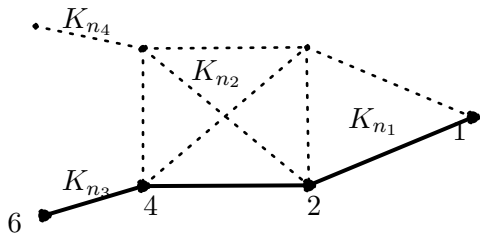

FIGURE 5. 步骤 1： H_1

由于 $A_1^1 = \emptyset$，算法在步骤 1 后终止。注意，诱导子图H_1 是 G的一棵极大树。我们构造集合 $S = (\cup_{i \in A_2^1} V(K_{n_i})) \setminus V(H_1) = \{3,5\}$。那么， S是 G 的符号分裂断开集，而 H_1 是 $G \setminus S$的一个连通分支。

Lem理 4.9. 上述算法经过有限步后终止 $s.$

证明。 由于 $A_0^p \sqcup A_1^p = A_0^{p-1}$，可得 $A_1^p = \emptyset$ 当且仅当 $A_0^p = A_0^{p-1}$。因此，当 $A_0^{p-1} = A_0^p$ 时，算法终止。由于 $\{A_0^p\}_{p \geq 1}$ 是 $[t]$的子集构成的严格下降链，这意味着算法至多经过 $t+1$ 步就必须终止。□

现在我们证明两个引理，它们详细说明了算法的某些结果。证明本质上源于我们在算法中对集合 Γ_q^p 的构造。这两个结果有助于理解断开集。

引理 4.10. 对于 $p \geq 1$，如果 $i \in A_1^{p-1}$，那么要么存在某个 $q \in D_p$ 使得 $i \in L_q^p$，要么 $V(K_{n_i}) \subseteq \bigcup_{j \in A_2^{p-1} \cup_{q \in D_p} L_q^p} V(K_{n_j})$。

证明。 由算法可知，$L_q^p \cap A_1^{p-1} \neq \emptyset$。因此，要么对于某个 $q \in D_p$，$i \in L_q^p$，要么$i \notin \cup_{q \in D_p} L_q^p$。设 s 是 D_p 中的最大指标，即 $\Gamma_{s+1}^p = \emptyset$。注意到

$$\Gamma_{s+1}^p = \{L \subseteq T_{s+1}^p : L \cap A_1^{p-1} \neq 0 \text{ and } \bigcap_{i \in L} V(K_{n_i}) \setminus \bigcup_{j \in A_2^{p-1} \cup_{j=1}^s L_j^p} V(K_{n_j}) \neq \emptyset\}.$$

现在，如果对于所有 $q \in D_p$ 都有 $i \notin L_q^p$，那么取集合 $L = \{i\}$。显然，$L \cap A_1^{p-1} \neq \emptyset$ 且 $L \subseteq T_{s+1}^p$。由于 $\Gamma_{s+1}^p = \emptyset$， $V(K_{n_i})$ 应包含于$\bigcup_{j \in A_2^{p-1} \cup_{q \in D_p} L_q^p} V(K_{n_j})$ 中。□

注 4.11。 如果算法在第 n 步后终止，那么有两种可能性。
(1) 要么 $\Gamma_1^n = \emptyset$，即对于任意 $i \in A_1^{n-1}$、 V（K_{n_i}）$\subseteq \bigcup_{j \in A_2^{n-1}} V$（$K_{n_j}$）。(2) 要么对于任意 $i \in L_q^n$、 $i \notin A_0^{n-1}$。

请注意，第0步的迭代与针对 $p \geq 1$ 的第 p 步迭代不同。事实上，对于 $p \geq 1$，算法中会出现重复。我们注意到，无论如何选择，集合 L_q^0 都满足某些组合性质。我们先证明这些性质。随后，利用这些性质，我们证明 H_0 是一棵树。此外，对于所有 p 以及 L_q^p 的任意选择，我们证明 H_p 是一棵树。

Nota第 4.12 节。 对于任意集合 $L \subseteq [t]$, $\mu(L)$ 表示集合 L 的最小元素 .

引理 4.13。 *对于每个 $i \in L_q^0$，若 $i \neq \mu(L_q^0)$，则 $\lambda(i) \subseteq L_q^0$。*

证明。由于 $i \neq \mu(L_q^0)$, $i > \mu(L_q^0)$。因此，根据定理 4.3, $K_{n_{\mu(L_q^0)}} \cap K_{n_i} = K_{n_{\mu(L_q^0)}} \cap (K_{n_i} \cap_{l \in \lambda(i)} K_{n_l})$。这意味着 $m(L_q^0) = m(L_q^0 \cup \lambda(i))$。由于 L_q^0 是 Γ_q^0 的极大元素, $\lambda(i) \subseteq L_q^0$。□

例 4.14。 在图 3 中, $\lambda(2) = \{1\}$，且 $\lambda(3) = \{2\}$。注意, $\lambda(2) \subset L_1^0$，且 $\lambda(3) \subset L_2^0$。

引理 4.15. *设 $i \in [t]$ 满足 $i < \mu(L_q^0)$，其中 $q \in D_0$。那么对每个 $j \in L_q^0$, $K_{n_j} \cap K_{n_i} \subseteq K_{n_{\mu(L_q^0)}} \cap K_{n_i}$。*

证明. 若 $j = \mu(L_q^0)$，则显然成立。若 $j > \mu(L_q^0)$，则由定理 4.3，存在某个 $j_1 \in \lambda(j)$ 使得 $K_{n_j} \cap K_{n_i} \subseteq K_{n_{j_1}} \cap K_{n_i}$。于是由定理 4.13, $j_1 \in L_q^0$，从而由归纳法可得结论。□

根据算法，对于 $i > 1$，每个 L_i^0 都与某个 $j < i$ 对应的 L_j^0 相交。我们证明，它们交集中的最小元素必定是 L_i^0 或 L_j^0 的最小元素。因此, $\mu(L_i^0)$ 或 $\mu(L_j^0)$ 属于 A_2^0。这有助于我们证明下一个引理。

引理 4.16. *如果对于某个 $i \neq j$, L_i^0 和 L_j^0 相交，那么 $\mu(L_i^0 \cap L_j^0)$ 要么是 $\mu(L_i^0)$，要么是 $\mu(L_j^0)$。*

证明. 设 $\mu(L_1^0 \cap L_2^0) = l$。若 $l = 1$，则 l 必须是 L_1^0 和 L_2^0 的最小指标。因此，$\mu(L_i^0 \cap L_j^0) = \mu(L_i^0) = \mu(L_j^0) = 1$。现在，假设 $l > 1$，且 $l \neq \mu(L_1^0)$ 和 $l \neq \mu(L_2^0)$。那么根据定理 4.13, $\lambda(l) \subseteq L_1^0 \cap L_2^0$。由于 $l > 1$, $\lambda(l) \neq \emptyset$，且它包含小于 l 的指标，这就导致矛盾。因此, l 必须是 $\mu(L_i^0)$ 或 $\mu(L_j^0)$ 之一。□

例 4.17。 在定理 4.8 中, $L_1^0 \cap L_2^0$ 的最小元素是 2，并且它是 L_2^0.的最小元素

回顾一下, $x_q^0 \in \cap_{l \in L_q^0} V(K_{n_l})$ 和 L_q^0 是包含所有满足 $x_q^0 \in V(K_{n_l})$ 的 $l \in [t]$ 的极大集合。我们还知道，如果 G 中的两个顶点 x 和 y 相邻，那么必然存在某个 $l \in [t]$，使得 $x, y \in V(K_{n_l})$。因此，对于某些 $r_1, r_2 > 0$，如果 $L_{r_1}^0 \cap L_{r_2}^0 \neq \emptyset$，那么 $x_{r_1}^0$ 和 $x_{r_2}^0$ 在 H_0 中相邻，反之亦然。现在假设对于某个顶点 x, $\{x, x_{r_1}^0, x_{r_2}^0\}$ 是一个 3-圈。因此，存在 $i, j \in [t]$，使得 $x, x_{r_1}^0 \in V(K_{n_i})$ 且 $x, x_{r_2}^0 \in V(K_{n_j})$。下一个引理表明，如果 i, j 都属于 A_1^0，那么存在某个 $u \in A_2^0$，使得 $x \in K_{n_u}$。稍后，我们将利用这一结果证明 H_1 是一棵树。

引理 4.18. *设 $i, j \in A_1^0$ 满足 $i \in L_{r_1}^0$ 和 $j \in L_{r_2}^0$，其中 $r_1 \neq r_2$ 和 $L_{r_1}^0 \cap L_{r_2}^0 \neq \emptyset$。则存在 $u \in A_2^0$ 使得 $K_{n_i} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_u}$.*

证明. 由于 $L_{r_1}^0 \cap L_{r_2}^0 \neq \emptyset$，根据定理 4.16, $\mu(L_{r_1}^0 \cap L_{r_2}^0)$ 要么是 $\mu(L_{r_1}^0)$，要么是 $\mu(L_{r_2}^0)$。不失一般性，我们假设 $\mu(L_{r_1}^0 \cap L_{r_2}^0) = \mu(L_{r_1}^0)$。于是 $\mu(L_{r_1}^0) \in A_2^0$。定义 $L = L_{r_1}^0 \cap A_1^0$。则 $i \in L$ 且 $i > \mu(L_{r_1}^0)$。我们分两种情况讨论。

情形 1: $j < i$。那么，对于某个 $i_1 \in \lambda(i)$，有 $K_{n_i} \cap K_{n_j} = K_{r_i} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_{i_1}} \cap K_{n_j}$。根据定理 4.13, $\lambda(i) \subseteq L_{r_1}^0$。因此, $i_1 \in L_{r_1}^0$。现在，我们对 i 进行归纳，将其视为 L 的一个元素。假设 $i = \mu(L)$。那么, $i_1 < i$ 且 $i_1 \in L_{r_1}^0$。由于 $i = \mu(L)$, $i_1 \notin A_1^0$，从而 $i_1 \in A_2^0$。于是，选取 $u = i_1$。现在，假设 $i > \mu(L)$。若 $i_1 \in A_2^0$, 则选取 $i_1 = u$。若 $i_1 \notin A_2^0$, 则$i_1 \in A_1^0$，因此 $i_1 \in L$。由于 $i_1 < i$, 根据归纳假设，存在 $u \in A_2^0$ 使得 $K_{n_{i_1}} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_u}$。由于 $K_{n_i} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_{i_1}} \cap K_{n_j}$, 结论得证。

情形 2： $j > i$。令 $L' = \{s \in L^0_{r_2} \cap A^0_1 : \ s > i\}$。那么， $j \in L'$。注意， $j > \mu(L^0_{r_2})$，因为$j \in L^0_{r_2}$。因此，根据定理 4.13， $\lambda(j) \subseteq L^0_{r_2}$。由于 $j > i$，对于某个 $j_1 \in \lambda(j)$，有 $K_{n_i} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_i} \cap K_{n_{j_1}}$。我们对 j 进行归纳，将其视为 L' 的一个元素。假设$j = \mu(L')$。若 $j_1 \in A^0_2$，则选取 $u = j_1$。若 $j_1 \notin A^0_2$，则 $j_1 \in A^0_1$ 且 $j_1 < i$。因此，根据情形 1，存在 $u \in A^0_2$ 使得 $K_{n_i} \cap K_{n_{j_1}} \subseteq K_{n_u}$，从而 $K_{n_i} \cap K_{n_j} \subseteq K_{n_u}$。现在，假设 $j > \mu(L')$。若 $j_1 \in A^0_2$，则选取 $u = j_1$。若 $j_1 \notin A^0_2$，则 $j_1 < j$ 且 $j_1 \in A^0_1$。若$j_1 < i$，则由情形 1 得证。若 $j_1 > i$，则 $j_1 \in L'$，因此根据关于 j_1 的归纳假设可得证明。

□

接下来的两个命题详细说明了顶点集 $x^p_q \in \cap_{l \in L^p_q} V(K_{n_l})$ 中的顶点如何彼此相连。这有助于我们理解 H_p 的结构。

命题 4.19。设 $p \geq 1$。那么，对于给定的 $q \in D_p$，存在 $\tilde{q} \in D_{p-1}$，使得顶点 x^p_q 和 $x^{p-1}_{\tilde{q}}$ 相邻。此外，若 $p' < p-1$，则对于任意 $q' \in D_{p'}$， x^p_q 和 $x^{p'}_{q'}$ 均不相邻。

证明。回顾一下，$x^p_q \in \bigcap_{i \in L^p_q} V(K_{n_i}) \setminus \bigcup_{j \in A^{p-1}_2 \cup_{s=1}^{q-1} L^p_s} V(K_{n_j})$ 且 $L^p_q \cap A^{p-1}_1 \neq \emptyset$。这意味着存在 $\tilde{q} \in D_{p-1}$ 使得 $L^p_q \cap L^{p-1}_{\tilde{q}} \neq \emptyset$。因此，对于任意 $i \in L^p_q \cap L^{p-1}_{\tilde{q}}$， x^p_q， $x^{p-1}_{\tilde{q}} \in V(K_{n_i})$。所以，它们相邻。

考虑 $x^{p'}_{q'}$，其中 $p' < p-1$ 且 $q' \in D_{p'}$。假设对于某个 $j \in [t]$， $x^{p'}_{q'} \in V(K_{n_j})$。那么 $j \in L^{p'}_{q'}$，这意味着 j 要么在 $A^{p'}_2$ 中，要么在 $A^{p'}_1$ 中。由于 $p' < p-1$， $A^{p-1}_2 \supseteq A^{p'}_2 \cup A^{p'}_1$。由于 $x^p_q \notin \cup_{i \in A^{p-1}_2} V(K_{n_i})$，可得 $x^p_q \notin V(K_{n_j})$。因此， x^p_q 与 $x^{p'}_{q'}$ 不相邻。□

命题 4.20. 对于 $p \geq 1$，任意 $q \neq q' \in D_p$ 下，顶点 x^p_q 和 $x^p_{q'}$ 都不相邻。

证明。假设 $q < q'$ 、 x^p_q 和 $x^p_{q'}$ 相邻。那么存在一个完全图 K_{n_j}，同时包含这两个顶点。我们知道 $[t] = A^{p-1}_2 \cup A^{p-1}_1 \cup A^{p-1}_0$。由于根据我们的选择，$x^p_q \notin \bigcup_{i \in A^{p-1}_2 \cup_{s=1}^{q-1} L^p_s} V(K_{n_i})$，因此 $j \notin A^{p-1}_2 \cup_{s=1}^{q-1} L^p_s$。所以， $j \in T^p_q$。但这样一来， j 必定属于 L^p_q，因为它是 Γ^p_q的极大元。因此，根据算法可得 $x^p_{q'} \notin \cup_{i \in L^p_q} V(K_{n_i})$。特别地，$x^p_{q'} \notin V(K_{n_j})$，这就产生了矛盾。□

现在我们已经具备了所有证明算法关键结论的前提： H_p 是一棵树 .

命题 4.21. H_0 是一棵树。

证明。回想一下， $H_0 = G[\{x^0_q : \ q \in D_0\}]$ 和 $x^0_q \in \cap_{i \in L^0_q} V(K_{n_i})$。此外，给定任意 $q \geq 1$，对于恰好一个 $q' < q$，$L^0_q \cap L^0_{q'} \neq \emptyset$ 成立。假设 $i \in [t]$ 满足 $L^0_q \cap L^0_{q'} \ni i$，那么 $V(K_{n_i})$ 同时包含 x^0_q 和 $x^0_{q'}$。这意味着，对于每个 $q \geq 1$，存在某个 $q' < q$使得 x^0_q 与 $x^0_{q'}$ 相邻，即H_0 是连通的。现在， H_0 是弦图的一个诱导子图，因此它也是弦图。假设 H_0 包含一个由顶点 $x^0_{q_1}$、 $x^0_{q_2}$ 和 $x^0_{q_3}$ 构成的 3-圈，且满足 $q_1 > q_2 > q_3$。那么， $\{x^0_{q_1}, x^0_{q_2}\}$， $\{x^0_{q_1}, x^0_{q_3}\} \in E(G)$。因此，存在 i_1、 $i_2 \in [t]$，使得 $V(K_{n_{i_1}}) \ni x^0_{q_1}$、 $x^0_{q_2}$，并且 $V(K_{n_{i_2}}) \ni x^0_{q_1}$、 $x^0_{q_3}$。由于 L^0_q是 $[t]$ 的极大子集，且满足 $m(L^0_q) > 0$、 $i_1 \in L^0_{q_1} \cap L^0_{q_2}$和$i_2 \in L^0_{q_1} \cap L^0_{q_3}$。这意味着 $L^0_{q_1}$ 与 $L^0_{q_2}$ 和 $L^0_{q_3}$相交，这就产生了矛盾。因此，H_0 不含 3-圈，所以它是一棵树。□

命题 4.22。 H_1 是一棵树。

证明。我们已经知道 H_0 是一棵树。因此，要证明 H_1 是一棵树，只需证明以下陈述：

(1) 每个 x^1_q 都恰好与一个 x^0_i 相邻，对于 $q \in D_1$ 和 $i \in D_0$而言。

(2) 对于任意一对 q， $q' \in D_1$， x_q^1 和$x_{q'}^1$ 不相邻。

结论 (2) 由定理 4.20 得出。现在证明 **(1)**。注意，根据定理 4.19，x_q^1 与某个 $i \in D_0$的一个 x_i^0 相邻。我们证明它不可能与多于一个这样的 x_i^0相邻。假设 i_1、 $i_2 \in D_0$ 是两个不同的指标，使得 $x_{i_1}^0$ 和 $x_{i_2}^0$ 都与某个 $q \in D_1$的 x_q^1 相邻。我们证明可以选择 $x_{i_1}^0$ 和 $x_{i_2}^0$ 使它们相邻。若它们不相邻，则 H_0 中存在一条诱导路径 P： $x_{i_1}^0$、 z_1、 ……、 z_{a-1}、 $z_a = x_{i_2}^0$，而 $P \cup \{x_q^1\}$在 G中构成一个诱导圈。由于 G是弦图且 H_0 是树， x_q^1 必与 z_1相邻。于是我们用 z_1替换 $x_{i_2}^0$。因此， x_q^1、 $x_{i_1}^0$、 $x_{i_2}^0$ 在 G中构成一个诱导圈。于是存在 l、 $s \in [t]$，使得 $x_{i_1}^0$、 $x_q^1 \in V\left(K_{n_l}\right)$，且 $x_{i_2}^0$、 $x_q^1 \in V\left(K_{n_s}\right)$。于是 $l \in L_{i_1}^0$ 和 $s \in L_{i_2}^0$。由于 $x_{i_1}^0$ 和 $x_{i_2}^0$在 H_0中相邻， $L_{i_1}^0 \cap L_{i_2}^0 \neq \emptyset$。根据算法，对于任意 $j \in A_2^0$, 我们得到 $x_q^1 \notin V\left(K_{n_j}\right)$。因此， l、 $s \in A_1^0$ 和 $l \neq s$。由定理 4.18 可知，存在 $u \in A_2^0$ 使得 $x_q^1 \in V\left(K_{n_s}\right) \cap V\left(K_{n_l}\right) \subseteq V\left(K_{n_u}\right)$，这就产生了矛盾。因此 **(1)** 成立。□

命题 4.23. H_p 是一棵树。对于 $p \geq 0$。

证明。 我们对 p 进行归纳。由定理 4.22 和定理 4.21，结论在 $p = 0$,1 时成立。取 $p > 1$。根据归纳假设， H_{p-1} 是一棵树，且 H_p 是 G 在顶点集 $V(H_{p-1}) \cup \{x_q^p \colon q \in D_p\}$ 上的诱导子图。只需证明以下结论即可得到断言：**断言**：对于任意 $q \in D_p$，$\deg^{H_p}(x_q^p) = 1$。

断言的证明：固定一个 $q \in D_p$。由定理 4.19 和定理 4.20 可知，在图 H_p 中， x_q^p 只与形如 $x_{q'}^{p-1}$ 的顶点相邻，其中某个 $q' \in D_{p-1}$。此外，定理 4.19 保证 x_q^p 与某个 $x_{q'}^{p-1}$ 相邻。现在假设对于 $q_1, q_2 \in D_{p-1}$和 $q_1 \neq q_2$， x_q^p 与 $x_{q_1}^{p-1}$和 $x_{q_2}^{p-1}$相邻。由于 H_{p-1} 是连通的，故在 H_{p-1}中存在一条路径 P_m（对于某个 $m > 1$），连接 $x_{q_1}^{p-1}$和 $x_{q_2}^{p-1}$。不失一般性，假设 x_q^p 只与 P_m 的端点相邻；因为如果 P_m 的任何内部顶点与 x_q^p 相邻，那么我们可以用该顶点替换 $x_{q_1}^{p-1}$ 或 $x_{q_2}^{p-1}$。如我们所知，由定理 4.20， $x_{q_1}^{p-1}$和 $x_{q_2}^{p-1}$之间没有边。这意味着 $m > 2$。因此，我们看到路径 P_m 与 x_q^p 一起在H_p 中构成一个长度大于 3 的诱导圈，这就产生了矛盾。所以， x_q^p 在 H_p中恰好与一个顶点相邻。□

例 4.24。 注意，在定理 4.8 中， $H_0 = G[\{2,4\}]$ 和 $H_1 = G[\{1,2,4,6\}]$ 都是路径图。

现在，基于该算法，我们引入以下集合

$$S^{\mathrm{n}}(G) = \Big(\bigcup_{i \in A_2^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i}) \Big) \setminus V(H_{\mathrm{n}}),$$

其中 n 是最后一个 算法步骤。注意，该集合会根据 L_q^p 的选择而变化 .

例 4.25。 根据我们在定理 4.8 中所作的选择，该算法在第 1 步后终止，并且 $A_2^1 = \{2,1,3\}$。因此， S^1（G） $= \{3,5\}$。这是一个符号分裂断开集。

我们证明 S^{n}（G）是一个断开集，并且满足符号分裂性质。接下来的两个引理将为证明这一结果作准备。首先，我们证明 S^{n}（G）中的顶点与树 H_{n} 的某条边构成一个 3-圈。事实上，我们通过取算法中任意一个步骤 p 来代替最后一步 n，证明一个一般性结论。

引理 4.26。 对于每个顶点 $v \in \left(\bigcup_{i \in A_2^p} V(K_{n_i}) \setminus V(H_p)\right)$，都存在 $v_1, v_2 \in V(H_p)$，使得$\{v, v_1, v_2\}$ 构成一个三角形。特别地，顶点集 $V(H_p) \cup \{v\}$ 上的诱导子图是非二部的。

证明。 我们对 p进行归纳法来证明该断言。设 $S^p = \left(\bigcup_{i \in A_2^p} V(K_{n_i}) \setminus V(H_p)\right)$。我们证明，对于任意顶点 $v \in S^p$， v 与 H_p的两个顶点相邻。于是诱导子图 $G[V(H_p) \cup \{v\}]$

含有一个圈。由于 G 是弦图且 H_p 是一棵树， $G[V(H_p)\cup\{v\}]$ 含有一个形如 $\{v, v_1, v_2\}$的3-圈，其中 v_1, $v_2 \in V(H_p)$。因此，它是非二部的。

$\mathbf{p = 0}$： 假设 $v \in V(K_{n_j}) \setminus V(H_0)$，其中 $j \in A_2^0$。因此，对于某个 q_1， $q_2 \in D_0$，有 $j \in L_{q_1}^0 \cap L_{q_2}^0$，且 $q_1 < q_2$。那么 $x_{q_1}^0$ 和 $x_{q_2}^0$ 属于 K_{n_j}，从而完成了这一情形。

$\mathbf{p > 0}$： 根据归纳法，假设该断言对 $r \le p-1$ 成立。令 $v \in V(K_{n_j})$，其中$j \in A_2^p$。我们知道，$A_2^p = A_2^{p-1} \cup A_1^{p-1}$ 和 H_{p-1} 是 H_p 的诱导子图。因此，如果$j \in A_2^{p-1}$，那么 $v \in S^{p-1}$；根据归纳假设， $V(H_{p-1})\cup\{v\}$ 是非二部的。因此，$V(H_p) \cup \{v\}$ 也非二部。剩下的情形是 $j \in A_1^{p-1}$。那么，根据 A_1^{p-1} 的定义可知，对于某个 $q \in D_{p-1}$，有 $j \in L_q^{p-1}$。因此， $x_q^{p-1} \in V(K_{n_j})$。由此可知， v和 x_q^{p-1}相邻。现在我们在 H_p 中寻找另一个与 v 相邻的顶点。根据定理 4.10，对于某个 $q' \in D_p$，要么有 $j \in L_{q'}^p$，要么 $V(K_{n_j}) \subseteq \bigcup_{l \in A_2^{p-1} \cup \bigcup_{q\in D_p} L_q^p} V(K_{n_l})$。

情形 1：如果 $j \in L_{q'}^p$，那么 $x_{q'}^p \in V(K_{n_j})$。因此， $x_{q'}^p$与 v相邻。情形 2：如果 $V(K_{n_j}) \subseteq \bigcup_{l \in A_2^{p-1} \cup \bigcup_{s\in D_p} L_s^p} V(K_{n_l})$，那么存在 $l \in A_2^{p-1} \cup_{s\in D_p} L_s^p$，使得$l \in A_2^{p-1} \cup \bigcup_{q\in D_p} L_q^p v \in V(K_{n_l})$。如果 $l \in A_2^{p-1}$，那么根据归纳法即可得证。如果 $l \in L_s^p$，那么 v 与 x_s^p相邻。证明完毕。

□

接下来的引理将用于进一步证明 H_n 成为 $G \setminus S^n(G)$ 的一个连通分支。

引理 4.27. 对于 $p \ge 0$ 和每个 $i \in A_0^p$， $V(K_{n_i})$ 均不包含 H_p中的任何顶点。

证明. 首先证明，对于任意 $i \in A_0^p$和 $q \in D_p$， $x_q^p \notin V(K_{n_i})$。根据定义， $x_q^p \in \cap_{j\in L_q^p} V(K_{n_j})$。由于 $i \in A_0^p$， $i \notin L_q^p$。因此，如果 $x_q^p \in V(K_{n_i})$，那么 $L_q^p \cup \{i\} \in \Gamma_q^p$，这与 L_q^p的极大性矛盾。因此， $x_q^p \notin V(K_{n_i})$，这证明了该引理关于 $p = 0$的断言。现在我们对 p进行归纳。设 $p > 1$ 和 i 是 A_0^p 的某个元素。注意，对于 $p \ge 1$， $A_0^p \subseteq A_0^{p-1}$。因此，根据归纳假设， $V(K_{n_i})$不包含 H_{p-1}中的任何顶点。由于 $V(H_p) = V(H_{p-1}) \cup \{x_q^p : q \in D_p\}$， $V(K_{n_i}) \cap V(H_p) = \emptyset$。□

推论 4.28. 设 $i \in [t]$ 满足 $V(K_{n_i}) \cap V(H_p) \neq \emptyset$，则 $i \in A_2^p \cup A_1^p$.

证明. 由于 $[t] = A_2^p \sqcup A_1^p \sqcup A_0^p$，结论由定理 4.27 得出。 □

定理 4.29. 设 n 是算法的最后一步，且 $S^{\mathrm{n}}(G) = \left(\bigcup_{i\in A_2^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i})\right) \setminus V(H_{\mathrm{n}})$。则 $S^{\mathrm{n}}(G)$ 是 G 的符号分裂断开集。

证明. 由定理 4.23， H_{n} 是一棵树；由定理 4.26，对于每个 $v \in S^{\mathrm{n}}(G)$， $G[V(H_{\mathrm{n}}) \cup \{v\}]$ 都是非二部的。因此，若证明 H_{n} 是 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$ 的一个连通分支，就能推出 $S^{\mathrm{n}}(G)$ 是一个符号分裂断开集。现在证明 H_{n} 是 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$ 的一个连通分支。设 $v \in V(G)$ 满足 $v \notin V(H_{\mathrm{n}})$ 且 $\{v, x_q^p\} \in E(G)$。那么存在一个包含边 $\{v, x_q^p\}$ 的 K_{n_i}。由于 $[t] = A_2^{\mathrm{n}} \sqcup A_1^{\mathrm{n}} \sqcup A_0^{\mathrm{n}}$，由定理 4.27 可得 $i \in A_2^{\mathrm{n}} \sqcup A_1^{\mathrm{n}}$。再由定理 4.11 可得 $i \in A_2^{\mathrm{n}}$。因此 $v \in V(K_{n_i}) \setminus V(H_{\mathrm{n}}) \subset S^{\mathrm{n}}(G)$。所以，任何不属于 H_{n}、但与该图中某个顶点相邻的顶点，都应属于 $S^{\mathrm{n}}(G)$。因此 H_{n} 是 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$ 的一个连通分支。□

注意，根据定义， $S^{\mathrm{n}}(G) \subseteq \left(\bigcup_{i\in A_2^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i})\right)$。由定理 4.7(2)可知， $A_2^n \cap A_0^n = \emptyset$。但也可能出现 $S^{\mathrm{n}}(G) \cap (\cup_{i\in A_0^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i}) \neq \emptyset$的情况，如下文命题所述。

命题 4.30 . 如果 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$ 有多个连通分支，那么 $S^{\mathrm{n}}(G) \cap (\cup_{i\in A_0^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i}) \neq \emptyset$.

证明。注意到 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G) = H_{\mathrm{n}} \sqcup \{(\bigcup_{i \in A_0^{\mathrm{n}}} K_{n_i}) \setminus S^{\mathrm{n}}(G)\}$。我们知道 H_{n} 是 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$的一个连通分支。如果 G_1 是 $G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$的另一个连通分支，那么 $V(G_1) \subseteq \left(\bigcup_{s \in A_0^{\mathrm{n}}} V(K_{n_s})\right) \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$。由于 G 是连通的，存在 $s \in S^{\mathrm{n}}(G)$，使得 s 将 H_{n} 与 G_1连接起来。令 $s' \in V(G_1)$满足 s 和 s' 相邻。于是存在 $l \in [t]$，使得 $s, s' \in V(K_{n_l})$。由于 $s' \notin S^{\mathrm{n}}(G), l \notin A_2^{\mathrm{n}}$，且根据定理 4.11，$l \notin A_1^{\mathrm{n}}$。因此，$l \in A_0^{\mathrm{n}}$。所以 $s \in S^{\mathrm{n}}(G) \cap (\cup_{i \in A_0^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i})$。□

例 4.31. 在定理 4.8 中，$A_0^1 = \{4\}$ 和 $S^1(G) \cap V(K_{n_4}) = \{5\}$。

基于上述观察，我们引入以下集合。令

$$S_2^{\mathrm{n}}(G) = \{s \in S^{\mathrm{n}}(G) : \mathcal{C}_{G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)}(s) = \{H_{\mathrm{n}}\}\}$$

and

$$S_0^{\mathrm{n}}(G) = S^{\mathrm{n}}(G) \setminus S_2^{\mathrm{n}} \subseteq S^{\mathrm{n}}(G) \cap (\cup_{i \in A_0^{\mathrm{n}}} V(K_{n_i})).$$

因此，$S^{\mathrm{n}}(G) = S_2^{\mathrm{n}}(G) \sqcup S_0^{\mathrm{n}}(G)$。$S_0^{\mathrm{n}}(G)$ 的顶点至少连接$G \setminus S^{\mathrm{n}}(G)$的两个连通分支，而 $S_2^{\mathrm{n}}(G)$的顶点仅与 H_{n} 的顶点相邻。从现在起，我们省略 n，并将 $S^{\mathrm{n}}(G)$ $S_2^{\mathrm{n}}(G)$ 和 $S_0^{\mathrm{n}}(G)$ 分别记为 $S(G)$ $S_2(G)$ 和 $S_0(G)$。现在我们证明，$S_0(G)$ 也是一个符号分裂断开集。

命题 4.32. 集合 $S_0(G)$ 是 G的符号分裂断开集。

证明。如果 $S_2(G) = \emptyset$，那么 $S(G) = S_0(G)$。因此，正如定理 4.29 所证明的，它是一个符号分裂断开集。

如果 $S_2(G) \neq \emptyset$，那么对于任意的 $s \in S_2(G)$，$\mathcal{C}_{G \setminus S(G)}(s) = \{H_{\mathrm{n}}\}$。因此，$G[V(H_{\mathrm{n}}) \cup S_2(G)]$ 是 $G \setminus S_0$ 的一个连通分支，它是非二部的（由定理 4.26 可知）。$G \setminus S_0(G)$ 的其他连通分支与 $G \setminus S(G)$ 的连通分支相同。于是，$S_0(G)$ 的每个元素都连接 $G \setminus S_0(G)$ 的至少两个连通分支，其中一个这样的连通分支是 $G[V(H_{\mathrm{n}}) \cup S_2(G)]$。因此，它是一个断开集，并且根据定理 2.7，我们可以说 $S_0(G)$ 是一个符号分裂断开集。□

在上述命题的证明中，我们讨论了 $G \setminus S(G)$ 和 $G \setminus S_0(G)$ 的连通分支。下面的结果给出了 $\mathcal{I}_G$ 具有无混合性的必要条件。

命题 4.33. 若 G 是非二部弦图，且 $\mathcal{I}_G$ 具有无混合性质，则 $|S_2(G)| \leq 1$.

证明。由于 $S_0(G) \in \mathcal{D}(G)$ 且 $\mathcal{I}_G$ 具有无混合性质，因此 $|S_0(G)| = b(G \setminus S_0(G))$。若 $|S_2(G)| \neq \emptyset$，则$|S(G)| = |S_0(G)| + |S_2(G)|$，并且 $b(G \setminus S(G)) = b(G \setminus S_0(G)) + 1$。再次由 $S(G) \in \mathcal{D}(G)$，因此利用 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性质可得 $|S_2(G)| = 1$。□

现在我们证明本节的主要结果。这也给出了 $\mathcal{I}_G$ 具有无混合性质的充分条件。

定理 4. 34. 对于任意非二部弦图 G，若 $\mathcal{I}_G$ 无混合，则 H_{n} 是一条路径.

证明。由定理 4.23，H_{n} 是一棵树。由定理 4.29 和定理 4.32，我们知道 $S(G)$ $S_0(G) \in \mathcal{D}(G)$。由于 $\mathcal{I}_G$ 无混合，$b(G \setminus S(G)) = |S(G)|$，且 $b_G(S_0(G)) = |S_0(G)|$。现在证明对于每个 $v \in V(H_{\mathrm{n}})$，$\deg_{H_{\mathrm{n}}}(v) \leq 2$。假设存在 $x_q^p \in V(H_{\mathrm{n}})$，使得 $\deg_{H_{\mathrm{n}}}(x_q^p) \geq 3$。那么 $H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}$ 至少有三个二部连通分支。注意，对于任意 $u \in S_0(G)$，u 将 H_{n} 与 $G \setminus S(G)$ 的另一个连通分支相连；并且由定理 4.26 u 与 H_{n} 中一条边的两个端点相邻。因此，$S_0(G)$ 的每个顶点都将 $H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}$ 与 $G \setminus S(G)$ 的另一个连通分支相连。因此，$S_0(G) \cup \{x_q^p\} \in \mathcal{D}(G)$。现在，如果 $S_2(G) = \emptyset$，即 $S(G) = S_0(G)$，那么 H_{n} 是 $G \setminus S_0(G)$ 的一个连通分支。由于 $\deg_{H_{\mathrm{n}}}(x_q^p) \geq 3$，$b_G(S_0(G) \cup \{x_q^p\}) \geq |S_0(G)| + 2$，这就产生了矛盾。因此 $S_2(G) \neq \emptyset$。令 $S_2(G) = \{\alpha\}$。我们知道 α 与 H_{n} 的至少两个顶点相邻。因此，$|V(H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}) \cap N_G(\alpha)| \geq 1$。现在分两种情况讨论：

$|V(H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}) \cap N_G(\alpha)| \geq 2$：在这种情况下，$\alpha$ 要么与一条边相邻，要么连接 $H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}$的两个连通分支。因此 $S(G) \cup \{x_q^p\} \in \mathcal{D}(G)$。于是 $b_G(S(G) \cup \{x_q^p\}) \geq |S(G)| + 2$，这与 $\mathcal{I}_G$的无混合性质矛盾。

$|V(H_{\mathrm{n}} \setminus \{x_q^p\}) \cap N_G(\alpha)| = 1$**：** 那么， α 与 H_{n} 中一条边的恰好两个顶点相邻，其中一个是 x_q^p。我们此前已经证明 $S_0(G) \cup \{x_q^p\} \in \mathcal{D}(G)$。现在得到 $b_G(S_0(G) \cup \{x_q^p\}) \geq |S_0(G)| + 2$，这就产生了矛盾。

因此， H_n 不能有度为 3 的顶点；又因为 H_{n} 是一棵树，所以它是一条路径。 □

推论 4.35. 如果 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，那么对于所有 $0 \leq p \leq \mathrm{n}$， H_p 都是路径图。

请注意，该算法为我们提供了两个特殊的断开集 S（G）和 S_0（G）；借助它们，我们在本节中证明了两个重要结果：定理 4.33 和定理 4.35。下一节中，我们将利用所有这些数据刻画无混合弦图。

5. Conditions when non-bipartite chordal graphs are not unmixed

在本节中，我们考虑那些满足 $\cap_{i\in[t]} K_{n_i} = \emptyset$ 的弦图 G，即 $m([t]) = 0$。我们证明，对于满足 $\mathcal{I}_G$ 的一大类弦图，算法会生成一棵非路径的树，因此所有这类图都不是无混合的。

以下注记将在后续的许多假设中隐式使用。

注记 5.1。 注意， $m([t]) = 0$ 当且仅当 L_1^0 是 $[t]$ 的真子集，当且仅当在算法的某次运行中存在 L_2^0。因此， $m([t]) = 0$ 当且仅当 $M(\Gamma_1^0)$ 中存在两个不同的集合 L_1 和 L_2，使得 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$。

现在我们证明一个引理，它对于说明一大类弦图中的 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的至关重要。如果存在 $V(G)$ 的一个子集 S，使得 $G \setminus S$ 至少有三个连通分支，那么以下引理给出了 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的一个充分条件。回想一下，我们用 $\mathcal{L}$ 表示算法的一次运行。

引理 5.2. 设 $S \subset V(G)$ 以及 $l_0, l_0', l_0'' \in [t]$ 满足：$K_{n_{l_0}} \setminus S$, $K_{n_{l_0'}} \setminus S$ 和 $K_{n_{l_0''}} \setminus S$ 位于 $G \setminus S$的不同连通分支中。进一步假设存在 $L_1, L_2 \in M(\Gamma_1^0)$，使得$l_0, l_0', l_0'' \in L_1$ 和 $l_0 \in L_2$。那么，只要满足以下任一条件， $\mathcal{I}_G$ 就不是无混合的：

(1) 算法的每次运行 $\mathcal{L}$，若输入为 $L_1^0(\mathcal{L}) = L_2$ 和 $L_2^0(\mathcal{L}) = L_1$，均满足 $V(H_{n(\mathcal{L})}) \cap S = \{x_2^0\}$。

(2) 算法的每次运行 $\mathcal{L}$，若输入为 $L_1^0(\mathcal{L}) = L_1$ 和 $L_2^0(\mathcal{L}) = L_2$，均满足 $V(H_{n(\mathcal{L})}) \cap S = \{x_1^0\}$。

证明。 首先注意到，由于 $L_1 \neq L_2$ 和 $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$，如 (1) 和 (2) 中所述的算法运行存在。假设假设中的陈述 (1) 成立，且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。设 $\mathcal{L}$ 是该算法的一次运行，使得 $L_1^0 = L_2$ 且 $L_2^0 = L_1$。我们构造该算法的一次运行 $\mathcal{L}'$，从而与定理 4.35 矛盾。首先，对 $q \geq 1$，取 $L_q^0(\mathcal{L}') = L_q^0(\mathcal{L})$ 和 $x_q^0(\mathcal{L}') = x_q^0(\mathcal{L})$，即 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 在第0步有相同的选择。注意，除 $x_2^0(\mathcal{L})$ 外，没有其他顶点 $x_q^0(\mathcal{L})$ 属于 S。从现在起，我们用 x_q^0 代替 $x_q^0(\mathcal{L}')$。

设 C_1、 C_2 和 C_3 分别为 $G \setminus S$ 中包含 $K_{n_{l_0}} \setminus S$、 $K_{n_{l_0'}} \setminus S$ 和 $K_{n_{l_0''}} \setminus S$ 的连通分支。假设存在 $l \in A_2^0(\mathcal{L}')$，使得 $V(K_{n_l}) \cap V(K_{n_{l_0'}} \setminus S) \neq \emptyset$。则 $K_{n_l} \setminus S$ 中的所有顶点都在连通分支 C_2 中。由于 $K_{n_{l_0}} \setminus S$ 在连通分支 C_1 中，$V(K_{n_l}) \cap V(K_{n_{l_0}}) \subseteq S$。由于根据 (1) 的假设有 $x_1^0 \notin S$，可得 $l \notin L_1^0(\mathcal{L}')$。由于$l \in A_2^0(\mathcal{L}')$，存在 $q \in D_0(\mathcal{L}')$，使得 $l \in L_q^0(\mathcal{L}')$，其中 $q \notin \{1, 2\}$。因此， $x_q^0 \in V(K_{n_l} \setminus S) \subseteq V(C_2)$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的， $H_0(\mathcal{L}')$ 是一条路径图（定理 4.34）。因此，在 $H_0(\mathcal{L}')$ 中从 x_1^0 到 x_q^0 存在唯一一条路径。由于 x_1^0 在 C_1 中且 x_q^0 在 C_2 中，该路径必定经过 S，从而经过 x_2^0。

类似地，若存在 $l' \in A_2^0(\mathcal{L}')$ 使得 $V(K_{n_l'}) \cap V(K_{n_{l_0''}} \setminus S) \neq \emptyset$，则存在 $x_{q'}^0 \in C_3$使得从 x_1^0 到 $x_{q'}^0$ 的路径经过 x_2^0。因此，根据是否存在这样的 l 和 l'，可分为以下几种情形。

情形 1: $V(K_{n_{l_0'}} \setminus S) \cap \left(\bigcup_{l\in A_2^0} V(K_{n_l})\right) \neq \emptyset$， $V(K_{n_{l_0''}} \setminus S) \cap \left(\bigcup_{l\in A_2^0} V(K_{n_l})\right) \neq \emptyset$**：** 如上所述，存在从 x_1^0 到 x_q^0 和 $x_{q'}^0$ 且经过 x_2^0的路径。非

因为这些 e

路径彼此不同，因为 x_q^0 和 $x_{q'}^0$ 属于不同的连通分支。因此 $\deg_{H_0(\mathcal{L}')}(x_2^0) \geq 3$，这与定理 4.35 矛盾。

情形 2： $V(K_{n_{l_0'}} \setminus S) \cap \left(\bigcup_{l\in A_2^0} V(K_{n_l})\right) \neq \emptyset$, $V(K_{n_{l_0''}} \setminus S) \cap \left(\bigcup_{l\in A_2^0} V(K_{n_l})\right) = \emptyset$，反之亦然：我们只考虑第一种情况，因为另一种情况只需交换 l_0' 和 l_0'' 的角色，证明相同。在第一种情况下，由于 $(K_{n_{l_0'}} \setminus S) \cap \left(\bigcup_{l\in A_2^0(\mathcal{L}')} K_{n_l}\right) \neq \emptyset$，根据上述讨论，存在一条从 x_1^0 到 x_q^0 且包含 x_2^0 的路径。因此 $\deg_{H_0(\mathcal{L}')} x_2^0 \geq 2$。现在，$(K_{n_{l_0''}} \setminus S) \cap \bigcup_{l\in A_2^0} K_{n_l} = \emptyset$ 蕴含 $K_{n_{l_0''}} \nsubseteq \bigcup_{l\in A_2^0} K_{n_l}$。所以，$\{l_0''\} \in \Gamma_1^1(\mathcal{L}')$。我们选择 $L_1^1(\mathcal{L}') \in M(\Gamma_1^1(\mathcal{L}'))$，使得 $l_0'' \in L_1^1(\mathcal{L}')$。由于 $L_2^0(\mathcal{L}') \cap L_1^1(\mathcal{L}') \neq \emptyset$，$x_2^0$ 和 x_1^1 相邻。因此 $\deg_{H_1(\mathcal{L}')} x_2^0 \geq 3$，这与定理 4.35 矛盾。

情形 3： $(K_{n_{l_0'}} \setminus S) \cap \bigcup_{l\in A_2^0} K_{n_l} = \emptyset$, $(K_{n_{l_0''}} \setminus S) \cap \bigcup_{l\in A_2^0} K_{n_l} = \emptyset$**:**
如情形 2，$K_{n_{l_0'}} \nsubseteq \bigcup_{l\in A_2^0} K_{n_l}$ 我们选择 $L_1^1(\mathcal{L}') \in M(\Gamma_1^1(\mathcal{L}'))$，使得 $l_0' \in L_1^1(\mathcal{L}')$。由于 $l_0' \in L_1^1(\mathcal{L}') \cap L_2^0(\mathcal{L}')$，我们看到 x_2^0 和 x_1^1 相邻。注意，对于任意 $l \in L_1^1(\mathcal{L}')$，$V(K_{n_l}) \setminus S$ 和 $V(K_{n_{l_0''}}) \setminus S$ 分别属于不同的连通分支 C_2 和 C_3。这意味着 $K_{n_{l_0''}} \nsubseteq \bigcup_{l\in A_2^0(\mathcal{L}')\cup L_1^1(\mathcal{L}')} K_{n_{l_0}}$。因此 $\{l_0''\} \in \Gamma_2^1(\mathcal{L}')$。选择 $L_2^0 \in M(\Gamma_2^1(\mathcal{L}'))$，使得 $l_0'' \in L_2^1(\mathcal{L}')$。于是，$l_0'' \in L_2^1(\mathcal{L}') \cap L_2^0(\mathcal{L}')$，因此 x_2^0 和 x_2^1 相邻。所以 $\deg_{H_1(\mathcal{L}')} x_2^0 \geq 3$，矛盾。

这就完成了在假设 (1) 下的证明。由于假设 (2) 是通过交换 L_1 和 L_2 的角色得到的，因此将上述证明中的 L_1 和 L_2、以及 x_1^0 和 x_2^0 的角色互换，同样成立。□

下面的推论给出了图的一个组合条件，使得 $\mathcal{I}_G$ 无混合，而且该条件不依赖于算法中的选择。

推论 5.3. 设 $L \subseteq [t]$ 满足 $m(L) > 0$。此外，设 $l_0 \in L$ 和 $S \subseteq V(K_{n_{l_0}})$ 为一个断开集，满足以下条件：

(i) $\cap_{l\in L} V(K_{n_l}) \cap S = \emptyset$.
(ii) *there exist* $l_0', l_0'' \in [t]$ *such that* $K_{n_{l_0}} \setminus S$, $K_{n_{l_0'}} \setminus S$ *and* $K_{n_{l_0''}} \setminus S$ *are in different connected components of* $G \setminus S$.
(iii) $V(K_{n_{l_0}}) \cap V(K_{n_{l_0'}}) \cap V(K_{n_{l_0''}}) \neq \emptyset$.

那么 $\mathcal{I}_G$ 无混合。

证明。由于 $m(L) > 0$, $L \in \Gamma_1^0$。选择 $L_2 \in M(\Gamma_1^0)$，使其包含 L。由条件 (iii)，现在 $\{l_0, l_0', l_0''\} \in M(\Gamma_1^0)$。我们选择 $L_1 \in \Gamma_1^0$，使其包含 $\{l_0, l_0', l_0''\}$。现在以 $L_1^0 = L_2$ 和 $L_2^0 = L_1$ 运行算法。于是 $x_1^0 \notin S$（由 (i)）。由于 $S \subset V(K_{n_{l_0}})$ 且 $l_0 \in L_1^0 \cap L_2^0$，对于每个顶点 $v \in S$，$\{v, x_1^0, x_2^0\}$ 都构成一个 3-圈。因此，除了 $\{x_2^0\}$ 之外，H_n 中没有顶点属于 S，即 $V(H_n) \cap S = \{x_2^0\}$。于是由定理 5.2(1)，$\mathcal{I}_G$ 无混合。□

现在我们考虑所有具有团 K_{r_i}, $i \in [t]$ 的非二部弦图，其中 $G \setminus V(K_{r_i})$ 至少有三个连通分支。我们证明，对于这样的图，G, $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。首先固定一些记号。回顾一下，对于任意集合 $S \subseteq V(G)$，$c_G(S)$ 表示 $G \setminus S$ 的连通分支数。

记号 5.4。设

$$i_2 = \min\{j \in \{2, \ldots, t\} : c_G(V(K_{r_j})) \geq 3\}$$

以及 $i_1 \in \lambda(i_2)$。令 C为 $G \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 的一个连通分支，使得 $C \cap (K_{n_{i_1}} \cup K_{n_{i_2}}) = \emptyset$。由于 $c_G(V(K_{r_{i_2}})) \geq 3$，这样的连通分支 C 存在。令

$$i_3 = \min\{j \in [t] : K_{n_j} \cap C \neq \emptyset \text{ and } K_{n_j} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset\}.$$

注记 5.5。由于 $i_1 \in \lambda(i_2)$，$K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}} = K_{r_{i_2}}$。根据 i_3 的选择，$K_{n_{i_3}} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$，因此 $K_{r_{i_2}} \supseteq K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}} \cap K_{n_{i_3}} \neq \emptyset$。注意，$K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$、$K_{n_{i_2}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 和 $K_{n_{i_3}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 位于 $G \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 的不同连通分支中。

Th下一个命题与定理 4.5 一起用于定理 5 的证明。 7.

命题 5.6. 设 $l \in [t]$ 和 $\mathcal{S} \subset V(K_{n_l})$ 满足 $V(K_{n_l} \setminus \mathcal{S}) \cap V(K_{r_{i_2}}) \neq \emptyset$。若 $|V(K_{r_{i_2}}) \cap \mathcal{S}| = 1$，则包含 $K_{n_l} \setminus \mathcal{S}$ 的 $G \setminus \mathcal{S}$ 的连通分支是非二部的。

证明。设 C' 是包含 $K_{n_l} \setminus \mathcal{S}$的连通分支。由于 $V(K_{n_l} \setminus \mathcal{S}) \cap V(K_{r_{i_2}}) \neq \emptyset$，$(K_{n_{i_1}} \cup K_{n_{i_2}}) \setminus \mathcal{S} \subseteq C'$。由于 $G[\mathcal{S}]$ 是一个团，且 $K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 和 $K_{n_{i_2}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 位于 $G \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 的不同连通分支中，因此对于某个 $j \in \{1,2\}$，有 $\mathcal{S} \cap V(K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) = \emptyset$。由于$r_{i_2} \geq 3$和 $|V(K_{r_{i_2}}) \cap \mathcal{S}| = 1$，$|V(K_{r_{i_2}} \setminus \mathcal{S})| \geq 2$。由于 $V(K_{r_{i_2}}) \subset V(K_{n_{i_j}})$，$K_{n_{i_j}} \setminus \mathcal{S}$的基数至少为 3，因此 C' 是非二部的。□

回忆一下，$M(\Gamma_1^0)$ 是 $[t]$ 中满足 $m(L) > 0$ 的所有极大子集 L 组成的集。我们选定 $L_1 \in M(\Gamma_1^0)$，使得在本节余下部分中 $\{i_1, i_2, i_3\} \subseteq L_1$。我们定义集合

$$\Lambda_c = \{l \in [t] \setminus L_1 \ : \ V(K_{n_l}) \cap V(K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset \text{ and } V(K_{n_l}) \cap V(K_{r_{i_2}}) = \emptyset\},$$

其中 $c \in [3]$，以便研究在 $\mathcal{I}_G$ 为无混合的条件下，完全图 K_{n_l}（其中 $l \notin L_1$）与 $K_{n_{i_1}}$、$K_{n_{i_2}}$ 或 $K_{n_{i_3}}$ 的交集情况。下一个引理表明，若存在一个$l \notin L_1$，使得 K_{n_l}与 $K_{n_{i_1}}$、$K_{n_{i_2}}$或 $K_{n_{i_3}}$在 $K_{r_{i_2}}$之外相交，那么就存在一个 $l' \notin L_1$，使得 $K_{n_{l'}}$ 与其严格地在 $K_{r_{i_2}}$之外相交，即 $l' \in \Lambda_c$。在定理 5.9 的证明中，我们会关键性地用到这一结论来应用定理 5.2，并证明若 $r_i \geq 3$，则 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。

引理 5.7. 设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，且 $r_{i_2} \geq 3$。若 $\Lambda_c = \emptyset$，则对每个$l \notin L_1$，都有 $K_{n_l} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) = \emptyset$。

证明. 假设存在某个 $c \in [3]$，使得 $\Lambda_c = \emptyset$，但 $K_{n_l} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset$，其中 $l \notin L_1$。取 $\mathcal{L}_c = \{l \notin L_1 : K_{n_l} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset\}$。由于 $\Lambda_c = \emptyset$，对所有 $l \in \mathcal{L}_c$，均有 $K_{n_l} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$。令$l_c =$为 $\mathcal{L}_c$ 的最小值。于是 $K_{n_{l_c}} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$。令 $y \in V(K_{n_{l_c}} \cap K_{r_{i_2}})$。令 $x \in \cap_{l \in L_1} V(K_{n_l})$。因此，$x \in V(K_{r_{i_2}})$。**情形 1 -** $l_c > i_c$**:**

在这种情况下，我们首先证明 $\lambda(l_c) \subseteq L_1$。令 $s' \in \lambda(l_c)$。由于 $l_c = \min \mathcal{L}_c$ and $s' < l_c$, $s' \notin \mathcal{L}_c$。然而，$K_{n_{l_c}} \cap K_{n_{i_c}} \subseteq K_{r_{l_c}} \subseteq K_{n_{s'}}$，因此

$$\begin{aligned} K_{n_{s'}} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \supseteq \quad & K_{r_{l_c}} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \supseteq \quad K_{n_{l_c}} \cap K_{n_{i_c}} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \\ (*) \qquad & = \qquad K_{n_{l_c}} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

因此，s' 满足 $\mathcal{L}_c$ 的定义恒等式，由此可得 $s' \in L_1$。所以，$\lambda(l_c) \subseteq L_1$。

取 $\mathcal{S} = V(K_{r_{l_c}})$。若 $|\mathcal{S}| = 1$，则由等式 (*)，$\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}}))$。这意味着$\mathcal{S} \subset V(K_{n_{i_c}})$，且 $S \cap V(K_{r_{i_2}}) = \emptyset$。由于 $y \in V(K_{n_{l_c}} \cap K_{r_{i_2}})$，$y \notin \mathcal{S}$。注意到 L_1 是极大的，且 $l_c \notin L_1$，因此 $x \notin V(K_{n_{l_c}})$。由于 $\mathcal{S} \subset V(K_{n_{l_c}})$，$x \notin \mathcal{S}$。因此我们得到 x，$y \in V(K_{r_{i_2}}) \setminus \mathcal{S}$。将定理 4.5 应用于 $i = i_c$ 和 $j = l_c$，得到矛盾。因此，$|\mathcal{S}| \geq 2$。

固定一个元素 $s_0 \in \lambda(l_c)$。注意到 $\mathcal{S} \in \mathcal{D}(G)$，且 $K_{n_{l_c}} \setminus \mathcal{S}$ 和 $K_{n_{s_0}} \setminus \mathcal{S}$ 位于 $G \setminus \mathcal{S}$ 的不同连通分支中，分别记为 C_1 和 C_2。

断言： $c_G(\mathcal{S}) \geq 3$.

断言的证明：由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，若 $|\mathcal{S}| \geq 3$，则 $b_G(\mathcal{S}) \geq 3$，从而 $c_G(\mathcal{S}) \geq 3$。因此不妨设 $|\mathcal{S}| = 2$。我们知道 $V(K_{n_{l_c}} \cap K_{n_{i_c}}) \subseteq \mathcal{S}$。由等式 (*)，$|\mathcal{S} \cap V(K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}}))| \geq 1$。因此，$|\mathcal{S} \cap V(K_{r_{i_2}})| \leq 1$。

子情况 1：假设 $|\mathcal{S} \cap V(K_{r_{i_2}})| = 1$。注意，$x \in \cap_{l \in L_1} V(K_{n_l}) \subseteq K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}} \cap K_{n_{i_3}} \subseteq K_{r_{i_2}}$。我们已经看到 $x \notin K_{n_{l_c}}$，因此不属于 $\mathcal{S}$。于是，$x \in (K_{n_{i_c}} \setminus \mathcal{S}) \cap K_{r_{i_2}}$。因此，定理 5.6 适用于 $l = i_c$，由此可知 C_2 是非二部的。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，$b_G(\mathcal{S}) = |\mathcal{S}| = 2$。所以，除了 C_1 和 C_2 之外，至少还存在一个连通分支

$G \setminus \mathcal{S}$ 是二部的。因此 $c_G(\mathcal{S}) \geq 3$。
子情形 2：设 $|\mathcal{S} \cap V(K_{r_{i_2}})| = 0$。回忆 $x \in \cap_{l \in L_1} V(K_{n_l}) \setminus \mathcal{S}$。由于 $s_0 \in \lambda(l_c) \subseteq L_1$，可得 $x \in V(K_{s_0}) \setminus \mathcal{S}$，因而 $\cup_{j \in L_1} K_{n_j} \setminus \mathcal{S} \subseteq C_2$。于是 $K_{r_{i_2}} \subset K_{n_{i_1}} \subset C_2$。因此，$C_2$ 是非二部的，因为 $r_{i_2} \geq 3$。与子情形 1 类似，现在可知 $G \setminus \mathcal{S}$ 至少还存在一个二部连通分支。因此 $c_G(\mathcal{S}) \geq 3$。

设 C_3 是 $G \setminus \mathcal{S}$ 的一个连通分支，且不同于 C_1 和 C_2。假设 $l'_c \in [t]$ 满足 $K_{n_{l'_c}} \cap C_3 \neq \emptyset$ 且 $V(K_{n_{l'_c}}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$。那么 $V(K_{n_{l'_c}}) \cap V(K_{n_{l_c}}) \cap V(K_{n_{s_0}}) = V(K_{n_{l'_c}}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$。回忆，$L_1$ 是 $[t]$ 的一个极大子集，且满足 $\cap_{l \in L_1} V(K_{n_l}) \neq \emptyset$。由于 $l_c \notin L_1$，且 $\mathcal{S} = V(K_{r_{l_c}}) \subset V(K_{n_{l_c}})$，$(\cap_{l \in L_1} V(K_{n_l})) \cap \mathcal{S} = \emptyset$。由于 $\mathcal{S} \subseteq K_{n_{s_0}}$，定理 5.3 适用于 $L = L_1$、$l_0 = s_0$、$l'_0 = l'_c$、$l''_0 = l_c$ 和 $S = \mathcal{S}$，表明 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的，这就导致矛盾。

情形 2 - $l_c < i_c$**:**
c = 1: 由于 $l_1 < i_1$, $K_{n_{l_1}} \cap K_{n_{i_1}} \subseteq K_{r_{i_1}}$. 我们知道 $K_{r_{i_2}} \subset K_{n_{i_1}}$. 由于 $l_1 \in \Lambda_1$, $K_{n_{l_1}} \cap (K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset$，并且根据我们的假设 $K_{n_{l_1}} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$. 因此 $|V(K_{n_{l_1}} \cap K_{n_{i_1}})| \geq 2$. 于是 $|V(K_{r_{i_1}})| \geq 2$. 注意，$V(K_{r_{i_1}}) \in \mathcal{D}(G)$，且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。因此，如果 $|V(K_{n_{l_1}} \cap K_{n_{i_1}})| > 2$，那么 $c_G(V(K_{r_{i_1}})) \geq 3$. 由于 $i_1 < i_2$，这与 i_2 的选择相矛盾（定理 5.4）。所以，$|V(K_{r_{i_1}})| = 2$. 因而 $K_{n_{l_1}} \cap K_{n_{i_1}} = K_{r_{i_1}}$. 这意味着 $l_1 \in \lambda(i_1)$（定理 4.2）。在这种情况下，选择 $\mathcal{S} = V(K_{r_{i_1}}) \in \mathcal{D}(G)$。于是 $K_{n_{i_1}} \setminus \mathcal{S}$ 和 $K_{n_{l_1}} \setminus \mathcal{S}$ 位于 $G \setminus \mathcal{S}$ 的不同连通分支中，分别记为 C'_1 和 C'_2。注意，$|\mathcal{S}| = 2$.

现在我们验证定理 5.6 的假设均已满足。首先回顾在 $\cap_{l \in L_1} V(K_{n_l})$ 中选取的顶点 x。由于 L_1 是极大的，且 $l_1 \notin L_1$，因此可得 $x \notin K_{n_{l_1}}$。于是，$x \notin V(K_{r_{i_1}})$，从而 $x \in (V(K_{n_{i_1}}) \setminus \mathcal{S}) \cap V(K_{r_{i_2}})$。特别地，$(V(K_{n_{i_1}}) \setminus \mathcal{S}) \cap V(K_{r_{i_2}}) \neq \emptyset$。还需注意，

$$\mathcal{S} = V(K_{n_{l_1}}) \cap V(K_{n_{i_1}}) = \big(V(K_{n_{l_1}}) \cap (V(K_{n_{i_1}}) \cap V(K_{r_{i_2}})\big) \sqcup \big(V(K_{n_{l_1}}) \cap V(K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}}))\big).$$

如前所述，右侧的两个集合均非空；又因为它们是不交并，且 $|\mathcal{S}| = 2$，可得 $|V(K_{n_{l_1}}) \cap V(K_{n_{i_1}}) \cap V(K_{r_{i_2}})| = 1$，即 $|\mathcal{S} \cap V(K_{r_{i_2}})| = 1$。因此，应用定理 5.6，可得 C'_1 是非二部的。

由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，$b_G(\mathcal{S}) = 2$。因此，$c_G(\mathcal{S}) \geq 3$。设 C'_3 是不同于 C'_1 和 C'_2 的一个连通分支。选择 $l'_1 \in [t]$ 使得 $K_{n_{l'_1}} \cap C'_3 \neq \emptyset$ 且 $K_{n_{l'_1}} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$。由于 $\mathcal{S} \subseteq V(K_{n_{l_1}})$，$L_1$ 是极大的且 $l_1 \notin L_1$，因此 $(\cap_{l \in L_1} V(K_{n_l})) \cap \mathcal{S} = \emptyset$。现在在定理 5.3 中取 $L = L_1$、$l_0 = i_1$、$l'_0 = l'_1$、$l''_0 = l_1$ 和 $S = \mathcal{S}$，我们得出 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的，这就产生了矛盾。

c = 2: 如果 $l_2 < i_2$，那么 $K_{n_{l_2}} \cap K_{n_{i_2}} \subseteq K_{r_{i_2}}$。由于 $l_2 \in \mathcal{L}_2$，$K_{n_{l_2}} \cap (K_{n_{i_2}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset$，这就产生了矛盾。
c = 3: 由于 $l_3 \in \mathcal{L}_3$, $K_{n_{l_3}} \cap (K_{n_{i_3}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset$。由于 $\Lambda_c = \emptyset$, $K_{n_{l_3}} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$。因此，根据 i_3 的选择，$l_3 > i_3$。所以，这种情况不可能发生。□

推论 5.8。 设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，且 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$。如果算法的某次运行 $\mathcal{L}$ 满足 $L_1^0(\mathcal{L}) = L_1$，那么 $V(H_{n(\mathcal{L})}) \cap V(K_{r_{i_2}}) = \{x_1^0\}$。

证明。根据 $L_1^0(\mathcal{L})$ 的选择，$x_1^0 \in \cap_{l \in L_1} V(K_{n_l}) \subseteq V(K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}} \cap K_{n_{i_3}}) \subseteq V(K_{r_{i_2}})$。假设存在 $x_q^p \in V(H_{n(\mathcal{L})}) \setminus \{x_1^0\}$，使得 $x_q^p \in V(K_{r_{i_2}})$。我们知道 $K_{r_{i_2}} \subseteq K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}}$。因此，对于 $j \in \{1, 2\}$，如果 $x \in V(K_{n_{i_j}}) \setminus \{x_1^0, x_q^p\}$，那么 $\{x, x_1^0, x_q^p\}$ 构成一个 3-圈。由于 $H_{\mathrm{n}(\mathcal{L})}$ 是一条路径（定理 4.34），$x \notin V(H_{\mathrm{n}(\mathcal{L})})$。所以，$x \in S(G)$。因此 $V(K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \subseteq V(K_{n_{i_j}}) \setminus \{x_1^0, x_q^p\} \subseteq S(G)$。

断言：对于 $j \in \{1, 2\}$，$V(K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \subseteq S_2(G)$。
断言的证明：我们已经证明了 $V(K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \subseteq S(G)$。现在 $S(G) = S_2(G) \sqcup S_0(G)$，且 $S_0(G) \subseteq \cup_{l \in A_0^n} V(K_{n_l})$。因此，为了证明该断言，只需证明对于任意 $l \in A_0^{\mathrm{n}(\mathcal{L})}$，$K_{n_l} \cap (K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) = \emptyset$。设 $l \in A_0^{\mathrm{n}(\mathcal{L})}$。注意，$x_1^0$，$x_q^p \in V(K_{r_{i_2}})$ 蕴含 $|V(K_{r_{i_2}})| \geq 2$。

情形 1： $|V(K_{r_{i_2}})| \geq 3$**：** 注意， $l \in A_0^0$ (定理 4.7(2))。因此，根据 A_0^0 的定义，$l \notin L_1^0(\mathcal{L}) = L_1$。由于 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$ 和 $l \notin L_1$，由定理 5.7 $K_{n_l} \cap (K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) = \emptyset$ 对于 $j = 1$， 2。

情形 2: $|V(K_{r_{i_2}})| = 2$**:** 那么 $V(K_{r_{i_2}}) = \{x_1^0, x_q^p\}$。因此 $V(K_{r_{i_2}}) \subseteq V(H_{\mathrm{n}(\mathcal{L})})$。那么 $V(K_{n_l}) \cap V(K_{r_{i_2}}) = \emptyset$(见定理 4.28)。由于 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$, $V(K_{n_l}) \cap V(K_{n_{i_j}} \setminus V(K_{r_{i_2}}))$ 对于 $j = 1$,2 应为空。

由于 $K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 和 $K_{n_{i_2}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 均非空，且它们的顶点集互不相交（定理 5.5）， $|S_2(G)| \geq 2$。这与定理 4.33 矛盾，因为 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。□

现在我们可以证明本节的一个重要定理了。

定理 5.9. 如果存在 $i \in [t]$ ，使得 $c_G(V(K_{r_i})) \geq 3$，那么 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。

证明. 我们用反证法证明该断言。假设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。令 $\{i_1, i_2, i_3\}$ 为定理 5.4 中引入的对象， $L_1 \in \Gamma_1^0$ 为包含 $\{i_1, i_2, i_3\}$ 的集合。

情形 1： $\Lambda_c \neq \emptyset$ **对于某个** $c \in [3]$**:** 令 $l_c \in \Lambda_c$。那么 $l_c \notin L_1$, $K_{n_{l_c}} \cap (K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})) \neq \emptyset$ 且 $K_{n_{l_c}} \cap K_{r_{i_2}} = \emptyset$。我们选择 $L_2 \in M(\Gamma_1^0)$, 使得 $i_c, l_c \in L_2$。接下来运行算法，选择$L_1^0 = L_1$和 $L_2^0 = L_2$。于是 $x_1^0 \in V(K_{n_{i_1}} \cap K_{n_{i_2}} \cap K_{n_{i_3}}) \subseteq V(K_{r_{i_2}})$, 且 $x_2^0 \in V(K_{n_{i_c}} \cap K_{n_{l_c}})$。由于 $K_{n_{l_c}} \cap K_{r_{i_2}} = \emptyset$, $x_2^0 \notin V(K_{r_{i_2}})$。证明余下部分将通过对 $\{l_0, l_0', l_0''\} = \{i_1, i_2, i_3\}$（作为无序集合）、 $l_0 = i_c$和 $S = V(K_{r_{i_2}})$ 应用定理 5.2 来完成。注意，对于 $c \in [3]$, $K_{n_{i_c}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 位于 $G \setminus S$ 的三个不同连通分支中（定理 5.5）。要应用定理 5.2(2)，我们只需验证，除 x_1^0 外，没有其他 x_q^p 属于 S。

子情况 1： $c = 1$ **或** $c = 2$**：** 于是 $K_{r_{i_2}} \subset K_{n_{i_c}}$。因此，任意顶点 $v \in V(K_{r_{i_2}})$ 都与x_1^0和 x_2^0相邻。由于 H_{n} 是一条路径（定理 4.34）， $v \notin V(H_{\mathrm{n}})$。因此， $V(H_n) \cap S = \{x_1^0\}$。于是，定理 5.2(2)适用，因此 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的，从而产生矛盾。

子情形 2： $c \neq 1$， 2 **：** 这意味着 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$ 和 $\Lambda_3 \neq \emptyset$。应用定理 5.8，我们看到 $V(H_n) \cap S = \{x_1^0\}$。因此，定理 5.2(2)适用，这与 $\mathcal{I}_G$的无混合性质矛盾。

情形 2：对所有 $c \in [3]$， $\Lambda_c = \emptyset$ ：在这种情况下，我们选择 $L_2 \in M(\Gamma_1^0)$，使得 $L_2 \neq L_1$ 和 $L_2 \cap L_1 \neq \emptyset$。由于 $m([t]) = 0$，存在 L_2 （定理 5.1）。令 $s \in L_1 \cap L_2$。设 C_1、 C_2 和C_3 是 $G \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 的三个不同连通分支，分别包含 $K_{n_{i_1}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$、 $K_{n_{i_2}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 和$K_{n_{i_3}} \setminus V(K_{r_{i_2}})$。由于 $K_{n_s} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 是一个连通子图，它至多与 C_1、 C_2或 C_3中的一个相交。不失一般性，假设 $K_{n_s} \setminus V(K_{r_{i_2}})$ 不与连通分支C_2和 C_3相交。接着，我们在定理 5.2 中取 $l_0 = s$、 $\{l_0', l_0''\} = \{i_2, i_3\}$和 $S = V(K_{r_{i_2}})$。对于算法的任意一次运行 $\mathcal{L}$，若 $L_1^0(\mathcal{L}) = L_1$ 且 $L_2^0(\mathcal{L}) = L_2$，则 $x_1^0 \in \cap_{l \in L_1} V(K_{n_l}) \subseteq V(K_{r_{i_2}})$。由于 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \emptyset$，根据定理 5.8， $V(H_{n(\mathcal{L})}) \cap S = \{x_1^0\}$。因此，应用定理 5.2(2)，得到矛盾。□

由上述定理可立即得出，若一个弦图中存在 i使得 $r_i \geq 3$ ，则该图不可能是无混合的。现在我们考虑这样的弦图 G ：其中任意两个完全图的交集都是单个顶点。这类图在文献中通常称为块图。

定义 5.10. [7] 一个图是块图，当且仅当图中的每个块都是完全图（一个团）。

下一个定理定理 5.11 表明，若图 G 满足上述假设且为块图，则 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。注意，若至少存在三个具有公共交集的完全图，则可由定理 5.9 得出这一结论。否则，团和中至多有两个完全图相交。这一条件结合 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性质，

使我们能够推导出 G 的可能结构。基于这些结构，我们构造某些断连集，并证明它们不满足无混合条件，即 $b_G(T) = |T|$。根据定理 2.6，可以很容易地验证，在定理 5.11 的证明中选取的断连集 T_0、 ..... 、 T_4 及其他断连集都满足符号分裂性质。

定理 5.11。 设 $|V(K_{r_i})| = 1$ 对所有 $i \in [t] \setminus \{1\}$均成立。则 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的。

证明。 假设 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。若至少三个完全图在 G中相交，则存在 $i \in [t]$ 使得 $c_G(V(K_{r_i})) \geq 3$, 这与定理 5.9 矛盾。因此，在 G中相交的完全图至多有两个。设 $i \in [t]$满足 $n_i = \max\{n_j : j \in [t]\}$。若 $n_i = 3$，则 G是一个非二部仙人掌图。我们已经证明，非二部仙人掌图是无混合的，当且仅当 $G = K_3$，见定理 3.10。由于我们已经假设 $\cap_{j\in[t]} K_{n_j} = \emptyset$，图 G 不可能是 K_3。因此，我们再次看到 $\mathcal{I}_G$ 不是无混合的，这与最初的假设矛盾。所以， $n_i \geq 4$。

注意， K_{n_i} 中每个顶点的度至少为 $n_i - 1$。令 $\mathcal{N} = \{v \in V(K_{n_i}) : \deg_G v = n_i - 1\}$。对于任意 $x \in V(K_{n_i}) \setminus \mathcal{N}$，$\deg_G x \geq n_i$，因此存在另一个包含顶点 x的完全图。我们将这个完全图记为 K_{n_x}（例如参见图6）。由于 $V(K_{n_x}) \cap V(K_{n_i}) = \{x\}$， x 是一个割点，因此 $\{x\} \in \mathcal{D}(G)$。此外， $G \setminus \{x\}$ 有两个连通分支，一个包含 $K_{n_i} \setminus \{x\}$，另一个包含 $K_{n_x} \setminus \{x\}$。又由于假设 $b_G(\{x\}) = 1$无混合，因此 $\mathcal{I}_G$。由于 $n_i - 1 \geq 3$，包含$K_{n_x} \setminus \{x\}$ 的连通分支必定是二部图。我们将此连通分支记为 C_x。因此，K_{n_x} 要么是 K_2，要么是 K_3，且只有树图附着在 $V(K_{n_x} \setminus \{x\})$上。令 $y \in V(K_{n_x} \setminus \{x\})$，并考察附着于$y$的树图。注意，如果有非空树图附着于 y，那么 $\{y\} \in \mathcal{D}(G)$。由于 $b_G(\{y\}) = 1$，附着于 y的此类树恰有一棵。此外，如果 y' 是这棵树的一个顶点，且$\deg_G(y') \geq 2$，那么 $\{y'\} \in \mathcal{D}(G)$。因此， $b_G(\{y'\}) = 1$ 意味着$\deg_G(y') = 2$。所以，这棵树必定是一条路径。我们将附着于 y 的路径记为 P_y （示意见图6）。

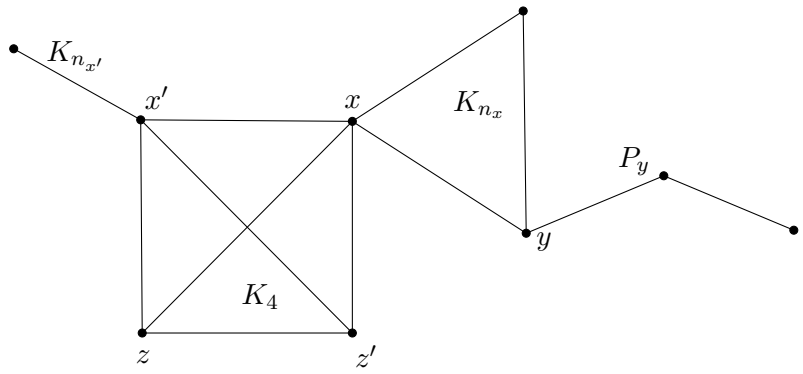

FIGURE 6. 图，包含 $K_{n_i} = K_4$ 和 $\mathcal{N} = \{z, z'\}$

情形 1: $|\mathcal{N}| \geq 4$。令 x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathcal{N}$。注意，集合 $T_0 = V(K_{n_i}) \setminus \{x_1, x_2\}$属于$\mathcal{D}(G)$。 $G \setminus T_0$ 的二部连通分支为 C_x、 $x \in T_0 \cap \mathcal{N}$ 和边 $\{x_1, x_2\}$。因此，我们得出与无混合性矛盾的结论，因为

$$b_G(T_0) = |T_0 \cap \mathcal{N}| + 1 \leq |T_0 \setminus \{x_3, x_4\}| + 1 < |T_0 \setminus \{x_3, x_4\}| + 1 = |T_0| - 2 + 1 = |T_0| - 1.$$

情形 2: $|\mathcal{N}| = 3$。令 x_1, x_2, $x_3 \in \mathcal{N}$。由于 $n_i \geq 4$，存在另一个顶点 $x_4 \in V(K_{n_i})$，因此 $\deg(x_4) > n_i$。所以， $K_{n_{x_4}}$存在。若 $K_{n_{x_4}} = K_2$，则 $T_1 = V(K_{n_i}) \setminus \{x_1, x_4\} \in \mathcal{D}(G)$。 $G \setminus T_1$的二部连通分支为 C_x、$x \in T_1 \setminus \{x_2, x_3\}$ 以及包含 $\{x_1, x_4\}$的连通分支。因此，

$b_G(T_1) = |T_1| - 2 + 1 = |T_1| - 1$，矛盾。若 $K_{n_{x_4}} = K_3$，取 $y_4 \in V(K_{n_{x_4}}) \setminus \{x_4\}$。考虑 $T_2 = T_1 \cup \{y_4\}$。$G \setminus T_2$ 的连通分支为 C_x，$x \in T_1 \setminus \{x_2, x_3\}$，以及包含 $\{x_1, x_4\}$ 和 P_{y_4}的连通分支（若其存在）。根据前面的讨论可知，它们全都是二部的，并且将 T_2 中的任意顶点放回后，包含 $\{x_1, x_4\}$的连通分支都会变成非二部的。因此 $T_2 \in \mathcal{D}(G)$。现在计数得到矛盾，即

$$b_G(T_2) \leq |\{x \in T_1 \setminus \{x_2, x_3\}\}| + 1 + 1 \leq (|T_1| - 2) + 2 = |T_1| < |T_2|.$$

情形 3： $|\mathcal{N}| = 1$或 2。考虑 $T_3 = V(K_{n_i}) \setminus \mathcal{N}$。$G \setminus T_3$的连通分支为 C_x、$x \in T_3$以及一个包含 $\mathcal{N}$中顶点的单独连通分支。由于 $|\mathcal{N}| = 1$ 或 2，这些连通分支都是二部的。因此，$T_3 \in \mathcal{D}(G)$ 和 $b_G(T_3) = |T_3| + 1$，由此得到矛盾。

情形4： $|\mathcal{N}| = 0$。那么存在 K_{n_x}，它是 K_2 或 K_3，并且对于每个$x \in V(K_{n_i})$，都有如上所述的 C_x。

子情形 4.1： 假设存在至少两个顶点，例如 x_1，x_2，属于 K_{n_i}，且对每个 i 都有 $K_{n_{x_i}} = K_2$。考虑 $T_4 = V(K_{n_i}) \setminus \{x_1, x_2\} \in \mathcal{D}(G)$。对于每个 $x \in T_4$，C_x 都是 $G \setminus T_4$的一个二分连通分支；除此之外，还有另一个包含边$\{x_1, x_2\}$的连通分支。因此，T_4 是一个割集，特别地，$T_4 \in \mathcal{D}(G)$。由于所有连通分支都是二部的，$b_G(T_4) = |T_4| + 1$，这与无混合性质矛盾。

子情形4.2：假设在 K_{n_i} 中至多存在一个顶点 y，使得 $K_{n_y} = K_2$；而对于 K_{n_i}中其余所有顶点 x，均有 $K_{n_x} = K_3$。由于 $n_i \geq 4$，存在 x_1、x_2、$x_3 \in V(G)$，使得对每个 i，都有 $K_{n_{x_i}} = K_3$。我们对 $j = 1$选取 $y_j \in V(K_{n_{x_j}}) \setminus \{x_j\}$，其中 2、3。对于 j_1、$j_2 \in \{1, 2, 3\}$，考虑$T_{j_1 j_2} = (V(K_{n_i}) \setminus \{x_{j_1}, x_{j_2}\}) \sqcup \{y_{j_1}, y_{j_2}\}$。$G \setminus T_{j_1 j_2}$ 的连通分支为 C_x（$x \in T_{j_1 j_2} \setminus \{y_{j_1}, y_{j_2}\}$），包含边 $\{x_{j_1}, x_{j_2}\}$ 的连通分支，以及可能存在的路径图$P_{y_{j_1}} \setminus \{y_{j_1}\}$ 或$P_{y_{j_2}} \setminus \{y_{j_2}\}$。$S_{j_1 j_2} \setminus \{y_{j_1}, y_{j_2}\}$ 中的任一顶点都是割点，而若将顶点 y_{j_1} 和 y_{j_2} 放回，则包含边 $\{x_{j_1}, x_{j_2}\}$ 的二部连通分支会变成非二部的。因此，$T_{j_1 j_2} \in \mathcal{D}(G)$ 且 $b_G(T_{j_1 j_2}) \geq |T_{j_1 j_2}| - 1$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，$b_G(T_{j_1 j_2}) = |T_{j_1 j_2}|$。这意味着 $P_{y_{j_1}}$ 和 $P_{y_{j_2}}$ 中恰有一个存在。取 $j_1 = 1$ 并改变$j_2 \in \{2, 3\}$，可知 P_{y_2} 和 P_{y_3} 要么都存在，要么都不存在。现在选取 $j_1 = 2$、$j_2 = 3$，这与 P_{y_2} 和 P_{y_3} 中恰有一个存在相矛盾。

□

6. Classification of unmixed chordal graphs

回顾一下，弦图 G 是 K_{n_1}、K_{n_2}、.....、K_{n_t} 的团和。我们在第5节中观察到，对于弦图而言，$\mathcal{I}_G$ 具有无混合性质的情形非常少见。具体来说，我们看到，当$m([t]) = 0$时，$\mathcal{I}_G$ 在以下条件下不具有无混合性质：

(1) $c_G(V(K_{r_i})) \geq 3$. (2) $|V(K_{r_i})| = 1 \quad \forall i \in [t]$.

我们首先考虑满足 $m([t]) \neq 0$ 的弦图 G。

定理 6.1。如果 $m([t]) \neq 0$，那么 $\mathcal{I}_G$ 具有无混合性质，当且仅当 $G = K_3$。

证明。若 $G = K_3$，则由 [12, 定理 3.5] $\mathcal{I}_G$ 是完全交，因此是无混合的。现在假设 $m([t]) \neq 0$ 且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。由于 $m([t]) \neq 0$，L_1^0 的选择是唯一的，即 $L_1^0 = [t]$。于是我们有 $A_1^0 = [t]$ 和 $A_2^0 = A_0^0 = \emptyset$。这意味着 $D_0 = \{1\}$。因此，H_0 只有一个顶点 x_1^0。此外，经过第一步后，我们得到 $A_2^1 = A_1^0 = [t]$ 和 $A_1^1 = A_0^1 = \emptyset$。所以，算法在第一步后停止。因此，$H_n = H_1$ 和 $S(G) = S_2(G)$，因为 $A_0^1 = \emptyset$。在这种情况下，H_1 是 $G \setminus S(G)$ 的唯一连通分支。这意味着 $V(G) = V(H_1) \sqcup S(G)$。注意，$H_1$ 是一个路径图（由定理 4.35 得出），且 $V(H_1) = V(H_0) \cup \{x_q^1 : q \in D_1\}$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，且$S(G) \neq \emptyset$，$|S(G)| = 1$（由定理 4.33 得出）。所以，由定理 4.19 可知，H_1 要么是 P_2，要么是P_3。

(1) 假设 $H_1 = P_2$。那么 $|V(G)| = |V(H_1)| + |S(G)| = 3$。由于 G 是非二部的，$G = K_3$。(2) 假设 $H_1 = P_3$。那么 $|V(G)| = |V(H_1)| + |S(G)| = 4$。由于 G 是非二部的，它要么是 K_3 与 K_2 在顶点 x_1^0 处的团和，要么是两个 K_3 沿一条边的团和。在第一种情况下，$\{x_1^0\} \in \mathcal{D}(G)$，但 $b(G \setminus \{x_1^0\}) = 2$，这就产生了矛盾。在第二种情况下，若 u，v 是两个 K_3 共有部分之外的顶点，则 $\{u, v\} \in \mathcal{D}(G)$，但 $b(G \setminus \{u, v\}) = 1$，这就产生了矛盾。

□

因此，唯一满足 $m([t]) \neq 0$且无混合的非二部弦图是 K_3。因此，我们接下来要考察满足以下性质的非二部弦图的无混合性：$m([t]) = 0$，$\max\{|V(K_{r_i})| : i \in [t]\} = 2$ 对所有 $i \in [t]$ 均成立，且 $c_G(V(K_{r_i})) = 2$。我们将由这些性质定义的图子类记为 $\mathfrak{G}$。注意，图 1 中引入的图类 $\mathfrak{G}_1$，$\mathfrak{G}_2$ 和$\mathfrak{G}_3$均包含于 $\mathfrak{G}$中。定理 6.3 和定理 6.4 表明，这些子类恰好是 $\mathfrak{G}$ 中满足 $\mathcal{I}_G$ 无混合的那些子类。在证明这些定理之前，我们先指出 $G \in \mathfrak{G}$的一些特殊性质。

注记 6.2. (1) 假设 $G \in \mathfrak{G}$。令 $i \in [t]$ 满足 $|V(K_{r_i})| = 2$。由于 $V(K_{r_i}) \in \mathcal{D}(G)$ 且 $c_G(V(K_{r_i})) = 2$，若 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，则 $b_G(V(K_{r_i})) = c_G(V(K_{r_i})) = 2$。因此，若 $|V(K_{r_i})| = 2$，则 $G \setminus V(K_{r_i})$ 是二部图，且有两个连通分支。

(2) 假设 $G \in \mathfrak{G}$。令 j，$j' \in [t]$，使得 $j \neq j'$。那么 $K_{n_j} \cap K_{n_{j'}}$ 或者包含于 K_{r_j}，或者包含于 $K_{r_{j'}}$。由于 $|V(K_{r_i})| \leq 2$，对所有 $i \in [t]$，$|V(K_{n_j} \cap K_{n_{j'}})| \leq 2$，并且若 $|V(K_{n_j} \cap K_{n_{j'}})| = 2$，则 $K_{n_j} \cap K_{n_{j'}}$ 与 K_{r_j} 或 $K_{r_{j'}}$ 相同。结合 (1)，可得若 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的且$|V(K_{n_j} \cap K_{n_{j'}})| = 2$，则 $G \setminus V(K_{n_j} \cap K_{n'_j})$ 必须是二部图。

定理 6.3. 设 $G \in \mathfrak{G}$。若存在 i，使得 $|V(K_{r_i})| = 2$，且至少有三个完全图与 K_{r_i} 相交，则 $\mathcal{I}_G$ 无混合当且仅当 $G \in \mathfrak{G}_1$ （图 *1*）。

证明。若 $G \in \mathfrak{G}_1$，则根据定理 4.6，$\mathcal{I}_G$ 无混合。设 $\mathcal{I}_G$ 无混合。由于对所有 $i \in [t]$，$G \in \mathfrak{G}$，$c_G(V(K_{r_i})) = 2$。设 $i_2 \in [t]$ 满足定理的假设，即 $|V(K_{r_{i_2}})| = 2$，且至少有三个完全图与 $K_{r_{i_2}}$ 相交。设 $i_1 \in \lambda(i_2)$。考虑 $T_1 = V(K_{r_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$。由定理 6.2(1)，$G \setminus T_1$ 是二部图，且有两个连通分支。因此，$K_{n_{i_1}}$ 和 $K_{n_{i_2}}$ 要么是 K_3，要么是 K_4。设 C_1 和 C_2 分别为 $G \setminus T_1$ 中包含 $K_{n_{i_1}} \setminus T_1$ 和 $K_{n_{i_2}} \setminus T_1$ 的二部连通分支。由于至少有三个完全图与 $K_{r_{i_2}}$ 相交，存在 $j \in [t]$ 使得 $j \neq i_1$、i_2 和 $K_{n_j} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$。由于 $c_G(T_1) = 2$，所以 $K_{n_j} \cap C_1 \neq \emptyset$ 或 $K_{n_j} \cap C_2 \neq \emptyset$。不失一般性，假设 $K_{n_j} \cap C_2 \neq \emptyset$。

断言：存在 $i_3 \in [t]$，使得 $K_{n_{i_3}} \cap K_{r_{i_2}} \neq \emptyset$ 且 $(V(K_{n_{i_3}}) \setminus T_1) \cap (V(K_{n_{i_2}}) \setminus T_1) \neq \emptyset$。断言的证明：取上述的 K_{n_j}。令 $\alpha_l \in V(K_{n_j} \cap K_{r_{i_2}})$，其中某个 $l \in \{1, 2\}$。现在假设 $(V(K_{n_j}) \setminus T_1) \cap (V(K_{n_{i_2}}) \setminus T_1) = \emptyset$。由于 C_2 连通，存在一条最短路径 P：$x = x_0$，....., $x_n = y$，位于 C_2 中，其中 $x \in V(K_{n_j}) \setminus T_1$ 且 $y \in V(K_{n_{i_2}}) \setminus T_1$。由于 x_{n-1} 和 y 相邻，存在 $j' \in [t]$，使得 $x_{n-1}, y \in V(K_{n_{j'}})$。若 $j' < i_2$，则 $V(K_{n_{j'}} \cap K_{n_{i_2}}) \subseteq V(K_{r_{i_2}}) = T_1$。但是 $y \notin T_1$ 和 $y \in V(K_{n_{j'}} \cap K_{n_{i_2}})$。因此，$j' > i_2$。现在若 $K_{n_{j'}} = K_2$，则 $V(K_{r_{j'}}) = \{y\}$ 且 $i_2 \in \lambda(j')$。由于 x_{n-1} 和 α_l 均不属于 $V(K_{r_{j'}})$，它们不可能相邻（定理 4.5）。我们知道 $x_0, \alpha_l \in E(G)$。令 $p = \max\{j \in \{0, \ldots, x_{n-2}\} : \{x_j, \alpha_l\} \in E(G)\}$。那么 $\{x_p, \ldots, x_{n-1}, x_n, \alpha_l\}$ 是 G 和 $n - p + 2 \geq 4$ 的一个诱导 $(n - p + 2)$-圈。由于 G 是弦图，这就产生了矛盾。因此 $|V(K_{n_j})| \geq 3$。由于 $V(K_{n'_j} \setminus T_1) \subseteq V(C_2)$ 且 C_2 是二部图，$K_{n_{j'}} \cap T_1 \neq \emptyset$。我们取 $i_3 = j'$。

注意，在这种情况下，两个完全图至多有两个公共顶点。由于 $T_1 \subset V(K_{n_{i_2}})$,$|V(K_{n_{i_3}} \cap T_1)| = 1$. 令 $\alpha_3 \in V(K_{n_{i_3}} \cap K_{n_{i_2}}) \setminus T_1$ 和 $\alpha_2 \in V(K_{n_{i_3}}) \cap T_1$。则 $V(K_{n_{i_3}}) \cap V(K_{n_{i_2}}) = \{\alpha_2, \alpha_3\}$。由于 C_2 是二部图，$K_{n_{i_3}} = K_3$。令 $T_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$。根据定理 6.2(2)，$G \setminus T_2$ 也是

二部图。因此 $K_{n_{i_1}} = K_3$。但是 $K_{n_{i_2}}$ 要么是 K_3，要么是 K_4。假设 $V(K_{n_{i_1}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}$、$V(K_{n_{i_3}}) = \{\alpha_2, \alpha_3, \beta_2\}$，并且 $V(K_{n_{i_2}})$ 要么是 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，要么是 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$。

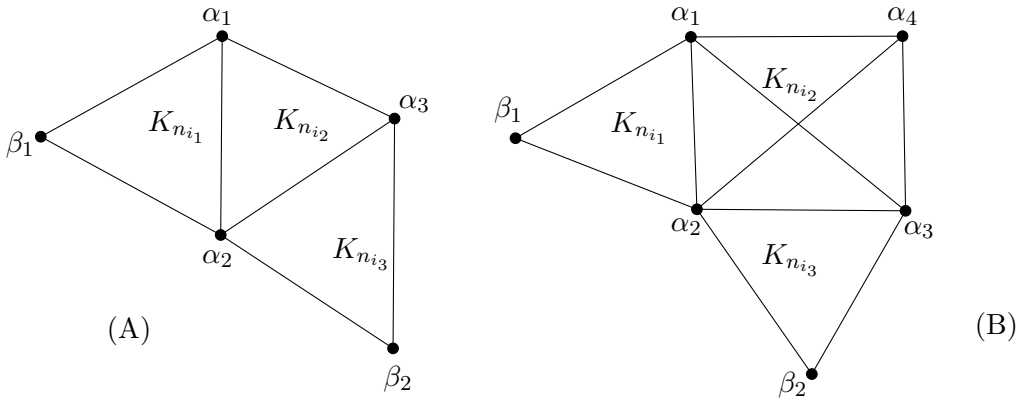

FIGURE 7. 团和 $K_{n_{i_1}}, K_{n_{i_2}}$ 和 $K_{n_{i_3}}$

图7(A)和(B)中的图展示了这些可能性，读者不妨参考它们，以了解接下来的论证。由于 $G \setminus T_1$ 和 $G \setminus T_2$ 是二部图，且 $c_G(T_1) = c_G(T_2) = 2$，我们可以如下确定其他完全图在 $K_{n_{i_1}}$、$K_{n_{i_2}}$ 或 $K_{n_{i_3}}$ 顶点处的连接方式。假设 $i \notin \{i_1, i_2, i_3\}$。则有以下结论：

- K_{n_i} 不包含 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 或 $\{\alpha_2, \alpha_3\}$。
- 如果 $\alpha_1 \in V(K_{n_i})$，那么 β_1、α_3、α_4 中恰有一个属于 $V(K_{n_i})$。
- 若 $\alpha_2 \in V(K_{n_i})$，则 β_2、β_1 或 α_4 中恰有一个属于 $V(K_{n_i})$。
- 若 $\alpha_3 \in V(K_{n_i})$，则 β_2、α_1 或 α_4 中恰有一个也属于 $V(K_{n_i})$。
- 由于 $G \setminus T_1$ 和 $G \setminus T_2$ 是二部的，K_{n_i} 不包含边 $\{\alpha_1, \alpha_4\}$、$\{\alpha_3, \alpha_4\}$、$\{\beta_1, \alpha_1\}$ 和 $\{\beta_2, \alpha_3\}$中的任何一条。

令 e 是边 $\{\beta_1, \alpha_2\}$，$\{\alpha_2, \beta_2\}$ 或 $\{\alpha_1, \alpha_3\}$中的一条。设 $e \in E(K_{n_i})$。那么：

- $K_{n_i} = K_3$。
- 如果 $x \in V(K_{n_i} \setminus e)$，那么只能将树图附着到 x，进一步地，由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，任何这样的树都必须是路径图。如果存在，我们将附着于 x的路径记为 P_x。

注意，附着于 β_1 或 β_2 的路径图 P_{β_1} 或 P_{β_2} 可能存在，但不存在附着于 α_1、α_2 或 α_3的路径图。

情形 1： $K_{n_{i_2}} = K_3$：（如图7(A)所示）。对于 G的任意一条边 $\{z, w\}$，令 $L_{z,\ w} := \{j \in [t] : \{z, w\} \in E(K_{n_j})\}$。首先，我们希望证明存在一个包含$\{\alpha_1, \alpha_3\}$的完全图 $K_{n_i} = K_3$。为此，我们选取

$$T_3 = \{\alpha_1, \alpha_3\} \bigcup \bigcup_{i \in L_{\beta_1, \alpha_2}} (V(K_{n_i}) \setminus \{\beta_1, \alpha_2\}) \bigcup \bigcup_{i \in L_{\beta_2, \alpha_2}} (V(K_{n_i}) \setminus \{\beta_2, \alpha_2\}).$$

那么，包含顶点集 $\{\beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$ 的路径 P 是 $G \setminus T_3$ 的一个连通分支，并且对于每个 $s \in T_3 G[V(P), \cup \{s\}]$ 都是非二部的。因此，$T_3 \in \mathcal{D}(G)$。于是，$|T_3| = b_G(T_3)$。除 P 外，$G \setminus T_3$ 的其他可能连通分支为 $P_x \setminus \{x\}$，其中 $x \in V(K_{n_j}) \setminus \{\beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$，且 $j \in L_{\beta_1,\ \alpha_2} \cup L_{\beta_2,\ \alpha_2}$，

以及包含 $K_{n_i} \setminus T_3$ 的连通分支（当 K_{n_i} 包含 α_1, α_3 时）。由于 $|T_3| = b_G(T_3)$，必定存在某个 $K_{n_i} = K_3$，使得 α_1, $\alpha_3 \in V(K_{n_i})$。令 $V(K_{n_i}) = \{\alpha_1, \alpha_3, \beta_3\}$。取 $T_4 = \{\alpha_1,\alpha_3\} \in \mathcal{D}(G)$。由于 $G \setminus T_4$ 是二部的，不存在这样的 $i' \in [t] \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$，使得 $V(K_{n_{i'}})$ 包含 $\{\beta_1, \alpha_2\}$ 或 $\{\beta_2, \alpha_2\}$。取 $T_5 = \{\beta_1, \alpha_3\} \in \mathcal{D}(G)$，则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3\}$ 是某个二部连通分支的一部分。由于 $b_G(T_5) = 2$, P_{β_1} 存在。类似地，$\{\beta_2, \alpha_1\}$ 和 $\{\beta_3, \alpha_2\}$ 属于 $\mathcal{D}(G)$。因此，P_{β_2} 和 P_{β_3} 存在。于是，G 具有如图 1 所示的类 $\mathfrak{G}_1$ 中的形式。

情形 2: $K_{n_{i_2}} = K_4$: （如图 7(B)所示）。我们选择 $T_6 = \{\alpha_4, \alpha_3, \beta_1\}$。令 B_1 为包含 $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2\}$的二部连通分支。那么对于所有 $s \in T_6$, $G[V（B_1）, \cup \{s\}]$ 都是非二部的。因此，$T_6 \in \mathcal{D}（G）$。由于 $G \setminus T_1$ 是二部的，不存在同时包含 α_4和α_3的 K_{n_j}, $j \neq i_2$。此外，α_3 没有附着路径，因为 $c_G（T_2）= 2$。因此，若 P_{β_1} 和 P_{α_4}存在，$G \setminus T_6$的可能连通分支为 B_1、$P_{\beta_1} \setminus \{\beta_1\}$和 $P_{\alpha_4} \setminus \{\alpha_4\}$。由于 $b_G（T_6）= |T_6| = 3$, P_{β_1}和 P_{α_4} 都必须存在。现在，若取 $T_7 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\} \in \mathcal{D}（G）$，可以看出 $P_{\alpha_4} \setminus \{\alpha_4\}$和 $\{\beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$ 分别属于 $G \setminus T_7$ 的两个二部连通分支。因此，$b（G \setminus T_7）= 2$，这与 $\mathcal{I}_G$的无混合性矛盾。故此情形不可能发生。至此证明完成。□

现在只需对满足以下条件的图 G in $\mathfrak{G}$ 进行分类：对于任意 $x \in V(G)$, x 至多属于两个关于 $i \in [t]$ 的 K_{n_i}。下一条定理将对这类图何时具有无混合性进行分类。

定理 6.4. 设 $G \in \mathfrak{G}$，且至多两个极大完全图在 G 中相交。那么，$\mathcal{I}_G$ 是无混合的，当且仅当 $G \in \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$ （图 *1*）。

证明。如果 $G \in \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$，那么根据定理 4.6，$\mathcal{I}_G$ 是无混合的。现在假设 $G \in \mathfrak{G}$，至多两个极大完全图在 G 中相交，且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。设 $i_2 \in [t]$ 满足 $|V(K_{r_{i_2}})| = 2$且 $i_1 \in \lambda(i_2)$。取 $T_1 = V(K_{r_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$。由于至多两个完全图在$G$中相交，$K_{n_{i_1}}$ 和 $K_{n_{i_2}}$ 是唯一与 $K_{r_{i_2}}$相交的图。因此，$G \setminus T_1$ 有两个连通分支，分别包含 $K_{n_{i_1}} \setminus T_1$ 和 $K_{n_{i_2}} \setminus T_1$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，它们都是二部图，即 $G \setminus T_1$ 是二部图。这个条件连同给定假设意味着 $K_{n_{i_1}}$ 和 $K_{n_{i_2}}$ 要么是K_3，要么是 K_4，并且只有树图可以附着在 $V(K_{n_{i_1}}) \setminus T_1$ 或 $V(K_{n_{i_2}}) \setminus T_1$的顶点上。如果有一棵树附着在某个 $x \in V(K_{n_{i_1}} \cup K_{n_{i_2}}) \setminus T_1$上，那么 $\{x\} \in \mathcal{D}(G)$。由于 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的，$b_G(\{x\}) = 1$。因此，至多一棵树可以附着在 x上。同样，由于 $\mathcal{I}_G$ 的无混合性，这样的树图必须是一条路径。如果它存在，我们将附着在 x 上的路径记为 P_x。由于我们考虑的是 $m([t]) = 0$的情形，因此 G中存在这样一条路径。设 $x_1 \in V(K_{n_{i_1}})\setminus T_1$ 满足P_{x_1} 存在。

情形 1: $K_{n_{i_1}} = K_{n_{i_2}} = K_3$**:**于是 $V(K_{n_{i_1}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_1\}$。令 $V(K_{n_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_2\}$。若存在 P_{x_2}，则集合 $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{D}(G)$。但此时 $b_G(\{x_1, x_2\}) = 3$，这就产生了矛盾。因此，不存在附着于 x_2的路径。因此，如图 1 所示，G 属于第 $\mathfrak{G}_3$ 类。

情形 2: $K_{n_{i_1}} = K_4$**和** $K_{n_{i_2}} = K_3$**:**令 $V(K_{n_{i_1}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_1, y_1\}$和 $V(K_{n_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_2\}$。取 $T_1 = \{y_1, \alpha_1\} \in \mathcal{D}(G)$。于是 $b_G(T_1) = 2$。因此，存在 P_{y_1}。现在，若存在 P_{x_2}，则我们选取 $T_2 = \{x_1, y_1, x_2\} \in \mathcal{D}(G)$。但此时 $b_G(T_2) = 4$，这就产生了矛盾。因此，P_{x_2}不存在。因此，如图 1 所示，G 属于第 $\mathfrak{G}_2$ 类。

情形 3: $K_{n_{i_1}} = K_3$**和** $K_{n_{i_2}} = K_4$**:** 设 $V(K_{n_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_2, y_2\}$和 $V(K_{n_{i_1}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_1\}$。我们取 $T_3 = \{x_1, x_2, y_2\} \in \mathcal{D}(G)$。因此，$b_G(T_3) = 3$。这意味着 P_{x_2} 和 P_{y_2} 中恰有一个存在。不失一般性，假设 P_{x_2} 存在。选取 $T_4 = \{y_2, \alpha_2\} \in \mathcal{D}(G)$，可得 $b_G(T_4) = 1$，这与 $\mathcal{I}_G$的无混合性质矛盾。因此，这种情形不可能发生。

情形4: $K_{n_{i_1}} = K_{n_{i_2}} = K_4$**:** 设 $V(K_{n_{i_2}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_2, y_2\}$且 $V(K_{n_{i_1}}) = \{\alpha_1, \alpha_2, x_1, y_1\}$。集合 $T_5 = \{x_1, y_1, x_2, y_2\} \in \mathcal{D}(G)$。因此，$b_G(T_5) = 4$。这意味着 T_5中恰有一个顶点没有附着路径。不失一般性，假设 x_2 是该顶点。则集合

$\{x_2, \alpha_2, y_1\} \in \mathcal{D}(G)$，但 $b_G(\{x_2, \alpha_2, y_1\}) = 2$，这就产生了矛盾。因此，这种情形不可能出现。证明至此完成。□

最后，我们完成了对所有相应的奇偶二项式边理想为无混合的弦图的分类。

推论 6.5。设 G 是一个弦图。当且仅当 G 是路径图或K_3 或 $G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$时，$\mathcal{I}_G$ 是无混合的。

上述结果还对弦图的另外两个子类——块图和广义块图——所对应的无混合奇偶二项式边理想进行了分类。我们在定义 5.10 中定义了块图。广义块图定义如下。该图类在组合交换代数领域（[10], [4], [11]）中得到了广泛研究。

定义 6.6。如果图 G 满足以下条件，则称其为广义块图：

(1) G是弦图。(2) 对于图中的任意三个极大团 K_1、K_2、K_3，若它们的交集非空 ($K_1 \cap K_2 \cap K_3 \neq \emptyset$)，则它们两两的交集必定相等，即，

$$K_1 \cap K_2 = K_2 \cap K_3 = K_1 \cap K_3.$$

推论 6.7。设 G 是一个简单图，且 $\mathcal{I}_G$ 是无混合的。那么，

- G 是块图，当且仅当 G 是一条路径或 K_3。
- G 是广义块图，当且仅当 G 是一条路径、K_3 或 $G \in \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$。

7. Cohen-Macaulay parity binomial edge ideals

在上一节中，我们刻画了非二部弦图的无混合奇偶二项式边理想。现在我们来刻画其 Cohen-Macaulay 性。由于任何 Cohen-Macaulay 理想都是无混合的，我们需要弄清第 6 节所给出的图中，哪些图对应的理想是 Cohen-Macaulay 的。首先，我们证明一个结果，将研究范围缩小到基本结构。

命题 7.1. 设 G 是一个顶点集为 $[n]$、具有悬挂顶点 u 的图，G' 是通过给 u 添加一个触须得到的图。若 R 表示包含 $\mathcal{I}_{G'}$ 的多项式环，则 深度$(R/\mathcal{I}_{G'})$ =深度$(R/\mathcal{I}_G) - 1$。

证明. 设 $\{u, n+1\}$ 是 G' 和 $g = x_u x_{n+1} - y_u y_{n+1}$ 中的新边。则 $\mathcal{I}_{G'} = \mathcal{I}_G + (g)$。由于 u 是 G 的悬挂顶点，对于每个 $T \in \mathcal{D}(G)$，都有 $u \notin T$。因此，对于每个 $\mathfrak{p} \in \in \text{Min}(\mathcal{I}_G)$，都有 $g \notin \mathfrak{p}$。所以 g 在 $\frac{R}{\mathcal{I}_G}$ 上是正则的，从而得到深度 $(R/\mathcal{I}_{G'}) =$ 深度 $(R/\mathcal{I}_G) - 1$。□

作为一个直接的推论，我们看到 $\mathcal{I}_G$ 和 $\mathcal{I}_{G'}$ 的 Cohen-Macaulay 性等价：

推论 7.2. 设 G 是一个顶点集为 $[n]$、具有悬挂顶点 u 的图，G' 是通过给 u 添加一个触须得到的图。当且仅当 $\mathcal{I}_{G'}$ 是 ***Cohen-Macaulay*** 时，$\mathcal{I}_G$ 才是 ***Cohen-Macaulay***。

我们在第 6 节中看到，非二部弦图的无混合奇偶二项式边理想只有 K_3 或属于 $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$ 的图。若 $G = K_3$ 或 $G \in \mathfrak{G}_3$，则由 [12,定理 3.5] 和 [12, 定理 4.13] 可知，$\mathcal{I}_G$ 是 Cohen-Macaulay。因此，我们只需验证图类 $\mathfrak{G}_1$ 和 $\mathfrak{G}_2$的 Cohen-Macaulay 性质。

可以看出，$\mathfrak{G}_i$ 中的图是通过向图 8 中给出的 G_i的悬挂顶点添加路径得到的。因此，根据定理 7.2，图 $G \in \mathfrak{G}_i$ 是 Cohen-Macaulay 的，当且仅当 G_i（图 8 中）是 Cohen-Macaulay 的。现在，我们借助 Macaulay 2, [6], 来检验其中哪些图是 Cohen-Macaulay 的。

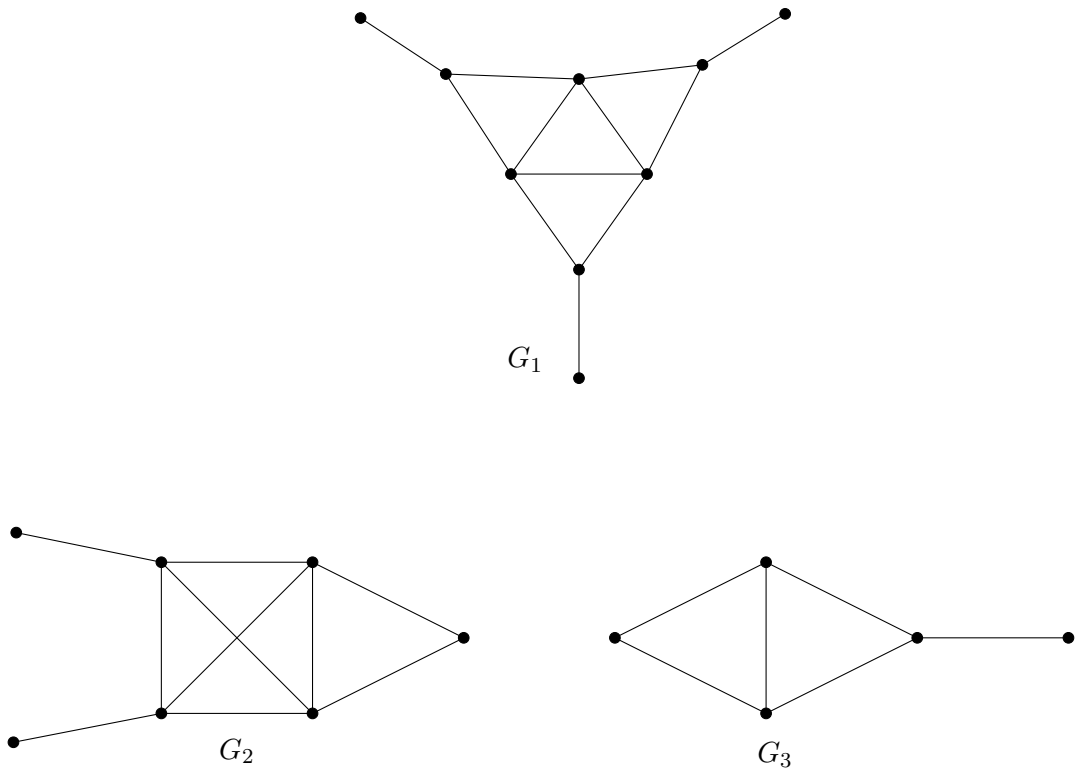

FIGURE 8.

Macaulay 2 的计算表明，$\dim(R/\mathcal{I}_{G_1}) = 11$，$R/\mathcal{I}_{G_1}$ 的射影维数为 9，因此深度 $(R/\mathcal{I}_{G_1}) = 9.$。因此，$\mathcal{I}_{G_1}$ 是无混合的，但不是 Cohen-Macaulay 的。类似地，对于 G_2，可以看出 $\dim(R/\mathcal{I}_{G_2}) = 7$ 且深度$(R/\mathcal{I}_{G_2}) = 6$。因此，$\mathcal{I}_{G_2}$ 是无混合的，而不是 Cohen-Macaulay 的。这些观察结果与定理 7.2 一起给出了所需的刻画：

定理 7.3. 设 G 为弦图，且 $char(K) \neq 2$。那么，当且仅当 G 是路径图，或 K_3 或 $G \in \mathfrak{G}_3$ 时，$\frac{R}{\mathcal{I}_G}$ 是 *Cohen-Macaulay*。

证明。若 G 是二部图，那么我们已经知道，当且仅当 G 是路径图时，$\frac{R}{\mathcal{I}_G}$ 是 Cohen-Macaulay，[5]。现在，若 G 是非二部的，那么当且仅当 $G = K_3$ 或 $G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3$ 时，它是无混合的。由定理 7.2 及上文的讨论即可得出结论。□

ACKNOWLEDGMENTS

第一作者谨此感谢总理研究奖学金（PMRF）计划对本研究工作的支持。我们衷心感谢匿名审稿人，他们认真细致地审阅了本文，并提出了多条意见，显著改善了本文的表述。

DATA AVAILABILITY STATEMENT

本文没有相关数据。

DISCLOSURE STATEMENT

作者未报告任何潜在利益冲突。

References

[1] Davide Bolognini、Antonio Macchia 和 Francesco Strazzanti。二部图的二项式边理想。 *European J. Combin.* 70 1 25, 2018 , : – . [2]

Davide Bolognini、Antonio Macchia 和 Francesco Strazzanti。Cohen–Macaulay二项式边理想与可达图。 *J. Algebraic Combin.*, 55(4):1139–1170, 2022. [3] Samir Bouchiba 和 S Kabbaj。Cohen-Macaulay环的张量积：格罗滕迪克问题的解答。*Journal of Algebra*, 252(1):65–73, 2002. [4] Faryal Chaudhry 和 Rida Irfan。广义块图的广义二项式边理想。 *arXiv preprint arXiv:1709.07668* 2017 , . [5]

Viviana Ene、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。Cohen–Macaulay二项式边理想。 *Nagoya Math. J.*, 204:57–68, 2011. [6] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[7] Frank Harary。块图的一个刻画。 *Canadian Mathematical Bulletin*, 6(1):1–6, 1963. [8] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Freyja Hreinsd´ottir、Thomas Kahle 和 Johannes Rauh。二项式边理想与条件独立陈述。 *Adv. in Appl. Math.*, 45(3):317–333, 2010. [9] Thomas Kahle、Camilo Sarmiento 和 Tobias Windisch。奇偶二项式边理想。 *Journal of Algebraic Combinatorics* 44 1 99 117, 2016 , ( ): – .

[10] Dariush Kiani 和 Sara Saeedi Madani。图的二项式边理想的正则性。 *arXiv preprint arXiv:1310.6126* 2013 , . [11]

Arvind Kumar。广义块图的二项式边理想。 *Internat. J. Algebra Comput.*, 30 1554, 2020 8 1537( ): – .[12] Arvind Kumar。图的 Lov´asz-Saks-Schrijver 理想与奇偶二项式边理想。 *European J. Combin.*, 93:论文编号 103274, 19, 2021. [13] Arvind Kumar 和 Rajib Sarkar。二项式边理想的 Hilbert级数。 *Comm. Algebra*, 47(9):3830–3841, 2019. [14] Giancarlo Rinaldo。仙人掌图的 Cohen-Macaulay二项式边理想。 *Journal of Algebra and Its Applications* 18 04 1950072, 2019 , ( ): . [15]

Douglas B. West。 *Introduction to Graph Theory*。Prentice Hall，第 2 版，2000 年 9 月。*Email address*: ma20d750@smail.iitm.ac.in

Email address: jayanav@iitm.ac.in

Email address: sarangsanemath@gmail.com

Department of Mathematics Indian Institute of Technology Madras Chennai Tamil Nadu India - , „ , 600036.