补边理想的 LICCI 性质

Vivek Bhabani Lama

Abstract. 本文根据底层图刻画了满足 licci 性质的补边理想类。借助这一刻画，我们将补边理想的 licci 性质与其其他代数性质联系起来。最后，我们给出了两个不同的概率范围，在这些范围内，随机图的补边理想分别以高概率是 licci 和以高概率不是 licci。

arXiv:2603.16193v1 [math.AC] 17 Mar 2026

1. Introduction

链接理论是代数几何中一门经典且研究成熟的领域。Peskine 和 Szpiro 在 [22] 中将链接的一般理论转化为理想论对应理论；几十年来，这一直是交换代数中的一个活跃研究领域（例如参见 [3], [5], [13], [14] 和 [17]）。从交换代数的理想论视角研究链接理论，一个备受关注的方面是考察两个链接理想之间性质的转移。对此，研究者广泛研究了$licci$ 理想类，即属于某个完全交的链接类的理想（例如参见 [11] 和 [15]）。

在组合交换代数中，这方面的主要目标一直是通过相关组合对象的组合性质，研究多项式环中理想的 licci 性质（例如参见 [23] 和 [24]）。对于边理想这一类理想，[16, 定理 3.7.]给出了 licci 边理想的完整刻画。对于二项式边理想这一类理想，[6, 定理 3.5.]中也提出了类似的结果。最近，一类与图相关的新理想分别在 [12]和 [8],中被引入，并被命名为补边理想（定义和细节见第 2.1 节）。人们在 [8] 和 [12]中研究了这类理想的基本代数性质，例如对具有线性分解的这类理想的刻画（见 [8, 定理 4.5.] 和 [12, 定理 2.2.]）、这些理想的素分解（见 [8, 定理 2.1.]）、正则性和投射维数的表达式（例如见 [8, 定理 4.1.] 和 [12, 定理 4.2.]），以及其他各种代数性质。

本文的主要目标是根据关联图刻画满足 licci 性质的补边理想。因此，我们证明如下定理：

2020 数学主题分类。05E40,13C05.关键词和短语。补边理想，
Licci 理想。

定理 A（定理 3.2）。设 G 是一个定义在 $\{1,2,\ldots,n\}$上的简单图。则以下条件等价:

(1) $(I_c(G))_{\mathfrak{m}} \subseteq R$ 是 *licci*; *(2)* G 是森林，或 $G = K_3$是有3个顶点的完全图。

我们注意到，这种组合分类揭示了补边理想与其他代数性质之间的联系，而这些性质乍看之下似乎与定理 3.2 的结论无关（见定理 3.6）。定理 3.2 的另一项应用是通过补边理想的 Castelnuovo-Mumford 正则度和投射维数来刻画其 licci 性质（见定理 3.3 和定理 3.4）。

近年来，在组合交换代数中使用概率方法已成为一个活跃的研究领域（例如参见 [2], [4], [7], [21] 及其中的参考文献）。受文献 [1] 使用 Erd˝os-R´enyi 随机图来确定边理想不变量渐近行为的随机版本这一做法的启发，我们给出定理 3.2 的另一项应用，从而提供两种不同的概率区间：在这两种区间内，随机图的补边理想分别以高概率是 licci，以及以高概率不是 licci（见定理 3.5）。

本文分为三节。第 2 节给出基本定义，并引入贯穿全文的一些记号。本节还提及了文献中研究过的图的补边理想的一些性质。第 3 节证明定理 3.2，该定理根据底层简单图刻画 licci 补边理想。本节还给出主要结果的一些应用。

2. Preliminaries

本节介绍贯穿全文所用的各种记号和预备知识。全文中，设 $\mathbb{K}$ 表示一个域，$S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 表示域 $\mathbb{K}$ 上以 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 为不定元的多项式环，其中 $n \in \mathbb{N}$。令 $\mathfrak{m}$ 表示齐次极大理想 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，并令 $R = S_{\mathfrak{m}}$，即 S 在齐次极大理想 $\mathfrak{m}$ 处的局部化。设 M 为一个有限生成的分次 S-模。考虑 M 的分次极小自由分解:

$$0 \to S_p = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}(M)} \xrightarrow{\phi_p} \ldots \xrightarrow{\phi_1} S_0 = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \xrightarrow{\phi_0} M \to 0,$$

其中 $S(-j)$ 是 S 按次数 j 扭曲所得，即对所有 $n \in \mathbb{Z}$， $S(-j)_n := S_{n-j}$。利用上述 M 的最小自由分解构造，我们得到以下不变量:

$$\operatorname{reg}(M) := \max\{j - i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\},$$

$$\text{投射维数}(M) := \text{最大值}\{i : S_i \neq 0\}.$$

最后，对于图 $G = (V(G), E(G))$，令 $V(G)$ 表示图 G的顶点集，并令 $E(G)$ 表示 G 的边集。

2.1. **补边理想**。在本小节中，我们回顾文献中关于补边理想的定义和结果。补边理想这一类理想最早在 [12]中引入，并在 [8]中独立引入。

定义 2.1.1。 设 G 是一个具有 $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ 且边集为$E(G)$的简单图。与 G 相关联的补边理想 是多项式环$S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的如下理想:

$$I_c(G) = (x_1x_2...x_n \setminus x_ix_j \mid \{i, j\} \in E(G)).$$

这些理想的基本性质已在 [8]和 [12]中得到了充分研究。为完整起见，我们陈述其中的一些结果。下面的结果根据底层简单图刻画了补边理想的科恩-麦考利性。

定理 2.1.2。 [8, 定理 2.8。], [12, 定理 1.4。] 设 G是一个简单图，则以下命题等价:

(1) $S/I_c(G)$ 是 Cohen-Macaulay。(2) G 要么是完全图，要么是森林。

下面的结果给出了补边理想的投射维数和 Castelnuovo-Mumford 正则度的界。

定理 2.1.3. [12, 命题 4.1.] 设 G 是顶点集为$\{1, 2, \ldots, n\}$ 的简单图，且 $I_c(G)$ 是 G 的补边理想，它是$S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$中的一个理想。则以下条件成立:

(1) $1 \leq \text{pd}(I) \leq 2$，其中 pd($I$) 表示 I 的投射维数。(2) $n - 2 \leq \text{reg}(I) \leq n - 1$

以下定理根据投射维数刻画了 Cohen-Macaulay 高度 2 的补边理想。

定理 2.1.4. [12, 定理 1.1.] 设 G 是顶点集为$\{1, 2, \ldots, n\}$的简单图，它不是完全图 K_n，且 $I_c(G)$ 是 G 的补边理想，它是 $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的一个理想。那么 $\text{ht}(I_c(G)) = 2$，并且 $S/I_c(G)$ 是 Cohen-Macaulay，当且仅当 $\text{pd}(I_c(G)) = 1$。

特别地，我们给出了森林的补边理想的正则性的显式表达式。

定理 2.1.5. [12, 定理 4.2.] 设 G 是顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的简单图，且 $I_c(G)$ 是 G 的补边理想，它是 $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的一个理想。那么，以下结论成立:

(1) I的投射维数 $= 1$ 和正则性 I当且仅当 G 是一棵树或一个完全图。(2) I的投射维数 $= 1$ 和正则性 I当且仅当 G 是一个非连通森林。

2.2. **Erd˝os-R´enyi 随机图**。 设 G 为一个图， $G(n,p)$ 表示 Erd˝os-R´enyi 随机图，其中 $n \geq 1$ 和 $p \in [0,1]$。 $G(n,p)$ 的顶点集为 $\{1,2,\ldots,n\}$，每个满足 $i \neq j$ 的集合 $\{i,j\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ 都是 $G(n,p)$ 中的一条边，其出现概率为 p，且与其他边相互独立。更准确地说，给定一个图 G，其中 $V(G) = \{1,2,\ldots,n\}$且 $|E(G)| = m$,

$$\mathbb{P}\{G(n,p) = G\} = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

上述表达式表明，所有具有 m 条边的图被选中的概率相同。当 $p > 1$, $G(n,\ p)$ 定义为 $G(n,\ \min(p,\ 1))$ 时，通常会考察 $G(n,\ p)$ 的性质，因为 $n \to \infty$ 和 p 也会随 n 变化。尽管已知 $p := p(n)$，通常仍将其记为 p。 $G(n,\ p)$ 的性质指的是组合性质，即在图同构下保持不变的图的特征。我们将 $G(n,\ p)$ 的补边理想称为随机理想，而不称为 $I_c(G(n,\ p))$。下述定理给出了概率范围，在这些范围内，某个特定图会作为子图出现在 Erd˝os-R´enyi 随机图中:

定理 2.2.1。 [9, 定理 5.3。] 设 H 是一个具有 $|E(H)| > 0$ 的固定图。那么，我们有:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[H \subseteq G(n,p)] = \begin{cases} 1 & n^{(\frac{1}{m(H)})}p \to 0 \\ 0 & n^{(\frac{1}{m(H)})}p \to \infty \end{cases}$$

其中 $m(H) = \max\left\{d(K) = \frac{|E(\ K\ )()|}{|V\ K|} \mid K \text{是} H\right\}$ 的一个子图。

2.3. **Licci 理想**。 本小节中，我们回顾 licci 理想的基本定义和一些相关结果。正如其名称所示，licci 理想是属于某个完全交理想的链接类的一类理想。

定义 2.3.1. 设 R 是一个正则局部环，且 I 和 J 是 R 的两个真理想。若存在 $I \cap J$ 中的一个正则序列 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1,\ldots,\alpha_n$，使得 $I = (\boldsymbol{\alpha}) : J$ 且 $J = (\boldsymbol{\alpha}) : I$，则称 I 和 J 是直接链接的。

注 2.3.2. 两个直接链接的理想 I 和 J 记作 $I \sim J$。

接下来我们回顾正则局部环中理想的链接类这一概念。

定义2.3.3。 如果存在如下形式的一系列直接链接，则称理想 I 和 J 属于同一个链接类 :

$$I = I_0 \sim I_1 \sim \cdots \sim I_m = J$$

注2.3.4。 在定理2.3.3中，如果 J 是一个完全交理想，则称 I 属于一个完全交的链接类（通常称作 I 是一个licci理想）

文献 [13]给出了多项式环中的齐次理想为 licci 的一个必要条件。这是排除各类非licci理想的重要工具。因此，我们回顾文献中的以下定理:

定理2.3.5。 [13, 推论5.12。] 设 I 是标准分次多项式环 $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 中的Cohen–Macaulay齐次理想，其分次极大理想为$\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$。若 $I_{\mathfrak{m}} \subset R = S_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，则

$$\operatorname{reg}(S/I) \geq (\operatorname{ht}(I) - 1)(\operatorname{indeg}(I) - 1)$$

其中，$\operatorname{indeg}(I) = \min\{i : I_i \neq 0\}$ 表示理想 I 的初始次数。

3. Complementary Edge Ideals and the Licci Property

本节证明我们的主要结果，即刻画 licci 补边理想。我们证明，满足这一性质的补边理想，其底层图恰为森林。为证明主要定理，我们首先证明关于完全图的补边理想的高度的一个结果。尽管这一结果此前已在（[8, 推论 2.3.]）中得到确立，我们的证明采用了不同的方法，通过探讨它与完全超图的边理想之间的联系来进行；为求完整起见，我们也将其列出。

引理3.1. 设 $n \geq 3$ 为正整数，且 $G = K_n$ 为顶点集 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的完全图。那么，$\operatorname{ht}(I_c(G)) = 3$。

证明。 注意，对于完全图 $G = K_n$，理想 $I_c(G)$ 是由所有可能的次数为 $n - 2$ 的无平方单项式生成的理想。此外，对于由所有可能的固定次数 d的无平方单项式生成的单项式理想 J，众所周知， J 的高度由 $n - d + 1$ 给出。因此，很容易得到 $\operatorname{ht}(I_c(G)) = n - (n - 2) + 1 = 3$。□

现在，我们证明我们的主要结果，该结果刻画了 licci 补边理想 s.

定理 3.2. 设 G 是一个顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的简单图。则以下条件等价:

(1) $(I_c(G))_{\mathfrak{m}} \subseteq R$ 是 *licci*; *(2)* G 是森林，或 $G = K_3$ 是顶点数为 3 的完全图。

证明。 对于 (1) 推出 (2)，设 $(I_c(G))_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，则 $S/I_c(G)$ 是 Cohen-Macaulay。因此，根据定理 2.1.2， G 要么是完全图，要么 G 是森林。假设 G 是完全图，因此 $G = K_n$，由定理 3.1 可得 $\operatorname{ht}(I_c(K_n)) = 3$。因此，根据定理2.3.5， $I_c(G)$ 的正则性满足以下条件:

$$\operatorname{reg}(I_c(G)) \geq (\operatorname{ht}(I_c(G)) - 1)(\operatorname{indeg}(I_c(G) - 1) + 1.$$

然而，$\operatorname{indeg}(I_c(G)) = n - 2$，因此我们得到以下关于正则性的关系式:

$$\operatorname{reg}(I_c(G)) \geq (\operatorname{ht}(I_c(G) - 1)((n - 2) - 1) + 1 = (3 - 1)(n - 3) + 1.$$

因此，我们得到正则性为 $\operatorname{reg}(I_c(G)) \geq 2n - 6 + 1 = 2n - 5$。然而，根据定理 2.1.3，有 $\operatorname{reg}(I_c(G)) \leq n - 1$。显然，对于 $n \geq 5$，有 $2n-5 > n-1$，这就产生了矛盾，因此 $n \geq 5$ 的 G 不是 K_n。因此，

G 要么是森林，要么是具有 $n = 3$、4 的 $G = K_n$。对于 $n = 4$， K_4 的补边理想与 K_4 的边理想相同，即 $I_c(K_4) = I(K_4)$。然而，$(I(K_4))_{\mathfrak{m}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中不是 licci（参见 [16, 定理 3.7.]）。对于 (2) 推出 (1)：假设 G 是森林，则根据定理 2.1.5，投射维数 $\mathrm{pd}(I_c(G)) = 1$；又由于 G 不是完全的，根据定理 2.1.4， $S/I_c(G)$ 是 Cohen-Macaulay，且 $\mathrm{ht}(I_c(G)) = 2$。由于 $I_c(G)$ 是高度为 2 的理想，且 $S/I_c(G)$ 是 Cohen-Macaulay，因此，$(I_c(G))_{\mathfrak{m}} \subseteq R$ 是 licci理想（详情参见 [22] ）。接下来，若 $G = K_3$ 或 K_4，对于 $n = 3$，有 $G = K_3$，因此 $I_c(G) = I_c(K_3) = (x_1, x_2, x_3)$，这是一个完全交理想，故为 licci。证明完毕。□

定理 3.2 的一个推论是，下面给出了图具有多个连通分支的 licci 补边理想的一种刻画，该刻画涉及其正则性和投射维数。

推论 3.3。设 G 是顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 且具有多个连通分支的简单图。那么，以下条件等价：

(1) $(I_c(G))_{\mathfrak{m}} \subseteq R$ 是 *licci*，*(2)* $S/I_c(G)$ 是 *Cohen-Macaulay*，*(3)* G 是森林，

(4) 正则性$(I_c(G)) = n - 1$ 且 投射维数 $(I) = 1$。

证明。由定理 3.2、定理 2.1.2 和定理 2.1.5 可知，结论显然成立。 □

利用这一刻画，我们得到以下推论，讨论具有 licci 性质的连通图的补边理想的正则性和投射维数。

推论 3.4。设 G 是顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的简单连通图，且 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 不是 K_n，即以 n 个顶点构成的完全图。则以下各项等价：

(1) $(I_c(G))_{\mathfrak{m}} \subseteq R$ 是 *licci*；*(2)* G 是一棵树；*(3)* $S/I_c(G)$ 是 *Cohen-Macaulay*；*(4)* $\mathrm{reg}(I_c(G)) = n - 2$，且 $\mathrm{pd}(I) = 1$。

证明。由定理 3.2、定理 2.1.2 和定理 2.1.5，结论显然。 □

作为定理 3.2 的推论，我们得到以下结果，该结果给出了 Erd˝os-R´eny 随机图对应于 licci 补边理想的显式概率。

推论 3。 **5.** 设 $G(n, p)$ 为 *Erd˝os-R´enyi* 随机图。则有以下结论 *:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[I_c(n,p) \ is \ not \ licci] = \begin{cases} 1 & np \to 0 \\ 0 & np \to \infty \end{cases}$$

证明。 由定理 3.2，只需证明 $G(n,p)$ 包含某个环作为子图的概率极限表达式 $H = C_m$ 对某个 $m \geq 4$ 可表示为：

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[H \text{ is a subgraph of } G(n,p)] = \begin{cases} 1 & np \to 0 \\ 0 & np \to \infty \end{cases}$$

根据定理 2.2.1，只需证明以下等式：

$$m(H) = \max\left\{ d(K) = \frac{|E(K)|}{|V(K)|} \mid K \text{ is a subgraph of } H \right\} = 1.$$

然而，由于 $H = C_m$ 是某个 $m > 3$的环， K 只有以下几种可能：$K = H = C_m$ ，或者 K 是具有 t_1 个顶点的路径，其中 $t_1 \leq m$ ；或者 K 是具有 t_2 个顶点的路径的不交并，其中 $t_2 < m$。在第一种情况下，如果 $K = C_m$ ，显然有$d(K) = 1$ ，因为环的顶点数等于边数。若 K 是具有 t_1 条边的路径，则 $d(K) = \frac{t_1-1}{t_1} = 1 - \frac{1}{t_1} < 1$。最后，若 K 是具有 t_2 条边的路径的不交并，则 $d(K) < 1$,因为在这种情况下顶点数多于边数。因此， $m(H) = 1$ ，证毕。□

由于定理 3.2 给出了 licci 补边理想的组合刻画，我们现在可以将 licci 性质与补边理想的各种看似无关的代数性质联系起来（这里所说的无关，是指在定理 3.2 的组合刻画出现之前，没有理由相信这些代数性质中的某一项会蕴含另一项）。鉴于补边理想的这些性质已在 [8] 和 [12], 中得到广泛研究，我们根据定理 3.2 得到以下不可逆推的蕴含关系：

推论 3.6. 如果$(I_c(G))_{\mathfrak{m}}$ 是 *licci*，则有以下结论：

(1) $I_c(G)$ 是序贯 *Cohen–Macaulay*。

(2) $I_c(G)^\vee$ 是逐分量线性的。*(3)* $I_c(G)^\vee$ 具有线性商。*(4)* $I_c(G)^\vee$ 具有线性分解。

(5) $I_c(G)$ 具有线性分解。

此外，这些蕴含关系均不可逆。

证明。 该推论是定理 3.2 中组合刻画以及 [8, 定理 2.5.] 和 [12, 定理 2.2.]中所证明的各种性质的直接应用。

□

交换代数研究中另一个十分相近且受到积极关注的方向，是对 glicci 理想进行分类和研究（例如参见 [18], [19] 和 [20]）。鉴于此，我们以提出以下问题作为本节的结尾：

问题 3.7. 哪些简单图 G的补边理想$I_c(G)$ 属于某个完全交理想的 *Gorenstein* 链接类？

Acknowledgments

作者谨此感谢导师 Arindam Banerjee 博士在整个项目过程中给予的宝贵建议和指导。作者还衷心感谢 Kanoy Kumar Das 博士进行的宝贵讨论，并指出各种微妙的想法和技术细节；感谢 Shruti Priya 女士审阅稿件并指出语法错误。作者感谢印度政府通过总理研究奖学金资助其开展这项工作。作者感谢使用计算机代数系统 Macaulay2 [10]来检验他们的计算结果。

Funding

作者获得印度 PMRF 奖学金资助。

Conflict of interest

作者声明，对于本文的发表不存在任何利益冲突。

References

1. Arindam Banerjee 和 D Yogeshwaran，厄尔多什–雷尼随机图的边理想 ″′：线性分解、无混合性与正则性，《代数组合学杂志》**58** (2023)，第 4 期，1125–1154。2. Jes´us A De Loera、Sonja Petrovi´c、Lily Silverstein、Despina Stasi 和 Dane Wilburne，随机单项式理想，《代数杂志》**519** (2019)，440–473。3. Mohammad T Dibaei 和 Arash Sadeghi，模的链接与 *Serre* 条件，《纯粹与应用代数杂志》**219**(2015)，第 10 期，4458–4478。4. Anton Dochtermann 和 Andrew Newman，随机子复形与随机边理想的 *Betti* 数，《国际数学研究通知》**2023** (2023)，第 10 期，8832–8871。5. David Eisenbud、Craig Huneke 和 Bernd Ulrich，剩余交与线性幂，《美国数学会汇刊》B 辑**10** (2023)，1333–1355。6. Viviana Ene、Giancarlo Rinaldo 和 Naoki Terai，*LICCI* 二项式边理想，《组合理论杂志》A 辑**175** (2020)，105278，23 页。7. Daniel Erman 和 Jay Yang，随机旗复形与渐近 *syzygy*，《代数与数论》**12** (2018)，第 9 期，2151–2166。8. Antonino Ficarra 和 Somayeh Moradi，补边理想，arXiv 预印本 arXiv:2508.10870 (2025)。9. Alan Frieze 和 Micha-l Karo´nski，随机图导论，剑桥大学出版社，2015。10. Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman，*Macaulay2*：用于代数几何研究的软件系统，见 http://www2.macaulay2.com。11. Robin Hartshorne、Craig Huneke 和 Bernd Ulrich，*licci* 理想的剩余交是 *glicci*，《密歇根数学杂志》**61** (2012)，第 4 期，675–701。12. Takayuki Hibi、Ayesha Asloob Qureshi 和 Sara Saeedi Madani，补边理想，arXiv 预印本 arXiv:2508.09837 (2025)。13. Craig Huneke 和 Bernd Ulrich，链接的结构，《数学年刊》**126**(1987)，第 2 期，277–334。14. ，单项式理想的连络，《伦敦数学学会通报》**39** (2007)，第 3 期，384–392。

15. Jesse Keyton，齐次连系与序列有界 *Licci* 性质，《交换代数杂志》**14** (2022)，第 2 期，181–217。16. Kyouko Kimura、Naoki Terai 和 Ken-ichi Yoshida，由二次单项式生成或偏差为二的 *Licci* 无平方单项式理想，《代数杂志》**390** (2013)，264–289。17. Patricia Klein 和 Jenna Rajchgot，几何顶点分解与连系，《数学论坛：Sigma》，第 9 卷，剑桥大学出版社，2021，e70 页。18. J Migliore 和 Uwe Nagel，单项式理想与完全交的 *Gorenstein* 连系类，《数学汇编》**133**(2002)，第 1 期，25–36。19. Juan Migliore 和 Uwe Nagel，*Glicci* 理想，《数学汇编》**149** (2013)，第 9 期，1583–1591。20. Uwe Nagel 和 Tim R¨omer，*Glicci* 单纯复形，《纯粹与应用代数杂志》**212**(2008)，第 10 期，2250–2258。21. Andrew Newman，随机旗复形同调的单侧尖锐阈值，《伦敦数学学会杂志》(第 2 辑) **109** (2024)，第 3 期，论文编号 e12872，26 页。22. Christian Peskine 和 Lucien Szpiro，代数簇的连系 ´ ´ ´，第一部分，《数学创见》**26** (1974)，第 4 期，271–302。23. Giancarlo Rinaldo 和 Naoki Terai，四维 *licci Gorenstein–Stanley–Reisner* 理想，《越南数学学报》**44** (2019)，第 3 期，691–700。24. ，高度为三的 *Licci* 纯层 *Stanley–Reisner* 理想，《圣保罗数学科学杂志》**17** (2023)，第 1 期，345–386。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, Kharagpur,India - 721302.电子邮箱地址：v.bhabani.lama@gmail.com, vivekbhabanilama@kgpian.iitkgp.ac.in