arXiv:2603.16221v1 [math.GT] 17 Mar 2026

Khovanov 同调上的 Steenrod 平方与一个杯积 I 乘积

ADVIKA RAJAPAKSE

Abstract. Lipshitz-Sarkar 定义了一种精化 Khovanov 同调的稳定同伦类型，并在链环 L 的 Khovanov 同调 $Kh(L)$ 上构造了上同调运算 Sq^i。后来，Mor´an 在 Burnside 范畴中任意增广半单纯对象的 $\mathbb{F}_2$-系数上链复形上提出了一列 cup-i 乘积。将其应用于 Khovanov 函子后，他得到另一列作用于 $Kh(L)$ 上的运算 $\mathfrak{sq}^n$，其中 $\mathfrak{sq}^0$, $\mathfrak{sq}^1$ 与通常的 Steenrod 平方一致。我们证明，Sq^2, ——第一个无法仅凭同调数据计算的 Steenrod 运算——与 Mor´an 的 $\mathfrak{sq}^2$ 一致。

Contents

1. 引言 1 1.1. Khovanov 同调与 Khovanov 稳定同伦 1 1.2. 高阶 Steenrod 平方 2 1.3. 证明提纲 3 2. 背景与定义 3 2.1. 立方体与 Burnside 范畴 3 2.2. 增广半单纯集合 3 2.3. Mor´an 的 cup-i 乘积 4 2.4. Sq^2 公式的背景 5 2.5. 固定排序与边界匹配 6 3. 化简表达式 $\langle \mathfrak{sq}^2(\alpha)\ z\rangle$ 6 4. 两个公式之差是一个余边界 13 附录 A. 基本上链恒等式 17 附录 B. 高级上链恒等式 20 参考文献 26

1. Introduction

1.1. **Khovanov 同调与 Khovanov 稳定同伦。** 在 [Kho00], Khovanov 将 Jones 多项式范畴化。也就是说，对于每个定向链环图 L，他都赋予一个双分次阿贝尔群 $Kh^{i,\,j}(L)$，其分次欧拉示性数就是（未归一化的）Jones 多项式：

$$\chi(Kh^{i,j}(L)) = \sum_{i,j}(-1)^i q^j \operatorname{rank} Kh^{i,j}(L) = (q+q^{-1})V(L).$$

AR 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2136090 的支持。

此外，$Kh^{i,\,j}(L)$，称为*Khovanov* 同调，属于 L，是底层链环的不变量。Khovanov 同调的发现带来了低维拓扑学中的许多重要应用（参见 [Ng05、Pla06、Ras10、Pic20]）。

在 [LS14a], Lipshitz-Sarkar 提出了 Khovanov 同调的空间层面精化，构造了一个空间 $\mathcal{X}(L)$，其稳定同伦类型是一个链环不变量，且其约化上同调为 $Kh^{i,j}(L)$。这一空间提升还带来了许多拓扑学应用（见 [SZ24, LS24, BHS25]）。例如，这一空间提升使我们能够定义作用于 Khovanov 同调的上同调运算，它们源自 Steenrod 平方 Sq^i。前两个运算由恒等式 $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$ 和 $\mathrm{Sq}^1 = \beta$（即 Bockstein）确定。下一个运算 Sq^2,则更难计算，因为 Sq^2 无法仅凭链复形层面的数据确定。尽管如此，Lipshitz-Sarkar [LS14c]给出了一个可计算的公式来计算 Sq^2, ，由此产生了新的可计算协边不变量 [LS14b]。

1.2. **高阶 Steenrod 平方**。在 [LLS20], Lawson-Lipshitz-Sarkar 给出了 Khovanov 谱的若干种重新表述 $\mathcal{X}(L)$，将其表述为一个（严格含幺、弱）2-函子$F_{Kh}(L)$: $2^n \to \mathcal{B}$ 从立方体范畴到 Burnside 范畴。在 [LLS17], 中，他们提出，是否像 Sq^1 和 Sq^2, 一样，存在一种方法，仅利用 $F_{Kh}(L)$ 的数据来计算高阶 Steenrod 平方。

作为对这一问题的一种可能回答，Mor´an [CM20] 定义了一列上同调运算

$$\mathfrak{sq}^n : Kh^{i,j}(L;\mathbb{F}_2) \to Kh^{i+n,j}(L;\mathbb{F}_2), \qquad n \geq 0.$$

这些运算是链环不变量，确实仅取决于 F。为定义 $\mathfrak{sq}^n$，Mor´an 将一个 2-函子 $F\colon 2^N \to \mathcal{B}$ 与一个位于 Burnside 范畴中的增广半单纯对象 $X_\bullet = \Lambda(F)$ 联系起来；该对象具有一个上链复形 $C^*(X_\bullet)$，满足

$$\Sigma C^*(X_\bullet, \mathbb{F}_2) \cong C^*(\mathrm{Tot}\, F; \mathbb{F}_2).$$

这些运算 $\mathfrak{sq}^n$ 定义在同调群 $H^*(X_\bullet;\mathbb{F}_2)$ 上；在 $F = F_{Kh}(L;\mathbb{F}_2)$ 的情形下，它恰好是 $Kh(L)$（相差一个分次移位）。

迄今已知，$\mathfrak{sq}^0$、$\mathfrak{sq}^1$ 分别与恒等运算 Id 和 Bockstein 运算 β一致。

以下定理和推论证实，$\mathfrak{sq}^2$ 确实源自谱 $\mathcal{X}(L)$ 上的 Steenrod 平方 Sq^2 。因此，我们进一步支持这一猜想：对于所有 n，$\mathfrak{sq}^n$确实与 Sq^n 一致。

定理 1.1。令 $X_\bullet = \Lambda(F)$。在典范识别 $\Sigma C^*(X_\bullet;\ \mathbb{F}_2) \cong C^*(\mathrm{Tot}\ F;\ \mathbb{F}_2)$下，这些运算

$$\mathfrak{sq}^2 : H^*(X_\bullet;\mathbb{F}_2) \to H^{*+2}(X_\bullet;\mathbb{F}_2), \qquad \mathrm{Sq}^2 : H^*(\mathrm{Tot}\, F;\mathbb{F}_2) \to H^{*+2}(\mathrm{Tot}\, F;\mathbb{F}_2)$$

一致。

推论 1.2。给定一个定向链环图 L，并令 $X_\bullet = \Lambda(F_{Kh}(L))$ 表示 *Burnside* 范畴中的增广半单纯对象，其定义为 [CM20]。识别

$$\Sigma^{-n_-+1} C^*(X_\bullet;\mathbb{F}_2) \cong \widetilde{C}^*(\mathcal{X}(L);\mathbb{F}_2) \cong \Sigma^{-n_-} C^*(\mathrm{Tot}\, F;\mathbb{F}_2) \cong Kc(L;\mathbb{F}_2).$$

运算 $\mathfrak{sq}^2$：$Kh^{i,\,j}(L;\ \mathbb{F}_2) \to Kh^{i,\,j}(L;\ \mathbb{F}_2)$ 与 *Khovanov* 稳定同伦型 $\mathcal{X}(L)$ 上的第二 *Steenrod* 平方一致。

Mor´an 利用组合定义的一族运算来定义映射 $\mathfrak{sq}^i$

$$\smile_i \colon C^p(X_\bullet;\mathbb{F}_2)\otimes C^q(X_\bullet;\mathbb{F}_2)\to C^{p+q-i}(X_\bullet;\mathbb{F}_2),\qquad i\in\mathbb{Z},$$

类似于 [Ste47 中定义的 cup-i 乘积，MM23]。延续这一类比，他将$\mathfrak{sq}^i$ 定义为 $\mathfrak{sq}^i([\alpha])=[\alpha\smile_{n-i}\alpha]$，适用于 α 任意 n-余循环。基于这一构造，在本文余下部分，我们将$\mathfrak{sq}^2$ 视为从余循环到余循环的运算，并略去符号细节，记作 $\mathfrak{sq}^2(\alpha)=\alpha\smile_{n-i}\alpha$。

另一方面，Lipshitz-Sarkar 的 [LS14a] sq 的推导$^2(\alpha)$ 采用了更具几何性的策略，利用 Brown 表示定理，将 sq$^2(\alpha)$ 计算为 Eilenberg-Maclane 空间 $K(\mathbb{Z}/2,\ n+2)$ 中一个余循环的拉回。

1.3. **证明概要**。 第 2 节将介绍必要的背景，以及两个公式 sq^2， $\mathfrak{sq}^2$ （两者都依赖于若干选择）的定义。第3 节将尽可能简化 Moran 的 $\mathfrak{sq}^2$ 公式。随后，第 4 节将简化两个公式 $\mathfrak{sq}^2(\alpha)$ $-$sq$^2(\alpha)$ 之差，并最终证明它是一个余边界。我们将许多初步引理放在附录 A 和 B中，以突出第 3 节和4节的主要论证。

2. Background and definitions

2.1. 立方体与 Burnside 范畴。本节将为 Mor´an 的工作 [CM20], 以及[LS14c、Raj25] 的工作中 Steenrod 平方的定义提供必要的背景。Khovanov 同调的原始构造 [Kho00]（另见 [BN02]）始于一个 N 维立方体，其中每个顶点对应于一个N交叉链环图 L的一个分辨。每个顶点上都有 Khovanov 链复形的生成元$Kc(L)$，它们对应于圆的标记；而在 $Kc(L)$ 上的微分分量，则由一条沿着两个生成元之间边向下穿过的箭头决定。Lawson-Lipsihtz-Sarkar[LLS17, LLS20] 将这些数据组织成一个（严格含幺、松弛的）2-函子 $F_{Kh}(L)\colon\ 2^N\to\mathcal{B}$从立方体范畴到 Burnside 范畴。应用全化函子并将分次向下平移 N_- 后，他们再次得到 Khovanov 链复形 $Kc(L)$。 $F_{Kh}(L)$ 的主要优势在于，它定义了一个对称谱 $|F_{Kh}(L)|$，使得 $\Sigma^{-n_-}|F_{Kh}(L)|$ 的稳定同伦类型成为一个链环不变量。

我们定义2^N其对象为 A的子集 $\{1,\dots,N\}$，态射为子集的包含映射。关于 Burnside 范畴 $\mathcal{B}$ 和 2-函子 F的定义，请参阅 [LLS20、CM20]。

2.2. **增广半单纯集合**。 在 [CM20], Mor´an 将 2-函子$F:2^N\to\mathcal{B}$ 的数据打包为 Burnside 范畴 中的增广半单纯对象 。

定义 2.1。 令 $\Delta_{\mathrm{inj}*}$ 表示由可能为空的有限序数 $[n]$构成的范畴，其态射仅为保序单射。一个增广半单纯对象 X在（弱）2-范畴 $\mathscr{C}$中是一个从 $\Delta_{\mathrm{inj}*}$到 $\mathscr{C}$的（严格保单位的、松弛）2-函子。

按照惯例，我们用 $X=X_\bullet$、 $X_n=X([n])$ 和 $\partial_U^n=X(\delta_U^n)$ 表示 $U\subseteq[n]$。在实际应用中， $\mathscr{C}$将是 Burnside 范畴 $\mathcal{B}$，因此面映射 $\delta_i^n\colon[n-1]\to[n]$ 对应于张成 $\partial_i^n\colon X_n\to X_{n-1}$。我们给出一些记号，以便在 $\mathcal{B}^{\Delta_{\mathrm{inj}*}}$中定义函子。

定义 2.2. 设 $A=(a_0,\dots,a_n)$ 是 $\{1,\dots,N\}$ 的一个子集，并设 $U\subseteq[n]$ 按 $(u_1,\dots,u_k)$ 排序。我们定义 $A(U)=(a_{u_1},\dots,a_{u_k})$。

我们可以将 2-函子 $F\colon (2^N)^{\mathrm{op}}_{\leq} \to \mathcal{B}$ 视为增广半单纯对象。事实上，考虑映射

$$\Lambda : \mathcal{B}^{(2^N)^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{B}^{\Delta_{\mathrm{inj}\,*}}$$

（事实上这是函子性的），它将 F 映到沿函子 $(2^N)^{\mathrm{op}} \to \Delta_{\mathrm{inj}\,*}$, $A \mapsto [|A|-1]$ 对 F 的左 Kan 延拓。换言之，Λ 将 F 映到一个增广半单纯对象 $X_\bullet = \Lambda(F)$，其定义如下：

$$\begin{aligned} X_n &= \coprod_{|A|=n+1} F(A), && n \geq -1 \\ \partial^n_U &= \coprod_{|A|=n+1} F(A\backslash A(U) \subseteq A), && U \subseteq [n] \\ X(\partial^{n-|V|}_W, \partial^n_V) &= \coprod_{|A|=n+1} F(C \subset B, B \subset A) && V \subset [n], W \subset [n-|V|] \end{aligned}$$

其中 $B = A\backslash A(V)$, $C = B\backslash B(V)$。

记号 2.3。设 $(p,\ q) \in \partial^{n-|V|}_W \times_{X_{n-|V|}} \partial^n_V$。若 $X(\partial^{n-|V|}_W,\ \partial^n_V)$ 将 $(p,\ q)$ 映到 s，那么我们滥用记号，将 $s{=}p \circ q$。

2.3. **Mor´an 的杯积 I**。设 C_* 表示链复形 $C_*(X_\bullet;\ \mathbb{F}_2)$，定义于[CM20]中。Mor´an 定义 $\mathfrak{sq}^i([\alpha]) = [\alpha \smile_{n-i} \alpha]$，其中 $\smile_i$: $C^* \otimes C^* \to C^*$ 将分次降低 i，并定义为某个同态的对偶

$$\nabla_i : C_* \to C_* \otimes C_*.$$

Mor´an 对 ∇_i 的定义类似于 [Ste47、MM23], 中的定义，它们在单纯集合层面定义了一个类似的运算。令 $\mathcal{P}_q(n)$ 表示由 q元整数组成的元组集合，其中每个数至多出现两次（可以想象成间距不均的阶梯），并令 U^+、$U^- \subseteq U$为 U中指标为正的元素所成的子集（定义见 [CM20] ）。Mor´an 定义了一个跨度的余积

$$\nabla^{\binom{n}{q}} = \coprod_{U \in \mathcal{P}_q(n)} \partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+}, \tag{1}$$

其中 $\partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+}$ 是如下形式的张成

$$X_n \times X_n \longleftarrow \partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+} \longrightarrow X_{n-|U^-|} \times X_{n-|U^+|}.$$

最后，他定义

$$\nabla_i := \sum_n \mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}\left(\nabla^{\binom{n}{n-i}} \circ \Delta_n\right),$$

其中 Δ_n: $X_n \to X_n \times X_n$是对角跨度，而 $\mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}$表示 $\mathbb{F}_2$-线性化函子（参见 [CM20]）。因此，对于 α 一个 n-余循环，并将 $z \in X_{n+2}$ 视为上链，我们展开定义进行计算

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{sq}^2(\alpha), z\rangle = \langle \alpha \smile_{n-2}, z\rangle &= \left\langle \alpha \otimes \alpha, \mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}\left(\nabla^{\binom{n+2}{4}} \circ \Delta_{n+2}\right)(z)\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha \otimes \alpha, \mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}\left(\nabla^{\binom{n+2}{4}}\right)(z \otimes z)\right\rangle, \end{aligned}$$

最后，我们注意到 $\alpha\otimes\alpha\in C^n(X_\bullet;\mathbb{F}_2)\otimes C^n(X_\bullet;\mathbb{F}_2)$，这意味着我们可以用更小的张成空间替换$\nabla\binom{n+2}{4}$

$$\nabla^{\binom{n+2}{4}}[2,2]=\coprod_{\substack{U\in\mathcal{P}_4(n+2)\\|U^-|=|U^+|=2}}\partial_{U^-}\wedge\partial_{U^+},$$

并记

$$\langle\mathfrak{sq}^2(\alpha),z\rangle=\Big\langle\alpha\otimes\alpha,\sum_{\substack{U\in\mathcal{P}_4(n+2)\\|U^-|=|U^+|=2}}\mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}(\partial_{U^-}\wedge\partial_{U^+})(z\otimes z)\Big\rangle.$$

2.4. **Sq 的公式背景**[2]。 我们使用一个方便的对象来定义 $\mathrm{sq}^2(\alpha)$，称为 立方特殊图结构 $\Gamma(z,\alpha)$，见 [Raj25]。这些对象以特殊图结构的构造为基础，该构造最初由 [LOS20] 定义，用于给出框架流范畴的一般 Steenrod 平方公式。我们回顾 [Raj25], 中定义的第二 Steenrod 平方的组合公式，它等价于最初的组合公式[LS14c]。不过，首先我们引入一些记号

定义 2.4. 给定一个张成

$$X_m\longleftarrow\partial_U^m\longrightarrow X_l,\qquad(l=m-|U|)$$

以及子集 $S\subset X_m$、 $T\subset X_l$，我们定义

$$S\longleftarrow\partial_U(S,T)\longrightarrow T$$

为由元素 $s\in\partial_U^n$ 构成的张成，其中源属于 S，目标属于 T。当 S是单元素集 $\{z\}$时，我们将 $\partial_U(\{z\},T)$ 记作 $\partial_U(z,T)$。在实际应用中，我们通常将余循环 $\alpha\in C^l(X_\bullet;\mathbb{F}_2)$ 视为子集 $\alpha\subset X_l$，并使用术语 $\partial_U(z,\alpha)$。最后，我们定义$m_U(S,T)=\#\partial_U(S,T)$。记 $\{a,b\}=ab$，则有 $m_{ab}(z,\alpha)=\#(\partial_{ab}(z,\alpha))$。

定理 2.5 ([LS14c],[Raj25])。 设 $\alpha\in C^*(\mathrm{Tot}\ F;\mathbb{F}_2)$ 为一个余循环。对于 $\mathfrak{m}$ 的任意逐面边界匹配 α 唯一确定一个余循环 $\mathrm{sq}^2(\alpha)=\mathrm{sq}^2_{\mathfrak{m}}(\alpha)$，其定义为

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{sq}^2(\alpha),z\rangle:=&\sum_{a<b}ab\cdot m_{ab}(z,\alpha)+\Big(\textstyle\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}(z,\alpha)\Big)/2\\&+\sum_{K\subset\Gamma(z,\alpha)}\big(1+\#\{a\to\overrightarrow{b}\to c\mid a>b\}+\#\{a\to\overleftarrow{b}\to c\mid a<b\}\big).\end{aligned}$$

~在将 $H^*(|F|;\mathbb{F}_2)$ 与 $H^*(\mathrm{Tot}\ F;\mathbb{F}_2)$作典范识别后，我们有

$$\mathrm{Sq}^2([\alpha])=[\mathrm{sq}^2(\alpha)].$$

逐面边界匹配是如下数据：对于 $y\in X_{n+1}$，我们将 $\partial(y,\alpha)$ 分组为形如 (s,t) 的有序对，使得若 $(s,t)\in\partial_a\times\partial_b$是一个有序对，则 $a\le b$。我们采用以下约定，为 α 固定一个逐面边界匹配 $\mathfrak{m}$：

约定 2.6。 对于每个 y，我们将 $\partial(y,\ \alpha)$ 视为 ∂^{n+1} 的子集，从而得到一个诱导排序 $s_1<s_2<\ldots s_r$。我们定义 $\mathfrak{m}$ 具有以下有序对：$(s_1,\ s_2)$、$(s_2,\ s_3)$.....、$(s_{r-1},\ s_r)$。

2.5. 固定排序和边界匹配。 证明恒等式 $\mathfrak{sq}^2 = \mathrm{Sq}^2$ 的困难在于，$\mathfrak{sq}^2$ 和 Sq^2 的两个公式都是通过计算余循环 α 的代表元（分别为 $\alpha \smile_{n-2} \alpha$ 和 $\mathrm{sq}^2(\alpha)$）来定义的，这会造成一定的歧义。一方面，$\alpha \smile_{n-2} \alpha$ 取决于所有张成 ∂_U^n 的排序；另一方面，$\mathrm{sq}^2(\alpha)$ 取决于 α 的逐面边界匹配。我们固定 ∂_U^n 的排序和 α 的逐面边界匹配。

定义 2.7. 在本文余下部分中，我们为我们的跨 ∂_U^n固定排序。首先，我们任意排列形如 ∂_a^n 的跨。接下来，我们排列形如 ∂_{ab}^n 的跨。对于一个跨∂_{ab}^n，我们固定一种排序，并将其称为左断裂排序。该排序定义如下：

(1) 给定 $a < b$ 和两个跨度元素 $s,s' \in \partial_{ab}^{n+2}$，我们写作 $s = p \circ q$，其中 $q \in \partial_a^{n+2}$，$p \in \partial_{b-1}^{n+1}$，并写作 $s' = p' \circ q'$，其中 $q' \in \partial_a^{n+2}$, $p' \in \partial_{b-1}^{n+1}$。(2) 我们对 $\partial_a^{n+2} \times \partial_{b-1}^{n+1}$ 使用字典序，并定义 $s < s'$ 当且仅当根据此字典序有 $(q,p) < (q',p')$。

将每个 ∂_a^n 上的排序推广开来，我们在 $\partial^n := \bigsqcup_a \partial_a^n$ 上采用一种排序：它是唯一一种扩展每个 ∂_a^n 上的排序并满足 $\partial_0^n < \partial_1^n < \dots$的排序。换言之，当 $s \in \partial_a^n$、$t \in \partial_b^n$、$a < b$ 时，我们规定 $s < t$。

我们类似地定义 ∂_{ab}^{n+2} 上的右断 排序，但对于 $q' \in \partial_b^{n+2}$、$p' \in \partial_a^{n+1}$ 并按字典序排序时，我们将 $s = p' \circ q'$ 写作。

注 2.7.1。 术语 左断 排序源于将跨度元素 $s \in \partial_{ab}^n$ 视为模空间 $\mathcal{I}$ 中的一个区间 $\mathfrak{f}^{-1}\mathcal{M}(w,\ u)$（参见 [LS14a、LLS20]，其中给出了等价定义）。写出 $s = p \circ q$ 对应于找到 $\mathcal{I}$ 的“最左”端点。

3. Simplifying the expression $\langle \mathfrak{sq}^2(\alpha)\ z \rangle$

设 α 是一个 n-余循环。本节中，我们尝试尽可能地简化 $\langle \mathfrak{sq}^2(\alpha)\ z \rangle$，然后再将其与 $\langle \mathrm{sq}^2(\alpha)\ z \rangle$进行比较。回顾第2.3 节中的公式

$$\langle \mathfrak{sq}^2(\alpha), z \rangle = \Big\langle \alpha \otimes \alpha, \sum_{\substack{U \in \mathcal{P}_4(n+2) \\ |U^-|=|U^+|=2}} \mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}(\partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+})(z \otimes z) \Big\rangle.$$

Mor´an 构造 $\partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+}$ 的方式略有不同，具体取决于 n 是偶数还是奇数。为便于阅读，我们按照 n 为偶数时的情形进行计算。n 为奇数时的计算也类似，得出的公式几乎完全相同。现在我们展开内部项

$$\sum_{\substack{U \in \mathcal{P}_4(n+2) \\ |U^-|=|U^+|=2}} \mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}(\partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+}), \tag{2}$$

在下列等式中，为简化记号，我们省略“$\mathcal{A}_{\mathbb{F}_2}$”项，并将其隐含表示。项 (2) 可写为

$$\sum_{\substack{U \in \mathcal{P}_4^0(n+2) \\ |U^+|=|U^-|=2}} \partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+} + \sum_{\substack{U \in \mathcal{P}_4^1(n+2) \\ |U^+|=|U^-|=2}} \partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+} + \sum_{\substack{U \in \mathcal{P}_4^2(n+2) \\ |U^+|=|U^-|=2}} \partial_{U^-} \wedge \partial_{U^+}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Bigg(\sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b \text{ even} \\ c,\,d \text{ odd}}} \partial_{ad} \wedge \partial_{bc} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ c,\,d \text{ even} \\ a,\,b \text{ odd}}} \partial_{bc} \wedge \partial_{ad} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,d \text{ even} \\ b,\,c \text{ odd}}} \partial_{ab} \wedge \partial_{cd} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ b,\,c \text{ even} \\ a,\,d \text{ odd}}} \partial_{cd} \wedge \partial_{ab} \\
&\quad + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b,\,c,\,d \text{ odd}}} \partial_{bd} \wedge \partial_{ac} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b,\,c,\,d \text{ odd}}} \partial_{ac} \wedge \partial_{bd} \Bigg) \\
&\quad + \Bigg(\sum_{\substack{a<c<b \\ a \text{ even} \\ b \text{ odd}}} \partial_{ac} \wedge \partial_{cb} + \sum_{\substack{a<c<b \\ a \text{ odd} \\ b \text{ even}}} \partial_{cb} \wedge \partial_{ac} + \sum_{\substack{c<a<b \\ a,\,b \text{ even}}} \partial_{ca} \wedge \partial_{cb} + \sum_{\substack{c<a<b \\ a,\,b \text{ odd}}} \partial_{ca} \wedge \partial_{cb} \\
&\quad + \sum_{\substack{a<b<c \\ a,\,b \text{ even}}} \partial_{ac} \wedge \partial_{bc} + \sum_{\substack{a<b<c \\ a,\,b \text{ odd}}} \partial_{bc} \wedge \partial_{ac} \Bigg) + \sum_{a<b} \partial_{ab} \wedge \partial_{ab} \\
&= I + II + III
\end{aligned}
$$

记号 3.1。 当 $z \in X_{n+2}$ 可由上下文清楚看出时，我们将 $\partial_c(z, X_{n+1})$ 简写为∂_c, $\partial_{ab}(z, \alpha)$ 简写为 ∂_{ab}，并将 $m_{ab}(z, \alpha)$ 记为 m_{ab}。此外，当 $y \in X_{n+1}$时，我们将 $m_a(y, \alpha)$ 写作 $m_a(y)$。

我们记

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{sq}^2(\alpha), z \rangle &= \langle \alpha \otimes \alpha, (I + II + III)(z \otimes z) \rangle \\
&= \langle \alpha \otimes \alpha, I(z \otimes z) \rangle + \langle \alpha \otimes \alpha, II(z \otimes z) \rangle + \langle \alpha \otimes \alpha, III(z \otimes z) \rangle \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III},
\end{aligned}
$$

为了计算**I**，注意到

$$
\begin{aligned}
I = &\sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b \text{ even} \\ c,\,d \text{ odd}}} \partial_{ad} \times \partial_{bc} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ c,\,d \text{ even} \\ a,\,b \text{ odd}}} \partial_{bc} \times \partial_{ad} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,d \text{ even} \\ b,\,c \text{ odd}}} \partial_{ab} \times \partial_{cd} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ b,\,c \text{ even} \\ a,\,d \text{ odd}}} \partial_{cd} \times \partial_{ab} \\
&+ \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b,\,c,\,d \text{ odd}}} \partial_{bd} \times \partial_{ac} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,\,b,\,c,\,d \text{ odd}}} \partial_{ac} \times \partial_{bd}
\end{aligned}
$$

usi利用 $\partial_{ab} \wedge \partial_{cd} = \partial_{ab} \times \partial_{cd}$ if a, b, c, d 互不相同这一事实。因此 .

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} = &\sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,b \text{ even} \\ c,d \text{ odd}}} m_{ad} m_{bc} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ c,d \text{ even} \\ a,b \text{ odd}}} m_{bc} m_{ad} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,d \text{ even} \\ b,c \text{ odd}}} m_{ab} m_{cd} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ b,c \text{ even} \\ a,d \text{ odd}}} m_{cd} m_{ab} \\
&+ \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,b,c,d \text{ odd}}} m_{bd} m_{ac} + \sum_{\substack{a<b<c<d \\ a,b,c,d \text{ even}}} m_{ac} m_{bd},
\end{aligned}
$$

为了计算**II**，我们使用以下记号来重写 II。

记号 3.2。 给定整数 a, b，使得 $a \neq b$，定义

$$
a_b = \begin{cases} a & \text{if } a < b \\ a - 1 & \text{if } a > b \end{cases}
$$

本文中我们始终只在此记号里使用字母 a, b, c, d。这个定义的便利之处可从张成空间的同构看出

$$\partial_{a_b}^{n-1} \circ \partial_b^n \cong \partial_{ab}^n \cong \partial_{b_a}^{n-1} \circ \partial_a^n.$$

现在我们可以将 II 改写为

$$II = \sum_c \Big(\sum_{\substack{a,b\neq c \\ a<b \\ a_c,\, b_c \text{ even},}} \partial_{ac} \wedge \partial_{bc} + \sum_{\substack{a,b\neq c \\ a<b \\ a_c,\, b_c \text{ odd},}} \partial_{bc} \wedge \partial_{ac} \Big).$$

由 [CM20] 可知，若 a、b、c 两两不相交，则 $\partial_{ac} \wedge \partial_{bc}$ 可视为 $\partial_{ac} \times \partial_{bc}$ 的子集，它恰好由满足以下条件的配对 $(s_0$、$t_0)$ 组成：若 $s_0 = p \circ s \in \partial_{a_c} \circ \partial_c$、$t_0 = q \circ t \in \partial_{b_c} \circ \partial_c$，则 $s < t$。引入以下记号后，我们将其记为 **II**。

定义 3.3。设 $A \longleftarrow E \longrightarrow B$ 为一个张成，并设 $s \in E$。我们将 $s_{\text{in}} \in A$、$s_{\text{out}} \in B$ 分别记为 s 的源元素和目标元素。

$$\begin{aligned} \mathbf{II} &= \sum_{\substack{s,t\in\partial_c \\ s<t}} \left(\sum_{\substack{a,b\neq c \\ a<b \\ a_c,\, b_c \text{ even}}} m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(t_{\text{out}}) + \sum_{\substack{a,b\neq c \\ a>b \\ a,\, b \text{ odd}}} m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(t_{\text{out}}) \right) \\ &= \sum_{\substack{s,t\in\partial_c \\ s<t}} \left(\sum_{\substack{a<b \\ a,\, b \text{ even}}} m_a(s_{\text{out}}) m_b(t_{\text{out}}) + \sum_{\substack{a>b \\ a,\, b \text{ odd}}} m_a(s_{\text{out}}) m_b(t_{\text{out}}) \right). \end{aligned}$$

直接参照 $\partial_{ab} \wedge \partial_{ab}$ 中 [CM20], 的定义，我们得到

(3)

$$\mathbf{III} := \sum_{a<b} \sum_{s,t\in\partial_{ab}} \#\left\{\text{positive maximal chains } (W^{\|}, W^{\circ}) \prec (\emptyset, \{a,b\}) \text{ of } (s,t)\text{-good pairs}\right\}.$$

我们将**III** 更明确地改写，不过先引入一些额外的记号。

定义 3.4. 设 P 是一个命题。我们定义

$$1|_P = \begin{cases} 1 & \text{if } P \text{ is true} \\ 0 & \text{if } P \text{ is false.} \end{cases}$$

引理 3.5. 我们有

$$\mathbf{III} = \sum_{a<b} \#\left\{ \{s,t\} \subset \partial_{ab} \;\middle|\; \textit{left-break order of } \{s,t\} \textit{ disagrees with right-break order} \right\}.$$

证明。在公式 (3) 中，**III**里只有满足 $s < t$ 的指标有贡献，因为当 $s > t$ 时不存在正极大链（见 [CM20]）。因此，只需证明：对于任意 s，t满足 $s < t$的情形，(s, t)-良好对的正极大链数为奇数，当且仅当 $\{s, t\}$ 的左断裂序与右断序不一致。根据我们的排序约定，后一命题等价于右断序为 (t, s)。因此，我们的引理可由以下命题推出：

$$\#\{(s,t)\text{-良好对的正极大链}\} \equiv \begin{cases} 1 & \text{若右断序为}(t,s) \\ 0 & \text{若右断序为}(s,t) \end{cases} \pmod 2.$$

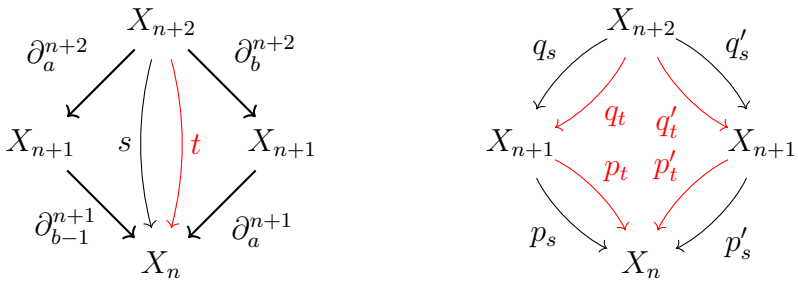


FIGURE 1. 左：张成 $\partial_{ab} = \partial_{ab}(z)$ 中的元素 s，t。粗箭头表示张成 ∂_a^{n+2}，∂_b^{n+2}，∂_{b-1}^{n+1}，∂_a^{n+1}。右：我们将 s 和 t 都写成 $\partial_{b-1} \circ \partial_a$ 中的复合（沿图的左侧进行复合），或者写成 $\partial_a \circ \partial_b$ 中的复合（沿图的右侧进行复合）。

记作 $s = p_s \circ q_s \in \partial_{b-1} \circ \partial_a$和 $s = p_s' \circ q_s' \in \partial_a \circ \partial_b$。类似地，记作 $t = p_t \circ q_t \in \partial_{b-1} \circ \partial_a$和 $t = p_t' \circ q_t' \in \partial_a \circ \partial_b$（图示见图 1）。现在我们来计算$(s,t)$-良好对的正极大链的数量。这个数量取决于 $q_s = q_t$和 $q_s' = q_t'$是否成立。总共有 4 种情况，但我们只考虑其中两种，因为其余情况的验证类似。首先引入一些有助于计算的记号。先考虑这些等式均不成立的情况。此时，唯一可能的正极大链为$(\emptyset, \{a\}) \prec (\emptyset, \{a,b\})$和$(\emptyset, \{b\}) \prec (\emptyset, \{a,b\})$。第一条链为正，当且仅当（这里我们用到了 n 为偶数这一事实）$q_s < q_t$。第二条链为正，当且仅当$q_s' < q_t'$。但注意到，根据定义 2.7，$s < t$ 蕴含 $q_s < q_t$。因此，(s,t)-良好对的正极大链数量为

$$1 + 1|_{q_s' < q_t'} = 1_{q_t' < q_s'} = \begin{cases} 1 & \text{if right-break order of } \{s,t\} \text{ is } (t,s) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{（模 2）。}$$

现在假设 $q_t = q_s$，但 $q_t' \neq q_s'$。唯一可能的正极大链为 $(\emptyset, \{b\}) \prec (\emptyset, \{a,b\})$，以及 $(\{a\}, \{b\}) \prec (\emptyset, \{a,b\})$。第一条链为正，当且仅当$q_s' < q_t'$；第二条链为正，当且仅当 $p_s < p_t$。但注意，$s < t$ 蕴含$p_s < p_t$，根据定义 2.7。我们再次看到，正极大链的数量为 1（模 2），当且仅当右断序为 (t, s)。□

现在我们回过头来展开项**I**，将求和指标中繁复的条件替换为仅在相应指标处取值为 1 的项。

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = &\sum_{a<b<c<d} (abd + acd + abc + bcd + ab + cd) m_{ad} m_{bc} \\ &+ \sum_{a<b<c<d} (abd + acd + abc + bcd + bc + ad) m_{ab} m_{cd} \\ &+ \sum_{a<b<c<d} (abd + acd + abc + bcd + ab + ac + ad + bc + bd + cd + a + b + c + d + 1) m_{ac} m_{bd}, \end{aligned}$$

将其改写为

$$\sum_{a<b<c<d}(abd+acd+abc+bcd)(m_{bc}m_{ad}+m_{v}m_{ab}+m_{ac}m_{bd})$$
$$+\sum_{a<b<c<d}\Big((ab+cd)(m_{ad}m_{bc}+m_{ac}m_{bd})+(ad+bc)(m_{ab}m_{cd}+m_{ac}m_{bd})+(ac+bd)(m_{ac}m_{bd})\Big)$$
$$+\sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd}+\sum_{a<b<c<d}m_{ac}m_{bd}$$

引理 3.6. 公式中 I 的第一项等于 0。换句话说 ,

$$\sum_{a<b<c<d}(abd+acd+abc+bcd)(m_{bc}m_{ad}+m_{cd}m_{ab}+m_{ac}m_{bd})=0. \tag{4}$$

证明。 等式（4）的左侧可写为

$$\sum_{c<d}cd\cdot m_{cd}\underbrace{\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}}_{=0}+\sum_{c}c\sum_{\substack{a<b\\a,b\neq c}}(a+b)m_{ac}m_{bc}+\sum_{a<b}\underbrace{ab(a+b)}_{=0}m_{ab}m_{ab}$$
$$=\sum_{c}c\sum_{\substack{a<b\\a,b\neq c}}(a+b)m_{ac}m_{bc}=0 \pmod 2 \qquad \text{(by Lemma A.9).} \qquad \square$$

.

引理 3.7。

$$\sum_{\substack{a<b,\ c<d\\ disjoint}}(a+b)(c+d)m_{ab}m_{cd}=\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}ab\cdot m_{ac}m_{bc}+\sum_{a<b}ab\cdot m_{ab} \tag{5}$$

证明。

$$0=\Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}(z)\Big)^2/2$$
$$=\sum_{\substack{a<b,\ c<d\\ \text{disjoint}}}(a+b)(c+d)m_{ab}m_{cd}+\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}(a+c)(b+c)m_{ac}m_{bc}$$
$$+\Big(\sum_{a<b}\big((a+b)m_{ab}\big)^2\Big)/2$$
$$=A+B+C$$

现在我们将 B 写作如下：

$$B=\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}(c+c(a+b)+ab)m_{ac}m_{bc}$$
$$=\sum_{c}c\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}m_{ac}m_{bc}+\sum_{c}\sum_{\substack{a<b\\\neq c}}c(a+b)m_{ac}m_{bc}+\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}ab\cdot m_{ac}m_{bc}$$
$$=\sum_{c}c\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}m_{ac}m_{bc}+0+\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\a<b}}ab\cdot m_{ac}m_{bc} \qquad \text{(By Lemma A.9)}$$

$$= B' + \sum_c \sum_{\substack{a,b\neq c \\ a<b}} (am_{ac})(bm_{bc})$$

其中， B' 定义为

$$\begin{aligned} B' &= \sum_c c\left(\binom{\sum_{a\neq c} m_{ac})}{2} - \sum_{a\neq c}\binom{m_{ac}}{2}\right) \\ &= \sum_c c\frac{\sum_{a\neq c} m_{ac}}{2} + \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} \\ &= \frac{\sum_c c\sum_{a\neq c} m_{ac}}{2} + \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} \\ &= \frac{\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}}{2} + \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} \end{aligned}$$

现在我们可以将 C 改写如下：

$$\begin{aligned} C &= \Big(\sum_{a<b}(a^2+2ab+b^2)m_{ab}^2\Big)/2 \\ &= \sum_{a<b} ab\cdot m_{ab}^2 + \Big(\sum_{a<b}(a^2+b^2)m_{ab}^2\Big)/2 \\ &= \sum_{a<b} ab\cdot m_{ab} + \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} + \Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}\Big)/2, \end{aligned}$$

其中第三个等号来自方程

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{a<b}(a^2+b^2)m_{ab}^2\Big)/2 &= \sum_{a<b}\Big(am_{ab}(am_{ab}-1)\Big)/2 + \Big(bm_{ab}(bm_{ab}-1)\Big)/2 \\ &\quad + \sum_{a<b}\Big((a+b)m_{ab}\Big)/2 \\ &= \sum_{a<b}\binom{am_{ab}}{2} + \binom{bm_{ab}}{2} + \Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}\Big)/2 \\ &= \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} + \sum_{a<b} m_{ab}\left(\binom{a}{2}+\binom{b}{2}\right) \qquad \text{(Using Lemma A.8)} \\ &\quad + \Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}\Big)/2 \\ &= \sum_{a<b}(a+b)\binom{m_{ab}}{2} + 0 + \Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}\Big)/2 \qquad \text{(Using Lemma A.5)} \end{aligned}$$

合并 $A+B+C$起来，我们得到方程（5），这就是我们引理的命题。 □

我们即将给出 $\langle \mathfrak{sq}(\alpha)\ z\rangle$ 的最终公式，但希望将由余边界产生的项商掉。我们将采用以下定义。

定义 3.8。设 f，$g \in C^{n+2}(X_\bullet;\ \mathbb{F}_2)$ 是两个上链。若存在一个余边界 $f = g$ 模余边界使得 $\delta\omega \in C^{n+2}(X_\bullet;\ \mathbb{F}_2)$，则称 $f - g = \delta\omega$。我们也滥用记号，称 $f\ (z)\ = g\ (z)$ 模余边界。

命题 3.9。我们可以将 $\langle \mathfrak{sq}(\alpha)\ z\rangle$ 改写为

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{sq}(\alpha), z\rangle = &\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab\cdot m_{ac}m_{bc} + \sum_{a<b} ab\cdot m_{ab} + \sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd}\\
&+ \sum_{K\subset\Gamma(z,\alpha)}\left(1+\#\{a\to\overrightarrow{b}\to c \mid a>b\}+\#\{a\to\overleftarrow{b}\to c \mid a<b\}\right)\\
&+ \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}}) + \sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2}\\
&+ \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\ even}} m_a(s_{\text{out}})m_b(t_{\text{out}}) + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\ odd}} m_b(s_{\text{out}})m_a(t_{\text{out}}).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

模余边界。

证明。回忆一下，$\langle \mathfrak{sq}(\alpha)\ z\rangle = \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III}$，其中

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} = &\sum_{a<b<c<d}(abd+acd+abc+bcd)(m_{bc}m_{ad}+m_v m_{ab}+m_{ac}m_{bd})\\
&+\sum_{a<b<c<d}\Big((ab+cd)(m_{ad}m_{bc}+m_{ac}m_{bd})+(ad+bc)(m_{ab}m_{cd}+m_{ac}m_{bd})+(ac+bd)(m_{ac}m_{bd})\Big)\\
&+\sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd}+\sum_{a<b<c<d}m_{ac}m_{bd}
\end{aligned}
$$

由引理 (3.6)，可知第一个求和为 0。将引理 B.3 中的方程 (5) 从引理 3.7中的方程 (7) 中的第二个求和等于

$$\sum_{c}\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab\cdot m_{ac}m_{bc} + \sum_{a<b} ab\cdot m_{ab}.$$

最后，我们根据命题 B.4回忆

$$
\begin{aligned}
\sum_{a<b<c<d} m_{ac}m_{bd} = &\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\\
&+\sum_{a<b}\#\left\{\{s,t\}\subset\partial_{ab}(z,\alpha)\ \middle|\ \text{left-break order of } \{s,t\} \text{ agrees with right-break order}\right\}\\
&+\sum_{K}(1+\#\{a\to\overrightarrow{b}\to c \mid a>b\}+\#\{a\to\overleftarrow{b}\to c \mid a<b\}) \mod \text{coboundary}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

现在回顾引理 3.5 指出

$$\mathbf{III} = \sum_{a<b}\#\left\{\{s,t\}\subset\partial_{ab}(z,\alpha)\ \middle|\ \text{left-break order of } \{s,t\} \text{ disagrees with right-break order}\right\}$$

我们将此项加到公式（7）的第二行，得到 $\sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2}$。

我们已经证明，和 **I** + **III** 给出了方程（6）中除最后一行以外的所有内容。最后一行恒等于**II**，至此证明完成。□

4. The difference of the two formulas is a coboundary

接下来我们要证明差值 $\mathrm{sq}^2(\alpha)-\mathfrak{sq}^2(\alpha)$ 是一个余边界。利用命题3.9，我们可以将该差值写成如下形式。

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{sq}^2(\alpha)-\mathfrak{sq}^2(\alpha), z\rangle \\
&= \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab\cdot m_{ac}m_{bc} + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{a,\,b\ \text{even}\\ a<b}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{a,\,b\ \text{odd}\\ a>b}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd} + \sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2} + \Big(\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}(z)\Big)/2
\end{aligned}$$

本节余下部分将逐步简化上述公式，最终证明它模余边界等于 0。下面的命题是我们的第一步（也是最复杂的一步）：

命题 4.1。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab\cdot m_{ac}m_{bc} + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,\,b\ \textit{even}\\ a<b}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{a,\,b\ \textit{odd}\\ b<a}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}})\Big) \\
&= \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} (a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}} (a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \textit{disjoint,}\\ c<a}} m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big) + \sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{c<a<b} m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \quad \mathrm{mod\ coboundary}\,.
\end{aligned}$$

证明。 对于给定的 $s<t$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,\,b\ \text{even}\\ a<b}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{a,\,b\ \text{odd}\\ b<a}} m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) \\
&= \sum_{a<b}(a+1)(b+1)m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{a>b}(ab)m_a(s_{\mathrm{out}})m_b(t_{\mathrm{out}}) \\
&= \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}}(a_c+1)(b_c+1)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a>b}}(a_cb_c)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (a+1|_{a<c})(b+1|_{b<c}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a>b}} (a+1|_{c<a})(b+1|_{c<b}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&= \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (ab+b|_{a<c}+a|_{b<c}+1|_{b<c}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a>b}} (ab+b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<b}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}).
\end{aligned}
$$

相加

$$
\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}} \sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}),
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (ab+b|_{a<c}+a|_{b<c}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a>b}} (ab+b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \Big) \\
&= \sum_{a<b} (b|_{a<c}+a|_{b<c}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) + \sum_{a>b} (b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \Big) \\
&\quad + \sum_{a<b} ab\big(m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) + m_{b_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{a_c}(t_{\mathrm{out}})
\end{aligned}
$$

现在对所有的 $s,t\in\partial_c(z)$ 求和，$s<t$。相加

$$
\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab\cdot m_{ac} m_{bc},
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}} \Big(\sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (b|_{a<c}+a|_{b<c}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a>b}} (b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \Big) + \sum_{s\in\partial_c(z)} \sum_{a<b} ab\cdot m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(s_{\mathrm{out}}) \\
&= \sum_{\substack{s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}} \Big(\sum_{a<b} (b|_{a<c}+a|_{b<c}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \\
&\quad + \sum_{a>b} (b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}) \Big) \\
&\quad + \sum_{s\in\partial_c(z)} \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (b|_{c<a}+a|_{c<b}+1|_{c<a}) m_{a_c}(s_{\mathrm{out}}) m_{b_c}(s_{\mathrm{out}}) \mod \text{coboundary},
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式由引理 A.4 得出。加上

$$\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}}(a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}}(a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}}),$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}}\Big(\sum_{a<b}(a|_{c<a}+b|_{c<b}+1|_{c<a})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\\
&\quad+\sum_{a>b}(a|_{c<a}+b|_{c<b}+1|_{c<a})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big)\\
&\quad+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a,b\neq c,\\ a<b}}(a|_{c>a}+b|_{c>b}+1|_{c<a})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}})\\
=&\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}}\Big(\sum_{a,b\neq c}(a|_{c<a}+b|_{c<b})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a,b\neq c,\\ a<b}}(a|_{c>a}+b|_{c>b})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}})\\
&\quad+\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \text{disjoint}}}(1|_{c<a})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big)+\sum_{\substack{c\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a,b\neq c,\\ a<b}}(1|_{c<a})m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}})
\end{aligned}$$

现在利用引理 A.6，我们可以通过加上公式（ $a|_{c>a}+b|_{c>b}$ （其中的项恒等于零）来反转上述项中的不等式。11）。由引理 A.3可知，前两个求和相加后模余边界为 0。因此剩下后两个求和，它们等于

$$\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c(z)\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \text{disjoint},\\ c<a}}m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{c<a<b}m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}}).\qquad\square$$

Usin由命题 4.1，我们可以将差公式简化如下 s:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{sq}^2(\alpha)-\mathfrak{sq}^2(\alpha),z\rangle\\
&=\sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd}+\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}}(a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\\
&+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}}(a+b)m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(s_{\mathrm{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}c\frac{m(s_{\mathrm{out}})}{2}+\sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2}\\
&+\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \text{disjoint},\\ c<a}}m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{c<a<b}m_{a_c}(s_{\mathrm{out}})m_{b_c}(t_{\mathrm{out}})\mod\text{coboundary}.
\end{aligned}$$

我们利用以下引理简化该表达式中的最后三项：

引理 4.2。

$$\begin{aligned}&\sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2}+\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \text{disjoint},\\ c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{c<a<b} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\\ &=\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\binom{\sum_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}})}{2}\pmod 2.\end{aligned}\tag{8}$$

证明。 首先注意，$\binom{m_{ab}}{2}$ 统计了 ∂_{ab}中的有序对。以下量同样统计了∂_{ab}中的有序对：

$$\sum_{\substack{s,t\in\partial_b\\ s<t}} m_a(s_{\text{out}})m_a(t_{\text{out}})+\sum_{s\in\partial_b}\binom{m_a(s_{\text{out}})}{2}.$$

对所有 $a<b$求和，我们得到恒等式

$$\sum_{a<b}\binom{m_{ab}}{2}=\sum_{\substack{s,t\in\partial_b\\ s<t}}\sum_{a<b} m_a(s_{\text{out}})m_a(t_{\text{out}})+\sum_{s\in\partial_b}\binom{m_a(s_{\text{out}})}{2}.$$

因此，我们所关注的等式左侧（8）等于

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\Big(\sum_{\substack{a,b,c\\ \text{disjoint},\\ c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{c<a<b} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\\ &\quad+\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{a_c}(t_{\text{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\binom{m_a(s_{\text{out}})}{2}\\ &=\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{a,b\\ c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\binom{\sum_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}})}{2}\\ &=\sum_{\substack{c,\\ s,t\in\partial_c\\ s<t}}\Big(\sum_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}})\underbrace{\sum_{b} m_{b_c}(s_{\text{out}})}_{=0}\Big)+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\binom{\sum_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}})}{2}.\end{aligned}$$

□

定理的证明 *1.1*。 由引理4.2 我们得到以下简化：

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{sq}^2(\alpha)-\mathfrak{sq}^2(\alpha),z\rangle\\ &=\sum_{a<b<c<d}(a+b+c+d)m_{ac}m_{bd}+\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}}(a+b)m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})\\ &+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}}(a+b)m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}} c\frac{m(s_{\text{out}})}{2}+\sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}}\binom{\sum_{c<a} m_{a_c}(t_{\text{out}})}{2}\end{aligned}\tag{9}$$

模余边界。由引理 B.6，右侧进一步简化为

$$\sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{a\neq c,\\ s\in\partial_{a_c}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s)\cdot a + \sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \binom{\sum_{c<a} m_{a_c}(t_{\mathrm{out}})}{2} \pmod 2.$$

第二个加项等于以下量

$$\sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{a>c\\ s\in\partial_{a_c}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s),$$

这仅仅是因为 $\binom{k}{2} = 0+1+2+\ldots+(k-1)$。剩下的部分是

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{sq}^2(\alpha) - \mathfrak{sq}^2(\alpha), z\rangle &= \sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{a\neq c,\\ s\in\partial_{a_c}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s)\cdot a + \sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{c<a\\ s\in\partial_{a_c}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s) \\
&= \sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{a\neq c,\\ s\in\partial_{a_c}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s)\cdot a_c \\
&= \sum_{\substack{c,\\ t\in\partial_c}} \sum_{\substack{a,\\ s\in\partial_{a}(t_{\mathrm{out}},\alpha)}} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s)\cdot a = 0 \mod \text{coboundary}. \qquad \square
\end{aligned}$$

推论的证明 *1.2*。将定理 1.1 应用于函子 $F = F_{Kh}(L)$，即可得到该推论。□

Appendix A. Basic cochain identities

本节中，我们固定一个元素 $z \in X_{n+2}$ 和一个余循环 $\alpha \in C^n(X_\bullet;\mathbb{F}_2)$.

引理 A.1. 固定一个 $a \in \mathbb{N}$。我们有以下恒等式：

$$\sum_{\substack{b,\\ b\neq a}} m_{ab}(z,\alpha) = 0 \pmod 2.$$

证明。

$$\sum_{\substack{b,\\ b\neq a}} m_{ab}(z,\alpha) = \sum_{s\in\partial_a(z)} \sum_{b\neq a} \#\partial_{b_a}(s_{\mathrm{out}},\alpha) = \sum_{s\in\partial_a(z)} \#\partial(s_{\mathrm{out}},\alpha) = \sum_{s\in\partial_a(z)} 0 \pmod 2. \qquad \square$$

Pro位置 A.2（比较 [Raj25]）。定义 $L:\ C^*(X_\bullet;\mathbb{F}_2) \to C^{*+2}(X_\bullet;\mathbf{F}_2)$ b y

$$\langle L\omega, z\rangle = \sum_{a<b} b m_{ab}(z,\omega).$$

线性映射 L 是零伦的。特别地，

$$\sum_{a<b} b m_{ab}(z) = 0 \mod \text{coboundary}$$

证明。定义一个同伦 $H : C^*(X_\bullet) \to C^*(X_\bullet)^{*+1}$ 如下

$$\langle H\omega, y\rangle = \sum_a \binom{a+1}{2} m_a(y,\omega)$$

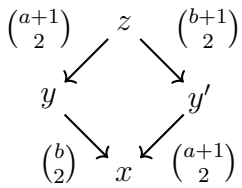


FIGURE 2. 我们可以将一个跨度元素 $s\colon z \to x$ 写成∂_b中的复合。

我们有 $\langle \delta H x + H\delta x,\ z\rangle$ 每个元素贡献四项 $s \in \partial_{ab}(z,\ x)$，如图2所示。

$$\langle \delta H x + H\delta x, z\rangle = \sum_{s\in\partial(z,x)} \left(\binom{b}{2} + \binom{a+1}{2} + \binom{b+1}{2} + \binom{a+1}{2}\right) = \sum_{s\in\partial(z,x)} b \mod 2,$$

它等于 $\langle Lx,\ z\rangle$。 □

引理 A.3。

$$\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}} \sum_{\substack{a,b,c\\ disjoint}} (a|_{c<a} + b|_{c<b}) m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(t_{\text{out}}) + \sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}} \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (a|_{c<a} + b|_{c<b}) m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(s_{\text{out}}) = 0 \mod \text{coboundary}.$$

证明。 如果我们加上这一项

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c}} \sum_{b} b|_{c<b} m_{b_c}(s_{\text{out}}),$$

也就是 模余边界（参见命题A.2），移至等式左边，我们得到 n

$$\sum_{c} \Big(\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}} \sum_{a\neq c} a|_{c<a} m_{a_c}(s_{\text{out}}) \Big) \Big(\sum_{t\in\partial_c(z)} \underbrace{\sum_{b\neq c} m_{b_c}(t_{\text{out}})}_{=0} \Big) = 0.$$ □

引理 A.4。

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}} \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} ab \cdot m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(s_{\text{out}}) = \sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}} \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} (b|_{c<a} + a|_{c<b} + 1|_{c<a}) m_{a_c} m_{b_c} \tag{10}$$

证明。 首先注意到 $ab = a_c b_c + b|_{c<a} + a|_{c<b} + 1|_{c<a}$。只要注意到方程（10）中的两项之差为

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}} \sum_{\substack{a,b\neq c\\ a<b}} a_c b_c \cdot m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(s_{\text{out}}) = \sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}} \sum_{a<b} ab \cdot m_a(s_{\text{out}}) m_b(s_{\text{out}}),$$

而最后一项模余边界为 0。 □

引理 A.5. 令 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 为任意函数。我们有

$$\sum_{a<b} (f(a) + f(b)) m_{ab} = 0 \pmod 2.$$

证明。我们有

$$\sum_{a<b}(f(a)+f(b))m_{ab}=\sum_a f(a)\Big(\sum_{b\neq a}m_{ab}\Big)=\sum_a f(a)\cdot 0 \mod 2,$$

其中最后一个等式由引理 A.1得出。 □

引理 A.6。我们有

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{a<b}(a+b)m_{a_c}m_{b_c}=0 \pmod 2 \tag{11}$$

证明。我们写作

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{a<b}(a+b)m_{a_c}m_{b_c}&=\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\Big(\Big(\sum_{a\neq c}am_{a_c}(s_{\text{out}})\Big)\underbrace{\Big(\sum_{a\neq c}m_{a_c}(s_{\text{out}})\Big)}_{=0 \pmod 2}-\sum_{a\neq c}am_{a_c}(s_{\text{out}})\Big)\\&=\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{a\neq c}am_{a_c}(s_{\text{out}})\\&=\sum_{a<b}(a+b)m_{ab}=0 \pmod 2,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由引理 A.5得出。 □

引理 A.7。我们有

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}}m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})=0 \mod \text{coboundary}.$$

证明。 左边可以改写为

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}(1|_{c<a}+1|_{c<b})m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})$$

现在我们加上这一项

$$\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}(1+a_c+b_c)m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}}),$$

它模余边界等于 0，从而得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}(1|_{c<a}+1|_{c<b})m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})+\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}(a_c+b_c)m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})\\&=\sum_{\substack{c,\\ s\in\partial_c(z)}}\sum_{\substack{a<b\\ a,b\neq c}}(a+b)m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(s_{\text{out}})=0 \pmod 2\end{aligned}$$

其中最后一个恒等式由引理 A.6 得出。 □

引理 A.8。 对于所有整数 n、a，我们有 $\binom{na}{2}=a\binom{n}{2}+n\binom{a}{2}$ （模 2）。

证明。 该 上述恒等式可通过对 n进行归纳，或通过显式计算得出 . □

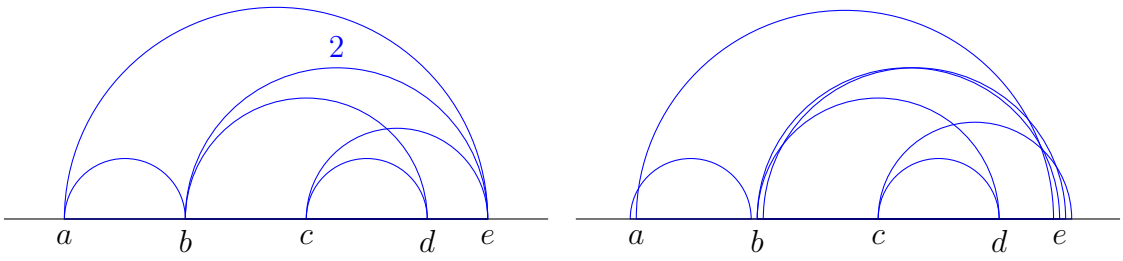


FIGURE 3. 左图：一个余循环 α 的退化弦表示 $\mathcal{C}(\overline{z}, \alpha)$。$b$ 和 e 之间有两条弦，因此用“2”标记该弦以表示重数。右图：一个弦表示 $\mathcal{C}(z, \alpha)$。注意，从每个指标出发的弦数均为偶数。

引理 A.9。我们有

$$\sum_{c} c \sum_{\substack{a,b\neq c \\ a<b}} (a+b) m_{ac} m_{bc} = 0 \pmod 2.$$

证明。 左边可以写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{c} c \left(\Big(\sum_{a\neq c} a \cdot m_{ac}\Big) \underbrace{\Big(\sum_{b\neq c} m_{bc}\Big)}_{=0} - \sum_{a\neq c} a \cdot m_{ac} \right) \\
&= \sum_{c} c \sum_{a\neq c} a \cdot m_{ac} \\
&= \sum_{\substack{(a,c) \\ a\neq c}} ac \cdot m_{ac} = 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

最后一个同余关系可通过观察得出：每个 (a, c) 加项都等于 (c, a) 求和中的对应项。□

APPENDIX B. ADVANCED COCHAIN IDENTITIES

我们引入一种便捷的方式来绘制张成空间 $\partial(z, \alpha)$，这将有助于简化 $\mathfrak{sq}^2(\alpha)$ 的公式。

令 $\mathbb{H}$ 表示复上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$。我们将$\mathbb{H}$ 中以实轴为中心的半圆称为弦。换言之，在将 $\mathbb{H}$ 视为庞加莱半平面模型时，弦恰好是不会延伸至无穷远的线。

定义 B.1. 给定一个增广半单纯对象 $X_\bullet$、一个元素 $z \in X_{n+2}$ 和一个元素集合 $S \subset X_n$，我们将 退化弦表示 $\mathcal{C}(z, S)$ 定义为嵌入在 $\mathbb{H}$ 中的如下弦集 C：我们将每个 $s \in \partial_{ab}(z, S)$ 视为弦 C_s 的一个副本，其端点位于 a 和 b 上。

现在我们定义（非退化）弦表示 $\mathcal{C}$（z，S）作为弦的一种类似表示，但我们扰动端点，使得任意两个端点都不会相交于同一点（尽管它们的指标保持不变）。（见图3）。我们选择一种特定的扰动方式，它依赖于

跨度的乘积上的字典序。对于每个指标 a，我们按照以下步骤扰动与 a 相交的弦：

(P-1) 我们将与 a 相交的弦写成并集

$$\bigsqcup_{s\in\partial_a(z)} \partial(s_{\mathrm{out}},\alpha)\times\{s\}\subset \partial^{n+1}\times_{X_{n+1}}\partial^{n+2}. \tag{12}$$

(P-2) 按照 $\partial^{n+2}\times\partial^{n+1}$ 的字典序对上述并集进行排序，其中 ∂^{n+2} 的排序为 ∂^{n+1}，根据定义 2.7 （注意这里因子的顺序发生了变换）。特别地，我们有

$$\partial(s_{\mathrm{out}},\alpha)\times\{s\}<\partial(t_{\mathrm{out}},\alpha)\times\{t\}\qquad \text{if } s<t. \tag{13}$$

(P-3) 按照此排序对与 a 相交的弦进行扰动。也就是说，排序较高的弦应位于排序较低的弦的右侧。

式（12）中的不相交并集可以看作集合 a 上弦端点的一个划分。根据式（13），每个划分在 S^1 中各自占据一条（小）弧。我们称 $\partial(s_{\mathrm{out}},\alpha)\circ\{s\}$ 中的弦相交于 s。

注记 B.1.1。 通过选取一个双全纯映射 $\mathbb{H}\to\mathbb{D}$，我们可以将退化的和非退化的弦表示视为位于 $\mathbb{D}$ 内。

我们现在证明一些难度逐渐增加的引理，这将帮助我们熟悉弦表示。

引理 B.2. 设 α 是 $C^n(X_\bullet;\mathbb{F}_2)$ 中的一个余循环，并设 $z\in X_{n+2}$。$\mathcal{C}(z,\overline{\alpha})$ 和 $\mathcal{C}(z,\alpha)$ 中从每个指标 a 引出的弦数均为偶数。此外，两种弦表示中与 $s\in\partial_a$ 相交的弦数也均为偶数。

我们指出，该引理的证明与引理 A.1的证明完全相同，只是改用弦表示的语言表述。

证明。 固定一个 $s\in\partial_a$。与 s 相交的弦数等于 $\#\partial(s_{\mathrm{out}},\alpha)$，由于 α 是一个余循环，该数模 2 等于 0。对所有 $s\in\partial_a(z)$ 求和，可得从 a 引出的弦数为偶数。□

引理 B.3. 我们有

$$\sum_{a<b<c<d}(ab+cd)(m_{bc}m_{ad}+m_{cd}m_{ab}+m_{ac}m_{bd})=0. \tag{14}$$

证明。 我们将该和改写如下：

$$\sum_{a<b} ab \sum_{\substack{c,d\\ a<c<b<d \text{ or}\\ c<a<d<b}} (m_{ab}m_{cd}+m_{ad}m_{bc}+m_{ac}m_{bd}) := \sum_{a<b} ab\cdot S_{ab} \tag{15}$$

剩下要证明的是，内部和 S_{ab} 对所有 $a<b$ 均为 0。S_{ab} 是 $\mathcal{C}(z,\alpha)$ 中三类弦对的总数；这一次将其视为位于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上（见图 4）：

(C-1) $(C_{ab},\ C_{cd})$，其中 $C_{ab}\in\partial_{ab}(z)$，且 C_{cd} 与 C_{ab} 横截相交。**(C-2)** $(C_{ac},\ C_{bd})$，其中 C_{ac} 从 a 沿着 b的方向逆时针偏出，且 C_{bd}从 b 沿着 a的方向逆时针偏出。**(C-3)** $(C_{ac},\ C_{bd})$，其中 C_{ac} 从 a 沿着 b的方向顺时针偏出，且 C_{bd} 从 b沿着 a的方向顺时针偏出。

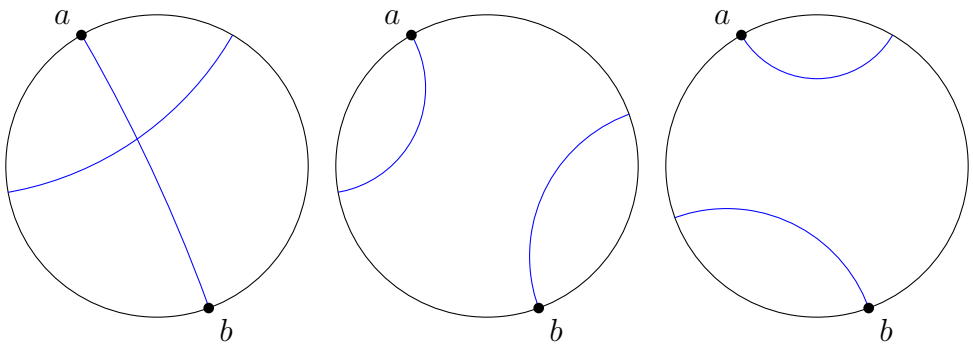


FIGURE 4. 内部和中计数的 $\mathcal{C}(z,\alpha)$ 弦对类型。方程（15）左侧：类型为(C-1)的弦对。中间：类型为(C-2)的弦对。右侧：类型为(C-3)的弦对。

(C-1) 型弦对的数量为 $m_{ab}x_{ab}$：连接 a与b 的弦的数量 m_{ab}，乘以分隔 a与 b的弦的数量 x_{ab}。(C-2) 型弦对的数量为 r_ar_b，其中 r_a 表示从 a 沿着 b的方向逆时针（即“向右”）偏出的弦的数量，而 r_b 的定义类似，只是将 a 与 b 的作用互换。类似地，(C-3) 型弦对的数量为 l_al_b，其中 l_a、 l_b 的定义与 r_a、 r_b类似，但将“逆时针”替换为“顺时针”。从 a 出发的弦的总数等于 $m_{ab}+l_a+r_a$；由于 α 是余循环，这个值为 0（见引理 B.2）。我们还注意到， $x_{ab}=l_a+r_b$ 为偶数，这同样是利用了每个顶点的度数都是偶数这一事实。将这些恒等式合并起来，我们得到

$$\begin{aligned} S_{ab} &= m_{ab}x_{ab}+l_al_b+r_ar_b \\ &= (l_a+r_a)(l_a+r_b)+l_al_b+r_ar_b \\ &= l_al_b+l_a+l_ar_b+l_ar_a \\ &= l_a(1+l_b+r_b+r_a) \\ &= l_a(1+l_a)=0 \pmod 2. \end{aligned}$$ □

命题 B.4。

(16)

$$\begin{aligned} &\sum_{a<b<c<d} m_{ac}(z)m_{bd}(z)+\sum_{\substack{s,t\in\partial_c\\ s<t}}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c\\ b<c<a}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}}) \\ &\quad+\sum_{a<b}\#\left\{\{s,t\}\subset\partial_{ab}(z,\alpha)\;\middle|\; \textit{left-break order of } \{s,t\} \textit{ agrees with right-break order}\right\} \\ &=\sum_{K\subset\Gamma(z,\alpha)}\left(1+\#\{a\to\overrightarrow{b}\to c\mid a>b\}+\#\{a\to\overleftarrow{b}\to c\mid a<b\}\right) \mod \text{coboundary}. \end{aligned}$$

证明。相加

$$\sum_{s\in\partial_c}\sum_{\substack{c<a<b\\ a<b<c}} m_{a_c}(s_{\text{out}})m_{b_c}(t_{\text{out}})$$

在方程（16）的左边，我们得到一项，它恰好统计了 $\mathcal{C}(z,\alpha)$ 中相交弦对的数量。不过，我们添加的这一项模余边界为 0，因为

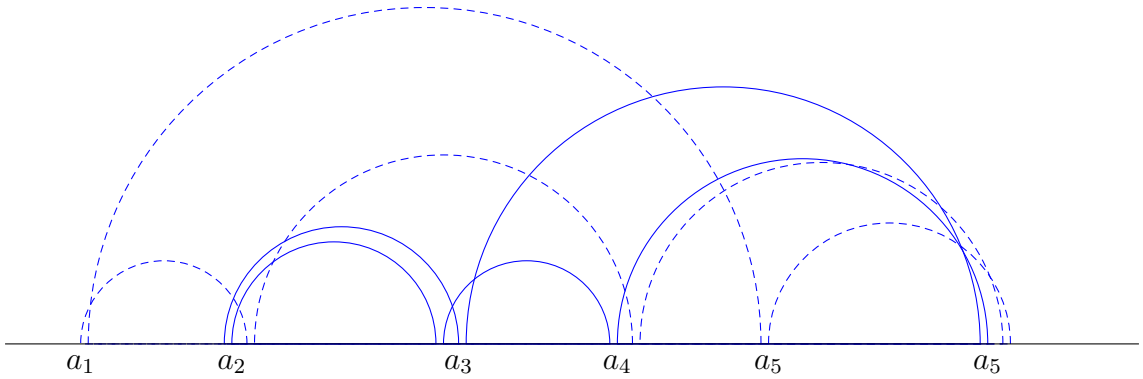


FIGURE 5. 我们画出由弦构成的两个环（一个为实线，一个为虚线），分别对应两个图的环 K，$K' \subset \Gamma(z,\ \alpha)$。注意，这两个环的交数为偶数，这一点始终成立。我们通过将每个环中的内部交叉点相加，计算 $\#(\mathcal{C}(K)\cap\mathcal{C}(K'))$。

命题 A.7。还需证明右边等于交叉点的数量（模 2）。

环 $K \subset \Gamma(z,\alpha)$ 将集合 $\mathcal{C}(z,\alpha)$ 划分为与每个K对应的子集。事实上，每条边 $e_1 \overset{e'}{\text{---}} e_2$ 都唯一对应一条弦 $\mathcal{C}(e')$，因此每个环K 都对应一个弦环 $\mathcal{C}(K) \subset \mathcal{C}(z,\alpha)$（见图 5）。对于任意两个彼此分离的弦环 $\mathcal{C}(K)$、$\mathcal{C}(K')$，我们可以将它们的拐角平滑处理，使其成为闭合的嵌入环；这些嵌入环的交数为偶数。因此，$\mathcal{C}(z,\alpha)$中的交叉点数可通过将每个 $\mathcal{C}(K)$中的内部交叉点数相加来计算：

$$\#(\text{crossings in } \mathcal{C}(z,\alpha)) = \sum_{K\subset\Gamma(z,\alpha)} \#(\text{crossings in } \mathcal{C}(K)) \pmod 2.$$

因此，只需证明

$$\#(\text{crossings in } \mathcal{C}(K)) = \#\{a \to \overrightarrow{b} \to c \mid a > b\} + \#\{a \to \overleftarrow{b} \to c \mid a < b\}$$

对任意循环 $K \subset \Gamma(z,\ \alpha)$

$$e_1 \overset{e'_1}{\text{---}} e_2 \overset{e'_2}{\text{---}} \dots \overset{e'_3}{\text{---}} e_k \overset{e'_k}{\text{---}} e_1,$$

其面环定向如下

$$a_1 \to a_2 \to \dots \to a_m \to a_1.$$

现在固定一个循环 K，并将 $\mathcal{C}(K)$ 的弦视为位于上半平面内（见图 6）。如有必要，通过重新参数化该循环，我们可以假设 $\mathcal{C}(e'_1)$ 的左端点位于 a_1上，并且是 $\mathcal{C}(K)$ 中所有弦的最左端点。由于

$$\begin{aligned}&\#\{a \to \overrightarrow{b} \to c \mid a > b\} + \#\{a \to \overleftarrow{b} \to c \mid a < b\}\\ &= \#\{a \to \overrightarrow{b} \to c \mid c < b\} + \#\{a \to \overleftarrow{b} \to c \mid c > b\} \pmod 2,\end{aligned}$$

只需证明

$$\#(\text{crossings in } \mathcal{C}(K)) = 1 + \#\{a \to \overrightarrow{b} \to c \mid c < b\} + \#\{a \to \overleftarrow{b} \to c \mid c > b\}. \tag{17}$$

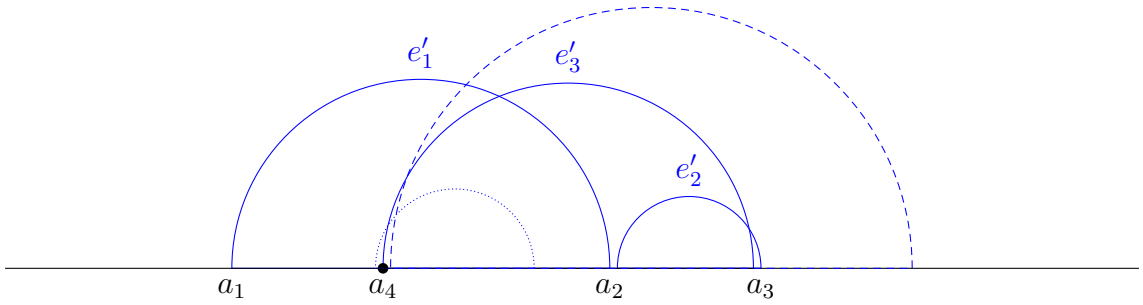


FIGURE 6. 我们计算 $X(k)$ 在 (18) 中的数量 $k=4$。若 e'_4 是虚线弦，则 $X(4) = 2+0 = 0$ (模 2)，因为 $a_{k+1} > a_k$ 但 $a_{k-1} \to \overrightarrow{a_k} \to a_{k+1}$。若 e'_4 是点线弦，则 $X(4) = 1+1 = 0$ (模 2)。点标出了 a_k .....的端点 e'_{k-1}。

为证明这个恒等式，考虑以下量

$$X(k) = \#\{\mathcal{C}(e'_k) \cap \mathcal{C}(e'_j) : 1 \le j < k\} + \begin{cases} 1 & \text{if } a_{k-1} \to \overrightarrow{a_k} \to a_{k+1} \text{ and } a_{k+1} < a_k \\ 1 & \text{if } a_{k-1} \to \overleftarrow{a_k} \to a_{k+1} \text{ and } a_{k+1} > a_k \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{18}$$

其中，在第二项中，我们定义 $a_0 := a_m$, $a_{m+1} := a_1$。将这些项从 1 到 m 求和，可得 (17) 中的所有项，除了值为 1 的那一项。对于所有满足 $1 < k < m$ 的 k，数量 $X(k) = 0$。事实上，若方程 (18) 中的前两个条件之一成立，则弦 $\mathcal{C}(e'_k)$ 的端点必定位于 $\mathcal{C}(e'_{k-1})$ 的 a_k-端点的左右两侧。因此，$\mathcal{C}(e'_k)$ 与弦 $\mathcal{C}(e'_1) \cup \ldots \cup \mathcal{C}(e'_{k-1})$ 的交数为 1。还需证明 $X(1) + X(m) = 1$。为此，注意到 $X(1) = 0 + 1 = 1$，因为 $a_m \to \overleftarrow{a_1} \to a_2$ 和 $a_2 > a_1$。现在计算 $\mathcal{C}(e'_m)$ 与 $\mathcal{C}(e'_1) \cup \ldots \cup \mathcal{C}(e'_{m-1})$ 的交数，我们得到

$$\#\{\mathcal{C}(e'_m) \cap \mathcal{C}(e'_j) : 1 \le j < m\} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{m-2} \to \overrightarrow{a_{m-1}} \to a_m \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这等于 式 (18) 的第二个加项，如 $a_{m+1} = a_1 < a_m$。因此，$X(m) =$ 0. □

在给出下一个命题之前，我们先给出一个必要的定义。

定义 B.5。设 $y \in X_{n+1}$。我们将集合 $\partial(y,\alpha)$ 上的一个全序 $<$ 定义为由我们在 ∂^{n+1} 上的全序所诱导的排序。然后我们定义

$$\operatorname{order}(s) = \#\{t \in \partial(y,\alpha) : t < s\}, \qquad \overleftarrow{\operatorname{order}}(s) = \#\{t \in \partial(y,\alpha) : t > s\}.$$

命题 B.6。我们有

$$\sum_{a<b<c<d} (a+b+c+d) m_{ac} m_{bd} + \sum_{\substack{s,t \in \partial_c \\ s<t}} \sum_{\substack{c<a<b \\ a<b<c \\ b<c<a}} (a+b) m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(t_{\text{out}})$$

$$+ \sum_{\substack{c, \\ s \in \partial_c}} \sum_{\substack{c<a<b \\ a<b<c}} (a+b) m_{a_c}(s_{\text{out}}) m_{b_c}(s_{\text{out}}) = \sum_{\substack{a, \\ t \in \partial_a}} a \frac{m(t_{\text{out}})}{2} + \sum_{\substack{c, \\ t \in \partial_b}} \sum_{\substack{a, \\ s \in \partial_{a_b}(t_{\text{out}}, \alpha)}} \overleftarrow{\operatorname{order}}(s) \cdot a \pmod 2$$

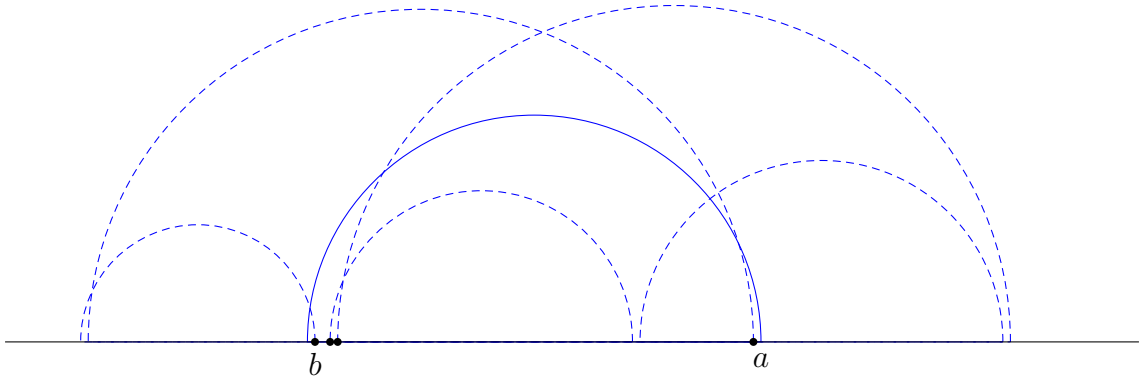


FIGURE 7. 黑点 $\partial\mathbb{D}$统计与实弦相交的次数之和（模 2） C，也就是 C （19）左侧的被加项。根据命题B.6证明中的记号，点的数量为 $\mathbf{order}(s) + \overleftarrow{\mathrm{order}}(s')$。

证明。 我们解释左侧所计算的量：对每一对相交弦 C， $C' \in \mathcal{C}(z,\ \alpha)$，其端点为 a， c 和 b，d，我们加上 $a+b+c+d$。等式左侧的第一项计入了端点 C， C' 位于四个不同指标处的交叉 $C \cap C'$ 。接下来的两项计入了端点 C， C' 仅共享一个指标的交叉。最后，没有任何一项计入 C， C' 共享指标相同的端点时产生的交叉，因为这类贡献模 2 本来就是 0。

我们用另一种方式计算这个交叉点的加权和，以推导出等式右侧。对于每个 a 以及每条 C_a 端点位于 a的弦，我们沿着 C_a 遍历，并对每条与 C 交叉的弦 a 加上相应的量。对所有 a 和所有 C_a求和，得到

$$\sum_{a} \sum_{\substack{\text{chords } C \\ \text{meeting } a}} \#\{C' : C' \text{ crosses } C\} \cdot a,$$

根据我们的讨论，这仍然等于等式左侧。现在我们证明这个量等于上面等式的右侧。只需固定 a 并证明

$$\sum_{\substack{\text{chords } C \\ \text{meeting } a}} \#\{C' : C' \text{ crosses } C\} = \sum_{t \in \partial_a} \frac{m(t_{\mathrm{out}})}{2} + \sum_{\substack{b, \\ t \in \partial_b}} \sum_{s \in \partial_{a_b}(t_{\mathrm{out}}, \alpha)} \overleftarrow{\mathrm{order}}(s) \pmod 2. \tag{19}$$

固定一条 C 与 a 相交的弦 b （图7 中给出了示意图）。现在我们计算（19）中的交数。设 C的端点为$s \circ t \in \partial_{b_a} \circ \partial_a$和 $s' \circ t' \in \partial_{a_b} \circ \partial_b$。 交数模 2 等于以下两个量之和：

(c-1) 位于 $s \circ t$ 左侧的弦端点数量。(c-2) 位于 $s' \circ t'$ 右侧的弦端点数量。

根据引理 B.2，(c-1) $=$ 阶(s)，且 (c-2) $=$ $\overleftarrow{\text{阶}}(s')$ 对所有与 C 相交的弦a求和，我们发现 (c-2) 的和为

$$\sum_{t' \in \partial_a} (0 + 1 + \ldots + (m(t'_{\mathrm{out}}) - 1)) = \sum_{t' \in \partial_a} \frac{m(t'_{\mathrm{out}})}{2}$$

(该恒等式成立，因为 $m(t'_{\text{out}})$ 为偶数)，且 (c-1) 的和为

$$\sum_{\substack{b,\\ t\in\partial_b}} \sum_{s\in\partial_{a_b}(t_{\text{out}},\alpha)} \overleftarrow{\text{order}}(s) \pmod 2. \qquad \square$$

References

[BHS25] John A. Baldwin、Ying Hu 和 Steven Sivek。五叶结的 Khovanov 同调。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），27(6)：2443–2465，2025。[BN02] Dror Bar-Natan。论 Jones 多项式的 Khovanov 范畴化。《代数、几何与拓扑》，2：337–370，2002。[CM20] Federico Cantero Mor´án。Khovanov 同调的高阶 Steenrod 平方。《数学进展》，369：107153，79 页，2020。[Kho00] Mikhail Khovanov。Jones 多项式的范畴化。《杜克数学杂志》，101(3)：359–426，2000。[LLS17] Tyler Lawson、Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar。立方体与 Burnside 范畴。载于《几何、拓扑与物理学中的范畴化》，《当代数学》684 卷，第 63–85 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[LLS20] Tyler Lawson、Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar。Khovanov 同伦类型、Burnside 范畴与乘积。《几何与拓扑》，24(2)：623–745，2020。[LOS20] Andrew Lobb、Patrick Orson 和 Dirk Sch¨utz。使用流范畴演算进行 Khovanov 同伦计算。《实验数学》，29(4)：475–500，2020。[LS14a] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar。一种 Khovanov 稳定同伦型。《美国数学学会杂志》，27(4)：983–1042，2014。[LS14b] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar。Rasmussen 的 S-不变量的一个细化。《杜克数学杂志》，163(5)：923–952，2014。[LS14c] RobertLipshitzand SucharitSarkar。Khovanov 同调上的一个 Steenrod 平方。《拓扑学杂志》，7(3)：817–848，2014。[LS24] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar。强可逆结及其商的 Khovanov 同调。载于《几何与拓扑前沿》，《纯粹数学研讨会论文集》109 卷，第 157–182 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，[2024] ©2024。[MM23] Anibal M. Medina-Mardones。关于 cup-i乘积和 Steenrod 平方快速计算的新公式。《计算几何》，109：论文编号 101921，16 页，2023。[Ng05] Lenhard Ng。由 Khovanov 同调得到的 Legendrian Thurston-Bennequin 界。《代数、几何与拓扑》，5：1637–1653，2005。[Pic20] Lisa Piccirillo。Conway 结不是切片结。《数学年刊》（第 2 辑），191(2)：581–591，2020。[Pla06] Olga Plamenevskaya。横截结与 Khovanov 同调。《数学研究通讯》，13(4)：571–586，2006。[Raj25] Advika Rajapakse。偶 Khovanov 同调与奇 Khovanov 同调的 Steenrod 平方。（预印本），2025。[Ras10] Jacob Rasmussen。Khovanov 同调与切片亏格。《发明数学》，182(2)：419–447，2010。[Ste47] N. E. Steenrod。余循环的乘积与映射延拓。《数学年刊》（第 2 辑），48：290–320，1947。[SZ24] Matthew Stoffregen 和 Melissa Zhang。Khovanov 同调中的局部化。《几何与拓扑》，28(4)：1501–1585，2024。

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, CA 90095电子邮件地址: advika@math.ucla.edu