arXiv:2603.16234v1 [math.GR] 17 Mar 2026

曲面群共轭子长度函数的显式界

KE WANG和 QIANGZHANG

摘要。对于亏格为 $g \geq 2$ 的曲面群 $\pi_1(\Sigma_g) = \langle c_1, .., c_{2g} \mid c_1 \cdots c_{2g} c_1^{-1} \cdots c_{2g}^{-1} \rangle$，我们通过详细分析共轭约化，为共轭子长度函数 CL：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ of $\pi_1(\Sigma_g)$ 给出了显式界 $n-1 \leq \mathrm{CL}(2n) = \mathrm{CL}(2n+1) \leq n+8g-1$。

1. 引言

20世纪初，Dehn 提出了三个重要问题：字问题、共轭问题 [9] 以及同构问题。其中，共轭问题如今已成为群论中的一个基本判定问题，探讨有限生成群中的两个元素是否共轭。

共轭问题的一个关键定量方面是共轭子长度函数CL：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$。对于两个共轭元素 u，v，令 CL(u，v) 表示共轭元 x 的最小词长 $|x|$，使得 $x^{-1}ux = v$。接着，定义 CL(n) 为满足以下条件的最小整数 N：对于任意词长为 $|u| + |v| \leq n$的共轭元素 u 和 v，均有 CL(u，v) $\leq N$。关于共轭子长度函数已有大量研究，涉及的群包括双曲群 [1, 4, 10], 相对双曲群 [2], Thompson 群 [3], 可解群以及半单李群的格 [11], 等。此外，Bridson 和 Riley 撰写了一系列文章，研究有限表示群中的共轭子长度函数。在 [5, 6], 中，他们证明，对于任意 $d \in \mathbb{N}$，都存在满足 CL(n) $\simeq n^d$的有限表示群。在 [7], 中，他们证明，存在某个有限表示群使得 CL(n) $\simeq n^e$ 的指数 e 构成 $[2, \infty)$中的稠密集；在 [8], 中，他们构造了共轭子长度函数为指数级的有限表示群的首批实例。

在（Gromov）双曲群中，Lysënok 在 [10] 中证明了共轭子长度函数是线性的：一个双曲群 Γ（相对于任意固定的有限生成集）具有共轭子长度函数 CL(n) $\leq C_0 n + C_1$。在 [4], 中，Bridson 和 Howie 证明，对于双曲群，系数 C_0 可以取为 1。在 [1], 中，Abbott 和 Behrstock 证明，在层级双曲群中，共轭的 Morse 元素的共轭子长度函数也是线性的。

本文聚焦于曲面群，即闭可定向曲面 Σ_g（亏格为 $g \geq 2$）的基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$。设 G 为一个曲面群，其生成集为 $\mathcal{S} = \{c_1, \ldots, c_{2g}\}$，并具有如下对称表示

$$G = \pi_1(\Sigma_g) = \left\langle c_1, \ldots, c_{2g} \mid c_1 \cdots c_{2g} c_1^{-1} \cdots c_{2g}^{-1} \right\rangle, \qquad g \geq 2. \tag{1.1}$$

通过详细考察曲面群 G 中共轭的约化，我们证明线性系数 C_0 可以取为 $1/2$（这是最优的），见 G。更确切地说，我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 G是具有对称表示（*1.1*）的曲面群。那么，其共轭子长度函数CL：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$满足

$$n - 1 \leq \mathrm{CL}(2n) = \mathrm{CL}(2n+1) \leq n + 8g - 1$$

对于任意亏格为 $g \geq 2$。

日期：2026年3月18日。2020 年数学主题分类号。 20F65，20F10。关键词和短语。 曲面群、共轭问题、共轭子长度函数、词长、界。作者的部分研究工作得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12471066）的资助。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍一些基本定义和记号。在第3节和第4节中，我们建立关于共轭约化的若干引理。最后，在第5节中，我们给出主要结果的证明。

2. 预备知识

本文主要基于对给定阶数 [12] 的曲面群中的约化的研究，探讨曲面群的共轭子长度函数。我们首先介绍本文中使用的一些定义和记号（更多详情见 [12, 第 2] 节）。除非另有说明，本文始终设 G 为具有对称表示（ 1.1 ）的曲面群:

$$G = \pi_1(\Sigma_g) = \left\langle c_1, \dots, c_{2g} \mid c_1 \cdots c_{2g} c_1^{-1} \cdots c_{2g}^{-1} \right\rangle, \quad g \geq 2.$$

2.1. 词长。 字母表 $\mathcal{S}^{\pm} := \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1} = \{c_i^{\epsilon} \mid 1 \leq i \leq 2g,\ \epsilon = \pm 1\}$ 上的一个词 是一个有限序列 $x_1 x_2 \cdots x_n$，其中有 $x_i \in \mathcal{S}^{\pm},\ i = 1, \dots, n$。这里我们用带上划线的形式来区分词和群元素，即 $x_1 \cdots x_n$ 是一个词，而 $x_1 \cdots x_n$ 是一个群元素。特别地，我们将空词记为 1。我们将字母表 $\mathcal{S}^{\pm}$ 上的词集 记为 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$。此外，若词 A 是 B 的子词，且字母 a 是出现在 A 中的字母，则分别记作 $A \subset B$ 和 $a \in A$。

注记 2.1. 为了更好地说明，在一个词中，我们总是用小写字母表示 $\mathcal{S}^{\pm}$ 中的字母，并用大写字母表示子词。例如，在词 $xyWa_1V_1z^{-1}$ 中，我们有 $x,\ y,\ a_1,\ z^{-1} \in \mathcal{S}^{\pm}$ 以及 $W,\ V \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$。

对于一个词 $W = x_1 \cdots x_n \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$，我们用 $|W|_{\mathcal{S}} = n$ 表示 W 的长度。元素 $u \in G$ 关于生成集 $\mathcal{S}$ 的（词）长度定义为

$$|u|_{\mathcal{S}} := \min\{n \mid u = x_1 \cdots x_n \in G,\ x_i \in \mathcal{S}^{\pm}\}.$$

当生成集明确时，我们总是省略下标 $\cdot_{\mathcal{S}}$。

2.2. 长度字典序与标准形。 若我们给生成元规定如下次序

$$c_{2g}^{-1} \succ \cdots \succ c_2^{-1} \succ c_1^{-1} \succ c_1 \succ c_2 \cdots \succ c_{2g}, \tag{2.1}$$

则在 G 的词集 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ 上会得到长度字典序“$\succ$”: 对任意 $X,\ Y \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$，

$$\overline{X} \ \succ \ \overline{Y} \iff \begin{cases} |\overline{X}| > |\overline{Y}| & \text{or} \\ |\overline{X}| = |\overline{Y}| \text{ with } \overline{X} = \overline{AxB},\ \overline{Y} = \overline{AyC} \text{ for } x \succ y \in \mathcal{S}^{\pm} \end{cases}.$$

那么，对于元素 $x \in G$，存在唯一的标准形 $\mathfrak{nf}(x)$，它是表示 x 且次序最小的词。

对于一个字 $X = x_1 \cdots x_n \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$，如果它是标准形，我们称其为不可约；如果 $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$ 对每个 $1 \leq i \leq n-1$ 都成立，则称其为自由约化。此外，如果它的每个循环置换（即 $x_i x_{i+1} \cdots x_n x_1 x_2 \cdots x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$）都是不可约（分别为自由约化），则称其为循环不可约（分别为循环自由约化）。

对于任意 $x,\ y \in G$，若 x 与 y 共轭，则记作 $x \sim y$，并将 x 的共轭类记为 $[x]$。令 $\mathfrak{nf}([x])$ 表示共轭类的标准形 $[x]$，其定义为：在 $[x]$ 中表示一个元素的、阶最小的唯一循环不可约字。

2.3. LLFR、 $S_{(i)}$ 与约化子词对。

定义 2.2 (LLFR)。 记 $R := c_1 \overline{c_2} \cdots \overline{c_{2g} c_1^{-1} c_2^{-1} \cdots c_{2g}^{-1}}$，并将 R 和 R^{-1} 的循环置换所成的词集记为

$$\mathcal{R} := \{\overline{b_i \cdots b_{4g} b_1 \cdots b_{i-1}} \mid \overline{b_1 \cdots b_{4g}} = \overline{R} \text{ or } \overline{R^{-1}},\ 1 \leq i \leq 4g\}.$$

如果一个词等于 $b_1\cdots b_k$，其中 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$ 满足 $2\le k\le 4g$，则称其为 k-分数关系子。此外，如果一个 k-分数关系子 $b_1\cdots b_k$ 是

$$\overline{W}=\overline{w_1\cdots w_m b_1\cdots b_k w_1'\cdots w_n'}\in\mathcal{W}(\mathcal{S}),$$

使得 $w_m b_1\cdots b_k$ 和 $b_1\cdots b_k w_1'$ 都不是一个 $(k+1)$-分数关系子，那么我们称 $b_1\cdots b_k$ 为 k-局部最长分数关系子（*LLFR*）。

注意，对于任意 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$，以下恒等式成立，其中所有下标均模 $4g$:

（1）$b_k=b_{k\pm 2g}^{-1}$ 对于任意 $k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 4g$；（2）
$b_kb_{k+1}\cdots b_{k+2g-1}=b_{k+2g-1}\cdots b_{k+1}b_k$ 对于任意 $k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 4g$。

定义 2.3（$S_{(i)}$型字）。令

(1) $S_{(1)}=\{\overline{b_1b_1^{-1}}-1\mid \overline{b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}\}$;
(2) $S_{(2,k)}=\{\overline{b_1\cdots b_k}-\overline{b_{4g}^{-1}\cdots b_{k+1}^{-1}}\mid \overline{b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}\},\ 2g+1\le k\le 4g$;
(3) $S_{(3,t)}=\{\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^t b_{2g+1}}-\overline{(b_{2g}\cdots b_2)^t}\mid \overline{b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}\},t\ge 2$;
(4) $S_{(4,t)}=\{\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^t}-\overline{(b_{2g}\cdots b_2)^t b_1};\ \overline{(b_1\cdots b_{2g-1})^t b_{2g}}-\overline{b_{2g}(b_{2g-1}\cdots b_1)^t}\mid \overline{b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R},b_1\succ b_{2g}\},t\ge 1$.

如果无需强调第二个下标 k，我们将 $S_{(i,k)}$ 记作 $S_{(i)}$（$i=2,\ 3,\ 4$）。注意，$S_{(i)}$ 中的每个多项式对于某个 $A,\ B\in\mathcal{W}(\mathcal{S})$ 均具有统一形式“$A-B$”，我们称 A 为首词。

我们称一个词 $\overline{V}$ 是类型 $S_{(i)}$，如果它是集合 $S_{(i)}$中某个多项式的首词。我们可以将这个S-集（即 $\cup S_{(i)}$）视为一个重写系统，用它来定义将 $S_{(i)}$ 约化为 $W_1=CAD$，当且仅当 $(\overline{A-B})\in\overline{S_{(i)}}$。我们将此过程记作

$$\overline{W_1}\xrightarrow{S_{(i)}}\overline{W_2}.$$

我们称一个词 $\overline{W}$ 是 S-约化的，如果 W 不包含与 S-集中的某个首词相等的子词；如果一个词的所有循环置换都是 S-约化的，则称它是循环 S-约化的。

根据 [12, 引理 2.8], ，我们有以下引理。

引理 2.4。S-约化等价于不可约。因此，循环 S-约化等价于循环不可约。

此外，由 [12, 引理 3.2], ，我们有:

引理 2.5。设 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$。若 $\overline{X}=\overline{b_{2g+1}(b_{2g}\cdots b_2)^t X_1}(t\ge 0)$ 不可约，则 $Y=\overline{b_{2g+1}X_1}$ 也不可约。

证明。根据 [12, 引理 3.2],中的第二个表，如果$\overline{b_{2g+1}X_1}$不是不可约的，那么

$$\overline{X_1}=\begin{cases}\overline{b_1\cdots} & \text{Case (i)}\\ \overline{b_{2g}\cdots b_2b_1\cdots}\text{ or }\overline{b_{2g+2}\cdots b_{4g}b_1\cdots} & \text{Case (ii)}\\ \overline{(b_{2g}\cdots b_2)^r b_1\cdots}\text{ or }\overline{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^r b_1\cdots}\ (r\ge 2) & \text{Case (iii)}\\ \overline{b_{2g}\cdots b_2}\ (b_{2g+1}\succ b_2)\text{ or }\overline{b_{2g+2}\cdots b_{4g}}\ (b_{2g+1}\succ b_{4g}) & \text{Case (iv)}\end{cases}.$$

对于情形（i–iii），若 $b_{2g+1}(b_{2g}\cdots b_2)^t X_1$ 不是不可约的，则会导致矛盾。对于情形（iv），由于A不可约，我们有 $b_{2g+1}\prec b_2$；或者 $A=b_{2g+1}\overline{(b_{2g}\cdots b_2)^t b_{2g+2}\cdots}$不是不可约的。总之，$b_{2g+1}X_1$是不可约的。□

定义 2.6（约化子词对）。设 $W_1,W_2\in\mathcal{W}(\mathcal{S})$是两个不可约字。$(W_1,W_2)$的约化子词对定义为

$$\mathfrak{ts}(\overline{W_1},\overline{W_2}):=\min\{(\overline{C_1},\overline{C_2})\mid \overline{W_1}=\overline{AC_1},\overline{W_2}=\overline{C_2B},\ \mathfrak{nf}(W_1W_2)=\overline{AC'B}\},$$

其中，“min”是按照长度字典序 $\prec$ 在 $\mathcal{W}(\mathcal{S})\times\mathcal{W}(\mathcal{S})$ 中取最小值。

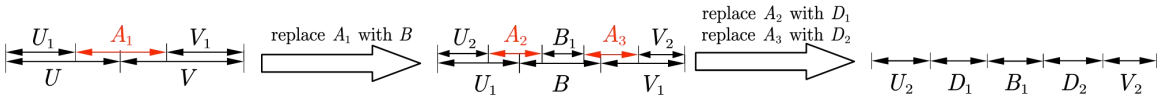


图1. 在第3.1小节开头所设定的条件下，我们总能通过至多三次 $S_{(i)}$-约化，将 $\overline{UV}$ 化为其标准形 $\mathfrak{nf}(UV)$。过程"将 A_2 替换为 D_1"和"将 A_3 替换为 D_2"可能不存在。

2.4. 共轭子长度函数。 最后，我们给出共轭子长度函数的正式定义。

定义 2.7 （共轭子长度函数）。 给定一个带有限生成集的群 G，对于任意 $u \sim v$ 属于 G，定义 $\mathrm{CL}(u,v)$ 如下：

$$\mathrm{CL}(u,v) := \min\{|w| \mid u = w^{-1}vw,\ w \in G\}.$$

共轭子长度函数 $\mathrm{CL}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的定义是：$\mathrm{CL}(n)$ 是满足以下条件的最小整数 N：对于所有长度为 $|u|+|v| \le n$ 的共轭元素 u 和 v，均有 $\mathrm{CL}(u,v) \le N$。

3. 两个不可约字之间的约化

本节将讨论曲面群 $G = \pi_1(\Sigma_g)$ 中的字在对称表示 (1.1) 下的约化。

3.1. 约化过程。 给定两个不可约字 $U = u_1 \cdots u_m$ 和 $V = v_1 \cdots v_n$，且 UV 自由约化，则约化"$UV \to \mathfrak{nf}(UV)$"具有有限种类型。（详情请参见 [12, 附录B] 中的表格。）假设 UV 可约，且 UV 中包含 $u_m v_1$ 的LLFR长度不等于（$4g-1$）。那么，根据 [12, 第 5] 节，我们总能至多通过三次 $S_{(i)}$-约化将 UV 约化为其标准形（见图1）：

步骤1。在 UV 的连接处必定存在一个类型为 $S_{(i_1)}$ 的可约子字 A_1（$\subset UV$），其中 $S_{(i_1)} = S_{(2,k)}$（$2g+1 \le k \le 4g-2$）、$S_{(3,t_1)}$ 或 $S_{(4,t_2)}$，并且 k，t_2 为极大。于是，我们有如下约化：

$$\overline{UV} \xrightarrow{S_{(i_1)}} \overline{U_1 B V_1}.$$

步骤2。在 $U_1 B$ 的连接处，可能存在一个类型为 $S_{(i_2)}$ 的可约子字 $A_2 (\subset U_1 B)$，其中 $S_{(i_2)} = S_{(2,2g+1)}$，$S_{(3,t_3)}$ 或 $S_{(4,t_4)}$ 的 t_4 取最大值。于是，我们得到如下约化：

$$\overline{U_1 B V_1} \xrightarrow{S_{(i_2)}} \overline{U_2 D_1 B' V_1}.$$

步骤3。在 BV_1 的连接处，可能存在一个类型为 $S_{(i_3)}$ 的可约子字 $A_3 (\subset B'V_1 \subset BV_1)$，其中 $S_{(i_3)} = S_{(2,2g+1)}, S_{(3,t_5)}$ 或 $S_{(4,t_6)}$ 的 t_6 取最大值。于是，我们得到如下约化：

$$\overline{U_2 D_1 B' V_1} \xrightarrow{S_{(i_3)}} \overline{U_2 D_1 B_1 D_2 V_1}.$$

UV 的所有可能约化过程均列于 [12, 附录B 的表4–7]中。在这些表中，我们使用左上角的标签 $*$ 来表示存在对称情形。此处，我们将解释未列出的对称情形，并说明如何从给定的标记推导出其对称情形

$*$ 项。对称情形出现的原因主要源自两个方面：

一方面，在步骤1中，如果 $S_{(i_1)} = S_{(3,t)}$ $(t \ge 2) S_{(4,t')}$ $(t' \ge 1)$，那么有一些项（即[12, 表 6]中的所有项）存在与自身不同的对称情形。例如，[12, 表 6] 的条目1有如下对称情形：对于某些 $b_1 \cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$ 和 $2 \le r \le 2g$，

$$\begin{aligned} \overline{C_1 C_2} \quad &= \quad \overline{\underbrace{b_1 (b_2 \cdots b_{2g})^{t-1} b_2 \cdots b_r}_{C_1} \underbrace{b_{r+1} \cdots b_{2g+1}}_{C_2}} \\ &\xrightarrow{S_{(3,t)}} \quad \overline{(b_{2g} \cdots b_2)^t}. \end{aligned}$$

另一方面，在步骤2和步骤3中，$S_{(i_2)}$ 和 $S_{(i_3)}$ 的不同选择可能会产生对称情形，无论步骤1是否会产生对称情形。例如， [12, 表 6] 中的条目2、3、4和6，以及 [12, 表 7] 中所有标记为 $*$ 的项，都有对称情形，原因正是如此。具体而言，我们有以下两个例子：

(1) [12, 表 6] 中的条目2有如下对称情形：对于某些 $b_1\cdots b_{4g}\in\overline{\mathcal{R}\text{和 }t\geq 2}$,

$$\overline{C_1C_2} \quad = \quad \overline{\underbrace{b_{4g}(b_1\cdots b_{2g-1})^{t-1}b_1\cdots b_r}_{C_1}\underbrace{b_{r+1}\cdots b_{2g}b_2\cdots b_{2g}b_{2g+1}}_{C_2}}$$

$$\xrightarrow{S_{(3,t)}}\xrightarrow{S_{(2,2g+1)}} \quad \overline{(b_{2g-1}\cdots b_1)^{t-1}b_{2g-1}\cdots b_2b_{2g}\cdots b_2},$$

其中$S_{(i_1)}=S_{(3,t)}$，而$S_{(i_2)}$ 是平凡的，且$S_{(i_3)}=S_{(2,2g+1)}$。

(2) [12, 表 7] 中的条目4有如下对称情形：对于某些 $b_1\cdots b_{4g}\in\overline{\mathcal{R}\text{和 }2g+1\leq r+s\leq 4g-2}$,

$$\overline{C_1C_2} \quad = \quad \overline{\underbrace{b_1\cdots b_r}_{C_1}\underbrace{b_{r+1}\cdots b_{r+s}b_{r+s-2g+2}\cdots b_{r+s+1}}_{C_2}}$$

$$\xrightarrow{S_{(2,r+s)}}\xrightarrow{S_{(2,2g+1)}} \quad \overline{b_{2g}\cdots b_{r+s-2g+2}b_{r+s}\cdots b_{r+s-2g+2}},$$

其中$S_{(i_1)}=S_{(2,r+s)}$，而$S_{(i_2)}$ 是平凡的，且$S_{(i_3)}=S_{(2,2g+1)}$。

3.2. **关于两个不可约字之间约化的引理**。通过检查 [12, 表4–8], ，我们可以得到以下引理。

引理3.1。设 $U=\overline{U_1U_2\text{和 }V=V_1V_2\text{是 }\mathcal{W}(\mathcal{S})}$ 中的两个不可约字，其中 UV 是自由约化的，且$\mathfrak{rs}(U,V)=(U_2,\overline{V_1})$。若 $\mathfrak{nf}(\overline{U_2}\overline{V_1})=\underline{Xb_1b_2\cdots b_s}$，其中 $2\leq s\leq 2g$ 满足某个 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$ 和某个$X\in\mathcal{W}(\mathcal{S})$，则 $\overline{V_2}\neq b_{s+1}\cdots$。

Symmetrically, if $\mathfrak{nf}(U_2V_1)=\overline{b_s\cdots b_2b_1X}$ *for some* $\overline{b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}$, *then* $\overline{U_1}\neq\overline{\cdots b_{s+1}}$.

证明。例如，在 [12, 表 4],中，我们有

$$\mathfrak{rs}(\overline{U},\overline{V})=(\overline{U_2},\overline{V_1})=(\overline{b_1'(b_2'\cdots b_{2g}')^{t_1}},\overline{(b_2'\cdots b_{2g}')^{t_2}b_{2g+1}'}),$$

$$\mathfrak{nf}(U_2V_1)=\overline{\underbrace{(b_{2g}'\cdots b_2')^{t_1+t_2-1}}_{X}b_{2g}'\cdots b_2'}$$

对于某个$\overline{b_1'\cdots b_{4g}'}\in\mathcal{R}$。若 $\overline{V_2}=\overline{b_1'\cdots}$，则

$$\overline{V}=\overline{\underbrace{(b_2'\cdots b_{2g}')^{t_2}b_{2g+1}'}_{V_1}\underbrace{b_1'\cdots}_{V_2}}$$

是可约的，这与 V 不可约这一假设矛盾。其余所有项也都可用同样的方法验证。□

引理3.2。设 $\overline{X=\overline{x_1\cdots x_kb_1\cdots b_r}\overline{(b_1\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R},2\leq r\leq 2g)\text{和 }Y=\overline{y_1\cdots y_n}}$ 是两个不可约字，其中 XY 自由约化但不可约。记 $\mathfrak{rs}(X,Y):=(X_0,Y_0)$。若 $x_k\neq b_{4g}$，则以下三项之一成立：

(a) $(\overline{X_0},\overline{Y_0})=(\overline{b_1\cdots b_{2g}},\overline{(b_2\cdots b_{2g})^tb_{2g+1}})(t\geq 1)$ 以及 $r=2g$，对应于 [12, 表 4]。*(b)* $(X_0,Y_0)=(\cdots b_1\cdots b_r,b_{r+1}\cdots b_{r+s}\cdots)$，对应于 [12, 表 5–8]。*(c)*

$$(\overline{X_0},\overline{Y_0})=\begin{cases}(\overline{b_r},\overline{b_{r-1}\cdots b_{r-2g}}),\\(\overline{b_r},\overline{(b_{r-1}\cdots b_{r-2g+1})^tb_{r-2g}})\ (t\geq 2),\\(\overline{b_r},\overline{(b_{r-1}\cdots b_{r-2g+1})^t})(t\geq 1,b_r\succ b_{r-2g+1}),\end{cases}$$

其下标为 $\cdot_i$，模 $4g$ b_i，对应于引理 3.2]中第二张表的第（*2–4*）项 [12,。

证明。 请注意，所有约化情形均已根据连接处 LLFR 的长度分类，并列于 [12, 表 4–8] 。此处我们采用相同的分类策略，列出所有约化子词对（X_0，Y_0）：$=\mathfrak{rs}$（X，Y）。

情形（1）。在 X 和 Y 的连接处不存在 LLFR，这对应于 [12, 表 4]。于是

$$(\overline{X_0},\overline{Y_0})=(\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_1}},\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_2}b_{2g+1}})$$

对于某个 t_1，$t_2\geq 1$。结合假设 $X=x_1\cdots x_kb_1\cdots b_r$，我们得到 $t_1=1$，因此结论（a）成立。

情形（2）。在 X 和 Y 的连接处存在一个 LLFR，记为 Z，这对应于 [12, 表 5–8]。假设

$$\overline{Z}=\overline{\underbrace{\cdots b_r}_{X_1}\underbrace{y_1\cdots y_s}_{Y_1}},$$

其中 $\overline{X}=\overline{\cdots X_1}$ 和 $\overline{Y}=\overline{Y_1\cdots}$。于是我们有如下两个子情形：

子情形（2.1）。 $\overline{Z\subset b_{i+1}\cdots b_{i+4g}}$，其中 $\overline{b_{i+1}\cdots b_{i+4g}}$ 表示 $b_1\cdots b_{4g}$ 的一个循环置换，其下标为 b_j 的下标（模 $4g$）。于是我们有 $y_1\cdots y_s=\overline{b_{r+1}\cdots b_{r+s}}$ 和 $y_{s+1}\neq b_{r+s+1}$。由于 $x_k\neq b_{4g}$，我们有

$$\overline{Z}=\overline{\underbrace{b_1\cdots b_r}_{X_1}\underbrace{b_{r+1}\cdots b_{r+s}}_{Y_1}}.$$

由此可得结论（b）成立。此外，根据长度 $|Z|=r+s$，我们有以下对应关系：

(1) $r+s=2g-1$ 的情形对应于 [12, 表 5]。(2) $r+s=2g$ 的情形对应于 [12, 表 6]。(3) $2g+1\leq r+s\leq 4g-2$ 的情形对应于 [12, 表 7]。(4) $r+s=4g-1$ 的情形对应于 [12, 表 8]。

子情形 (2.2)。 $\overline{Z\subset b_{i+4g}\cdots b_{i+1}}$，其中 $\overline{b_{i+4g}\cdots b_{i+1}}$ 表示 $\overline{b_{4g}\cdots b_1}$ 的一个循环置换，且 b_j 的下标按模 $4g$ 计算。于是，将假设 $X=x_1\cdots x_kb_1\cdots b_r$ 与 $r\geq 2$ 结合起来，我们有

$$\overline{Z}=\overline{\underbrace{b_r}_{X_1}\underbrace{b_{r-1}\cdots b_{r-s}}_{Y_1}}. \tag{3.1}$$

通过检查表5–8], 中的所有约化子词对 $(C_1,\overline{C_2})^{-1}:=(d_1\overline{\cdots d_{s_1}},h_1\overline{\cdots h_{s_2}})^{-1}$，我们得到以下断言：

断言1. 如果 $\overline{d_{s_1}h_1}\subset\overline{b_1\cdots b_{4g}}$ 对某个 $b_1\overline{\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}$ 成立，那么 $\overline{C_1C_2}$ 不包含任何下标模 $\overline{4g}$ 的子词 $b_{i+1}b_i$。等价地，如果 $d_{s_1}h_1\subset b'_{4g}\cdots\overline{b'_1}$ 对某个 $\overline{b'_{4g}\cdots b'_1}\in\mathcal{R}$ 成立，那么 $\overline{C_1C_2}$ 不包含任何下标模 $4g$ 的子词 $b'_ib'_{i+1}$。

现在将 $X=x_1\overline{\cdots}x_kb_1\cdots b_r$ 与方程（3.1）和 $b_rb_{r-1}\subset b_{4g}\cdots b_1$ 结合起来，并对约化子词对 $\mathfrak{rs}(X,Y)=(X_0,Y_0)$ 应用断言1，得到 $X_0=\overline{b_r}$。于是只需考虑 $\mathfrak{rs}(X_0,\overline{Y})=\overline{(b_r,Y)}$，这恰好对应于引理3.2]。因此结论 $\overline{(c)}$ 成立。□

引理3.3. 设 U 和 V 是 $\overline{\mathcal{W}(\mathcal{S})}$ 中的两个不可约字，且 UV 自由约化。若 UV 没有 $(\overline{4g-1})$-LLFR，则

$$|U|+|V|-|UV|\leq 4g.$$

证明。 由于 $\overline{UV}$ 不存在 $(4g-1)$-LLFR，根据 [12, 表 4–7]，至多有三种约化过程：$S_{(2,k)}(2g+1\leq k\leq 4g-2)$、$S_{(3,t)}$ 和 $S_{(4,t)}$。更准确地说，至多有一个 $S_{(2,k)}$ $(k\geq 2g+2)$。注意，每次 $S_{(2,k)}$（分别为 $S_{(3,t)}$）约化都会使词长减少 $2k-4g$（分别为 2），而每次 $S_{(4,t)}$ 约化都不会改变词长。因此，我们有

$$|U|+|V|-|UV|\leq 2(4g-2)-4g+2\cdot 2=4g.$$

□

4. 关于共轭约化的若干引理

本节中，我们给出若干关于共轭约化的引理。设 X 和 U 是 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$中的两个不可约词，且 $X^{-1}UX$ 是自由约化的。根据 $X^{-1}UX$ 是否包含 $(4g-1)$-LLFR，我们将讨论分为两个小节。

4.1. 不存在 $(4g-1)$-LLFR。

下面的引理仍需逐项核查附录B [12, 中的表格所列情形，并辅以一些常规论证。因此，我们在证明中讨论其中若干项。

引理 4.1。设 $X = x_1\cdots x_n$ 和 U 是 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ 中的两个不可约字，使得 $X^{-1}UX$ 自由约化且不含 $(4g-1)$-LLFR。若 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X$ 不是自由约化的，则 $\mathfrak{rs}(X^{-1},U) = (X', U)$，其中 $X' = \cdots x_1^{-1}$ 是 X^{-1} 的子词，且 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U) = Wx_1^{-1}$，其中 W 是 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$中的某个不可约字。

此外，以下两个结论之一成立：

(a) $X^{-1} = \cdots b_1$ 和 $U = (b_2\cdots b_{2g})^t$，其中 $b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$ 和 $t \geq 1$。*(b)* $Wx_2\cdots x_n$ 不可约，并且在过程“$X^{-1}UX \to Wx_2\cdots x_n = \mathfrak{nf}(X^{-1}UX)$”中，词长至多减少 $4g+2$。

证明。由于 $X^{-1}UX$ 是自由约化的，而 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X$ 不是，我们有约化子词对 $\mathfrak{rs}(X^{-1}, U) = (X', U)$，且 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U)$ 必须以 x_1^{-1} 结尾，也就是说，$\mathfrak{nf}(X^{-1}U) = Wx_1^{-1}$，其中 W 属于 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$。此外，如果 $Wx_2\cdots x_n$ 不可约，那么 $\mathfrak{nf}(X^{-1}UX) = Wx_2\cdots x_n$，因此

$$\begin{aligned} & |X^{-1}UX| - |\mathfrak{nf}(X^{-1}UX)| \\ = \;& 2|X| + |U| - |Wx_2\cdots x_n| \\ = \;& (|X| + |U| - |X^{-1}U|) + (|X^{-1}U| + |X| - |Wx_2\cdots x_n|) \\ \text{by Lemma 3.3} \;\leq\; & 4g + (|Wx_1^{-1}| + n - |Wx_2\cdots x_n|) \\ = \;& 4g+2. \end{aligned}$$

因此，要证明结论（b）成立，只需证明 $Wx_2\cdots x_n$ 是不可约的。

现在，我们需要通过设定来检查 [12, 表 4–7] 中的各项

$$\mathfrak{rs}(X^{-1}, U) = (X', U) = (C_1, C_2),$$
$$\mathfrak{nf}(X^{-1}U) = Wx_1^{-1} = \cdots \mathfrak{nf}(C_1C_2).$$

注意，C_1 和 $\mathfrak{nf}(C_1C_2)$ 的末尾字母必须相同，且都等于 x_1^{-1}。因此，[12, 表 4] 中唯一的项在本引理中不会出现。对于 [12, 表 5–7], 中的各项，由于它们相似且繁琐，我们仅提供几个示例以作说明，其余各项均可用相同的方法验证。

(1) 在 [12, 表 5], 中

$$X' = \cdots x_1^{-1} = b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_1}b_2\cdots b_{r+1}, \quad Wx_1^{-1} = \cdots (b_{2g}\cdots b_2)^{t_1+t_2+1}.$$

那么 $b_{r+1} = x_1^{-1} = b_2$，从而 $r = 1$。因此，

$$\begin{aligned} \mathfrak{nf}(X^{-1}U)X \quad &= \quad \underbrace{\cdots (b_{2g}\cdots b_2)^{t_1+t_2+1}}_{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)=Wx_1^{-1}}\underbrace{b_{2g+2}(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_1}b_{2g+1}\cdots}_{X=x_1x_2\cdots x_n} \\ &\xrightarrow{S_{(1)}} \quad \underbrace{\cdots (b_{2g}\cdots b_2)^{t_1+t_2}b_{2g}\cdots b_3}_{W}\underbrace{(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_1}b_{2g+1}\cdots}_{x_2\cdots x_n} =: H. \end{aligned}$$

注意，W 和 $x_2\cdots x_n$ 均不可约。若 H 可约，则 H 必定在 W 与 $x_2\cdots x_n$ 的连接处包含一个 $S_{(i)}$ 类型的子词。然而，不存在包含 b_3b_{4g} 的此类子词。因此，H 不可约，结论（b）成立。

(2) 在 [12, 表 6], 的第 5 项中，由于它有一个对称约化，我们需要验证两个子情形 es:

- $(\overline{X'},\ \overline{U}) = (\overline{b_1\cdots b_r},\ \overline{b_{r+1}\cdots b_{2g}(b_2\cdots b_{2g})^{t_0-1}})$ 和 $\overline{Wx_1^{-1}} = \overline{\cdots(b_{2g}\cdots b_2)^{t_0}b_{1^\circ}}$ 于是 $b_r = x_1^{-1} = b_1$，这意味着 $r=1$，从而 $U = (b_2\cdots b_{2g})^{t_0}$。因此，结论（a）成立。
- $(\overline{X'},\ \overline{U}) = (\overline{(b_1\cdots b_{2g-1})^{t_0-1}b_1\cdots b_r},\ \overline{b_{r+1}\cdots b_{2g}})$ 和 $\overline{Wx_1^{-1}} = \overline{\cdots b_{2g}(b_{2g-1}\cdots b_1)^{t_0}}$。于是我们还有 $b_r = x_1^{-1} = b_1$，这意味着 $r=1$。因此结论（a）也成立。

(3) 在 [12, 表 7], 的第 4 项中，我们也有两个子情形:

- $(\overline{X'},\ \overline{U}) = (\overline{b_{4g}b_1\cdots b_{2g-1}b_1\cdots b_r},\ \overline{b_{r+1}\cdots b_{r+s}})$ 和 $\overline{Wx_1^{-1}} = \overline{\cdots b_{2g-1}\cdots b_1b_{2g-1}\cdots b_{r+s-2g+1}}$。那么 $b_r = x_1^{-1} = b_{r+s-2g+1}$，这意味着 $s = 2g-1$ 和 $2\le r\le 2g-1$。因此，结论（a）成立。
- $(\overline{X'},\ \overline{U}) = (\overline{b_1\cdots b_r},\ \overline{b_{r+1}\cdots b_{r+s}b_{r+s-2g+2}\cdots b_{r+s}b_{r+s+1}})$ 和
$$\overline{Wx_1^{-1}} = \overline{\cdots b_{2g}\cdots b_{r+s-2g+2}b_{r+s}\cdots b_{r+s-2g+2}}.$$
那么 $b_r = x_1^{-1} = b_{r+s-2g+2}$，这意味着 $s = 2g-2$ 和 $3\le r\le 2g$。因此，
$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X} &= \overline{\underbrace{\cdots b_{2g}\cdots b_rb_{r+2g-2}\cdots b_{r+1}b_r}_{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)=Wx_1^{-1}}\underbrace{b_{2g+r}b_{2g+r-1}\cdots b_{2g+1}\cdots}_{X=x_1x_2\cdots x_n}}\\ &\xrightarrow{S_{(1)}} \overline{\underbrace{\cdots b_{2g}\cdots b_rb_{r+2g-2}\cdots b_{r+1}}_{W}\underbrace{b_{2g+r-1}\cdots b_{2g+1}\cdots}_{x_2\cdots x_n}} =: \overline{H}.\end{aligned}$$
由于 $3\le r\le 2g$，我们发现 $\overline{H}$ 在 W 和 $x_2\cdots x_n$ 的连接处没有 $S_{(i)}$ 类型的子词。因此，H 不可约，结论（b）成立。

□

证明下述引理需要根据表格列出所有可能的约化过程。这里，我们给出完整的讨论。

引理 4.2. 设 X 和 U 是 $\overline{\mathcal{W}(\mathcal{S})}$ 中的两个不可约字，且 $X^{-1}UX$ 是自由约化的，并且没有 $(4g-1)$-LLFR。那么，下列情况之一成立:

(a) 对某些 $b_1\overline{\cdots b_{4g}}\in\mathcal{R}$ 和 $t_0\ge 1$，有
$$\overline{X^{-1}UX} = \begin{cases}\overline{\underbrace{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+2}b_{2g+1}}_{X^{-1}}\underbrace{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1b_{2g+3}\cdots b_{4g}}_{U}\underbrace{b_1b_2\cdots b_{2g}\cdots}_{X}} := \overline{W_1}, & \textit{or}\\ \overline{\underbrace{\cdots b_2\cdots b_{2g}b_{2g+1}}_{X^{-1}}\underbrace{b_{2g+2}\cdots b_{4g-1}b_{2g+1}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}}_{U}\underbrace{b_1b_{4g}\cdots b_{2g+2}\cdots}_{X}} := \overline{W_2}.\end{cases}$$

(b) $\mathfrak{nf}(X^{-1}\overline{U})X$ 和 $\overline{X^{-1}}\mathfrak{nf}(\overline{UX})$ 都没有 $(4g-1)$-LLFR。

证明。 记约化子词对为
$$\mathfrak{rs}(\overline{X^{-1}},\overline{U}) = (\overline{X_0},\overline{U_0}), \tag{4.1}$$
其中 $\overline{X^{-1}} = \overline{X_1X_0}$ 且 $\overline{U} = \overline{U_0U_{1^\circ}}$

若条件 (b) 不成立，则要么 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U)\overline{X}$，要么 $\overline{X}^{-1}\overline{\mathfrak{nf}(UX)}$ 有一个 $(4g-1)$-LLFR。我们将证明前者成立时 $X^{-1}UX = \overline{W_1}$，后者成立时 $X^{-1}UX = W_2$。由于两者的证明几乎相同，为避免重复，我们只给出前者的证明。

Suppose $\overline{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X}$ has a $(4g-1)$-LLFR. Then
$$\mathfrak{rs}(\mathfrak{nf}(X^{-1}U),\overline{X}) = (\overline{C_1},\overline{C_2})$$
如 [12, 表 8]所示。因此，有以下两个对称情形。

情形（1）。 $\mathfrak{nf}(X^{-1}\overline{U}) = U_2(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^t$以及 $X = b_1(b_2\cdots b_{2g})^t X_2$，其中某些 $t \geq 1$，$b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$,$X_2$， $U_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$ 和 $b_1 \prec b_{2g}$。

注意到 $\overline{U_1X} = \overline{U_1b_1\cdots b_{2g}\cdots} \subset \overline{UX}$和 $\overline{X^{-1}UX}$是自由约化的，且没有 $(4g-1)$-LLFR，因此我们有$U_1 \neq \cdots b_{2g+2}\cdots b_{4g}$。此外，根据第3.1小节开头的讨论，我们知道约化

$$\begin{aligned}\overline{X^{-1}U} \to \mathfrak{nf}(X^{-1}U) &= \overline{X_1\mathfrak{nf}(X_0U_0)U_1}\\ &= \overline{U_2(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t-1}b_{2g+2}\cdots b_{2g+s}\underbrace{b_{2g+s+1}\cdots b_{4g}}_{U_1}}\ (2\leq s\leq 2g)\end{aligned} \tag{4.2}$$

也可以在至多三步内完成。（见图1。我们使用相同的记号：$S_{(i_1)}$（分别）$S_{(i_2)}$、$S_{(i_3)}$）表示第一个（分别表示左侧、右侧）约化过程。）于是由引理3.1可得 $s=2$ 或 $2g$，并且

$$\overline{X_1\mathfrak{nf}(X_0U_0)} = \begin{cases}\overline{U_2(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t-1}b_{2g+2}} & \text{if } s=2,\\ \overline{U_2(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^t} & \text{if } s=2g.\end{cases} \tag{4.3}$$

注意到

$$\overline{X^{-1}} = \overline{X_2^{-1}(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^t b_{2g+1}} \tag{4.4}$$

是不可约的。然后，将引理3.2应用于公式（4.1）中的 $\mathfrak{rs}(X^{-1},U) = (X_0,U_0)$，得到

$$\overline{X_0} = \begin{cases}\overline{b_{4g}\cdots b_{2g+1}} & \text{if Lemma 3.2(a) holds,}\\ \overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}} & \text{if Lemma 3.2(b) holds,}\\ \overline{b_{2g+1}} & \text{if Lemma 3.2(c) holds.}\end{cases} \tag{4.5}$$

此外，根据引理3.2，我们可以得到$(X_0,\ U_0)$的所有可能情形，并将其列于表1中，其中表1的第(1)项（分别对应第(2–5)项和第(6–8)项）对应于引理3.2(a)（分别对应3.2(b)和3.2(c)）。

Item	约化子词对 $(\overline{X_0},\ \overline{U_0})$	$\mathfrak{nf}(X_0U_0)$	约化操作 $S_{(i_1)},\ S_{(i_2)}\ S_{(i_3)}$	参数声明
(1)；(4。1)	$(\overline{b_{4g}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{(b_{4g-1}\cdots b_{2g+1})^{t_2}b_{2g}})$	$\overline{(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{1+t_2}}$	$S_{(3,t_2+1)},\ -,-$	$t_2\geq 1$; $b_{4g-1}\prec b_{2g}$
(2)； (7.1, 7.2∗, 7.3∗, 7.4∗)	$(\overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r b_{2g+r-2}\cdots b_{r-1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{2g+r-2}\cdot b_r\cdots b_{2g+r-2}}$	$S_{(2,4g-r+1)},\ S_{(i_2)}\ S_{(2,2g+1)}$	$3\leq r\leq 2g$; $b_{2g+r-2}\prec b_{r-1}$
(3)；(7。2、7。5、7.6∗、7.7∗)	$(\overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r(b_{2g+r-2}\cdots b_r)^{t_1}b_{r-1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{2g+r-2}\cdot(b_r\cdots b_{2g+r-2})^{t_1}}$	$S_{(2,4g-r+1)},\ S_{(i_2)}\ S_{(3,t_1)}$	$3\leq r\leq 2g$; $b_{2g+r-2}\prec b_{r-1}$
(4)；(7。3、7。6、7。8、7.9∗)	$(\overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r(b_{2g+r-2}\cdots b_r)^{t_1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{2g+r-2}\cdot(b_r\cdots b_{2g+r-2})^{t_1}b_{2g+r-1}}$	$S_{(2,4g-r+1)},\ S_{(i_2)}\ S_{(4,t_1)}$	$3\leq r\leq 2g$; $b_{2g+r-1}\succ b_r$
(5)； (7.4,7.7, 7.9, 7.10)	$(\overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2\,g}\cdots b_r})$	$\overline{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{2g+r-1}}$	$S_{(2,4g-r+1)},\ S_{(i_2)},\ S_{(3,t_1)}-,\ -\ S_{(4,t_1)}-,\ -$	$3\leq r\leq 2g$
(6)；(6.1)	$(\overline{b_{2g+1}},\ \overline{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_1}b_1})$	$\overline{(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_1}}$		$t_1\geq 2$; $b_{2g+2}\prec b_1$
(7)；(6。5)	$(\overline{b_{2g+1}},\ \overline{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_1}})$	$\overline{(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_1}b_{2g+1}}$		$t_1\geq 1$
(8)；(7.10)	$(\overline{b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g+2}\cdots b_{4g}b_1})$	$\overline{b_{4g}\cdots b_{2g+2}}$	$S_{(2,2g+1)},-,-$	$b_{2g+2}\prec b_1$

表1. 情形（1）下$(X^{-1},\ U)$的所有可能约化$^-$项(i)；$(m.n,\ p.q*)$表示这是第 i项，对应于表 m] 中的第 n 项，以及表 p]中第 q 项的对称情形。“$S_{(i_j)} = -$”表示它不存在。

通过逐项检查表1，我们将证明引理 4.2 中只能出现项（6）（8），且结论(a)成立。更确切地说，

（1）若出现项（1）（7），则 $\mathfrak{nf}(X_0U_0) = \overline{\cdots b_{4g-1}}$ 或 $\overline{\cdots b_{2g+1}}$，这与公式（4.3）矛盾。
（2）若出现项（2）（3），则由公式（4.3），我们有 $r=4,\ s=2$ 并且

$$\overline{U} = \overline{\underbrace{\cdots b_3}_{U_0}\underbrace{b_{2g+3}\cdots b_{4g}}_{U_1}}$$

是可约的，这与 U 不可约的假设矛盾。
(3) If items (4)(5) 出现，我们可以 o btai^n contra dictions by th与第 (2) 项中的论证相同。
（4）若出现项（6）（8），则由公式（4.3）可得 $s=2, t=1$，且

$$\overline{U} = \overline{\underbrace{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1}_{U_0}\underbrace{b_{2g+3}\cdots b_{4g}}_{U_1}}, \qquad t_0 \geq 1,\ b_{2g+2} \prec b_1.$$

结合公式（4.4），可得结论（a）中的 $\overline{X^{-1}U\overline{X}} = W_1$ 成立。

情形（2）。 $\mathfrak{nf}(X^{-1}\overline{U}) = \overline{U_2(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^t b_{4g}}$ 和 $\overline{X = (b_1\cdots b_{2g-1})^t X_2}$，其中 $t \geq 1$，对某个 $b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$, $X_2 \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$ 以及 $b_{2g+1} \prec b_{4g}$。
通过与情形（1）中类似的一些论证，我们得到如下与公式（4.2）平行的方程:

$$\mathfrak{nf}(X^{-1}U) = \overline{X_1\mathfrak{nf}(X_0U_0)U_1} = \overline{U_2(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t-1}b_{2g+1}\cdots b_{2g+s}\underbrace{b_{2g+s+1}\cdots b_{4\ g}}_{U_1}} \quad (1 \leq s \leq 2g)。$$

那么由引理3.1可知， $s=1$或 $2g$，并且

$$\overline{X_1\mathfrak{nf}(X_0U_0)} = \begin{cases} \overline{U_2(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t-1}b_{2g+1}} & \text{if } s=1, \\ \overline{U_2(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^t b_{4g}} & \text{if } s=2g. \end{cases} \tag{4.6}$$

注意到

$$\overline{X^{-1}} = \overline{X_2^{-1}(b_{4g-1}\cdots b_{2g+1})^t} \tag{4.7}$$

是不可约的。然后，将引理3.2应用于方程（4.1）中的 $\mathfrak{rs}(X^{-1}, U) = (X_0,\ U_0)$，可得在此情形下引理3.2(a)不成立，并且

$$\overline{X_0} = \begin{cases} \overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}} & \text{if Lemma 3.2(b) holds,} \\ \overline{b_{2g+1}} & \text{if Lemma 3.2(c) holds.} \end{cases} \tag{4.8}$$

此外，由引理3.2可得$(X_0,\ U_0)$的所有可能情形，并将它们列于表2中，其中表2的项(1–7)（分别地，项(8–9)）对应于引理3.2(b)（分别地，3.2(c)）。
现在我们逐项检查，以证明表2中的情形不可能出现在引理 4.2中。

（1）如果出现项（1–3）（8–9），那么 $\mathfrak{nf}(X_0\overline{U_0}) = \cdots b_{4g-2},\ \cdots b_{4g-1}$ 或 $\cdots b_{2g+2}$，这与方程（4.6）矛盾。（2）如果出现项（4–5），那么结合方程（4.6），我们有 $r=3,\ s=1$ 且该不可约字

$$\overline{U} = \overline{\underbrace{\cdots b_2}_{U_0}\underbrace{b_{2g+2}\cdots b_{4g}}_{U_1}}$$

是可约的，这就产生了矛盾。
（3）如果出现项（6–7），那么我们会遇到与项（4）相同的矛盾。

总之，我们已经完成了对情形（1）和情形（2）的讨论，因此证明也告完成。 □

4.2. **()-LLFR 的存在性**。为了处理“$X^{-1}UX$ 包含 $(4g-1)$-LLFRs”的情形，我们有以下三个引理。

引理 4.3. 设 X 和 U 是两个不可约字，且 $X^{-1}UX$ 是自由约化的。若 U 是循环不可约的，并且对于任意 $b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$都有 $U \neq b_1\cdots b_{2g-1}$，那么 $X^{-1}UX$ 中的每个 LLFR 要么始于 X^{-1}并止于 U，要么对称地，始于 U 并止于 X。此外，$X^{-1}UX$中至多有一个 $(4g-1)$-LLFR 。

Item	约化子词对 $(\overline{X_0},\ \overline{U_0})$	$\mathfrak{nf}(X_0U_0)$	约化操作 $S_{(i_1)}\ S_{(i_2)},\ S_{(i_3)}$	参数声明
(1); (6.1,6.2, 6.3, 6.4)	$(\overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}(b_{4g-2}\cdots b_{2g})^{t_1}b_{2g-1}})$	$\overline{\cdots b_{2g-1}\cdots b_{4g-2}\cdot(b_{2g}\cdots b_{4g-2})^{t_1}}$	$S_{(3,t_1+1)}\ S_{(i_2)}\ -$	$t_1\geq 1;$ $b_{4g-2}\prec b_{2g-1}$
(2); (6.5∗)	$(\overline{(b_{4g-1}\cdots b_{2g+1})^{t'}},\ \overline{b_{2g}})$	$\overline{b_{2g}(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t'}}$	$S_{(4,t')},\ -,-$	$t'\geq 1;$ $b_{4g-1}\succ b_{2g}$
(3); (6。6)	$(\overline{(b_{4g-1}\cdots b_{2g+1})^{t'}},\ \overline{b_{2g}(b_{4g-2}\cdots b_{2g})^{t_1}})$	$\overline{b_{2g}(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t'-1}\cdot b_{2g+1}\cdots b_{4g-2}\cdot(b_{2g}\cdots b_{4g-2})^{t_1}b_{4g-1}}$	$S_{(4,t')},\ -,\ S_{(4,t_1)}$	$t'\geq t\geq 1;$ $b_{4g-1}\succ b_{2g}$
(4); (7。1, 7.2∗, 7.3∗, 7.4∗)	$(\overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r b_{2g+r-2}\cdots b_r b_{r-1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+1}\cdots b_{2g+r-2}\cdot b_r\cdots b_{2g+r-2}}$	$S_{(2,4g-r)},$ $S_{(i_2)}\ S_{(2,2g+1)}$	$2\leq r\leq 2g-1;$ $b_{2g+r-2}\prec b_{r-1}$
(5); (7.2∗, 7。5, 7.6∗, 7.7∗)	$(\overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r(b_{2g+s-2}\cdots b_r)^{t_1}b_{r-1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+1}\cdots b_{2g+r-2}\cdot(b_r\cdots b_{2g+r-2})^{t_1}}$	$S_{(2,4g-r)},$ $S_{(i_2)}\ S_{(3,t_1)}$	$t_1\geq 2;$ $2\leq r\leq 2g-1;$ $b_{2g+r-2}\prec b_{r-1}$
(6); (7。3, 7。6, 7。8, 7.9∗)	$(\overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g}\cdots b_r(b_{2g+r-2}\cdots b_r)^{t_1}})$	$\overline{\cdots b_{2g+1}\cdots b_{2g+r-2}\cdot(b_r\cdots b_{2g+r-2})^{t_1}b_{2g+r-1}}$	$S_{(2,4g-r)},$ $S_{(i_2)},\ S_{(4,t_1)}$	$2\leq r\leq 2g-1;$ $b_{2g+r-1}\succ b_r$
(7); (7.4,7.7, 7.9, 7.10)	$(\overline{\cdots b_{4g-1}\cdots b_{2g+1}},\ \overline{b_{2\ g}\cdots b_r})$	$\overline{\cdots b_{2g+1}\cdots b_{2g+r-1}}$	$S_{(2,4g-r)},$ $S_{(i_2)},$	$2\leq r\leq 2g-1$
(8); (7.10)	$(\overline{b_{2g+1}},\ \overline{b_{2g+2}\cdots b_{4g}b_1})$	$\overline{b_{4g}\cdots b_{2g+2}}$	$S_{(2,2g+1)},-,-$ $S_{(3,t_1)}\ -,\ -$	$b_{2g+2}\prec b_1$
(9); (6.1)	$(\overline{b_{2g+1}},\ \overline{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_1}b_1})$	$\overline{(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_1}}$		$t_1\geq 2;$ $b_{2g+2}\prec b_1$

表2。情形（2）下（$X^{-1},\ U$）的所有可能约化。项（i）；（$m.n,\ p.q*$）表示这是第 i 项，对应于表 m] 中的项 n以及表 p]中项 q 的对称情形。“$S_{(i_j)}=-$”表示该项不存在。

证明。设 $\overline{X}=\overline{x_1\cdots x_n}$。若 $\overline{X^{-1}UX}$包含一个始于 X^{-1}并止于 X的 LLFR，那么 $\overline{x_1^{-1}U\overline{x_1}}$也是一个分数关系子。这意味着，对于某个 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$和 $1\leq r\leq 2g$，有 $U=b_1\cdots b_r$、$x^{-1}=b_{4g}$和 $x_1=b_{r+1}$。由此可得 $b_{r+1}=b_{4g}^{-1}=b_{2g}$，进而得到 $r=2g-1$，这与假设$U\neq b_1\cdots b_{2g-1}$矛盾。因此，$X^{-1}UX$中的每个 LLFR要么始于 X^{-1}并止于 U，要么对称地，始于 U并止于 X。

现在假设在 $X^{-1}UX$ 中存在两个 $(4g-1)$-LLFR，分别记为 L_1 和 L_2，使得 $L_1\subset X^{-1}U$ 且 $L_2\subset UX$。由于 X 和 U 都是不可约的，L_2 和 U 的公共子词长度要么是 $2g-1$，要么是 $2g$。因此，关于 L_2 有两种可能情形:

情形（1）。$U\underbrace{X=\cdots b_{2g+2}\cdots b_{4g}b_1\cdots}_{U}\underbrace{b_{2g}\cdots}_{X}$由于 $L\subset X^{-1}U$，$X^{-1}=\underbrace{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}}_{1}\circ$，我们有

$$\overline{X^{-1}UX}=\underbrace{\overline{\cdots b_{4g}\cdots b_{2g+1}}}_{X^{-1}}\underbrace{\overline{b_{2g}\cdots b_1\cdots X}}_{U}.$$

因此，$U=\overline{b_{2g}\cdots b_{4g}}$，这与 U 是循环不可约的假设矛盾。

情形（2）。$U\underbrace{X=\cdots b_{2g+1}\cdots b_{4g}b_1\cdots b_{2g-1}}_{X}\cdots$对于某个$b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$。然后，我们可以通过与情形（1）中类似的论证得到矛盾。

因此，$X^{-1}UX$中至多有一个（$4g-1$）-LLFR。 □

引理 4.4。设 X 和 U 是两个不可约字，且 $X^{-1}UX$ 是自由约化的。假设 U 是循环不可约的，并且对于任意 $b_1\cdots b_{4g}\in\mathcal{R}$ 和 $t\geq 1$，都有 $U\neq(b_1\cdots b_{2g-1})^t$。如果 $X^{-1}UX$ 中存在一个（$4g-1$）-LLFR，则存在两个不可约字 Y 和 V，使得满足以下条件：

(a) V是 U的循环置换。*(b)* $X^{-1}UX=Y^{-1}VY$作为群元素。*(c)* $Y^{-1}VY$是自由约化的，并且没有（$4g-1$）-LLFR。

证明。根据引理 4.3，$X^{-1}UX$恰好有一个（$4g-1$）-LLFR。不妨设它位于 X^{-1} 和 U的连接处。于是，根据 [12, 表 8]，，我们有以下两个情形：

情形（1）。$X^{-1}=X_1^{-1}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}$和$UX=b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}Z$，其中 $t_0\geq 1$为极大值，而 $b_1\prec b_{2g}$对于某些不可约词 X_1和 Z成立。于是不可约字

$$\overline{X}=\overline{(b_{2g}\cdots b_2)^{t_0}X_1} \tag{4.9}$$

对于$X_1\neq(b_{2g}\cdots b_2)^{t'}b_1\cdots$（$t'\geq 0$）。我们有两个子情形：

子情形 (1.1)。如果 $X\not\subseteq Z$，则有

$$\overline{UX}=\underbrace{\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0-1}b_2\cdots b_{2g-1}}}_{U}\underbrace{\overline{b_{2g}Z}}_{X}. \tag{4.10}$$

由于 $U\neq b_1\cdots b_{2g-1}$，我们有 $t_0\geq 2$。令

$$\overline{V}:=\overline{b_2\cdots b_{2g-1}b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0-1}},\qquad \overline{Y}:=\mathfrak{nf}(b_{2g+1}b_{2g}\cdots b_2X_1). \tag{4.11}$$

由于 $b_{2g}\cdots b_2X_1\subset X=b_{2g}Z$是不可约的，根据 [12, 引理 3.2]，，对于 Y我们有两种情形：

(1) 如果 $b_{2g+1}\succ b_2$，则不可约字 X_1可以写成 $X_1=(b_{2g}\cdots b_2)^{t_1-1}X_2$，其中对于某个不可约字 $X_2\neq b_1\cdots$，$t_1\geq 1$取最大值。相应地，根据 [12, 引理 3.2], 第二个表中的第 (4) 项，我们有

$$\overline{Y}=\mathfrak{nf}(b_{2g+1}b_{2g}\cdots b_2X_1)=\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_1}b_{2g+1}X_2}.$$

(2) 如果 $b_{2g+1}\prec b_2$，则根据 [12, 引理 3.2],第二个表中的第 (5) 项，我们有

$$\overline{Y}=\mathfrak{nf}(b_{2g+1}b_{2g}\cdots b_2X_1)=\overline{b_{2g+1}b_{2g}\cdots b_2X_1}.$$

然后，根据方程 (4.9)(4.10)(4.11)，我们可以验证 V和 Y满足所需条件 (a–c)。

子情形 (1.2)。如果 $X\subseteq Z$，那么不可约字

$$\overline{U}=\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}U_1}. \tag{4.12}$$

记作

$$\overline{V}:=\overline{U_1b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}},\qquad \overline{Y}:=\mathfrak{nf}(b_{2g+1}X_1). \tag{4.13}$$

此过程见图 2。由于 $X_1\neq(b_{2g}\cdots b_2)^{t'}b_1\cdots(t'\geq 0)$ 且 $b_{2g}\cdots b_2X_1$ 不可约，根据 [12,引理 3.2]，，对于 Y，我们有两种情形：

(1) 如果 $b_{2g+1}\succ b_2$ 且 $X_1=(b_{2g}\cdots b_2)^{t_1}X_2$，其中 $t_1\geq 1$ 最大，则

$$\overline{Y}=\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_1}b_{2g+1}X_2}. \tag{4.14}$$

现在将方程 (4.13) 与方程 (4.14) 结合起来，得到

$$\overline{Y^{-1}VY}=\underbrace{\overline{X_2^{-1}b_1(b_{4g}\cdots b_{2g+2})}}_{Y^{-1}}\underbrace{\overline{U_1b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}}}_{V}\underbrace{\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_1}b_{2g+1}X_2}}_{Y}.$$

由于$U=b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}U_1$是不可约的，我们有 $U_1\neq b_{2g+1}\cdots$。然后，根据等式（4.9）（4.12）（4.13）（4.14），可以直接验证这些 V和 Y满足所需的条件 (a–c)。

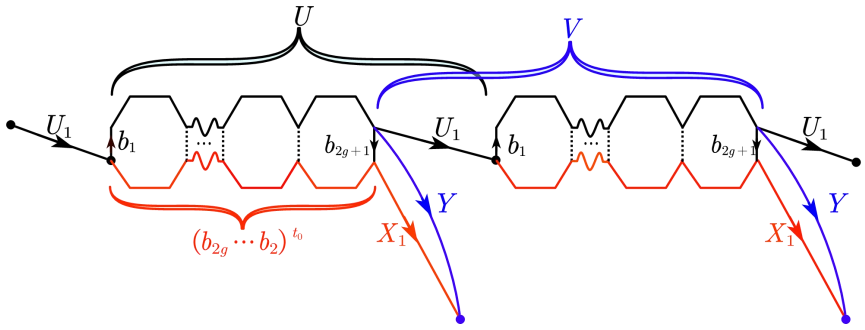


图 2. 在子情形 (1.2) 中，$X^{-1}=\overline{X_1^{-1}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}}$ 和 $U=\overline{b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}U_1}$。注意，与$X^{-1}UX$ 和 $Y^{-1}VY$对应的两条路径在$\mathbf{H}^2$中有共同端点。因此，作为群元素，$X^{-1}UX=Y^{-1}VY$在具有对称表示的曲面群 G 中。

(2) If $b_{2g+1}\prec b_2$ or $\overline{X_1}\neq\overline{b_{2g}\cdots b_2\cdots}$, then by [12, Lemma 3.2],

$$\overline{Y}=\overline{b_{2g+1}X_1}, \tag{4.15}$$

and

$$\overline{Y^{-1}VY}=\overline{\underbrace{X_1^{-1}b_1}_{Y^{-1}}\underbrace{U_1b_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}}_{V}\underbrace{b_{2g+1}X_1}_{Y}}.$$

此外，根据等式（4.9）（4.12），我们有$\overline{X_1}\neq\overline{b_{2g+2}\cdots}$和 $\overline{U_1}\neq\overline{b_{4g}\cdots}$。由于 t_0 是极大的，我们有

$$\overline{X_1^{-1}}=\overline{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{4g}}\quad\text{and}\quad\overline{U_1}=\overline{b_2\cdots b_{2g}\cdots}$$

不能同时成立。然后，结合等式（4.9）（4.12）（4.13）（4.15），我们可以直接验证 V和Y满足所需条件（a–c）。

因此，我们已经完成了对情形（1）的讨论。

情形（2）。 $X^{-1}=\overline{X_1^{-1}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1}$和$UX=\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}Z}$，其中 $t_0\geq 1$取最大值，且对于某些不可约字 X_1 和 Z，有 $b_{2g+2}\prec b_1$。那么这些不可约字

$$\overline{X}=\overline{b_{2g+1}(b_{2g}\cdots b_2)^{t_0}X_1},\qquad\overline{U}=\overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}U_1}. \tag{4.16}$$

根据假设$U\neq(b_1'\cdots b_{2g-1}')^t$，对于任意 $b_1'\cdots b_{4g}'\in\mathcal{R}$和任意 $t\geq 1$，我们有 $U_1\neq(\overline{b_2}\cdots b_{2g})^{t'}$，对于任意 $t'\geq 0$。记

$$\overline{V}:=\overline{U_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}},\qquad\overline{Y}:=\overline{b_{2g+1}X_1}. \tag{4.17}$$

此过程见图 3。由于U 是循环不可约的，我们可得 V 的不可约性。此外，根据引理 2.5，$\overline{Y}$ 也不可约。现在我们证明

$$\overline{Y^{-1}VY}=\overline{\underbrace{X_1^{-1}b_1}_{Y^{-1}}\underbrace{U_1(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}}_{V}\underbrace{b_{2g+1}X_1}_{Y}}$$

满足下述结论（c）。事实上，

(1) 若 $Y^{-1}VY$ 不是自由约化的，则 $U_1=b_{2g+1}\cdots$，因此 $U=(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}b_{2g+1}\cdots$。由于 $b_{2g+2}\prec b_1$，我们有 $b_2\succ b_{2g+1}$，因此根据 $S_{(4,t_0)}$，U 是可约的，这与假设矛盾。

(2) 若 $Y^{-1}VY$包含一个 $(4g-1)$-LLFR（记作 K），则根据引理 4.3，K 要么以 Y^{-1} 开始并以 V 结束，要么以 V 开始并以 Y 结束。若 K以 V 开始并以 Y 结束，则 $X_1=b_{2g+2}\cdots$，因此根据方程

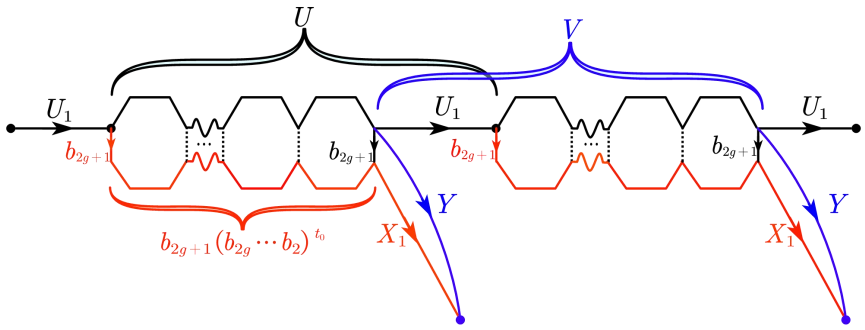


图 3. 在情形（2）中，$\overline{X^{-1}} = \overline{X_1^{-1}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1}$ 和 $\overline{U} = \overline{(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}U_1}$。注意，与 $X^{-1}UX$ 和 $Y^{-1}VY$ 对应的两条路径在 $\mathbf{H}^2$ 中具有相同的端点。因此，作为群元素，$X^{-1}UX = Y^{-1}VY$ 属于具有对称表示的曲面群 G。

(4.16)，不可约字

$$\overline{X} = \overline{b_{2g+1}(b_{2g}\cdots b_2)^{t_0}b_{2g+2}\cdots}$$

是可约的，这与假设矛盾。如果 K 从 $\overline{Y^{-1}}$ 开始并在 $\overline{V}$ 结束，那么根据方程（4.16），我们有 $U_1 \neq \overline{b_{4g}\cdots}$。此外，由于 Y^{-1} 和 V 均不可约，K 和 V 的公共子词长度要么是 $2g-1$，要么是 $2g$。因此，有两种可能的情形：

(i) $\overline{Y^{-1}} = \overline{\cdots b_{2g+3}\cdots b_{4g}b_1}$, $\overline{V} = \overline{b_2\cdots b_{2g}b_{2g+1}\cdots}$.
(ii) $\overline{Y^{-1}} = \overline{\underbrace{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{4g}}_{X_1^{-1}}b_1}$, $\overline{V} = \overline{\underbrace{b_2\cdots b_{2g}\cdots}_{U_1}(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}}$.

然而，正如下文所示，这两种情形都会导致矛盾：由式 (4.16)(4.17)，在情形 (i) 中，循环不可约字 $U = (b_2\cdots b_{2g})^{t_0}\, b_2\cdots b_{2g}b_{2g+1}\cdots$ 可被 $S_{(4,t_0+1)}$ 约化；在情形 (ii) 中，由于 U_1

$\overline{U} \neq \overline{(b_2\cdots b_{2g})^t}$，我们有 $\overline{U_1} = \overline{b_2\cdots b_{2g}\cdots}$。因此，

$$\overline{X^{-1}U} = \overline{\underbrace{\cdots b_{2g+2}\cdots b_{4g}}_{X_1^{-1}}(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1\ \underbrace{(b_2\cdots b_{2g})^{t_0}\,\underbrace{b_2\cdots b_{2g}\cdots}_{U_1}}_{U}}_{X^{-1}},$$

这与 t_0 的最大性矛盾。

根据上述讨论，我们可以直接验证，方程 (4.17) 中的 V 和 $\overline{Y}$ 满足所需条件 (a–c)。至此，情形（2）的分析以及引理 4.4 的证明均告完成。□

对于 $U = \overline{(b_1\cdots b_{2g-1})^t}$ 这一特殊情形，我们有以下引理。

引理4.5。设 $U = \overline{(b_1\cdots b_{2g-1})^t}$，其中 $b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$ 和 $t \geq 1$，并设 $X \neq \overline{b_{2g}\cdots}$ 是一个不可约字。若 $X^{-1}UX$ 是自由约化的，那么它就是不可约的。

证明。由于 $\overline{X} \neq \overline{b_{2g}\cdots}$，即 $\overline{X^{-1}} \neq \overline{\cdots b_{4g}}$，在 $X^{-1}U$ 的连接处或 UX 的连接处都不存在 LLFR。此外，注意到 $(X^{-1},\ U)$ 没有满足 [12, 的约化子词对。根据表 4],，我们有 $X^{-1}U$ 是不可约的，即，

$$\mathfrak{nf}(X^{-1}U) = \overline{X^{-1}U}.$$

我们证明 $\mathfrak{nf}(\overline{X^{-1}U})X$ 也是不可约的。事实上，如果 $\overline{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X}$ 是可约的，那么约化子词对 $\mathfrak{rs}(\mathfrak{nf}(X^{-1}U)\ X)$ 将满足表 4],，因为 $\mathfrak{nf}(X^{-1}U)X$ 的连接处不存在 LLFR。

于是，我们有

$$\overline{\mathfrak{nf}(X^{-1}U)} = \underbrace{\cdots b_{4g}(b_1\cdots b_{2g-1})^{t_1}}_{X^{-1}}\underbrace{(b_1\cdots b_{2g-1})^{t}}_{U}, \qquad \overline{X} = \overline{(b_1\cdots b_{2g-1})^{t_2}b_{2g}\cdots}$$

对于某个 $t_1 \geq 0$ 和 $t_2 \geq 1$。由此可知，X^{-1} 和 X 相互矛盾。因此，$X^{-1}U\overline{X}$ 是不可约的 e. □

引理 4.6。设 $U = (b_1\cdots b_{2g-1})^t$，其中 $b_1\cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$ 和 $t \geq 1$ 为某些对象；再设 X 是一个不可约字，且 $X^{-1}UX$ 是自由约化的。若 $X^{-1}U$ 或 UX 包含一个 $(4g-1)$-LLFR，则存在一个不可约字 Y，使得

(a) $X^{-1}UX = Y^{-1}UY$ 作为群元素。*(b)* $Y^{-1}UY$ 是自由约化的。*(c)* $Y^{-1}U$ 和 UY 都不含 $(4g-1)$-LLFR。

证明。假设 $U\overline{X}$ 包含一个 $(4g-1)$-LLFR。那么我们有

$$\overline{X} = \overline{b_{2g}(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t_1}X_1}$$

对于某个不可约字 $X_1 \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$，其中 $t_1 \geq 1$ 最大。设 $Y := \overline{b_{2g}}X_1$。那么根据引理 2.5，$Y$ 是不可约的。此外，我们可以直接验证 Y 满足结论（a）和（b）。下面我们证明结论（c）。

如果 $Y^{-1}U$ 有一个 $(4g-1)$-LLFR，那么我们有

$$\overline{Y^{-1}U} = \underbrace{\cdots b_{2g+1}\cdots b_{4g-1}}_{X_1^{-1}}\, b_{4g}\, \underbrace{(b_1\cdots b_{2g-1})^{t}}_{U}.$$

这将导致矛盾：$X = b_{2g}(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t_1}\, b_{2g-1}\cdots b_1\cdots$ 是可约的。

如果 UY 有一个 $(4g-1)$-LLFR，那么我们有

$$\overline{UY} = \underbrace{(b_1\cdots b_{2g-1})^{t}}_{U}\, b_{2g}\, \underbrace{b_{2g+1}\cdots b_{4g-1}\cdots}_{X_1}.$$

由此可得 $X = \overline{b_{2g}}(b_{2g+1}\cdots b_{4g-1})^{t_1}\, b_{2g+1}\cdots b_{4g-1}\cdots$，这与 t_1 的最大性矛盾。X_1

因此，结论（c）也成立。对于 $X^{-1}U$ 包含一个 $(4g-1)$-LLFR 的情形，同样的论证适用。□

5. 定理 1.1 的证明

在证明定理 1.1 之前，我们还需要以下引理。

引理 5.1。设 G 是具有对称表示（*1.1*）的曲面群，令 $U = u_1u_2\cdots u_m$、$V = v_1\overline{v_2}\cdots \overline{v_n} \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$ 为任意两个字（不一定不可约），并令 u、$v \in G$ 为两个元素。则

（*1*）如果 U 和 V 在 G 中（作为群元素）共轭，则 $m \equiv n$（模 2）；

（*2*）如果 u、v 在 G 中共轭，则 $|u|+|v|$ 总是偶数。此外，我们可以表示为

$$u = X^{-1}A_2A_1X, \quad v = Y^{-1}A_1A_2Y$$

（作为 G 中的群元素），对应于某些不可约字 $X, Y \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$，其中 $A_1\overline{A_2}$ 和 $A_2\overline{A_1}$ 都是共轭类 $[u]$ 的标准形 $\mathfrak{nf}([u])$ 的循环置换，且 $X^{-1}A_2A_1X$ 和 $Y^{-1}A_1A_2Y$ 均为自由约化的。

证明。 (1) 由于 U 和 V 在 G 中共轭，因此存在一个字 $C \in \overline{\mathcal{W}(\mathcal{S})}$，使得

$$U = C^{-1}VC$$

作为群元素。因此它们具有相同的标准形

$$\mathfrak{nf}(U) = \mathfrak{nf}(C^{-1}VC).$$

注意，约化“$U \to \mathfrak{nf}(U)$ 和 $C^{-1}VC \to \mathfrak{nf}(C^{-1}VC)$”可通过有限次 $S_{(i)}$ 实现，并且每次 $S_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ 都会使词长减少一个偶数。因此，

$$m \equiv |\mathfrak{nf}(U)| = |\mathfrak{nf}(C^{-1}VC)| \equiv |\overline{C^{-1}VC}| = 2|\overline{C}| + |\overline{V}| \equiv n \pmod 2.$$

(2) 由条目 (1)，我们立即得到 $|u| + |v|$ 是偶数。此外，根据 [12, 定理 1.2], ，共轭类 $[u] = [v]$ 有唯一的标准形 $\mathfrak{nf}([u]) := A$，它是 $[u]$ 中的一个循环不可约字。此外，每个元素 $v \in [u]$ 都可以写成

$$v = C_v^{-1}AC_v$$

（作为群元素），其中某个不可约字为 $C_v \in \overline{\mathcal{W}(\mathcal{S})}$。注意，字 $C_v^{-1}AC_v$ 可能是可约的。如果 $C_v^{-1}AC_v$ 不是自由约化的，也就是说，它包含类型为 $S_{(1)}$ 的子词，那么经过有限次 $S_{(1)}$ 约化后，我们可以得到一个表达式

$$v = X_v^{-1}A_vX_v$$

使得字 $X_v^{-1}A_vX_v$ 是自由约化的。注意，A_v 是 A的一个循环置换，而 X_v 是不可约字 C_v 的一个子词，因此 X_v 仍然不可约。类似地，我们也有这样的表达式$u = X_u^{-1}A_uX_u$. 。由于A_u 和 A_v 都是标准形 $\mathfrak{nf}([u]) = A$ 的循环置换，因此 A_u是 A_v的一个循环置换，从而它们可以分解为 $A_u = A_2A_1$ 和 $A_v = A_1A_2$。 □

引理 5.2. 对于任意具有对称表示 *(1.1)* 的曲面群 G 以及任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathrm{CL}(2n + 1) = \mathrm{CL}(2n) \geq n - 1.$$

证明。 显然，由引理 5.1 可得 $\mathrm{CL}(2n + 1) = \mathrm{CL}(2n)$。令 $u = c_1$ 和 $v = c_2^{1-n}c_1c_2^{n-1}$。注意，$|u| = 1$ 和 $|v| = 2n - 1$。于是 $|u| + |v| \leq 2n$ 且 $\mathrm{CL}(2n) \geq \mathrm{CL}(u, v) = n - 1$. □

现通过在凯莱图上的距离计算来证明定理 1.1。

定理 5.3(定理 1.1)**.** 设 G为具有对称表示 *(1.1)* 的一个曲面群。则 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的共轭子长度函数CL : 满足

$$n - 1 \leq \mathrm{CL}(2n) = \mathrm{CL}(2n + 1) \leq n + 8g - 1$$

对任意亏格 $g \geq 2$。

证明。 下界由引理 5.2 得出。现证明上界。设 u和 v 是 G 中两个长度为 $|u| + |v| \leq 2n$的共轭元素。由引理 4.4、引理 4.6 和引理 5.1，可得到四个不可约词 X，Y，A_1 和 A_2，满足以下条件:

- 作为 G中的群元素，
$$u = X^{-1}A_2A_1X, \quad v = Y^{-1}A_1A_2Y.$$
- A_1A_2 和 A_2A_1 均为共轭类$[u] = [v]$的标准形 $\mathfrak{nf}([u]) := A$ 的循环置换，因此均为循环不可约。
- $X^{-1}A_2A_1X$ 和 $Y^{-1}A_1A_2Y$都是自由约化的。
- $X^{-1}A_2A_1$、A_2A_1X、$Y^{-1}A_1A_2$ 和 A_1A_2Y都不包含一个（$4g - 1$）-LLFR。

注意，将 $X^{-1}A_2A_1X$（分别为 $Y^{-1}A_1A_2Y$）约化为其标准形 $\mathfrak{nf}(u)$（分别为 $\mathfrak{nf}(v)$）可通过以下两个步骤完成:

$$\overline{X^{-1}A_2A_1X} \xrightarrow{R_1} \overline{\mathfrak{nf}(X^{-1}A_2A_1)X} \xrightarrow{R_2} \mathfrak{nf}(u),$$

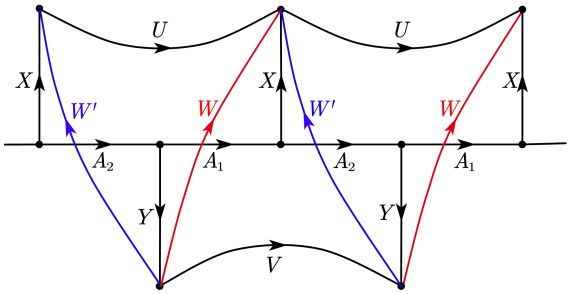


图4. 在关于该对称表示的这个凯莱图中，作为群元素， $W = Y^{-1}A_1X$、 $W' = Y^{-1}A_2^{-1}X$和 $U = (W')^{-1}VW' = W^{-1}VW$。因此， W和 W'是 $U = u$和 $V = v$的两个不同共轭元。

$$\overline{Y^{-1}A_1A_2Y} \xrightarrow{R_1'} \overline{\mathfrak{nf}(Y^{-1}A_1A_2)Y} \xrightarrow{R_2'} \mathfrak{nf}(v).$$

每一步将长度减少

$$R_1 := |X| + |A| - |X^{-1}A_2A_1|, \quad R_2 := |X^{-1}A_2A_1| + |X| - |u|,$$
$$R_1' := |Y| + |A| - |Y^{-1}A_1A_2|, \quad R_2' := |Y^{-1}A_1A_2| + |Y| - |v|.$$

将上述四个方程相加，得到

$$2(|X| + |Y| + |A|) - (R_1 + R_2 + R_1' + R_2') = |u| + |v| \le 2n.$$

此外，由于 $Y^{-1}A_1X$ 是 u和 v 的一个共轭元（见图4），我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{CL}(u,v) &\le |Y^{-1}A_1X| \\ &\le |Y| + |A_1| + |X| \\ &\le |X| + |Y| + |A| - 1 \\ &\le n - 1 + \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_1' + R_2'). \end{aligned} \tag{5.1}$$

为了完成定理 1.1 的证明，只需证明:

断言2. 在公式*(5.1)*中，我们有 $R_1 + R_2 + R_1' + R_2' \le 16g$.

证明 断言*2*的证明。将引理 4.2应用于不可约字 X 和循环不可约字 d

$$\overline{A'} := \overline{A_2A_1},$$

我们得到以下两种情形。

情形（1）引理4.2(a)成立。

那么，对于引理4.2(a)中的“W_1”，我们有以下约化过程:

$$\begin{aligned} \overline{X^{-1}A'X} \quad &= \quad \overline{\underbrace{X'^{-1}b_{4g}\cdots b_{2g+2}b_{2g+1}}_{X^{-1}}\underbrace{(b_{2g+2}\cdots b_{4g})^{t_0}b_1b_{2g+3}\cdots b_{4g}}_{A':=A_2A_1}\underbrace{b_1b_2\cdots b_{2g}X'}_{X}} \\ &\xrightarrow{S_{(3,t_0)}} \quad \overline{\underbrace{X'^{-1}(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_0+1}b_{2g+3}\cdots b_{4g}}_{\mathfrak{nf}(X^{-1}A')}\underbrace{b_1b_2\cdots b_{2g}X'}_{X}} \\ &\xrightarrow{S_{(2,4g-1)}} \quad \overline{\underbrace{X'^{-1}(b_{4g}\cdots b_{2g+2})^{t_0}b_{4g}\cdots b_{2g+3}}_{B}\underbrace{b_1X'}_{C}} := \overline{D}. \end{aligned}$$

注意到 $B \subset \mathfrak{nf}(X^{-1}A')$，因此它是不可约的。此外，由于 X 是不可约的，根据引理 2.5， C 也是不可约的。由于 BC 的连接处不存在 LLFR，且 $(B,\ C)$ 不满足 [12, 中的条件

表 4], 可知, $BC = \overline{D}$ 是不可约的。因此，我们有

$$R_1 + R_2 = 2 + (4g-2) = 4g. \tag{5.2}$$

对于引理4.2(a)中的对称情形“W_2”，通过类似的论证，公式(5.2)也成立。

Case (2) 引理4.2(b)成立，即 $\mathfrak{nf}(X^{-1}A')X$ 和 $X^{-1}\mathfrak{nf}(A'X)$都不含有一个 $(4g-1)$-LLFR .

若 $\mathfrak{nf}(X^{-1}A')X$ 是自由约化的，则由引理3.3可得

$$R_1 + R_2 \leq 4g + 4g = 8g. \tag{5.3}$$

若 $\mathfrak{nf}(X^{-1}A')X$ 不是自由约化的，且 $A' \neq (b_1 \cdots b_{2g-1})^t$，则由引理4.1(b)，我们有

$$R_1 + R_2 \leq 4g + 2. \tag{5.4}$$

若 $\mathfrak{nf}(X^{-1}A')X$ 不是自由约化的，且对于某些 $t \geq 1$ 和 $b_1 \cdots b_{4g} \in \mathcal{R}$， $A' = (b_1 \cdots b_{2g-1})^t$，则由引理4.5，我们得到不可约字 $X = b_{2g}X_1$，其中 $X_1 \neq b_{4g} \cdots$是某个不可约字。因此，

$$\begin{aligned} \overline{X^{-1}A'X} \quad &= \quad \overline{\underbrace{X_1^{-1}b_{4g}}_{X^{-1}} \underbrace{(b_1 \cdots b_{2g-1})^t}_{A'} \underbrace{b_{2g}X_1}_{X}} \\ &\xrightarrow{S_{(3)}} \quad \overline{X_1^{-1} \underbrace{(b_{2g-1} \cdots b_1)^t}_{B} X_1}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

此外，若$X_1^{-1}\overline{BX_1}$ 是自由约化的，则由引理4.5可知， $X_1^{-1}BX_1$ 是不可约的， 因此

$$R_1 + R_2 = 2. \tag{5.6}$$

若 $\overline{X_1^{-1}BX_1}$ 不是自由约化的，则有两个子情形。

(a) $\overline{X_1} = \overline{(b_{2g+1} \cdots b_{4g-1})^{t_0} b_{2g+1} \cdots b_{2g+i}X_2}$，其中 $t_0 \geq 0$ 首先是极大的， $1 \leq i \leq 2g-2$ 其次是极大的，对某个不可约字$X_2 \neq b_{2g+i+1} \cdots$或 $b_i \cdots$成立。 由于 $X^{-1}A'X$ 没有$(4g-1)$-LLFR，我们有 $t_0 = 0$。于是得到一个约化

$$\begin{aligned} \overline{X_1^{-1}BX_1} \quad &= \quad \overline{\underbrace{X_2^{-1}b_i \cdots b_1}_{X_1^{-1}} \underbrace{(b_{2g-1} \cdots b_1)^t}_{B} \underbrace{b_{2g+1} \cdots b_{2g+i}X_2}_{X_1}} \\ &\xrightarrow{i \cdot S_{(1)}} \quad \overline{\underbrace{X_2^{-1}b_i \cdots b_1}_{X_1^{-1}} \underbrace{(b_{2g-1} \cdots b_1)^{t-1} b_{2g-1} \cdots b_{i+1}}_{C} X_2} := \overline{D}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

注意，由于 $X_2 \neq b_{2g+i+1}$， D 是自由约化的。此外，由于 $X_1^{-1}C$ 与$(X_1^{-1},\ C)$的连接处不存在 LLFR，且不满足 [12, 的约化子词对不存在，因此由表 4], 可知$X_1^{-1}C := E$ 是不可约的。此外，由于 $X_2 \neq b_i \cdots$， EX_2 没有$(4g-1)$-LLFR。因此，由引理3.3可得

$$|E| + |X_2| - |EX_2| \leq 4g. \tag{5.8}$$

结合公式(5.5)(5.7)和(5.8)，我们得到

$$R_1 + R_2 \leq 2 + 2 \cdot i + 4g \leq 2 + 2(2g-2) + 4g = 8g - 2. \tag{5.9}$$

(b) $\overline{X_1} = \overline{(b_{2g-1} \cdots b_1)^{t_0} b_{2g-1} \cdots b_i X_2}$其中 t_0 首先取最大值， $2 \leq i \leq 2g-1$ 其次取最小值，对于某个 X_2而言。论证与上述情形(a)类似。

总之，对于情形（2），由式（5.3）（5.4）（5.6）和（5.9），可得

$$R_1 + R_2 \leq \max\{8g, 4g+2, 2, 8g-2\} = 8g. \tag{5.10}$$

最后，结合式（5.2）和（5.10），可得 $R_1 + R_2 \leq 8g$. 类似地，我们也有 $R_1' + R_2' \leq 8g$。因此，

$$R_1 + R_2 + R_1' + R_2' \leq 16g.$$

证明完成。 □

注 5.4。 对于自由群，引理 5.1 和引理 5.2 显然也成立。此外，由于 $S_{(1)}$ 是自由群中唯一的约化算子，引理 5.1(2) 中的字 $X^{-1}A_2A_1X$ 和 $Y^{-1}A_1A_2\overline{Y}$ 确实是不可约的。因此，在定理 5.3 的证明中， $R_i = R_i' = 0$ ($i = 1,\ 2$)，从而我们可以得到

$$\mathrm{CL}(2n+1) = \mathrm{CL}(2n) = n - 1 \tag{5.11}$$

对于自由群中的任意 $n \in \mathbb{N}$。

问题 5.5。 上述方程 (5.11) 在曲面群中是否成立?

参考文献

[1] C. R. Abbott 和 J. A. Behrstock，层级双曲群中的共轭元长度，Groups Geom. Dyn. **17** 3, 805 2023 838 ( ), no. – .[2] Y. Antolín 和 A. W. Sale，置换与共轭：相对双曲群中的共轭问题，Bull. Lond. Math. Soc.**48** (2016), no. 4, 657–675.[3] J. M. Belk 和 F. Matucci，*Thompson* 群中的共轭子长度，Bull. Lond. Math. Soc. **55** (2023), no. 2, 793–810.[4] M. R. Bridson 和 J. Howie，双曲群中有限子集的共轭，Internat. J. Algebra Comput. **15**(2005), no. 4, 725–756. [5] M. Bridson 和 T. Riley，模型丝状群中的共轭元长度，(2025)，预印本，arXiv:2506.01235. [6] M. Bridson 和 T. Riley，二步幂零群中的线性丢番图方程与共轭子长度，(2025)，预印本，arXiv:2506.01239.[7]M. Bridson 和 T. Riley，雪花群与具有非整数指数的共轭长度函数，(2025)，预印本，arXiv:2512.14038.[8] M. Bridson 和 T. Riley，具有快速增长共轭元长度函数的群，(2025)，预印本，arXiv:2512.23674. [9] M. Dehn，双侧曲面上的曲线变换，Math. Ann.**72** (1912), no. 3, 413–421.[10] I. G. Lysënok，双曲群的一些算法性质，Math. USSR-Izv. **35** (1990), no. 1, 145–163；译自 Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.**53**(1989), no. 4, 814–832, 912.[11] A. W. Sale，可解群和半单李群格中的共轭元长度，ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2012. [12] K. Wang、Q. Zhang 和 X. Zhao，曲面群中共轭类的字长公式与标准形，(2025)，61页，预印本，arXiv:2511.12862v2。

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮箱：
keqiyehuopo@stu.xjtu.edu.cn

西安交通大学数学与统计学院，中华人民共和国西安 710049电子邮箱：
zhangq.math@mail.xjtu.edu.cn