arXiv:2603.16282v1 [math.CA] 17 Mar 2026

锥上的有限正交多项式

ÖMER FARUK ET、ESRA ÇEKİRDEK 和 RABİA AKTAŞ KARAMAN

摘要。本文旨在研究旋转圆锥及其锥面上的有限正交多项式。我们在实心锥上定义了两类有限正交多项式，并推导出相应的微分方程和递推关系。此外，我们证明，在极限情形下，其中一类会化为锥上的拉盖尔多项式。同样，我们还在锥面上建立了两族有限正交多项式，并分析了它们各自的性质。

1. 引言

众所周知，经典正交多项式族，即雅可比多项式、拉盖尔多项式和埃尔米特多项式，具有无限正交性，并满足以下形式的二阶微分方程 [1]

$$\left(ax^2+bx+c\right)y_n''+\left(dx+e\right)y_n'-n\left(\left(n-1\right)a+d\right)y_n=0$$

其中，参数 a、b、c、d，和 e 均独立于 n。除经典的无限正交多项式族外，还有三族有限正交多项式，它们是同一个二阶微分方程的特殊解。这些记作 $M_{(p,\ q)n}$，$N_n^{(p)}$和 $I_n^{(p)}$ 的超几何多项式族，分别关于 F抽样、逆伽马和 T抽样分布具有有限正交性。文献 [10] 详细研究了它们在函数逼近和数值积分中的应用。每一族都与雅可比多项式和拉盖尔多项式有着密切联系。值得注意的是，第一族与雅可比多项式有关，而第二族则直接关联广义贝塞尔多项式，进而关联拉盖尔多项式 [10]。与经典的无限序列相比，现有文献对有限正交多项式的研究较少。不过，近些年来，这些多项式在文献中受到广泛关注。关于有限正交多项式的相关文献，请参见 [4–9, 11, 13, 17]。

多变量正交多项式在逼近理论、调和分析以及偏微分方程的谱方法中发挥着基础作用。尽管单变量经典正交多项式，如雅可比多项式、拉盖尔多项式和埃尔米特多项式，已得到充分研究，但将正交性推广到多变量和非乘积域仍是一个颇具挑战且活跃的研究领域。在单位球面、单位球和单纯形等经典情形中，显式正交基的存在、正交多项式的傅里叶级数、具有多项式系数的微分方程、求积公式、再生核的闭式表达以及逼近性质，共同促成了一个丰富而成熟的理论（见 [2, 3, 14, 15, 19, 20]）。

日期：2026年3月18日。2010 数学主题分类。33C50，33C45。关键词和短语。正交多项式、拉盖尔多项式、锥、微分方程、递推关系。

近年来，受单位球面上球谐函数理论以及单位球上的经典正交多项式启发，人们对二次旋转曲面上及其内部的正交结构进行了研究（见 [21–26]）。在 [21], 中，研究了实心锥上的正交结构和傅里叶正交级数

$$\mathbb{V}^{d+1} = \left\{(x,t) : \|x\| \le t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le t \le b\right\}$$

以及旋转圆锥曲面上

$$\mathbb{V}_0^{d+1} = \left\{(x,t) : \|x\| = t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le t \le b\right\}$$

其中 b 是一个非负实数。在实心锥 $\mathbb{V}^{d+1}$ 上，定义了两族正交多项式，即锥上的雅可比多项式和拉盖尔多项式，其所对应的权函数为

$$W_\mu(x,t) = w(t)(t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}, \quad \mu > -\tfrac{1}{2}$$

其中 w 是雅可比权或拉盖尔权。研究表明，这两族正交多项式都是某个二阶微分算子的特征函数，其特征值仅取决于多项式的总次数。与实心锥上的结果类似，在旋转圆锥曲面 $\mathbb{V}_0^{d+1}$ 上，定义了关于 $() d(, \ t)$ 的两族正交多项式，其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示 $\mathbb{V}_0^{d+1}$ 的曲面测度，并研究了它们的一些性质 [21]。随后， [22]利用旋转圆锥曲面及其所围成区域上的拉盖尔型权函数，研究了傅里叶正交展开。之后的研究 [23] 和 [24] 在双圆锥、双曲面和抛物面上建立了正交多项式与傅里叶级数。最近， [25]考察了旋转域上权函数对应的正交多项式，并推导出若干新的正交多项式族。近期的一篇论文 [26] 分析了由某个三角形生成的全对称平面域上的正交多项式及其逼近性质。

受这些研究的启发，本文旨在研究旋转圆锥上的多变量有限正交多项式

$$\mathbb{V}^{d+1} = \left\{(x,t) : \|x\| \le t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le t < \infty\right\}$$

以及锥面上的有限正交多项式

$$\mathbb{V}_0^{d+1} = \left\{(x,t) : \|x\| = t,\ x \in \mathbb{R}^d,\ 0 \le t < \infty\right\}$$

对于 $d \ge 2$. 文献中关于二元有限正交多项式的研究为数不多。但据我们所知，现有文献尚未研究过 $d > 2$ 的有限正交结构。对于实心锥，有限正交性是相对于权函数 $W_\mu(x, \ t) = w(t)(t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}, \quad \mu > -\frac{1}{2}$定义的，其中 w 是相关有限正交多项式在 $\mathbb{R}^+$ 上的权函数。对于锥面，我们引入了相对于测度 $\rho(t)\,\mathrm{d}\sigma(x, \ t)$ 定义的正交关系，其中 $d\sigma$ 是 $\mathbb{V}_0^{d+1}$. 的曲面测度。我们将借助一元有限正交多项式、单位球面上的球谐函数以及单位球上的经典正交多项式，拓展现有框架，在实心锥和锥面上建立两类有限正交结构。

本文结构如下。第二节回顾单位球和锥上的经典有限正交多项式及多变量正交多项式所需的预备知识。第三节介绍实心锥上的两类有限正交多项式，分别借鉴第一类 $M_n^{(p,q)}(x)$ 和第二类 $N_{(p)_n}$ 单变量

有限正交多项式。文中证明，锥上的第一有限类是二阶微分方程的解，而第二有限类是二阶差分微分方程的解。此外，文中推导了这两族多项式的递推关系，并证明在极限情况下，锥上的第一有限族退化为锥上的拉盖尔多项式。最后一节推导了锥面上的两族有限正交多项式，并介绍了它们的一些性质，如正交性、微分方程和极限关系，表明在极限情况下，锥面上的第一有限族退化为锥面上的拉盖尔多项式。

2. 预备知识

为了研究锥内及锥上的有限正交多项式，我们需要了解球谐函数、单位球上和锥上的正交多项式，以及区间上的第一类和第二类有限正交多项式的各种性质。我们将在下一小节中汇集所需的内容。

2.1. 单变量有限正交多项式。设 $w(x)$ 是区间 $[a,b]$. 上的非负可积函数。令 φ_n 表示关于权函数 w、次数为 n 的正交多项式。那么，

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_w = c_w \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x = h_n \delta_{m,n},\ m,n = 0,1,\ldots$$

其中 $\delta_{m,\ n}$ 表示克罗内克δ， h_n 是 φ_n 的范数平方，而 c_w 是归一化常数，使得 $\langle 1,\ 1\rangle_w = 1.$ 。经典正交多项式，如埃尔米特多项式、拉盖尔多项式和雅可比多项式，构成无限序列；而当正交关系仅对有限个项成立时，便会产生有限序列， $n = 0,\ 1,\ \ldots\ \ldots,\ N$。有限正交性是在对权函数 $w(x)$ 施加特定参数条件后定义的。有限正交多项式 $M_n^{(p,q)}(x)$ $N_{(p)n}(x)$ 和 $I_n^{(p)}(x)$ 已由 Masjed-Jamei 详细研究。

这里回顾本文将一直使用的两类有限正交多项式。第一类是有限 $M_n^{(p,q)}(x)$ 多项式，第二类是有限 $N_n^{(p)}(x)$ 多项式。

2.1.1. 第一类有限正交多项式： 对于第一类有限正交多项式 $M_n^{(p,q)}(x)$，权函数记为

$$w_{p,q}(x) = \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}},\ 0 \le x < \infty.$$

∞其归一化常数 $c_{p,\ q}$，由 $c_{p,\ q}\int w_{p,\ q}(x)\mathrm{d}x = 1$，定义为0

$$c_{p,q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p-1)\,\Gamma(q+1)};\ p > 1, q > -1 \tag{2.1}$$

其中 $\Gamma(p)$ 表示由下式定义的伽马函数

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x,\ p > 0.$$

第一类有限正交多项式 $M_n^{(p,q)}(x)$ 由罗德里格公式定义

$$M_n^{(p,q)}(x) = (-1)^n \frac{(1+x)^{p+q}}{x^q} \frac{d^n\left(x^{n+q}(1+x)^{n-p-q}\right)}{dx^n},\ n=0,1,2,... \tag{2.2}$$

并且它们关于权函数$w_{p,\ q}$ 正交，满足 g

$$c_{p,q}\int_0^\infty \frac{x^q}{(1+x)^{p+q}} M_n^{(p,q)}(x) M_m^{(p,q)}(x)\,\mathrm{d}x = h_n^{(p,q)}\delta_{m,n},$$

当且仅当 $p>2N+1,\quad q>-1,\quad N=$最大值$\{m,n\}$ 其中

$$h_n^{(p,q)} = \frac{n!\,(p-n-1)!\,(p+q-1)!\,(q+1)_n}{(p-2)!\,(p-2n-1)\,(p+q-n-1)!}. \tag{2.3}$$

这些多项式的一些示例如下

$$\begin{cases} M_0^{(p,q)}(x) = 1 \\ M_1^{(p,q)}(x) = (p-2)x-(q+1) \\ M_2^{(p,q)}(x) = (p-4)(p-3)x^2 - 2(p-3)(q+2)x + (q+2)(q+1) \\ M_3^{(p,q)}(x) = (p-6)(p-5)(p-4)x^3 - 3(p-5)(p-4)(q+3)x^2 \\ \qquad\qquad + 3(p-4)(q+3)(q+2)x - (q+3)(q+2)(q+1) \\ \vdots \end{cases}.$$

多项式 $M_n^{(p,q)}(x)$ 是微分方程的解

$$x(1+x)y_n''(x) + ((2-p)x+(1+q))y_n'(x) - n(n+1-p)y_n(x) = 0. \tag{2.4}$$

并且对于 $M_n^{(p,q)}(x)$，满足以下递推关系

$$\begin{aligned} M_{n+1}^{(p,q)}(x) &= \left(\frac{(p-(2n+1))(p-(2n+2))}{(p-(n+1))}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-(2n+1))(2n(n+1)-p(q+2n+1))}{(p-(n+1))(p-2n)}\right) M_n^{(p,q)}(x) \\ &\quad - \left(\frac{n(p-(2n+2))(p+q-n)(q+n)}{(p-(n+1))(p-2n)}\right) M_{n-1}^{(p,q)}(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

and

$$\frac{d}{dx}M_n^{(p,q)}(x) = n(p-(n+1))M_{n-1}^{(p-2,q+1)}(x). \tag{2.6}$$

$M_n^{(p,q)}(x)$ 与拉盖尔多项式之间也存在极限关系。从这个意义上说，我们可以写成

$$M_n^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right) = (-1)^n \frac{(1+x/p)^{p+q}}{x^q} \frac{d^n\left(x^{n+q}(1+x/p)^{n-p-q}\right)}{dx^n},$$

由此，令 $p\to\infty$ 取极限，得到 [12]

$$\lim_{p\to\infty} M_n^{(p,q)}\left(\frac{x}{p}\right) = (-1)^n n! L_n^{(q)}(x). \tag{2.7}$$

2.1.2. 第二类有限正交多项式：对于第二类有限正交多项式 $N_n^{(p)}(x)$，其权函数记为

$$w_p(x) = x^{-p}e^{-\frac{1}{x}},\ 0 \le x < \infty.$$

$_\infty$其归一化常数为 c_p，由 $c_p \int w_p(x)\mathrm{d}x = 1$，定义，其表达式为

$_0$

$$c_p = \frac{1}{\Gamma(p-1)},\ p > 1. \tag{2.8}$$

第二类有限正交多项式 $N_n^{(p)}(x)$ 由罗德里格公式定义

$$N_n^{(p)}(x) = (-1)^n x^p e^{\frac{1}{x}} \frac{d^n\left(x^{-p+2n}e^{-\frac{1}{x}}\right)}{dx^n},\ n = 0, 1, 2, ...$$

当且仅当$p > 2N+1,\quad N = \max\{m, n\}$. 时，它们关于区间 $[0, \infty)$ 上的 w_p 正交。事实上，

$$c_p \int_0^\infty x^{-p}e^{-\frac{1}{x}} N_n^{(p)}(x) N_m^{(p)}(x)\mathrm{d}x = h_n^{(p)}\delta_{m,n},$$

对于 $p > 2N+1,\quad N = \max\{m, n\}$，此条件成立，其中

$$h_n^{(p)} = \frac{n!\,(p-n-1)!}{(p-2n-1)\,\Gamma(p-1)}. \tag{2.9}$$

这些多项式的一些示例如下

$$\begin{cases} N_0^{(p)}(x) = 1 \\ N_1^{(p)}(x) = (p-2)x - 1 \\ N_2^{(p)}(x) = (p-4)(p-3)x^2 - 2(p-3)x + 1 \\ N_3^{(p)}(x) = (p-6)(p-5)(p-4)x^3 - 3(p-5)(p-4)x^2 + 3(p-4)x - 1 \\ \vdots \end{cases}.$$

多项式 $N_n^{(p)}(x)$ 是该微分方程的解

$$x^2 y_n''(x) + ((2-p)x + 1)\, y_n'(x) - n(n+1-p)\, y_n(x) = 0 \tag{2.10}$$

并且它们还满足以下递推关系 [10]

$$\begin{aligned} N_{n+1}^{(p)}(x) &= \left(\frac{(p-(2n+2))(p-(2n+1))}{p-(n+1)}x - \frac{p(p-(2n+1))}{(p-(n+1))(p-2n)}\right) N_n^{(p)}(x) \\ &\quad - \frac{n(p-(2n+2))}{(p-(n+1))(p-2n)} N_{n-1}^{(p)}(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

and

$$\frac{d}{dx}N_n^{(p)}(x) = n(p-(n+1))\, N_{n-1}^{(p-2)}(x). \tag{2.12}$$

2.2. 球谐函数。 令 Δ 为拉普拉斯算子，其中 $\Delta=(\partial/\partial x_1)^2+\ldots+(\partial/\partial x_d)^2$ 属于 $\mathbb{R}^d$，并令 $\mathcal{P}_n^d$ 表示由 d 个变量构成的 n 次齐次多项式空间。次数为 n 的球谐函数 P 是 $\mathcal{P}_n^d$ 中的一个元素，满足 $\Delta P=0$，且对于$n=0,\ 1,\ .....,\ \mathcal{H}_n^d$表示球谐函数空间

$$\mathcal{H}_n^d=\left\{P\in\mathcal{P}_n^d:\Delta P=0\right\}.$$

那么 $\dim\mathcal{P}_n^d=\binom{n+d-1}{n}$ 并且

$$\dim\mathcal{H}_n^d=\dim\mathcal{P}_n^d-\dim\mathcal{P}_{n-2}^d=\binom{n+d-1}{n}-\binom{n+d-3}{n-2}.$$

如果 $Y\in\mathcal{P}_n^d$，那么它可以写成

$$Y(x)=\|x\|^n Y(x'),\ x'=x/\|x\|\in\mathbb{S}^{d-1},$$

这表明 Y 由其在 $\mathbb{S}^{d-1}$上的限制所确定。不同次数的球谐函数在单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}:=\{x:\|x\|=1\}$ 上构成一个正交族。对于 $n\in\mathbb{N}_0$，假设集合 $\left\{Y_l^n:\ 1\le l\le\mathcal{H}_n^d\right\}$ 是 $\mathcal{H}_n^d.$ 的标准正交基。那么可得

$$\frac{1}{\varpi_d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}Y_l^n(x)\,Y_{l'}^m(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)=\delta_{n,m}\delta_{l,l'}$$

其中 ϖ_d 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的表面积，且由下式给出

$$\varpi_d:=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{d}\sigma=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Sp球谐函数是微分方程 [2, 1.4.9]的特征函数

$$\Delta_0 Y=-n(n+d-2)Y,\ Y\in\mathcal{H}_n^d,$$

其中 Δ_0 表示球面上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，也就是拉普拉斯算子 Δ 在单位球面上的限制。

2.3. 单位球上的正交多项式。 令 w_μ 表示权函数

$$\mathsf{w}_\mu(x)=(1-\|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}},\quad \mu>-\tfrac{1}{2},$$

在单位球 $\mathbb{B}^d=\{x\in\mathbb{R}^d$ 上：$\|x\|\le1\}$. 单位球上的经典正交多项式 $\mathbb{B}^d$ 关于内积正交

$$\langle f,g\rangle_\mu=b_\mu^{\mathbb{B}}\int_{\mathbb{B}^d}f(x)\,g(x)\,\mathsf{w}_\mu(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $b_\mu^{\mathbb{B}}$ 为归一化常数，使得 $\langle1,\ 1\rangle_\mu=1.$ 归一化常数$b_\mu^{\mathbb{B}}$ 由下式给出

$$b_\mu^{\mathbb{B}}=\frac{1}{\int_{\mathbb{B}^d}\mathsf{w}_\mu(x)\mathrm{d}x}=\frac{\Gamma(\mu+\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.\tag{2.13}$$

对于特定情形 $d=1$，相应的正交多项式化简为经典的 Gegenbauer 多项式，$C_m^{(\mu)}$。根据 [16, p. 277, Eq. (4)], ，它们由高斯超几何函数定义为

$$C_m^{(\mu)}(x)=\frac{(2\mu)_m}{m!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,m+2\mu\\ \mu+\frac{1}{2}\end{matrix}\ \middle|\ \frac{1-x}{2}\right),\tag{2.14}$$

这里， ${}_2F_1$ 是广义超几何函数${}_pF_q$的特殊情形（$p=2,\ q=1$），其定义为

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_q\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m\ldots(\alpha_p)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m\ldots(\beta_q)_m}\frac{x^m}{m!}. \tag{2.15}$$

$_{m-1}$系数用波赫哈默符号表示，$(\alpha)_m=\prod(\alpha+j)$ 对于$_{j=0}m\geq 1$，其中 $(\alpha)_0=1$，α 是实数或复数。Gegenbauer 多项式关于权函数 $w(x)=(1-x^2)^{\mu-\frac{1}{2}}$ 在区间$[-1,1]$上正交。具体而言，正交关系由 [16, 第281页，式（28）](2.16) 给出。

$$\int_{-1}^{1}C_m^{(\mu)}(x)\,C_n^{(\mu)}(x)\left(1-x^2\right)^{\mu-\frac{1}{2}}dx=\frac{(2\mu)_m\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{m!\,(m+\mu)\,\Gamma(\mu)}\,\delta_{m,n},\quad m,n=0,1,....$$

令 $\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$ 表示权函数 w_μ下次数为 n 的正交多项式空间。那么我们有

$$\dim\mathcal{V}_n^d=\binom{n+d-1}{n}.$$

$\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$ 的若干显式正交基可以用单变量经典正交多项式显式表示；更多细节请参见 [3, 第 5] 章。我们可以用 $\left\{P_{\mathbf{k}}^n\right.$为 $\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$的一组基编索引：$\left.|\mathbf{k}|=n,\ \mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^d\right\}$。这些多项式是 $u\in\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$对应的二阶微分方程的特征函数。

$$\left(\Delta-\langle x,\bigtriangledown\rangle^2-(2\mu+d-1)\langle x,\bigtriangledown\rangle\right)u=-n\,(n+2\mu+d-1)\,u, \tag{2.17}$$

其中，$\bigtriangledown$ 表示梯度算子。

该空间的一个正交基可以用雅可比多项式和球谐函数表示。对于 $0\leq m\leq n/2$, 设$\left\{Y_l^{n-2m}:\ 1\leq l\leq\dim\mathcal{H}_{n-2m}^d\right\}$ 是 H_{n-2m}^d 的一组正交归一基，并定义

$$P_{l,m}^n(x)=P_m^{\left(\mu-1/2,n-2m+\frac{d-2}{2}\right)}\left(2\|x\|^2-1\right)Y_{l,n-2m}(x),$$

其中，雅可比多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}$ 对于 $\alpha,\ \beta>-1$ 定义为，

$$P_n^{\alpha,\beta}(t)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix};\frac{1-t}{2}\right)$$

关于 超几何函数，且其满足正交关系 [18]

$$\frac{c_{\alpha,\beta}}{2^{\alpha+\beta+1}}\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)P_m^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\mathrm{d}t=h_n^{(\alpha,\beta)}\delta_{n,m},$$

其中 $c_{\alpha,\ \beta}=\frac{\Gamma}{\Gamma\ (\alpha+\beta+2)\ (\alpha+1)\ \Gamma(\beta+1)}$，范数平方为

$$h_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n(\alpha+\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+\beta+2n+1)}.$$

那么，多项式集合 $\left\{P_{l,m}^n:\ 0\leq m\leq n/2,\ 1\leq l\leq\dim\ \mathcal{H}_{n-2m}^d\right\}$ 是 $\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$上的一组正交基。关于 $\mathcal{V}_n^d(\mathrm{w}_\mu)$上的其他显式正交基，请参阅 [3]。

2.4. 锥内及锥面上的正交多项式。 本小节回顾在实心锥及锥面上研究的无穷正交多项式，尤其是拉盖尔多项式，参见 [21]。

2.4.1. 实心锥上的正交多项式。 令 $W_\mu(x,t)$ 表示权函数

$$W_\mu(x,t) = w(t)(t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}, \quad \mu > -\tfrac{1}{2}$$

在锥 $\mathbb{V}^{d+1} = \{(x,t) \text{ 上}: \ \|x\| \le t, \ x \in \mathbb{R}^d, \ 0 \le t \le b\}$ 其中，b 是一个非负实数，w 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的权函数。实心锥$\mathbb{V}^{d+1}$ 上的正交多项式关于内积正交

$$\langle f, g\rangle_\mu := b_\mu \int_{\mathbb{V}^{d+1}} f(x,t)g(x,t)W_\mu(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 b_μ 是归一化常数，使得 $\langle 1,1\rangle_\mu = 1$ 并且

$$b_\mu = b_\mu^{\mathbb{B}} \times b_\mu^w \quad \text{with} \quad b_\mu^w = \frac{1}{\int_0^\infty t^{d+2\mu-1}w(t)\mathrm{d}t}. \tag{2.18}$$

利用变量分离可以轻松验证这一点

$$\int_{\mathbb{V}^{d+1}} f(x,t)W_\mu(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\mathbb{B}^d} f(ty,t)(1-\|y\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\, t^{d+2\mu-1}w(t)\mathrm{d}t.$$

令 $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1}, W_\mu)$ 为关于内积 $\langle f,g\rangle_\mu$ 的 $d+1$ 个变量中次数为 n 的正交多项式空间。该空间的一组基可以通过结合单位球上的正交多项式与一族单变量正交多项式来构造。

令 $\mathbb{P}_m = \{P_\mathbf{k} : \ |\mathbf{k}| = m\}$ 表示 $\mathcal{V}_m(\mathbb{B}^d, w_\mu)$ 的一组基，其中 $m \le n$，并令 q_{n-m}^α 为关于定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的权函数 $t^\alpha w(t)$ 的单变量正交多项式。定义

$$Q_{\mathbf{k},n}(x,t) = q_{n-m}^{2m+2\alpha}(t)t^m P_\mathbf{k}\left(\frac{x}{t}\right), \qquad |\mathbf{k}| = m, \quad 0 \le m \le n, \tag{2.19}$$

其中 $\alpha = \mu + \frac{d-1}{2}$。那么 $\mathbb{Q}_n = \{Q_{\mathbf{k},n} : \ |\mathbf{k}| = m, 0 \le m \le n\}$ 构成$\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1}, W_\mu)$ 的一组基。此类多项式的一个例子是由（参见 [21]）定义的锥上的拉盖尔多项式

$$L_{\mathbf{k},n}^{\beta,\mu}(x,t) = L_{n-m}^{2m+2\mu+\beta+d-1}(t)t^m P_\mathbf{k}^m\left(\frac{x}{t}\right), \quad |\mathbf{k}| = m, \ 0 \le m \le n$$

其中拉盖尔多项式 L_n^α 由罗德里格公式定义，对于 $\alpha > -1$,

$$L_n^\alpha(t) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)$$

并且它满足正交关系

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty L_n^\alpha(t)L_m^\alpha(t)t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\delta_{m,n}.$$

Th多项式 $L^{\beta}_{,\mu\ \mathbf{k}\ n}(x,t)$ 关于权函数正交

$$W_{\beta,\mu}(x,t) = (t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}t^\beta e^{-t}, \quad \mu > -\tfrac{1}{2}, \quad \beta > -d,$$

在无界锥上

$$\mathbb{V}^{d+1} = \left\{(x,t) : \|x\| \le t, \ x \in \mathbb{R}^d, \ 0 \le t < \infty\right\}.$$

对于 $\beta = 0$，锥上的拉盖尔多项式也是下列二阶线性偏微分方程的特征函数，其特征值仅取决于多项式的次数

$$\mathcal{D}_\mu u = -nu \tag{2.20}$$

其中 D_μ 表示二阶线性微分算子

$$D_\mu = t(\Delta_x + \partial_t^2) + 2\langle x, \nabla_x\rangle \partial_t - \langle x, \nabla_x\rangle + (2\mu + d - t)\partial_t,\ \mu > -1/2,$$

其中 $\bigtriangledown_x$ 和 Δ_x 表示作用于 x 变量上的算子。

2.4.2. 锥面上的正交多项式。锥面上的正交多项式$\mathbb{V}_0^{d+1}$，记作

$$\mathbb{V}_0^{d+1} := \left\{(x,t) \in \mathbb{V}^{d+1} : \|x\| = t,\ 0 \le t \le b\right\}$$

是关于如下双线性型定义的:

$$\langle f, g\rangle_w := b_w \int_{\mathbb{V}_0^{d+1}} f(x,t)\, g(x,t)\, w(t)\, \mathrm{d}\sigma(x,t)$$

$_\infty$其中 $w(t)$ 是区间 $[0,\infty)$ 上的非负函数，使得 $\int t^{d-1} w(t)\, \mathrm{d}t < \infty$,$_0d\sigma$ 是 $\mathbb{V}_0^{d+1}$ 上的勒贝格测度，且 b_w 表示归一化常数，其定义满足 $\langle 1, 1\rangle = 1$. 双线性型 $\langle ., .\rangle_w$ 是空间$\mathbb{R}[x,t]/\left\langle \|x\|^2 - t^2\right\rangle$上的内积，其中我们用 $\mathbb{R}[x,t]/\langle q\rangle$ 表示变量 x 和 t 上的多项式空间，并将其模去由 q. 生成的理想 $\langle q\rangle$ 。设 $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}_0^{d+1}, w)$ 是关于内积 $\langle ., .\rangle_w$. 的正交多项式空间。那么，

$$\dim \mathcal{V}_n(\mathbb{V}_0^{d+1}, w) = \binom{n+d-1}{n} + \binom{n+d-2}{n-1}.$$

与实心锥的情形一样，可以在锥面上定义正交多项式族。此类多项式的一个例子是锥面上的拉盖尔多项式。对于 $b = \infty$ 和 $w_\beta(t) = t^\beta e^{-t},\quad \beta > -d$，考虑
$\mathbb{R}[x,t]/\left\langle \|x\|^2 - t^2\right\rangle$上的内积

$$\langle f, g\rangle_\beta := b_\beta \int_{\mathbb{V}_0^{d+1}} f(x,t)\, g(x,t)\, t^\beta e^{-t} \mathrm{d}\sigma(x,t).$$

假设集合 $\left\{Y_l^m : 1 \le l \le \mathcal{H}_m^d\right\}$ 是 $\mathcal{H}_m^d$. 的标准正交基。在这种情况下，$\mathcal{V}_n(\mathbb{V}_0^{d+1}, w_\beta)$ 的一个正交基可以用拉盖尔多项式表示为

$$S_{n,m,l}^{\beta,L}(x,t) = L_{n-m}^{2m+\beta+d-1}(t)\, Y_l^m(x),\ 0 \le m \le n,\ 1 \le l \le \dim \mathcal{H}_m^d.$$

对于 $\beta = -1$，这些多项式是以下二阶微分方程的特征函数

$$\left(t\partial_t^2 + (d - 1 - t)\partial_t + t^{-1}\Delta_0^{(x)}\right) u = -nu \tag{2.21}$$

其中 $\Delta_0^{(x)}$ 表示变量 $x \in \mathbb{S}^{d-1},\quad d \ge 2$ 中的拉普拉斯-贝尔特拉米算子（参见 [21]）。

3. 锥内及锥上的有限正交多项式

第一小节将讨论实心锥中的有限正交结构，第二小节将介绍锥面上的有限结构。

3.1. 实心锥上的有限正交多项式。 在锥上 $\mathbb{V}^{d+1}$，正交多项式相对于权函数正交

$$W_\mu(x,t) = w(t)(t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}, \quad \mu > -\tfrac{1}{2} \tag{3.1}$$

其中 w 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的权函数，且这些多项式满足内积

$$\langle f, g\rangle_\mu := b_\mu \int_{\mathbb{V}^{d+1}} f(x,t)g(x,t)W_\mu(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 b_μ 是归一化常数，使得 $\langle 1,\ 1\rangle_\mu = 1$. 归一化常数 b_μ 如 (2.18) 所示。

在锥 $\mathbb{V}^{d+1}$上，我们研究与权函数 $W_\mu(x,\ t)$ 相关的有限正交多项式系统，其中考虑函数 $w(t)$ 的两种不同选取。在第一种情形下，取 $w_{p,\ q}(t) = \ t^q(1+t)^{p+q}$，我们得到锥上的第一个有限族。在第二种情形下，选取 $\overline{w_p(t)} = t^{-p}e^{-1/t}$，我们推导出锥上的第二个有限族。第一族由二阶微分算子的特征函数构成，其对应的特征值仅取决于多项式的总次数；而第二族满足一个差分微分方程。

3.2. 锥上的第一类有限正交多项式。我们考虑权函数

$$W_{p,q,\mu}(x,t) = (t^2 - \|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{t^q}{(1+t)^{p+q}}$$

在实心锥 $\mathbb{V}^{d+1}$ 上的权函数，以及相应的内积，其定义为

$$\langle f, g\rangle_{p,q,\mu} = b^M_{p,q,\mu} \int_{\mathbb{V}^{d+1}} f(x,t)\, g(x,t)\, W_{p,q,\mu}(x,t)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $b^M_{p,\ q,\ \mu}$是归一化常数，其定义为 $b^M_{p,\ q,\ \mu} = b^{\mathbb{B}}_\mu \times c_{p-2\mu-d+1,\ q+2\mu+d-1}$，其中 $c_{p,\ q}$ 和 $b^{\mathbb{B}}_\mu$ 分别由 (2.1) 和 (2.13) 定义。令 $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1},\ W_{p,\ q,\ \mu})$ 表示关于内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{p,\ q,\ \mu}$ 的次数为 n 的正交多项式空间。我们可以根据一元有限正交多项式的第一类 $M_n^{(p,q)}(x)$ 以及单位球上的正交多项式，构造锥上有限多项式的第一类，如下所示:

命题 3.1。 设 $\mathbb{P}_m = \{P_{\mathbf{k}}:\ |\mathbf{k}| = m\}$ 是 $\mathcal{V}^d_m(\mathbb{B}^d, \mathsf{w}_\mu)$ 关于$m \le n$ 的一组标准正交基。令 $\alpha = \mu + \frac{d-1}{2}$. 定义

$$M^{(p,q,\mu)}_{\mathbf{k},n}(x,t) = M^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}_{n-m}(t)\, t^m P^m_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{t}\right), \quad |\mathbf{k}| = m,\ 0 \le m \le n. \tag{3.2}$$

那么 $\left\{M^{(p,q,\mu)}_{n\ \mathbf{k}}(x,t):\ |\mathbf{k}| = m,\ \ 0 \le m \le n\right\}$ 是 $\mathcal{V}^d_n(\mathbb{V}^{d+1}, W_{p,\ q,\ \mu})$的正交基，并满足正交关系

$$\left\langle M^{(p,q,\mu)}_{\mathbf{k},n}, M^{(p,q,\mu)}_{\mathbf{k}',n'}\right\rangle_{p,q,\mu} = H^{(p,q,\mu)}_{m,n}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

在限制条件 $p > 2N + 2\mu + d$和 $q > -2\mu - d$, $N =$最大 $\{n, n'\}$ 下，其中 $H^{(p,q,\mu)}_{m\,n,}$ 表示 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 的范数平方，定义为

$$H^{(p,q,\mu)}_{m,n} = \frac{c_{p-2\alpha,q+2\alpha}}{c_{p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m}} h^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}_{n-m},$$

其中 $c_{p,\ q}$ 和 $h^{(p,q)}_n$分别按 *(2.1)* 和 *(2.3)* 定义。

证明。这可由多项式 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 的定义得出

$$\begin{aligned}
&\left\langle M_{\mathbf{k},n}^{(p,q,\mu)}, M_{\mathbf{k}',n'}^{(p,q,\mu)} \right\rangle_{p,q,\mu} \\
= \; & b_{p,q,\mu}^{M} \int_{\mathbb{V}^{d+1}} M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2m+2\alpha)}(t)\, M_{n'-m'}^{(p-2\alpha-2m',q+2\alpha+2m')}(t)\, t^{m+m'} \\
& \times P_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{t}\right) P_{\mathbf{k}'}\left(\frac{x}{t}\right) (t^2-\|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{t^q}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
= \; & c_{p-2\alpha,q+2\alpha} \int_0^{\infty} M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t)\, M_{n'-m'}^{(p-2\alpha-2m',q+2\alpha+2m')}(t) \frac{t^{q+2\alpha+m+m'}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t \\
& \times b_{\mu}^{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}^d} P_{\mathbf{k}}(y)\, P_{\mathbf{k}'}(y) \left(1-\|y\|^2\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由于 $P_{\mathbf{k}}(y)$ 是标准正交基，而 $M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t)$ 对于 $p > 2n+2\mu+d$ 和 $q > -2\mu-d$ 是有限正交的，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle M_{\mathbf{k},n}^{(p,q,\mu)}, M_{\mathbf{k}',n'}^{(p,q,\mu)} \right\rangle_{p,q,\mu} \\
= \; & c_{p-2\alpha,q+2\alpha} \int_0^{\infty} M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t)\, M_{n'-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t) \\
& \times \frac{t^{q+2\alpha+2m}}{(1+t)^{p+q}} \mathrm{d}t \; \delta_{m,m'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\
= \; & \frac{c_{p-2\alpha,q+2\alpha}}{c_{p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m}} h_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)} \; \delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}.
\end{aligned}$$

□

例如，考虑 $d=1$，$p=202$，$q=0$ 和 $\mu=0$。二元多项式 $\left\{M^{(202,0,0)}{}_{\mathbf{k}\;n}\right\}_{n=0}^{100}$，$0 \le m \le n$，关于权函数 $W_{202,\,0,\,0}(x,\;t) = (t^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \;\; {}^{1}_{(1+t)^{202}}$ 在锥上是有限正交的。事实上，

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{V}^2} M_{\mathbf{k},n}^{(202,0,0)}(x,t) M_{\mathbf{k}',n'}^{(202,0,0)}(x,t) (t^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+t)^{202}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
= \; & \frac{c_{202,0}}{c_{202-2m,2m}} h_{n-m}^{(202-2m,2m)} \delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}.
\end{aligned}$$

对于 $d=1$，这些多项式变为 $M_{(p,\ q,\ \mu)m,\ n}(x,\ t)=M_{(p-2m-2\mu,\ q+2m+2\mu)\,n-m}(t)$ $t^m C_m^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)$其中 $0\le m\le n$. 以下是这些多项式的一些例子:

$$\begin{aligned}
M_{0,0}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_0^{(p-2\mu,q+2\mu)}(t)\,C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)=1,\\
M_{0,1}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_1^{(p-2\mu,q+2\mu)}(t)\,C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)=(p-2\mu-2)\,t-(q+2\mu+1),\\
M_{1,1}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_0^{(p-2-2\mu,q+2+2\mu)}(t)\,tC_1^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)=2\mu x,\\
M_{0,2}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_2^{(p-2\mu,q+2\mu)}(t)\,C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)\\
&= (p-2\mu-4)(p-2\mu-3)\,t^2-2(p-2\mu-3)(q+2\mu+2)\,t\\
&\quad +(q+2\mu+2)(q+2\mu+1),\\
M_{1,2}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_1^{(p-2-2\mu,q+2+2\mu)}(t)\,tC_1^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)=[(p-2\mu-2)\,t-(q+2\mu+1)]\,2\mu x,\\
M_{2,2}^{(p,q,\mu)}(x,t) &= M_0^{(p-4-2\mu,q+4+2\mu)}(t)\,t^2C_2^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)=2\mu(\mu+1)\,x^2-\mu t^2\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

我们的下一个定理表明，对于 $q=0$， $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1},\ W_{p,\ 0,\ \mu})$ 中的多项式是二阶微分算子的特征函数。

定理 3.2. 对于 $n=0$、1、2.....，每个 $v\in\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1}$、$W_{p,\ 0,\ \mu})$ 都满足微分方程

$$\begin{aligned}
&\left[t(1+t)\partial t^2+2(1+t)\langle x,\bigtriangledown_x\rangle\partial t+(d+2\mu+(-p+2\mu+d+1)\,t)\,\partial t\right.\\
&\left.+\,t(1+t)\bigtriangleup_x-\left(t^2\bigtriangleup_x-\langle x,\bigtriangledown_x\rangle^2-(2\mu+d-p)\langle x,\bigtriangledown_x\rangle\right)\right]v\\
=\ & n(n-p+2\mu+d)\,v,
\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中，$\bigtriangleup_x$ 和 $\bigtriangledown_x$ 表示算子作用于 x 变量。

证明。根据 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}(x,\ t)$ 的定义，只需将 (3.2) 中的结果设为 $v=M^{(p,0,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}(x,\ t)$。为简洁起见，我们考虑

$$v(x,t)=f(t)\,H(x,t),$$

其中 $f(t)=M_{(p-2m-2\mu-d+1,\ 2m+2\mu+d-1)\,n-m}(t)$，且 $H(x,\ t)=t^m P^m{}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{t}\right)$·有限多项式的微分方程 $M_n^{(p,q)}$表明，f 满足以下方程

$$\begin{aligned}
&t(1+t)\,f''+((-p+2m+2\mu+d+1)\,t+(d+2m+2\mu))\,f'\\
=\ &(n-m)(n+m-p+2\mu+d)\,f.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

由于多项式 $P_{\mathbf{k}}(x)$ 满足微分方程 (2.17)，多项式$H(x,t)$ 满足以下微分方程

$$\left(t^2\Delta_x-\langle x,\nabla_x\rangle^2-(2\mu+d-1)\langle x,\nabla_x\rangle\right)H(x,t)=-m(m+2\mu+d-1)\,H(x,t).\tag{3.5}$$

此外，由于 $H(x,t)$ 是关于其变量的 m 次齐次函数，这个恒等式成立

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\langle x,\nabla_x\rangle\right)H(x,t)=mH(x,t),\tag{3.6}$$

由此，对 t, 求导可得

$$t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)+\langle x,\nabla_x\rangle\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)=(m-1)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t). \tag{3.7}$$

直接计算 v 的导数可得

$$\begin{aligned}&t(1+t)v_{tt}+2(1+t)\langle x,\nabla_x\rangle v_t\\ =\;& t(1+t)f''(t)H(x,t)+2(1+t)f'(t)\left(t\frac{\partial}{\partial t}+\langle x,\nabla_x\rangle\right)H(x,t)\\ &+(1+t)f(t)\left(2\langle x,\nabla_x\rangle\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)\right).\end{aligned}$$

将 (3.6) 应用于右端的第二项，由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}&t(1+t)v_{tt}+2(1+t)\langle x,\nabla_x\rangle v_t\\ =\;& -(d+2\mu+(-p+2\mu+d+1)t)f'(t)H(x,t)\\ &+(n-m)(n+m-p+2\mu+d)v\\ &+(1+t)f(t)\left(2\langle x,\nabla_x\rangle\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)\right).\end{aligned}$$

在最后一个方程中加上并减去项 $(d+2\mu+(-p+2\mu+d+1)\ t)\ f(t)\ \frac{\partial}{\partial t}H(x,\ t)$，得到

$$\begin{aligned}&t(1+t)v_{tt}+2(1+t)\langle x,\nabla_x\rangle v_t+(d+2\mu+(-p+2\mu+d+1)t)v_t \qquad (3.8)\\ =\;& (n-m)(n+m-p+2\mu+d)v+(1-p)tf(t)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\\ &+(1+t)f(t)\left[t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)+(2\langle x,\nabla_x\rangle+2\mu+d)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\right].\end{aligned}$$

利用 (3.5)、(3.6) 和 (3.7)，右端方括号内的项可写为

$$\begin{aligned}&t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)+(2\langle x,\nabla_x\rangle+2\mu+d)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\\ =\;& \left[(2\mu+d+m-1+\langle x,\nabla_x\rangle)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\right]\\ =\;& t^{-1}\left(-\langle x,\nabla_x\rangle^2-(2\mu+d-1)\langle x,\nabla_x\rangle+m(2\mu+m+d-1)\right)H(x,t)\\ =\;& -t\Delta_xH(x,t). \qquad (3.9)\end{aligned}$$

利用这个等式，并将恒等式 (3.6) 应用于 (3.8) 右端的第二项，可得

$$\begin{aligned}&t(1+t)v_{tt}+2(1+t)\langle x,\nabla_x\rangle v_t+(d+2\mu+(-p+2\mu+d+1)t)v_t\\ &+t(1+t)\Delta_xv+(1-p)\langle x,\nabla_x\rangle v\\ =\;& ((n-m)(n+m-p+2\mu+d)+(1-p)m)v.\end{aligned}$$

利用以下恒等式

$$(n-m)(n+m-p+2\mu+d)v+m(1-p)v=n(n+2\mu+d-p)v-m(m+2\mu+d-1)v \tag{3.10}$$

并结合 (3.5)，我们完成了证明。 □

注记 1。当 $q \neq 0$，锥上的有限多项式 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}(x,\ t)$ 满足一个微分方程，但特征值由 m 和 n 共同决定。

定理 3.3。令 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1}, W_{p,q,\mu})$。多项式 $M_{(p,q,\mu)\mathbf{k}\,n}(x,t)$ 满足以下三项递推关系

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{k},n+1}^{(p,q,\mu)}(x,t) \;=\; & \left\{ \frac{(p-2n-2\mu-d)(p-2n-2\mu-d-1)}{(p-m-n-2\mu-d)} t \right. \\
& + \frac{2(n-m)(n-m+1)}{(p-2\mu-d-2n+1)} \\
& \left. - \frac{(p-2m-2\mu-d+1)(d+q+2\mu+2n)}{(p-2\mu-d-2n+1)} \right\} M_{\mathbf{k},n}^{(p,q,\mu)}(x,t) \\
& - \left\{ \frac{(n-m)(p-2\mu-d-2n-1)}{(p-m-2\mu-d-n)} \right. \\
& \left. \times \frac{(p+q-n+m)(d+q+2\mu+m+n-1)}{(p-2\mu-d-2n+1)} \right\} M_{\mathbf{k},n-1}^{(p,q,\mu)}(x,t)\,.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

证明。将 $n \to n-m$、$p \to p-2\alpha-2m$、$q \to q+2\alpha+2m$ 和 $x \to t$ 代入 (2.5)，得到

$$
\begin{aligned}
& M_{n+1-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t) \\
= \; & \left\{ \frac{(p-2n-2\mu-d)(p-2n-2\mu-d-1)}{(p-m-n-2\mu-d)} t \right. \\
& + \frac{2(n-m)(n-m+1)}{(p-2n-2\mu-d+1)} \\
& \left. - \frac{(p-2m-2\mu-d+1)(d+q+2n+2\mu)}{(p-2n-2\mu-d+1)} \right\} M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t) \\
& - \left\{ \frac{(n-m)(p-2n-2\mu-d-1)}{(p-m-n-2\mu-d)} \right. \\
& \left. \times \frac{(p+q+m-n)(q+m+n+2\mu+d-1)}{(p-2n-2\mu-d+1)} \right\} M_{n-1-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}(t)\,,
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha = \mu + \frac{d-1}{2}$. 两边乘以 $t^m P^m{}_{\mathbf{k}}\ \binom{x}{t}$，得到 (3.11) . □

现在给出锥上的有限多项式 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}(x,t)$ 与锥上的拉盖尔多项式 $\mathbf{L}^{\beta}{}_{,\mu\ \mathbf{k}\,n}(x,t)$ 之间的极限关系如下:

定理 3.4。 $M^{(p,q,\mu)}{}_{\mathbf{k}\,n}(x,t)$ 与 $\mathsf{L}^{q}{}_{,\mu\,\mathbf{k}\,n}(x,t)$ 之间满足极限关系

$$
\lim_{p\to\infty} p^m M_{\mathbf{k},n}^{(p,q,\mu)}\left(\frac{x}{p}, \frac{t}{p}\right) = (-1)^{n-m}(n-m)!\mathsf{L}_{\mathbf{k},n}^{q,\mu}(x,t).
$$

证明。由罗德里格公式 (2.2) 和极限关系 (2.7)，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to\infty} M_{n-m}^{(p-2\alpha-2m,q+2\alpha+2m)}\left(\frac{t}{p}\right)\\
=\;& (-1)^{n-m}\lim_{p\to\infty}\frac{(1+t/p)^{p+q}}{t^{q+2m+2\alpha}}\frac{d^{n-m}\left(t^{n+m+q+2\alpha}(1+t/p)^{n-m-p-q}\right)}{dt^{n-m}}\\
=\;& (-1)^{n-m}t^{-(q+2m+2\alpha)}e^{t}\frac{d^{n-m}\left(t^{n+m+q+2\alpha}e^{-t}\right)}{dt^{n-m}}\\
=\;& (-1)^{n-m}(n-m)!L_{n-m}^{q+2m+2\alpha}(t),
\end{aligned}$$

由此我们得出

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} p^m M_{\mathbf{k},n}^{(p,q,\mu)}\left(\frac{x}{p},\frac{t}{p}\right) &= (-1)^{n-m}(n-m)!L_{n-m}^{q+2m+2\alpha}(t)\,t^m P_{\mathbf{k}}^m\left(\frac{x}{t}\right)\\
&= (-1)^{n-m}(n-m)!\mathsf{L}_{\mathbf{k},n}^{q,\mu}(x,t).
\end{aligned}$$

□

注 2. 利用这一极限关系，我们可以给出锥上的拉盖尔多项式的微分方程。在定理 3.2 中代入$x\to\frac{x}{p}$ 和 $t\to\frac{t}{p}$，再乘以 p^{m-1} 并令 $p\to\infty$，即可得到式 (2.20) 所给出的锥上的拉盖尔多项式 $u=\mathrm{L}^{0}_{,\mu\ \mathbf{k}\ n}(x,t)$ 的微分方程

$$\left(t(\Delta_x+\partial_t^2)+2\langle x,\nabla_x\rangle\partial_t-\langle x,\nabla_x\rangle+(2\mu+d-t)\partial_t\right)u=-nu.$$

注 3. 在定理 3.3 中用 $\frac{x}{p}$ 替换 x，并用$-\frac{t}{p}$ 替换 t，然后乘以 p^m，再令 $p\to\infty$，即可得到锥上的拉盖尔多项式 $\mathrm{L}^{q}_{,\mu\ \mathbf{k}\ n}(x,t)$ 的以下递推关系

$$(n-m+1)\,\mathsf{L}_{\mathbf{k},n+1}^{q,\mu}(x,t)=(d+q+2\mu+2n-t)\,\mathsf{L}_{\mathbf{k},n}^{q,\mu}(x,t)-(d+q+2\mu+m+n-1)\,\mathsf{L}_{\mathbf{k},n-1}^{q,\mu}(x,t).$$

3.3. 锥上的第二类有限多项式。 考虑权函数

$$W_{\mu,p}(x,t)=(t^2-\|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}t^{-p}e^{-1/t}$$

在实心锥上

$$\mathbb{V}^{d+1}=\left\{(x,t):\|x\|\le t,\ x\in\mathbb{B}^d,\ 0\le t<\infty\right\}$$

并定义内积

$$\langle f,g\rangle_{\mu,p}:=b_{\mu,p}^{N}\int_{\mathbb{V}^{d+1}} f(x,t)\,g(x,t)\,(t^2-\|x\|^2)^{\mu-\frac{1}{2}}t^{-p}e^{-1/t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

其中

$$b_{\mu,p}^{N}=c_{p-2\mu-d+1}\times b_{\mu}^{\mathbb{B}}\text{ with }c_p=\frac{1}{\Gamma(p-1)}$$

是归一化常数，使得 $\langle 1,\ 1\rangle_{\mu,\ p}=1$.

设 $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1},\ W_{\mu,\ p})$ 为关于内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mu,\ p}$ 的次数为 n、含 $d+1$ 个变量的正交多项式空间。与第一类类似，锥上的第二类有限多项式定义为单变量第二类有限正交多项式 $N_n^{(p)}(x)$ 与单位球上的正交多项式的组合，如下所示：

命题 3.5。 设 $\mathbb{P}_m = \{P_{\mathbf{k}} : \ |\mathbf{k}| = m\}$ 是 $\mathcal{V}_m^d(\mathbb{B}^d, \mathsf{w}_\mu)$ 关于$m \le n$ 的标准正交基。定义

$$N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)}(x,t) = N_{n-m}^{(p-2\alpha-2m)}(t)\, t^m P_{\mathbf{k}}^m\left(\frac{x}{t}\right), \quad |\mathbf{k}| = m,\ 0 \le m \le n$$

其中 $\alpha = \mu + \frac{d-1}{2}$. 因此 $\mathbb{N}_{n,\ m} = \left\{N_{n}^{(\mu,p)}{}_{\mathbf{k}} : \ |\mathbf{k}| = m, \quad 0 \le m \le n\right\}$ 是 $\mathcal{V}_n^d$（$\mathbb{V}^{d+1}$, $W_{\mu,\ p}$）的正交基，并满足正交关系

$$\left\langle N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)}, N_{\mathbf{k}',n'}^{(\mu,p)} \right\rangle_{\mu,p} = H_{m,n}^{(\mu,p)} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$$

在限制条件 $p > 2N + 2\mu + d, \quad N = \max\{n, n'\}$ 下，其中 $H_{m\,n}^{(\mu,p)}$, 表示 $N^{(\mu,p)}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 的范数平方，其定义为

$$H_{m,n}^{(\mu,p)} = \frac{c_{p-2\alpha}}{c_{p-2\alpha-2m}} h_{n-m}^{(p-2\alpha-2m)},$$

其中 $h_n^{(p)}$由（*2.9*）给出。

例如，考虑 $d = 1, \quad \mu = 0, \quad p = 300$. 二元多项式$\left\{N^{(0,300)}{}_{\mathbf{k}\,n} \quad \right\}_{n=0}^{149}$，$0 \le m \le n$, 关于权函数$W_{0,\ 300}\ (x,\ t) = \left(t^2 - x^2\right)^{-1/2} t^{-300} e^{-1/t}$在锥上是有限正交的。事实上，对于 $n,\ n' \le 149$可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{V}^2} N_{\mathbf{k},n}^{(0,300)}(x,t)\ N_{\mathbf{k}',n'}^{(0,300)}(x,t) \left(t^2 - x^2\right)^{-1/2} t^{-300} e^{-1/t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \ &\frac{c_{300}}{c_{300-2m}} h_{n-m}^{(300-2m)} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \end{aligned}$$

对于 $d = 1$, 这些多项式变为 $N_{(\mu,p)m,n}(x,t) = N_{(p-2\mu-2m)\,n-m}(t)\ t^m C_m^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right)$其中 $0 \le m \le n$. 以下是这些多项式的一些示例:

$$\begin{aligned} N_{0,0}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_0^{(p-2\mu)}(t)\, C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = 1, \\ N_{0,1}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_1^{(p-2\mu)}(t)\, C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = (p - 2\mu - 2)\, t - 1, \\ N_{1,1}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_0^{(p-2\mu-2)}(t)\, t C_1^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = 2\mu x, \\ N_{0,2}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_2^{(p-2\mu)}(t)\, C_0^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = (p - 2\mu - 4)\,(p - 2\mu - 3)\, t^2 \\ &\qquad - 2\,(p - 2\mu - 3)\, t + 1, \\ N_{1,2}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_1^{(p-2\mu-2)}(t)\, t C_1^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = ((p - 2\mu - 4)\, t - 1)\, 2\mu x, \\ N_{2,2}^{(\mu,p)}(x,t) &= N_0^{(p-2\mu-4)}(t)\, t^2 C_2^{(\mu)}\left(\frac{x}{t}\right) = 2\mu\,(1 + \mu)\, x^2 - \mu t^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

与锥上的其他正交多项式族不同，有限多项式 $N^{(\mu,p)}{}_{\mathbf{k}\,n}$不满足二阶偏微分方程。相反，它们满足一个微分差分方程，我们将在下一个定理中给出。

定理 3.6. 对于 $m=0,1,\ldots,$ 令 $\mu>-\frac{1}{2}$, $p>2n+2\mu+d$和 $\mathbb{P}_m=\{P_{\mathbf{k}}\colon |\mathbf{k}|=m\}$为 $\mathcal{V}_m\left(\mathbb{B}^d,\mathsf{w}_\mu\right)$. 的标准正交基。那么，多项式 $N^{(\mu,p)}{}_{\mathbf{k}\,n}$满足以下微分差分方程

$$L_{\mu,p}\left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)}\right]=n\left(n+2\mu+d-p\right)\ N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)}-(n-m)\left(p-2\mu-m-n-d\right)\ N_{\mathbf{k},n-1}^{(\mu,p-2)}$$

其中 $L_{\mu,\ p}$ 由下式给出

$$L_{\mu,p}=t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(2t\left\langle x,\nabla_x\right\rangle+\left(1+2\mu+d-p\right)t\right)\frac{\partial}{\partial t}+\left(2\mu+d-p\right)\left\langle x,\nabla_x\right\rangle+\left\langle x,\nabla_x\right\rangle^2,$$

其中 $\bigtriangledown_x$ 表示作用于变量 x 的梯度算子。

证明。 根据 $N^{(\mu,p)}{}_{\mathbf{k}\,n}$ 的定义，为简便起见，令 $v(x,\ t)=f(t)\ H(x,\ t)$，则

$$f(t)=N_{n-m}^{(p-2\mu-2m-d+1)}(t),\qquad H(x,t)=t^mP_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{t}\right). \tag{3.12}$$

由方程 (2.10) 可知，函数 f 满足

$$\begin{aligned}&t^2f''(t)+\left(\left(1+2\mu+2m+d-p\right)t+1\right)f'(t)\\&-(n-m)\left(n+m+2\mu+d-p\right)f(t)=0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

由于 $H(x,\ t)$ 是次数为 m 的齐次多项式，恒等式 (3.6) 成立，且 $H(x,\ t)$ 也满足微分方程 (3.5)。对 v 求导，可直接得到

$$\begin{aligned}t^2v_{tt}+\left(2t\left\langle x,\nabla_x\right\rangle-1\right)v_t\ &=\ t^2f''(t)H(x,t)\\&\quad+2tf'(t)\left(t\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+\left\langle x,\nabla_x\right\rangle H(x,t)\right)\\&\quad+tf(t)\left(t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)+2\left\langle x,\nabla_x\right\rangle\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\right)\\&\quad-f(t)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)-f'(t)H(x,t).\end{aligned}$$

将（3.6）代入右侧的第二项，并利用（3.13），可得

$$\begin{aligned}&t^2v_{tt}+\left(2t\left\langle x,\nabla_x\right\rangle-1\right)v_t+\left(\left(1+2\mu+d-p\right)t+1\right)v_t\\=\ &(n-m)\left(n+m+2\mu+d-p\right)v+(1-p)tf(t)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)-f'(t)H(x,t)\\&+tf(t)\left[t\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(x,t)+\left(2\left\langle x,\nabla_x\right\rangle+2\mu+d\right)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\right].\end{aligned}$$

由等式（3.9）可知

$$\begin{aligned}t^2v_{tt}+2t\left\langle x,\nabla_x\right\rangle v_t+\left(1+2\mu+d-p\right)tv_t\ &=\ (n-m)\left(n+m+2\mu+d-p\right)v\\&\quad+(1-p)tf(t)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)\\&\quad-f'(t)H(x,t)-t^2\Delta_xv,\end{aligned}$$

from 在右端的第二项中再次使用（3.6），可得

$$\begin{aligned}&t^2v_{tt}+2t\left\langle x,\nabla_x\right\rangle v_t+\left(1+2\mu+d-p\right)tv_t+t^2\Delta_xv+(1-p)\left\langle x,\nabla_x\right\rangle v\\=\ &(n-m)\left(n+m+2\mu+d-p\right)v+m(1-p)v-f'(t)H(x,t).\end{aligned}$$

考虑恒等式（3.10），并再次使用（3.5），可推得

$$\begin{aligned} & t^2 v_{tt} + 2t \langle x, \nabla_x \rangle v_t + (1 + 2\mu + d - p)\, t v_t + (2\mu + d - p) \langle x, \nabla_x \rangle v + \langle x, \nabla_x \rangle^2 v \\ = \;& n (n + 2\mu + d - p) v - f'(t) H(x,t). \end{aligned}$$

最后，在右端第二项中对函数 f 使用递推关系 (2.12)，我们得到

$$\begin{aligned} & t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] + 2t \langle x, \nabla_x \rangle \frac{\partial}{\partial t} \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] + (1 + 2\mu + d - p)\, t \frac{\partial}{\partial t} \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] \\ & + (2\mu + d - p) \langle x, \nabla_x \rangle \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] + \langle x, \nabla_x \rangle^2 \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] \\ = \;& n (n + 2\mu + d - p) \left[N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)} \right] - (n - m)(p - 2\mu - m - n - d)\; N_{\mathbf{k},n-1}^{(\mu,p-2)}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

利用单变量有限多项式 $N_n^{(p)}$ 的递推关系，我们可以在下一个定理中给出 $N_{\mathbf{k}\,n}^{(\mu,p)} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{V}^{d+1}, W_{\mu,p})$ 的递推关系。

定理 3.7. 多项式 $N_{\mathbf{k}\,n}^{(\mu,p)}$ 满足以下三项递推关系

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k},n+1}^{(\mu,p)}(x,t) \;=\; & \left\{ \frac{(p - 2\mu - 2n - d - 1)(p - 2\mu - 2n - d)}{(p - 2\mu - m - n - d)} t \right. \\ & \left. - \frac{(p - 2\mu - 2m - d + 1)(p - 2\mu - 2n - d)}{(p - 2\mu - m - n - d)(p - 2\mu - 2n - d + 1)} \right\} N_{\mathbf{k},n}^{(\mu,p)}(x,t) \\ & - \frac{(n - m)(p - 2\mu - 2n - d - 1)}{(p - 2\mu - m - n - d)(p - 2\mu - 2n - d + 1)}\; N_{\mathbf{k},n-1}^{(\mu,p)}(x,t). \end{aligned} \tag{3.14}$$

证明。 若在 (2.11) 中取 $n \to n - m$, $x \to t$, $p \to p - 2\alpha - 2m$，则可推得

$$\begin{aligned} N_{n+1-m}^{(p-2\alpha-2m)}(t) \;=\; & \left\{ \frac{(p - 2\mu - 2n - d - 1)(p - 2\mu - 2n - d)}{(p - 2\mu - m - n - d)} t \right. \\ & \left. - \frac{(p - 2\mu - 2m - d + 1)(p - 2\mu - 2n - d)}{(p - 2\mu - m - n - d)(p - 2\mu - 2n - d + 1)} \right\} N_{n-m}^{(p-2\alpha-2m)}(t) \\ & - \frac{(n - m)(p - 2\mu - 2n - d - 1)}{(p - 2\mu - m - n - d)(p - 2\mu - 2n - d + 1)} N_{n-1-m}^{(p-2\alpha-2m)}(t) \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \mu + \frac{d-1}{2}$. 如果我们将两边都乘以 $t^m P_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{t}\right)$，就得到所需的结果。□

3.4. 锥面上的有限正交多项式。我们将研究锥面上的有限正交多项式，该锥面记作

$$\mathbb{V}_0^{d+1} := \left\{ (x,t) \in \mathbb{V}^{d+1} : \|x\| = t,\; 0 \le t < \infty \right\}.$$

设 $w(t)$ 是区间 $[0,\infty)$ 上的非负函数，使得 $\int t^{d-1} w(t) \mathrm{d}t < \infty$。我们将锥面上的内积定义如下

$$\langle f, g \rangle_w := b_w \int_{\mathbb{V}_0^{d+1}} f(x,t)\, g(x,t)\, w(t)\, \mathrm{d}\sigma(x,t)$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是锥面上的勒贝格测度， b_w 表示归一化常数，其定义满足 $\langle 1,\ 1\rangle = 1$. 设 $\mathcal{V}_n(\mathbb{V}_0^{d+1},\ w)$ 是关于内积 $\langle .,\ .\rangle_w$，的正交多项式空间；该内积在 $(x,\ t)$ 变量上的多项式空间模由 $\|x\|^2 - t^2$. 生成的多项式理想上定义良好

本节与本文前一部分一样，将考察锥面上的两类有限正交多项式。与锥上的情形不同，我们将在锥面上使用球谐函数。我们将给出它们的正交关系，并求出它们所满足的微分方程。首先来看第一类。

3.5. 锥面上的第一类有限正交多项式。 我们考虑权函数$w_{p,q} = \quad {}^{t^q}{}_{(1+t)^{p+q}}$，定义在锥面 $\mathbb{V}_0^{d+1}$上

$$\mathbb{V}_0^{d+1} := \left\{(x,t) \in \mathbb{V}^{d+1} : \|x\| = t,\ 0 \le t < \infty\right\}$$

并定义内积

$$\langle f, g\rangle_{p,q} = b_{p,q} \int\limits_{\mathbb{V}_0^{d+1}} f(x,t)\, g(x,t)\, t^q\, (1+t)^{-(p+q)}\, \mathrm{d}\sigma(x,t)$$

定义在锥面 $\mathbb{V}_0^{d+1}$ 上。通过变量代换 $x = \xi t,$，锥面上的积分可写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{V}_0^{d+1}} f(x,t)\, \mathrm{d}\sigma(x,t) &= \int\limits_0^\infty \int_{\|x\|=t} f(x,t)\, \mathrm{d}\sigma(x,t) \\ &= \int\limits_0^\infty t^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(t\xi, t)\, \mathrm{d}\sigma(\xi)\, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由此，归一化常数为 $b_{p,q} = \ {}^{1}_{\omega_d} c_{p-d+1,q+d-1}$，满足$\langle 1,1\rangle_{p,q} = 1$ 其中 ω_d 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$ 的表面积，而 $c_{p,q}$ 的定义与（2.1）中相同。

如本节开头所述，$\mathcal{V}_n^d\left(\mathbb{V}_0^{d+1},\ w_{p,\ q}\right)$ 的一个基可以用有限正交多项式 $M_n^{(p,q)}$和球谐函数表示。

命题 3.8。 对于 $m = 0,\ 1,\ \ldots,$ 令 $\left\{Y_l^m :\ 1 \le l \le \dim \mathcal{H}_m^d\right\}$ 表示 $\mathcal{H}_m^d$的一个标准正交基。对于 $0 \le m \le n,\quad 1 \le l \le \dim \mathcal{H}_m^d$，定义$S^{p,\ q,\ n\,m,\ l}(x,\ t) = M_{n-m}^{(p-2m-d+1,\ q+2m+d-1)}(t)\, Y_l^m(x) \qquad p > 2N+d,\quad q > -d,\quad N = \max\{n, n'\}.$

(3.15)

则族 $\left\{S^{p,\ q\,M}_{n\,m\,l}:\ \ 0 \le m \le n,\quad 1 \le l \le \text{维}\,\mathcal{H}_m^d\right\}$ 构成 $\mathcal{V}_n^d\left(\mathbb{V}_0^{d+1},\ w_{p,\ q}\right)$ 的一个正交基，其中 $p > 2N+d,\quad q > -d,\quad N = \text{最大}\,\{n, n'\}$。更确切地说，

$$\left\langle S_{n,m,l}^{p,q,M}, S_{n',m',l'}^{p,q,M}\right\rangle_{p,q} = H_{m,n}^{p,q,M} \delta_{n,n'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \tag{3.16}$$

其中

$$H_{m,n}^{p,q,M} = \left\langle S_{n,m,l}^{p,q,M}, S_{n,m,l}^{p,q,M}\right\rangle_{p,q} = \frac{c_{p-d+1,q+d-1}}{c_{p-2m-d+1,q+2m+d-1}} h_{n-m}^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)} \tag{3.17}$$

其中，$h_n^{(p,q)}$表示由式（2.3）给出的多项式 $M_n^{(p,q)}$的范数平方。

证明。 根据 $S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l}$,,,, 的定义，我们可以写出

$$\begin{aligned}\left\langle S^{p,q,M}_{n,m,l}, S^{p,q,M}_{n',m',l'}\right\rangle &= b_{p,q}\int_{\mathbb{V}_0^{d+1}} S^{p,q,M}_{n,m,l}(x,t)\, S^{p,q,M}_{n',m',l'}(x,t)\, t^q (1+t)^{-(p+q)}\,\mathrm{d}\sigma(x,t)\\ &= \frac{1}{\varpi_d} c_{p-d+1,q+d-1}\int_0^\infty \int_{\|x\|=t} M^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n-m}(t)\, M^{(p-2m'-d+1,q+2m'+d-1)}_{n'-m'}(t)\\ &\quad \times Y_l^m(x)\, Y_{l'}^{m'}(x)\, t^q (1+t)^{-(p+q)}\,\mathrm{d}\sigma(x,t).\end{aligned}$$

然后通过变量替换 $x=t\xi$，我们推导出

$$\begin{aligned}&= c_{p-d+1,q+d-1}\int_0^\infty M^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n-m}(t)\, M^{(p-2m'-d+1,q+2m'+d-1)}_{n'-m'}(t)\, t^{m+m'+d-1+q}(1+t)^{-(p+q)}\,dt\\ &\quad \times \frac{1}{\varpi_d}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_l^m(\xi)\, Y_{l'}^{m'}(\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi).\end{aligned}$$

由于 Y_l^m是正交归一的，因此可得

$$\begin{aligned}\left\langle S^{p,q,M}_{n,m,l}, S^{p,q,M}_{n',m',l'}\right\rangle &= \delta_{m,m'}\delta_{l,l'}\ c_{p-d+1,q+d-1}\int_0^\infty M^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n-m}(t)\, M^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n'-m}(t)\\ &\quad \times \frac{t^{q+2m+d-1}}{(1+t)^{p+q}}dt\\ &= \frac{c_{p-d+1,q+d-1}}{c_{p-2m-d+1,q+2m+d-1}} h^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n-m}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{l,l'}.\end{aligned}$$

□

与实心锥的情形一样，只有当 $q=-1$.时，锥表面上的第一族有限正交多项式 $S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l}$, , , $(x,\ t)$才是二阶微分算子的特征函数

定理 3.9。 设 $d\geq 2$。每个$v\in\mathcal{V}_n^d\left(\mathbb{V}_0^{d+1}, w_{p,\ -1}\right)$ 都满足微分方程

$$\left[t(1+t)\partial t^2 + (d-1+(-p+d+1)t)\partial t + t^{-1}\Delta_0^{(x)}\right]v = n(n-p+d)v, \tag{3.18}$$

其中 $\Delta_0^{(x)}$ 表示 $x\in\mathbb{S}^{d-1}$.中的拉普拉斯-贝尔特拉米算子

证明。 我们为 (3.15) 中的 $v(x,t) = S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l}$,,,$(x,t)$ 建立结果。对于 $x=t\xi$, 我们将其写成如下形式

$$S^{p,q,M}_{n,m,l}(x,t) = f(t)\, t^m Y_l^m(\xi)$$

其中 $f(t) = M^{(p-2m-d+1,q+2m+d-1)}_{n-m}(t)$. 利用有限正交多项式 $M_n^{(p,q)}(x)$ 的微分方程 (2.4)，可知多项式 $g(t) = f(t)\ t^m$ 满足方程

$$\begin{aligned}&t(1+t)g''(t) + (q+d+(-p+d+1)t)g'(t)\\ =\ & n(n-p+d)g(t) + m(m+q+d-1)t^{-1}g(t).\end{aligned}$$

该方程对于 $v(x,\ t) = g(t)\ Y_l^m(\xi)$ 也成立

$$\left[t(1+t)\partial t^2 + (q+d+(-p+d+1)t)\partial t\right]v = n(n-p+d)v + m(m+q+d-1)t^{-1}g(t)Y_l^m(\xi).$$

对于 $q=-1$，该方程中的项 $m(m+q+d-1)$ 给出了 Y_l^m 关于算子 $-\Delta_0$ 的特征值，而最后一项化为

$$m\left(m+d-2\right)t^{-1}g\left(t\right)Y_l^m=-t^{-1}g\left(t\right)\Delta_0^{(x)}Y_l^m=-t^{-1}\Delta_0^{(x)}S_{n,m,l}^{p,q,M}.$$

因此，证明完成。 □

注 4. 我们注意到，多项式 $S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l\ ,,,}(x,t)$ 在 $q\neq-1$, 时满足一个微分方程，但该方程同时依赖于 m 和 n.

类似于定理 3.4，我们利用关系式 (2.7) 给出锥面上的有限多项式$S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l\ ,,,}(x,t)$ 与锥面上的拉盖尔多项式 $S^{q,\ L}_{n\ m,,l}(x,t)$ 之间的极限关系，如下所示:

定理3.10。 $S^{p,\ q\ M}_{n\ m\ l\ ,,,}(x,t)$ 与 $S^{q,\ L}_{n\ m,,l}(x,t)$ 之间的极限关系为

$$\lim_{p\to\infty}S_{n,m,l}^{p,q,M}\left(x,\frac{t}{p}\right)=\left(-1\right)^{n-m}\left(n-m\right)!L_{n-m}^{q+2m+d-1}\left(t\right)Y_l^m\left(x\right)=\left(-1\right)^{n-m}\left(n-m\right)!S_{n,m,l}^{q,L}\left(x,t\right).$$

注 5. 将 $t\to\frac{t}{p}$ 代入定理 3.9，然后令 $p\to\infty$, 取极限，我们得到

$$\left(t\partial_t^2+\left(d-1-t\right)\partial_t+t^{-1}\Delta_0^{(x)}\right)S_{n,m,l}^{-1,L}\left(x,t\right)=-nS_{n,m,l}^{-1,L}\left(x,t\right),$$

当 $q=-1$. 时，这就是锥面上拉盖尔多项式 $S^{-1,\ L}_{n\ m\ l\ ,\ ,}(x,\ t)$ 满足的方程 (2.21)

3.6. **锥面上的第二有限类**。若我们选择权函数$w_p(t)=t^{-p}e^{-\frac{1}{t}}$, $p>d$，则内积变为

$$\langle f,g\rangle_p=b_p\int_{\mathbb{V}_0^{d+1}}f\left(x,t\right)g\left(x,t\right)t^{-p}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}\sigma\left(x,t\right)$$

在锥面上 $\mathbb{V}_0^{d+1}$，其归一化常数为

$$b_p=\frac{1}{\varpi_d}\frac{1}{\int\limits_0^\infty t^{d-p-1}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=\frac{1}{\varpi_d}\frac{1}{\Gamma\left(p-d\right)}$$

使得 $\langle 1,\ 1\rangle_p=1$，其中 ϖ_d 是 $\mathbb{S}^{d-1}$.的表面积

与第一类类似，我们可以在下一个命题中用有限正交多项式 $N_n^{(p)}$和球谐函数表示 $\mathcal{V}_n^d\left(\mathbb{V}_0^{d+1},\ w_p\right)$ 的一组基。

命题3.11。对于 $m=0,1,\ldots$，设 $\left\{Y_l^m:\ 1\leq l\leq \text{维}\,\mathcal{H}_m^d\right\}$ 表示 $\mathcal{H}_m^d$的一组标准正交基。对于 $0\leq m\leq n$, $1\leq l\leq$ 维 $\mathcal{H}_m^d$，定义

$$S_{n,m,l}^{p,N}\left(x,t\right)=N_{n-m}^{(p-2m-d+1)}\left(t\right)Y_l^m\left(x\right),\quad p>2N+d,\ N=\max\left\{n,n'\right\}. \tag{3.19}$$

于是，$\left\{S^{p,\ N}_{n\ m\ ,,l}:\ 0\leq m\leq n,\ 1\leq l\leq \text{维数}\,\mathcal{H}_m^d\right\}$ 构成了$\mathcal{V}_n^d\left(\mathbb{V}_0^{d+1},w_p\right)$ 在 $p>2N+d$, $N=$最大 $\left\{n,n'\right\}$. 下的正交基。事实上，我们有

$$\left\langle S_{n,m,l}^{p,N},S_{n',m',l'}^{p,N}\right\rangle_p=\frac{\left(n-m\right)!\left(p-n-m-d\right)!}{\left(p-2n-d\right)\Gamma\left(p-d\right)}\delta_{n,n'}\delta_{m,m'}\delta_{l,l'}.$$

与实心锥的情形一样，这族定义在锥表面上的有限正交多项式满足以下定理。

定理 3.12. 设 $d \geq 2$. $S^{p,N}_{n\,m\,,,l} \in \mathcal{V}^d_n\left(\mathbb{V}^{d+1}_0, w_p\right)$ 满足差分微分方程

$$\begin{aligned} & t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] + (1-p+d)\,t\frac{\partial}{\partial t}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] \\ = \;& n\,(n-p+d)\,S^{p,N}_{n,m,l} + (m-n)\,(p-n-m-d)\,S^{p-2,N}_{n-1,m,l}, \end{aligned}$$

证明。我们推导出式 (3.19) 中定义的函数 $S^{p,N}_{n\,m\,,,l}(x,t)$ 的结果。通过应用代换 $x=\xi t$，多项式 $S^{p,N}_{n\,m\,,,l}(x,t)$ 可分解为乘积$f(t)\ t^m Y^m_l(\xi)$，其中 $f(t) = N^{(p-2m-d+1)}_{n-m}(t)$。根据微分方程 (2.10)，多项式 $f(t)$ 满足

$$t^2 f''(t) + ((1-p+2m+d)\,t+1)\,f'(t) - (n-m)\,(n+m-p+d)\,f(t) = 0.$$

利用单变量有限多项式 $N^{(p)}_n(t)$ 的递推关系 (2.12) , , 我们可以将该方程写成如下形式

$$\begin{aligned} & t^2 f''(t) + (1-p+2m+d)\,tf'(t) + (n-m)\,(p-n-m-d)\,N^{(p-2m-d-1)}_{n-m-1}(t) \\ = \;& (n-m)\,(n+m-p+d)\,f(t), \end{aligned}$$

由此可知，多项式 $g(t) = f(t)\,t^m$ 满足

$$t^2 g''(t) + (1-p+d)\,tg'(t) = n\,(n-p+d)\,g(t) - (n-m)\,(p-n-m-d)\,N^{(p-2m-d-1)}_{n-m-1}(t)\,t^m.$$

所得方程对 $S^{p,N}_{n\,m\,,,l}(x,t) = g(t)\,Y^m_l(\xi)$ 也成立

$$\begin{aligned} t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] + (1-p+d)\,t\frac{\partial}{\partial t}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] \;=\; & n\,(n-p+d)\,S^{p,N}_{n,m,l} \\ & - (n-m)\,(p-n-m-d)\left[N^{(p-2m-d-1)}_{n-m-1}(t)\,t^m Y^m_l(\xi)\right]. \end{aligned}$$

根据 $S^{p,N}_{n\,m\,,,l}(x,t)$, 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} & t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] + (1-p+d)\,t\frac{\partial}{\partial t}\left[S^{p,N}_{n,m,l}\right] \\ = \;& n\,(n-p+d)\,S^{p,N}_{n,m,l} - (n-m)\,(p-n-m-d)\,S^{p-2,N}_{n-1,m,l}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

致谢不适用。

作者贡献 所有作者对本研究的贡献均相同。所有作者均已阅读并批准最终稿。

经费 无经费支持。

数据可用性由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

声明

利益冲突作者声明不存在任何竞争性利益。

伦理审批 不适用。

参考文献

[1] S. Bochner, 《关于斯图姆–刘维尔多项式系统》, 《数学杂志》29（1929年）, 730–736。[2] F. Dai 和 Y. Xu, 《球面与球上的逼近论和调和分析》. 数学专著丛书。施普林格, 纽约, 2013年。[3] C. Dunkl 和 Y. Xu, 《多元正交多项式》。数学及其应用百科全书, 第155卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 2014年。[4] E. Güldoğan Lekesiz, 《有限双正交矩阵多项式》, 《计算数学与数学物理》4（66）（2026年）。[5] E. Güldoğan 和 R. Aktaş, 《二元有限与无限正交多项式序列之间的一些极限关系》, 《差分方程及其应用杂志》27（12）（2021年）, 1692–1722。[6] E. Güldoğan Lekesiz 和 I. Area, 《二元有限正交多项式的一些新族》, 《公理》12（10）（2023年）, 932。[7] E. Güldoğan、R. Aktaş 和 M. Masjed-Jamei, 《关于二元正交多项式的有限类》, 《伊朗数学会通报》46（2020年）, 1163–1194。[8] E. Güldoğan、R. Aktaş 和 M. Masjed-Jamei, 《若干有限二元正交多项式的傅里叶变换》, 《对称性》13（2021年）, 452。[9] E. Güldoğan Lekesiz、B. Çekim 和 M.A. Özarslan, 《有限二元双正交 N-Konhauser 多项式》, 《差分方程及其应用杂志》31（9）（2025年）, 1237–1262。[10] M. Masjed Jamei, 《超几何正交多项式的三个有限类及其在函数逼近中的应用》, 《积分变换与特殊函数》13（2）（2002年）, 169–190。[11]M. Masjed-Jamei, 《权函数$\left((ax+b)^2+(cx+d)^2\right)^{-p}\exp\left(q\arctan\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\right)$的经典正交多项式; $-\infty < x < \infty$以及 T 分布和 F 分布的推广》, 《积分变换与特殊函数》15（2）（2004年）, 137–153。[12] M. Masjed-Jamei, 《若干新的正交多项式类与特殊函数：斯图姆–刘维尔问题的对称推广及其推论》, 博士论文, 卡塞尔大学, 德国, 2006年。[13] ~~M. M~~asjed-Jamei、F. Soleyman、I. Area 和 J.J. Nieto, 《两个有限 q-斯图姆–刘维尔问题及其正交多项式解》, 《Filomat》32（1）（2018年）, 231–244。[14] P. Petrushev 和 Y. Xu, 《球上的局部化多项式框架》, 《构造逼近》27（2008年）, 第121号论文, 148页。[15] M. Pinar 和 Y. Xu, 《单位球上的最佳多项式逼近》, 《IMA 数值分析杂志》38（2018年）, 1209–1228。[16] E. D. Rainville, 《特殊函数》, 第1版。Chelsea 出版公司, 布朗克斯, 纽约, 1971年。[17] F. Soleyman、M. Masjed-Jamei 和 I. Area, 《对应于逆伽马分布的一类有限 q-正交多项式》, 《数学与物理分析》7（2017年）, 479–492。[18] G. Szegő, 《正交多项式》。美国数学会专题讨论会出版物第23卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 1975年。[19] Y. Xu, 《球面上一族乘积权函数的正交多项式》, 《加拿大数学杂志》49（1997年）, 175–192。[20] Y. Xu, 《球、单纯形和球面上的正交多项式与求积公式》, 《计算与应用数学杂志》127（2001年）, 349–368。[21] Y. Xu, 《锥上的正交多项式与傅里叶正交级数》, 《傅里叶分析及其应用杂志》26（2020年）, 第36号论文, 42页。[22] Y. Xu, 《锥形区域上的拉盖尔展开》, 《傅里叶分析及其应用杂志》27（4）（2021年）, 第64号论文, 36页。[23] Y. Xu, 《双圆锥或双曲面内及其上的正交结构与正交级数》, 《美国数学会汇刊》374（2021年）, 3603–3657。[24] Y. Xu, 《抛物面上的傅里叶正交级数》, 《数学分析杂志》149（2023年）, 251–279。

[25] Y. Xu，《旋转域上的正交多项式》，《应用数学研究》153（2）（2024），第 e12703 号论文，38页。[26] Y. Xu，《全对称域上的逼近与正交性》，《应用数学研究》第1期，第 e70171 号论文，28页。

（Ö.F. Et）安卡拉大学自然科学与应用科学研究生院数学系，06110，Dışkapı，安卡拉，土耳其；卡拉曼奥卢·穆罕默德贝伊大学卡米尔·厄兹达格理学院数学系，70100，卡拉曼，土耳其

电子邮箱地址，Ö.F. Et：omerfaruket68@gmail.com，omerfaruket@kmu.edu.tr

（E. Çekirdek）安卡拉大学自然科学与应用科学研究生院数学系，06110，Dışkapı，安卡拉，土耳其电子邮箱地址，E. Çekirdek：ecekirdek@ankara.edu.tr

（R. Aktaş Karaman）安卡拉大学理学院数学系，06100，Tandoğan，安卡拉，土耳其电子邮箱地址，R. Aktaş Karaman（通讯作者）：raktas@science.ankara.edu.tr