arXiv:2603.16298v1 [math.CO] 17 Mar 2026

# 具有较大横截比的多胞体

Michael Gene Dobbins*和 Seunghun Lee†

**摘要**

多胞体 $P$ 的横截比，是指与 $P$ 的每个面相交所需的 $P$ 顶点的最小比例。 $P$ 的弱色数，是指为 $P$ 的顶点着色且使每个面都不是单色面所需的最少颜色数。对于每个 $d \geq 5$ ，我们将构造一个 $d$ 多胞体的无限族；随着顶点数增加，其横截比趋近于 1。特别地，这意味着对于每个 $d \geq 5$， $d$ 多胞体的弱色数无界。此前已知的 $d \geq 5$ 维 $d$ 多胞体横截比上确界的最佳下界是：对于奇数 $d$ ， Novik 和 Zheng 给出的下界为 2/5；对于偶数 $d$ ， Holmsen、Pach 和 Tverberg 给出的下界为 1/2。对于单纯（$d-1$）球面，此前已知的最佳下界是： $d=5$ 时为 1/2， $d=6$ 时为 $6/11$，由 Novik 和 Zheng 给出。

## 1 引言

### 1.1 主要结果陈述

对于超图 $H=(V,\mathcal{E})$，横截集 是 $V$ 的一个子集，它与 $\mathcal{E}$ 中的所有超边都相交。 $H$ 的横截数 记为 $\tau(H)$，定义为 $H$ 的横截集的最小大小。 $H$ 的横截比是比值 $\rho(H)=\tau(H)/|V|$。给定一个顶点集为 $V$ 的 $d$-多胞体 $P$，与 $P$ 相关联的超图 $H(P)$ 为

$$H(P)=\{f\subseteq V : f \text{ is the vertex set of a facet of } P\}.$$

我们的主要结果如下。证明见第 2 节。

**Theo定理 1.1.** 对于 $d\geq 5$ 和 $0\leq r<1$，存在一个单纯 $d$-多胞体 $P$，满足 $\rho(H(P))\geq r$.

这个多胞体非常大，其顶点数的增长大致类似于阿克曼函数。对于超图 $H=(V,\mathcal{E})$， $H$ 的*(弱) $k$-着色* 是一个着色 $c: V\to[k]$ ，使得 $\mathcal{E}$ 中的每条超边都至少取两种颜色，其中 $[k]=\{1,2,\ldots,k\}$。*(弱)色数* 记为 $\chi(H)$，它是满足 $H$ 可用 $k$ 种颜色着色的最小整数 $k$ 。在本文余下部分中，提及着色时我们省略“弱”一词。

注意，当 $\chi(H)\leq k$时，我们有 $\rho(H)\leq \frac{k-1}{k}$，只需选择 $k-1$ 规模较小的颜色类。因此，定理1.1 推出：

**推论 1.2。** 对于 $d\geq 5$和正整数 $N$，存在一个单纯 $d$-多胞体 $P$，其有 $\chi(H(P))\geq N$。

### 1.2 主要组成

我们构造的主要要素有两个。其一是 Furstenberg 和 Katznelson 提出的著名密度 *Hales-Jewett* 定理（见定理 2.1）。这是拉姆齐理论中的一个基本结果，它指出，组合立方体中足够大的子集必定包含一条组合直线 [15] （另见

*美国纽约州宾厄姆顿大学数学与统计学系。 mdobbins@binghamton.edu。
†韩国大邱启明大学数学系。部分经费由基础科学研究院（IBS-R029-C1）提供。seunghun.math@gmail.com。

[30, 5, 12, 8]）。其二是构造一个 5-维多胞体，使其每条组合直线都对应一个面。

经典的海尔斯-朱厄特定理 [16] 被 Lee 和 Nevo 以类似的方式用于证明，可分段线性嵌入的超图的色数没有上界 [22]。他们的方法有一个局限：需要将由组合直线组成的系统的分段线性嵌入延拓为分段线性球面。这可以通过 Adiprasito 和 Pat´akov´a [2],[1] 的延拓定理来实现，但这种延拓需要额外的顶点，其数量无法得到有效控制。因此， [22] 的主要结果并不能直接推导出多胞体的横截比，甚至也不能推导出单纯形球面的横截比。在这里，我们将组合直线嵌入为一个 5-维多胞体的面，且不需要任何额外顶点。

我们的多胞体构造涉及将组合直线嵌入圆锥曲线。圆锥曲线也曾用于其他多胞体构造。例如，J¨urgen Richter-Gebert 利用圆锥曲线给出了一个新证明，证明 G¨unter Ziegler 构造的 5-维多胞体有一个不可预指定的二维面 [34, 6.5.(c)], ，并在维数 5 [31, 中得到了非施泰尼茨定理，见例 3.4.3 和第 15]章。

## 1.3 背景

横截数和色数是组合学中的基本概念。这些概念不仅适用于抽象图和超图，也被用于研究与几何的联系；例子包括但不限于组合凸性的（$p$, $q$）定理（参见 [25, 6, 18, 4, 7] 及其中的参考文献）、旗球面的图的稳定集和色数 [11, 26], 、有界亏格图的独立数比 [3], 、嵌入曲面的图的面超图的着色与可选色性结果 [21, 14, 13, 33], 、可三角剖分的 $d$ 维流形的色数 [23],、可嵌入于 $\mathbb{R}^d$ [17, 22] 的均匀超图，以及堆叠球面的横截比 [10]。

据我们所知，研究多胞体横截数的最早直接动机来自 Holmsen、Pach 和 Tverberg 的包围性质 [19]。给定一个相对于原点 $O$处于一般位置的有限点集 $P \subseteq \mathbb{R}^d$，若任意一个 $k$ 元子集$P$都可以扩充为一个（$d+1$）元子集 $P$，使得 $O \in \text{conv}(P)$，则称 $P$ 满足性质 $S(k)$。对$P$应用盖尔变换，可得到纽约州 $\mathbb{R}^{n-d-1}$中的对偶点集 $P^*$。对于 $P^*$，存在一个等价的对偶性质 $S^*(k)$：在 $P^*$的任意$n-k$个点中，都有一些点 $n-d-1$ 构成 conv($P^*$) 的一个面。当 $P^*$ 处于凸位置时，这意味着超图 $H$(conv($P^*$)) 没有大小为 $k$ 的横截集。利用对偶性，并考察横截数为 $\lceil (n-d^*)/2 \rceil + 1$ 的循环 $d^*$ 多胞体（其中 $d^* = n-d-1$ 为偶数），他们得到了无穷多个满足 $S(\lfloor d/2 \rfloor + 1)$ 的点集。

这促使人们研究多胞体的横截比，甚至更一般地研究单纯形球面的横截比。以下问题最初由 Andreas Holmsen 在私人通信中提出。Isabella Novik 和 Hailun Zheng [28] 也提出了一个类似、很可能等价的问题，参见小节 1.4。令 $H(\Delta)$ 为由多胞体复形 $\Delta$的面组成的超图。

**问题 1.3**。对于 $d \geq 3$，令

$$\rho_d^{\mathrm{P}} := \sup\{\rho(H(Q)) : Q \textit{ is a simplicial } d\textit{-polytope}\}, \textit{ and}$$
$$\rho_d^{\mathrm{S}} := \sup\{\rho(H(\Delta)) : \Delta \textit{ is a simplicial } (d-1)\textit{-sphere}\}.$$

$\rho_d^{\mathrm{P}}$ 和 $\rho_d^{\mathrm{S}}$的值分别是多少？

在 [9], 中，证明了 $\rho_3^{\mathrm{P}} = \rho_3^{\mathrm{S}} = 1/2$，并且 $\rho_4^{\mathrm{S}} \geq 11/21$ 其中的构造是通过实验获得的，其横截比大于 $1/2$，后者是循环多胞体的上界。后来，Novik 和 Zheng 针对问题1.3 提出了新的构造，打破了 $d \geq 4$ [28, 27]的纪录。他们证明了 $\rho_4^{\mathrm{S}} \geq 4/7$， $\rho_5^{\mathrm{S}} \geq 1/2$， $\rho_6^{\mathrm{S}} \geq 6/11$，并且 $\rho_d^{\mathrm{P}} \geq 2/5$ 对每个奇数 $d \geq 5$都成立。

[1]我们还从 Lorenzo Venturello 和 Geva Yashfe 处获悉了这一证明（私人通信）。

## 1.4 含义与未来方向

**关于问题1.3**。定理1.1 意味着 $\rho_d^{\mathrm{P}} = \rho_d^{\mathrm{S}} = 1$ 当 $d \geq 5$时成立。将其与问题1.3的先前构造相比，这相当令人惊讶；其中许多构造都是利用矩曲线得到的。这种选择看起来很自然：一方面，包括循环多胞体在内的邻居多面体具有最多的面，因此人们有理由认为，要刺穿所有面需要更多顶点。另一方面，矩曲线上的几何可以用纯组合的方式描述，因此易于处理。然而，当我们使用矩曲线时，正如从循环多胞体的面列表中所见，维数上会出现一些奇偶性问题。因此，对于偶数维多胞体（或奇数维单纯形球面），获得横截比大的构造相对容易，而对于其他情形则较难。由于我们构造的多胞体的最小维数为 5，这一点与先前的构造大不相同，也可能暗示着另一种构造具有较大面数的多胞体的方法。

关于 $d = 4$ 问题1.3，一个显而易见的开放问题仍未解决。我们的结果以及色数无界的三维球面 [22] 启发了以下猜想。

**猜想1.4**。 存在一些四维多面体，其横截集需要包含几乎全部顶点，即 $\rho_4^{\mathrm{P}} = \rho_4^{\mathrm{S}} = 1$。

**注 1.5**。 略作修改我们的构造，便可得到以下结论：对于 $k$ 和 $d$，其中$k \geq d$，给定一个 $d$多胞体 $P$，令 $\rho_k(P)$ 表示刺穿 $P$中所有至少有 $k$ 个顶点的面的 $P$ 顶点所占的比例。对于任意 $0 \leq r < 1$，存在一个 $d$多胞体 $P$，使得 $\rho_k(P) \geq r$。这引出了以下问题。

**问题 1.6**。 是否存在一个 $d$多胞体，它没有单纯形面且横截比很大？

注意，这种多面体的色数必定无界，因此其多面体图的色数也必定无界。

**可几何嵌入超图与单纯形流形的色数**。 我们称一个 $k$-均匀超图 $H = (V, \mathcal{E})$ 关于 $k \leq d+1$ 是 可几何嵌入的，如果存在一个单射 $\iota : V \to \mathbb{R}^d$，使得对于 $H$ 的每条超边 $h$，$\mathrm{conv}(\iota(h))$ 是一个 $(k-1)$-单纯形；并且对于两条不同的超边 $h_1$ 和 $h_2$,

$$\mathrm{conv}(\iota(h_1)) \cap \mathrm{conv}(\iota(h_1)) = \mathrm{conv}(\iota(h_1) \cap \iota(h_1)).$$

在 [17], 中，作者研究了可几何嵌入于 $\mathbb{R}^d$ 中的 $k$-均匀超图的（弱）色数，其中 $k$ 和 $d$ 取值可变。这是试图将四色定理推广到更高维度。

一个具体的问题是，当顶点数趋于无穷时，色数是否也无界，尤其是在 $k = d+1$ 时，参见 [17, 第 4] 节。在 [22], 中，利用 Ackerman 、 Keszegh 和 P´alv¨olgyi 的超图 —— 这是对 [29, 20], 中早期构造的扩展——文中证明了当 $k \leq d$ 时，色数无界。同一篇论文还构造了一族可几何嵌入超图；当 $k = d+1$ 时，对于奇数 $d$，其色数至少为 3。这里也出现了类似的奇偶性问题，因为这些构造基于矩曲线。

通过使用我们构造的施莱格尔图，我们得到以下推论。

**推论 1.7.** 对于 $d \geq 4$，存在一个无限族的$(d+1)$-均匀超图，它们可以几何嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中，且其（弱）色数无界。

然而，我们的技术在 $\mathbb{R}^3$ 方面存在局限。事实上，我们目前还不清楚能否将大型组合立方体的组合直线嵌入 $\mathbb{R}^3$。因此，我们提出以下问题（参见小节2.1中的海尔斯-朱厄特超图）。

**问题 1.8.** 对于每个正整数 $n$，我们能否将海尔斯-朱厄特超图 $\mathrm{HJ}(4, n)$ 几何嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中？

我们的构造还给出了一种更简单的方法，可构造具有无界色数的单纯 $d$-流形，相较于 [22] 中作为 Lutz 和 Møller [23]此前研究之扩展所给出的方法：只需将给定的单纯流形与我们的构造沿面作连通和即可。

**单纯形球面的色数和横截比的渐近行为**。由于对于 $d \geq 5$， $d$-多胞体的色数和横截比可以任意大，因此提出以下问题是合理的：

**问题 1.9.** 对于 $d \geq 4$，令

$$\rho_d^{\mathrm{P}}(n) := \max\{\rho(H(Q)) : Q \text{ is a simplicial } d\text{-polytope on } n \text{ vertices}\}, \text{ and}$$
$$\rho_d^{\mathrm{S}}(n) := \max\{\rho(H(\Delta)) : \Delta \text{ is a simplicial } (d-1)\text{-sphere on } n \text{ vertices}\}.$$

函数 $\rho_d^{\mathrm{P}}(n)$ 和 $\rho_d^{\mathrm{S}}(n)$的渐近行为如何？特别是，对于 $d \geq 5$，$\rho_d^{\mathrm{P}}(n)$ 和 $\rho_d^{\mathrm{S}}(n)$ 趋近于 *1* 的速度有多快？

Novik 和 Zheng 提出了这样的问题：lim sup 的值$_{n\to\infty}\rho_d^{\mathrm{P}}(n)$ 和 lim sup$_{n\to\infty}\rho_d^{\mathrm{S}}(n)$ [28]是多少？对于 $d \geq 5$，定理 1.1 解决了他们的问题；而对于 $d = 4$，问题仍未解决。问题 1.9 类似于文献 [17] 中针对可几何嵌入超图提出的问题；他们不仅询问其渐近行为，还询问作为 $n$的函数的实际色数。除了 $d = 4$这一情形外，这似乎是值得进一步考虑更高维情形的自然下一步。

在 [9], 中，得到了关于具有 $n$个顶点的单纯形（$d-1$）球面的色数的上界 $O(n^{(\lfloor d/2\rfloor-1)/(d-1)})$。随后，在 [27], 中，Novik 和 Zheng 对于纯（$d-1$）维复形，在 $d \geq 2$ 和 $n$ 足够大时，得到了横截数的一般上界 $n+1-\frac{1}{e}nm^{-1/d}$，其中 $m$ 是面数 [27, （定理 3.1] ）；此外，他们还构造了具有 $n$ 个顶点和 $\Theta(m)$ 个面的纯（$d-1$）维复形，其横截数为 $n-\Theta(n^{d/(d-1)}m^{-1/(d-1)})$，其中 $n$ 且 $m$ 满足 $1 \ll n \ll m \ll n^{(d+1)/2}$。事实上，用于得到色数上界的 [9, 引理 6.3] 中的论证稍作修改，便可得到一个与 Novik 和 Zheng 的下界相匹配的紧上界。特别地，对于单纯形球面，这给出了横截数的上界 $n$–$\Omega($ $n^{\lceil d/2\rceil/(d-1)})$；根据 McMullen [24] 和 Stanley [32]，分别针对多胞体和单纯形球面所证明的上界定理，这进一步给出了 $\rho_d^{\mathrm{P}}(n)$ 和 $\rho_d^{\mathrm{S}}(n)$ 的上界 $1-1/O(n^{(\lfloor d/2\rfloor-1)/(d-1)})$。

这个上界与我们预期构造所能达到的下界相差甚远。对于 $d = 5$，我们预期构造能给出一个类似于 $1-1/\Omega(\log_2^{***}(n))$[2] 的下界，而上界为 $1-1/O(n^{1/4})$。具体而言，我们有 $\rho_d^{\mathrm{P}}(n) \geq 1-\mathrm{dhj}_d^{-1}(\log_d(n))$，其中 $\mathrm{dhj}_d^{-1}(y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathrm{dhj}(d,\varepsilon) \leq y\}$，而 $\mathrm{dhj}(d,\varepsilon)$ 是满足密度 Hales-Jewett 定理结论的最小量（见定理 2.1）。随着 $d$ 和 $n$ 增大，已知 $\mathrm{dhj}_d^{-1}(n)$ 趋于 0 的速度大致至少与反阿克曼函数的倒数一样快，但密度 Hales-Jewett 定理的精确界尚未给出 [30,定理 1.5]。

**关于包围性质**。 Holmsen、Pach 和 Tverberg 询问，是否存在任意大的点集 $P$，其所在的$\mathbb{R}^d$ 相对于原点处于一般位置，并满足包围性质 $S(k)$，其中 $k$ 当维数 $d$ 固定时， $P^*$ 取 $\mathbb{R}^{d^*} = \mathbb{R}^{n-d-1}$ 为一般位置且其凸包的横截数大于 $k$ [19, 问题 3 和 7]。定理 1.1为这个问题给出了部分答案。

**推论 1.10**。 对于任意 $0 \leq r < 1$，存在充分大的维数 $d$，以及点集 $P$，其相对于原点在 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置，并满足 $S(rd)$。

尽管定理 1.1 对包围性质问题有所启示，但事实上，我们的设定并不完全符合该问题，因为在关于横截比的空间中，原始维数 $d$ 在 [19, 问题 3 中是固定的，而 7] 不是对偶维数 $d^*$。相反，这更关乎顶点数“较少”的多胞体，具体含义如下。下面的问题似乎别具特色，也有其自身的有趣之处。

[2] $\log_b^*(n)$ 表示必须对 $\log_b$ 应用多少次才能得到一个至多为 1 的值，而 $\log_b^{**}(n)$ 对 $\log_b^*$ 等依此类推，其定义方式相同。

**问题 1.11**。 对于固定的正整数 $d$，具有 $d^*+d+1$ 个顶点的单纯 $d^*$ 维多胞体 $P$ 的 $H$（$P$）的横截数最大是多少？

# 定理 2 的证明 1.1

## 2.1 密度海尔斯-朱厄特定理

对于正整数 $d$ 和 $n$，我们如下定义超图 HJ$(d,n)$。组合直线 是 $[d]^n$ 中由 $n$ 个词组成的集合，其中每个位置上的值对于所有词都相同，或者按照固定顺序遍历 $[d]$。也就是说，使用一个额外的辅助元素 $*$，令 $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in([d]\cup\{*\})^n$ 为一个序列，其中 $*$ 至少出现一次，或等价地， $\tau\in([d]\cup\{*\})^n\setminus[d]^n$。对于 $k\in\mathbb{R}$，令 $\sigma(\tau,k)$ 为通过将 $\tau$ 中每个 $*$ 替换为值 $k$ 所得到的词，即

$$\sigma(\tau,k)=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\quad\text{where}\quad\sigma_i=\begin{cases}k & \text{if } \tau_i=*, \text{ and}\\ \tau_i & \text{otherwise.}\end{cases}$$

组合直线 $L_\tau$ 是通过这种方式从序列 $\tau$ 中取 $k\in[d]$ 得到的所有词组成的集合，即

$$L_\tau=\{\sigma(\tau,k):k\in[d]\}.$$

海尔斯-朱厄特超 图，HJ$(d,n)$ 是以底集 $[d]^n$ 为顶点集、由所有组合 1
直线构成的超图。
也就是说 ，

$$\mathrm{HJ}(d,n)=([d]^n,\{L_\tau:\tau\in([d]\cup\{*\})^n\setminus[d]^n\}).$$

我们使用 密度 *Hales-Jewett* 定理，借助 HJ$(d,n)$ 和横截比 $\rho(\cdot)$ 来陈述。这一著名定理是拉姆齐理论中的一项基本结果，由 Furstenberg 和 Katznelson 提出 [15], ，并有多种不同的证明 [30, 5, 12]。

**定理 2.1** (密度 Hales-Jewett 定理 [15])。*HJ$(d,n)$* 的横截比在 $n$ 增大时趋近于 *1*。也就是说，对于每个整数 $d\geq 2$ 和每个 $\varepsilon>0$，都存在一个整数 $\mathrm{dhj}(d,\varepsilon)$，使得 $\rho(\mathrm{HJ}(d,n))>1-\varepsilon$，其中 $n\geq\mathrm{dhj}(d,\varepsilon)$。

根据定理 因此 2.1，为得到定理1.1，只需证明以下定理 .

**定理 2.2**。 对于任意正整数 $d\geq 5$ 和 $n$，存在一个 $d$维单纯多面体 $Q$ 以及一个双射 $\varphi\colon[d]^n\to V(Q)$，使得对于 HJ$(d,n)$中的任意组合直线 $L$，其像 $\varphi(L)$ 都是 $Q$某个面面的顶点集。

## 2.2 定理 2.2 的证明

我们分几个步骤证明定理 2.2 。

**1. 在平面中绘制 HJ$(d,n)$**。 取向量 $v_1,\ldots,v_n$ 属于 $\mathbb{R}^2$。不妨设

(a) 对每个 $i\in[n]$， $v_i$ 的 $x$分量均为正。

对于每个 $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in\mathbb{R}^n$，定义一个点

$$p_\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i v_i.$$

如有必要，对向量 $v_1,\ldots,v_n$进行扰动后，我们可以假设对于 $\sigma\in[d]^n$， $p_\sigma$彼此不同。令

$$P=\{p_\sigma:\sigma\in[d]^n\}.$$

根据 (a)， $x$-分量对于每个 $p_\sigma$ 都为正 $\sigma \in [d]^n$。

对于组合直线 $L = L_\tau$，设

$$P_L = \{p_\sigma : \sigma \in L\},$$

并设 $S_L$ 为 $P_L$ 的仿射包。等价地，

$$S_L = \left\{p_{\sigma(\tau,t)} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

其中 $\sigma(\tau, t) \in \mathbb{R}^n$ 如上面对组合直线的定义所述。由 (a)， $S_L$ 具有有限斜率。设

$$y = a_L x + b_L$$

设其为定义 $S_L$ 的方程。对 $v_1$、……、$v_n$ 进行扰动后，我们还可以假设 $P$ 中没有其他点与 $P_L$ 中的点共线；也就是说

(b) $S_L \cap P = P_L$。

**2. Veronese嵌入。** 定义 *Veronese*嵌入 $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ 的仿射版本如下

$$\nu(x, y) = (x^2, xy, y^2, x, y).$$

**引理 2.3。** $\nu(P)$ 处于凸位置。

证明。对于 $p \in P$，令 $g_p$ 表示从 $\mathbb{R}^5$ 到 $\mathbb{R}$ 的仿射函数，其常数项为 $\|p\|^2$，系数与由到 $p$的平方距离定义的多项式相同。也就是说，$g_p(x^2, xy, y^2, x, y) = \|(x, y) - p\|^2$。于是，$g_p$ 在 $\nu(p)$ 上为零，在 $\nu(P)$ 的其余部分为正。因此，$p$ 是 conv($\nu(P)$) 的一个顶点。 □

**引理 2.4。** 对于 HJ$(d, n)$ 的每条组合直线 $L$，我们都可以找到一个从 $\mathbb{R}^5$ 到 $\mathbb{R}$的仿射函数 $g_L$，它在 $\nu(P_L)$ 上为零，并在 $\nu(P \setminus P_L)$上为正。因此，$\text{conv}(\nu(P_L))$ 是 $\text{conv}(\nu(P))$ 的一个面。

证明。令 $f_L(x, y) = (y - a_L x - b_L)^2$,，并令 $g_L$ 为一个仿射函数，其系数和常数项与 $f_L$相同。也就是说，$g_L(x^2, xy, y^2, x, y) = f_L(x, y)$。于是，根据我们的假设 (b)，对于每个点 $p \in P_L$，都有 $g_L(\nu(p)) = f_L(p) = 0$；并且对于每个 $p \in P \setminus P_L$，都有 $g_L(\nu(p)) = f_L(p) > 0$。 □

**3. 将组合直线变为面** $\mathbb{R}^5$。我们对 $P$ 作适当的扰动 $P^\epsilon$，使得 conv($\nu(P_L^\epsilon)$) 是一个面。对于 $\epsilon > 0$，令 $P^\epsilon$ 为将 $P$ 中每个点向上平移一段与 $x$ 坐标的平方根成正比的距离后得到的结果，

$$P^\epsilon = \{\phi_\epsilon(p) : p \in P\} \quad \text{with} \quad \phi_\epsilon(x, y) = (x, y + \sqrt{\epsilon x}).$$

这一扰动的一个重要结果是，点 $P_L^\epsilon = \{\phi_\epsilon(p) : p \in P_L\}$ 现在对每条组合直线 $L$都位于一条唯一的圆锥曲线上；见图1。具体来说，令

$$f_L^\epsilon(x, y) := f_L(x, y) - \epsilon x = (y - a_L x - b_L)^2 - \epsilon x,$$

并令 $Z_L^\epsilon = [f_L^\epsilon]^{-1}(0)$ 为 $f_L^\epsilon$ 的零点集。注意，$Z_L^\epsilon$ 是一条抛物线，且只出现在区域 $x \geq 0$ 中。

**引理 2.5.** $P_L^\epsilon \subset Z_L^\epsilon$。

证明。若 $p = (x, y) \in P_L^\epsilon$，则 $y = a_L x + b_L + \sqrt{\epsilon x}$且 $x > 0$由(a)可知，因此 $f_L^\epsilon(p) = \sqrt{\epsilon x}^2 - \epsilon x = 0$。 □

令 $g_L^\epsilon$ 为仿射函数，其系数和常数项与 $f_L^\epsilon$ 相同，使得 $g_L^\epsilon(x^2, xy, y^2, x, y) = f_L^\epsilon(x, y)$，并根据以下引理选取 $\epsilon$。

**引理 2.6.** 我们可以取充分小的 $\epsilon > 0$，使仿射函数 $g_L^\epsilon$ 在 $\nu(P_L^\epsilon)$ 上为零，并在 $\nu(P^\epsilon \setminus P_L^\epsilon)$上为正。

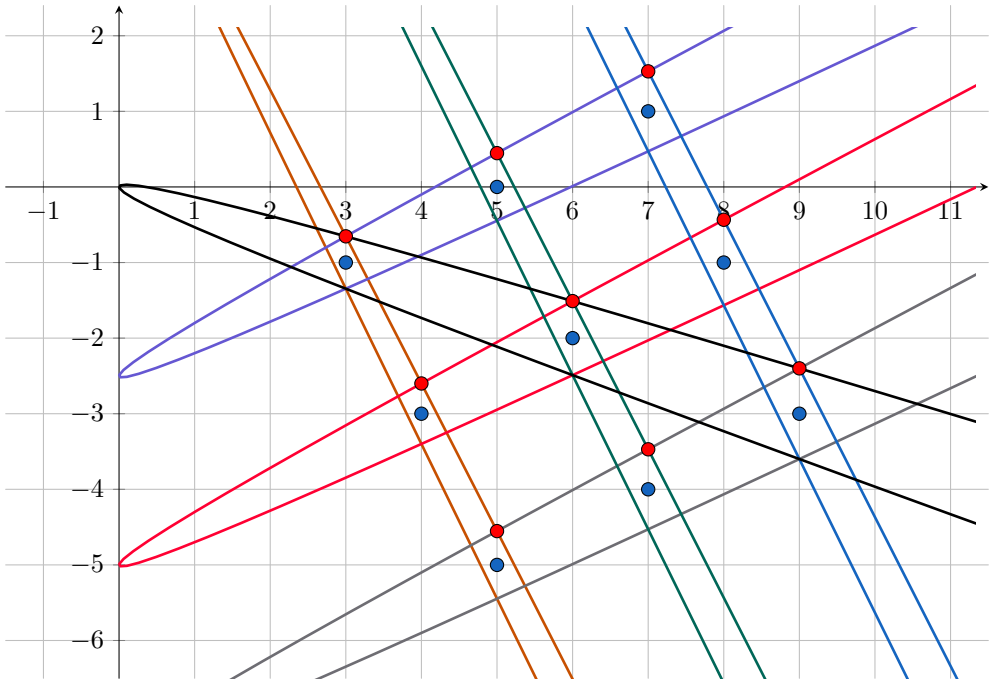



图 1：HJ(3，2) 顶点的示意图，以及 HJ(3，2) 每条组合直线 $L$ 对应的曲线 $Z_L^\epsilon$。蓝色点是 $P$ 上的点，红色点是 $P^\epsilon$上的点。

证明。注意，根据定义， $g_L^\epsilon$ 在 $\nu(Z_L^\epsilon)$ 上为零，因此特别地，根据引理 2.5， $g_L^\epsilon$ 在 $\nu(P_L^\epsilon)$ 上为零。由于 $P$ 是有限集， $P$ 的最大 $x$坐标有界，因此只要将 $\epsilon$取足够小，就能使 $\nu(P^\epsilon)$任意接近$\nu(P)$，并使 $f_L^\epsilon$任意接近 $f_L = f_L^0$。因此，根据引理 2.4，当 $\epsilon$ 充分小时， $g_L^\epsilon$在 $P^\epsilon$ 的其余部分上为正。 □

**引理 2.7**。对于每条组合直线 $L$， $\nu(P_L^\epsilon)$ 中的任意 5 个点都仿射无关。因此，$\mathrm{conv}(\nu(P_L^\epsilon))$ 是$\mathrm{conv}(\nu(P^\epsilon))$的一个面。

证明。由于 $P_L^\epsilon$ 位于抛物线 $Z_L^\epsilon$上， $P_L^\epsilon$ 中没有 3 个点共线。因此， $P_L^\epsilon$ 中的任意 5 个点确定唯一的圆锥曲线，即 $Z_L^\epsilon$。这意味着这 5 个点在 $\nu$ 下的像位于唯一的超平面$h_L^\epsilon = [g_L^\epsilon]^{-1}(0)$上，因此这 5 个点的仿射包必定是超平面 $h_L^\epsilon$。由此，5 个点仿射无关。引理的第二部分现由引理2.6得出。 □

**4. 将组合直线变成 $\mathbb{R}^d$中的面**。假设 $d > 5$。我们将沿正交于 $\mathbb{R}^5$ 的方向对点进行扰动，其中 $\mathbb{R}^5$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个子空间。对于每个 $p_\sigma^\epsilon = \phi_\epsilon(p_\sigma) \in P^\epsilon$， 令

$$p_\sigma^z = (\nu(p_\sigma^\epsilon), z_{\sigma,1}, \ldots, z_{\sigma,d-5}) \in \mathbb{R}^d, \quad P^z = \{p_\sigma^z : \sigma \in [d]^n\}, \quad P_L^z = \{p_\sigma^z : \sigma \in L\}$$

其中 $z_{\sigma,\ j}$ 的选取依据以下引理。

**引理 2.8**。我们可以选取 $z_{\sigma,\ j}$，使得对于每条组合直线 $L$， $P_L^z$ 中的点仿射无关。此外，在此选取下，$\mathrm{conv}(P_{zL})$ 是 $\mathrm{conv}(P^z)$ 的一个面。

证明。 对于每条组合直线 $L = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$，令

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p_{\sigma_1}^z & p_{\sigma_2}^z & \cdots & p_{\sigma_d}^z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times d}.$$

由于点 $\nu(p^{\epsilon}_{\sigma_1}),\ldots,\nu(p^{\epsilon}_{\sigma_d})$ 都包含在唯一的超平面 $h^{\epsilon}_L$ 中， $A_L$ 的前 6 行构成一个秩为 5 的子矩阵，因此可以选择 $A_L$ 的其余项，使 $A_L$ 满秩，从而得到 $\det(A_L^{\mathrm{T}}A_L)\neq 0$。因此，$\det(A_L^{\mathrm{T}}A_L)$ 是变量 $z_{\sigma,j}$ 的非零多项式，所以 $\det(A_L^{\mathrm{T}}A_L)$ 的零点集在 $\mathbb{R}^{d^n(d-5)}$ 中是零测集。因此，我们可以为 $z_{\sigma,j}$ 选取取值，使得这些多项式对所有组合直线均非零。于是，对于每条组合直线 $L$， $P^z_L$ 都是仿射无关的。

对于该引理的第二部分，我们通过坐标投影将 $g^{\epsilon}_L$ 延拓为一个仿射函数 $g^z_L:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 。也就是说，$g^z_L = g^{\epsilon}_L\circ\pi$ 其中 $\pi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^5$ 是到前 5 个坐标的投影。由于 $p^z_\sigma$ 的前 5 个坐标为 $\nu(p^{\epsilon}_\sigma)$，我们有 $g^z_L(p^z_\sigma) = g^{\epsilon}_L(\nu(p^{\epsilon}_\sigma))$，因此 $g^z_L$ 在 $P^z_L$ 上为零，并且在 $P^z$的其余部分上为正。 □

5. 一般位置扰动。设 $P^{\mathrm{s}}$为点集 $P\mathrm{z}$ 的一个足够小的一般位置扰动（在 $d=5$的情形下， $P\mathrm{z}=\nu(P^{\epsilon})$），使其满足以下三个条件。注意到，与引理 2.3 中的同一论证一样，$\nu(P^{\epsilon})=\pi(P^z)$ 中的点处于凸位置，其中 $\pi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^5$是到前 5 个坐标的投影，因此 $P^z$ 处于凸位置。首先，选择一个足够小的扰动，使得 $P^{\mathrm{s}}$处于凸位置。其次，对应于一条组合直线 $L\subset[d]^n$的点集 $P\mathrm{s}_L$保持仿射无关，其对应关系继承自 $P^z$。第三，一个从 $g^z_L$轻微扰动得到的仿射函数 $g_L$ 在 $P^{\mathrm{s}}_L$上为零，并且在 $P\mathrm{s}$ 的其余部分上为正。因此， $Q_L=\mathrm{conv}(P\mathrm{s}_L)$ 是 $Q=\mathrm{conv}(P^{\mathrm{s}})$ 的一个单纯形面。此外，由于该扰动是一般位置的， $Q$ 是单纯形的。这

$\mathrm{p}$理了 $\mathrm{p}$定理2.2的证明。 □

## 致谢

我们感谢 Andreas Holmsen 提出了问题1.3 和包围性质，感谢 Eran Nevo 建议考虑将线性超图嵌入 $\mathbb{R}^d$，并注意到备注1.5 和问题 1.6，感谢 Isabella Novik 和 Varun Shah 就问题 1.6进行了讨论，并感谢 Seonghyuk Im 和 Hong Liu 提供了关于密度 Hales-Jewett 函数界的参考文献。

## 参考文献

[1] Eyal Ackerman、Bal´azs Keszegh 和 D¨om¨ot¨or P´alv¨olgyi。由被伪圆盘刺穿的集合所定义的超图的着色与 ABAB-自由超图。*SIAM* 离散数学杂志，34(4):2250–2269，2020。[2] Karim Adiprasito 和 Zuzana Pat´akov´a。F´ary 定理的高维版本。伦敦数学会通报，57(5):1409–1414，2025。[3] Michael O. Albertson 和 Joan P. Hutchinson。关于图的独立数比。图论杂志，2(1):1–8，1978。[4] Nina Amenta、Jes´us A. De Loera 和 Pablo Sober´on。Helly 定理：新变体及应用。载于离散数学中的代数与几何方法：美国数学会应用离散数学代数与几何方法专题会议论文集，地点：美国得克萨斯州圣安东尼奥，*2015*年*1*月*11*日，第55–95页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2017。[5] Tim Austin。由无穷移除引理推导密度 Hales-Jewett 定理。理论概率杂志，24(3):615–633，2011。[6] I mre B´ar´any。组合凸性，第77卷，大学讲义丛书。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2021。[7] Imre B´ar´any 和 Gil Kalai。Helly 型问题。美国数学会通报（新辑），59(4):471–502，2022。[8] Amey Bhangale、Subhash Khot、Yang P. Liu 和 Dor Minzer。长度为三的组合直线的合理界。预印本，arXiv:2411.15137 [math.CO](2024)，2024。

[9] Joseph Briggs、Michael Gene Dobbins 和 Seunghun Lee。单纯形球面的横截集与着色。《离散与计算几何》，71(2):738–763，2024，arXiv:2111.06560。[10] Minho Cho 和 Jinha Kim。堆叠球面的横截数。《离散数学》，347(7):11，2024。编号114061。[11] Maria Chudnovsky 和 Eran Nevo。旗球面中的稳定集。《欧洲组合学杂志》，110：论文编号103699，9页，2023。[12] Pandelis Dodos、Vassilis Kanellopoulos 和 Konstantinos Tyros。密度 Hales-Jewett 定理的一个简单证明。《国际数学研究通知》，2014(12):3340–3352，2014。[13] Zdenˇek Dvoˇr´ak、Daniel Kr´al 和 Riste ˇSkrekovski。曲面上的面超图着色。《欧洲组合学杂志》，26(1):95–110，2005。[14] Kengo Enami 和 Kenta Noguchi。将图嵌入具有不同弱色数的曲面。《图与组合》，37(2):435–444，2021。[15] Hillel Furstenberg 和 Yitzhak Katznelson。Hales-Jewett 定理的密度版本。《分析数学杂志》，57:64–119，1991。[16] Alfred W. Hales 和 Robert I. Jewett。正则性与位置博弈。《美国数学会汇刊》，106:222–229，1963。[17] Carl Georg Heise、Konstantinos Panagiotou、Oleg Pikhurko 和 Anusch Taraz。可嵌入 $d$的$k$均匀超图的着色。《离散与计算几何》，52(4):663–679，2014。[18] Andreas Holmsen 和 Rephael Wenger。Helly 型定理与几何横截集。载于《离散与计算几何手册》（第三版），第91–123页。CRC出版社，2018。[19] Andreas F. Holmsen、J´anos Pach 和 Helge Tverberg。包围原点的点。《组合学》，28(6):633–644，2008。[20] Bal´azs Keszegh 和 D¨om¨ot¨or P´alv¨olgyi。多色着色的抽象方法：ABA-自由超图与伪半平面中的浅层击中集。《计算几何杂志》，10(1):1–26，2019。[21] Andr´e K¨undgen 和 Radhika Ramamurthi。曲面上图的面超图着色。组合理论杂志B辑，85(2):307–337，2002。[22] Seunghun Lee 和 Eran Nevo。关于可嵌入 $\mathbb{R}^d$的超图着色，2023，arXiv:2307.14195。[23] Frank H. Lutz 和 Jesper M. Møller。单纯形流形的色数。《代数与几何论文集》，61(3):419–453，2020。[24] Percy A. MacMahon。《组合分析》，第I、II卷（合订一册）。Dover Phoenix Editions。Dover Publications, Inc.，纽约州Mineola，2004。重印自《组合分析导论》（1920）及《组合分析》第I、II卷（1915、1916）。[25] Jiˇr´ı Matouˇsek。《离散几何讲义》，第212卷，数学研究生教材。纽约州纽约：Springer，2002。[26] Andrew Newman。旗3-球面的色数，2023，arXiv:2311.08499。[27] Isabella Novik 和 Hailun Zheng。单纯多面体、球面和纯复形的横截数，2024，arXiv:2407.19693。

[28] Isabella Novik 和 Hailun Zheng。邻接球面与横截数。载于《代数组合学中的开放问题》，第 110 卷《纯数学专题讨论会论文集》，第 113–128 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，[2024]©2024。http://www.samuelfhopkins.com/OPAC/files/proceedings/novik_zheng.pdf。[29] J´anos Pach、G´abor Tardos 和 G´eza T´oth。不可分解覆盖。《加拿大数学通报》，52(3):451–463，2009。[30] D. H. J. Polymath。密度 Hales-Jewett 定理的新证明。《数学年刊》(2)，175(3):1283–1327，2012。[31] J¨urgen Richter-Gebert。《多胞体的实现空间》，《数学讲义》第 1643 卷。施普林格出版社，柏林，1996。[32] Richard P. Stanley。上界猜想与科恩-麦考利环。《应用数学研究》，54(2):135–142，1975。[33] Carsten Thomassen。无单色三角形的平面图的二重列表着色。《组合理论杂志B辑》，98(6):1337–1348，2008。[34] G¨unter M. Ziegler。《多胞体讲义》，《数学研究生教材》第 152 卷。施普林格出版社，纽约，1995。