arXiv:2603.16314v1 [math.RT] 17 Mar 2026

实酉群与p-进辛群和正交群的阿瑟包之间的关联

TAIWANG DENG、CHANG HUANG、BIN XU 和 QIXIAN ZHAO

Abstract. 我们建立了实酉群与 p-进辛群或正交群之间某些阿瑟参数包的显式对应。这使得我们能够通过转译 p-进侧的结果来计算实酉群的阿瑟参数包。证明中的一个主要要素，是实侧的 Zuckerman 平移函子与 p-进侧 Jacquet 函子之间的显式关系。为此，我们构造了相关实群与p-进群中具有固定无穷小特征的朗兰兹参数代数栈之间的对应。我们的方法还使我们能够关联实侧与 p-进侧的 Kazhdan-Lusztig 多项式及微局部几何。

Contents

1. 引言 1 1.1. 主要结果 3 1.2. 证明策略 9 1.3. 关于局部朗兰兹对应的工作假设 10 1.4. 致谢 10 2. 几何 10 2.1. $U(p,q)$ 10的朗兰兹对应 2.2. p-进辛群/正交群的朗兰兹对应 15 2.3. 满秩部分与几何比较 20 2.4. 显式对应 25 3. 定理 1.5 和 1.9 的证明 30 3.1. 正则情形 30 3.2. 奇异情形 33 4. 平移与导数的比较 35 附录 A. 平移函子的分解 42 附录 B. Adams-Johnson 包的朗兰兹参数 46 B.1. $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$ 46的朗兰兹商参数 B.2. $U(p,$ $q)$ 47中的极大分裂环面 B.3. $U(p,$ $q)$ 48的离散系列 B.4. $\pi(\psi^{\mathbb{R}};p,$ $q)$ 49的显式朗兰兹商参数 B.5. $\pi(\psi^{\mathbb{R}};p,$ $q)$ 51的完整朗兰兹参数 ^ ^ ^附录 C. $K\backslash G/P$ 52中轨道的参数化 参考文献 56

– –

– –

1. 引言

实群或 p-adic约化群表示论中的一个基本问题，是对其不可约酉表示进行分类，即确定它们的酉对偶。由于温和表示都是酉表示，主要难点在于对非温和酉表示进行分类。这类表示中有一类重要表示源自自守形式，更准确地说，源自自守表示的局部分量。正如

迹公式所提示的，阿瑟 [Art84] 猜想这些局部分量可以归入具有良好解析性质的参数包，即满足端oscopic特征关系的参数包。如今，这些参数包称为阿瑟包或 A-包，并由所谓的 Arthur 参数加以参数化。事实上，这种额外的参数包结构有助于对它们进行分类，因此人们希望先理解这些参数包。

目前已有若干种不同但据猜想彼此相容的阿瑟包构造，每种构造都有其自身的优势与局限。对于实约化群，Adams-Barbasch-Vogan [ABV92] 通过朗兰兹参数空间（简称 ABV空间）的微局部几何给出了阿瑟包的一种构造，为了区分，我们将其称为 ABV-包，记作 $\Pi^{\mathrm{ABV}}_{\psi^{\mathbb{R}}}$，其中 $\psi^{\mathbb{R}}$ 表示一个实阿瑟参数。从这一定义并不能清楚看出这些表示的酉性。在 $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO(p,q)$, $U(p,q)$的情形下，准分裂情形中的阿瑟 [Art13], Mok [Mok14] 以及非准分裂情形中的 Moeglin-Renard [MR20] [MR18][MR19] 利用调和分析，更确切地说，利用（扭曲的）内窥理论，构造了阿瑟包。我们将这些包简单记作 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}$。这些包的酉性可由将其提升为自守表示而得到。对于这些群，Moeglin-Renard [MR20] 还给出了一种等价的代数构造：从幺幂情形 [Mœg17]出发，使用上同调诱导和抛物诱导。最后，不再限制群的类型，而是要求表示具有上同调性，Adams-Johnson [AJ87] 提出了一种构造：从某些扭曲 Levi 子群的一维特征出发进行上同调诱导，从而得到所谓的 Adams-Johnson 包，记作 $\Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi^{\mathbb{R}}}$。这些构造彼此相容，即当双方均有定义时，$\Pi^{\mathrm{ABV}}_{\psi^{\mathbb{R}}} = \Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}$ [AAM24][AM24] 和 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}} = \Pi^{\mathrm{AJ}}_{\psi^{\mathbb{R}}}$ [AMR18]。

对于 p-adic 约化群，也有一个平行的理论。首先，Vogan [Vog93]基于局部朗兰兹对应以及朗兰兹参数空间（简称 Vogan 簇）的微局部几何构造了 A-包；随后，[CFM+22] 利用消失循环对这一构造作了重新诠释。类比于 ABV 对实群的构造，这些包也称为 ABV-包，记作 $\Pi^{\mathrm{ABV}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$，其中 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 是一个 p-adic A-参数。对于辛群或特殊正交群，Arthur [Art13] 在准分裂情形下、Moeglin [Mœg09] 基于 [MR18] 在非准分裂情形下，利用（扭曲）内窥理论构造了阿瑟包，记作 $\Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$。同样对于这些群，Moeglin [Mœg09]利用涉及抛物诱导和 Jacquet 限制的某些递归公式，给出了代数构造。人们预期，Moeglin 的工作也可以基于 [Mok14] [KMSW14]推广到 p-adic 酉群。尽管尚不清楚 p-adic 群的上同调诱导应当有何种对应物，Moeglin 在她的构造中区分出一种特殊类型的阿瑟包；本文将证明，这种包对应于 Adams-Johnson 包。最后，Cunningham-Hazeltine-Liu-Lo-Ray-Xu 正在开展一个项目，旨在证明当两边均有定义时，$\Pi^{\mathrm{ABV}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} = \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$。

我们的动机主要在于 A-包 的显式计算。从几何（即 ABV）观点来看，这非常困难（ p-进一侧的一些例子见 [CFM+22]）。通过内窥理论的方法，可以利用计算机程序 Atlas 计算一些例子。为了获得一般性结果，代数方法似乎更有前景。例如，Adams-Johnson 包可以通过良好范围内的上同调诱导理论显式计算，参见 [VZ84] [KV95]。对于更一般的实群 A-包，还需要考虑弱公平范围内的上同调诱导，参见[MR20] [Tra01], ，其计算可能非常困难。另一方面，对于 p-进辛群或特殊正交群，Moeglin 的构造使我们能够完全理解包结构，参见 [Mœg11] [Xu21] [Ato22] [Ato23] [HLL22]。我们的动机是将 p-进世界中的这些结果平移到实经典群。在本文中，我们关注实酉群，在这里这种平移最为清晰。

1.1. 主要结果。设 n 为正整数，令 G 为 $U(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$，如果 n 为偶数；或者为 $U(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$，如果 n 是奇数。令 $G = GL_n(\mathbb{C})$ 为 G 的朗兰兹对偶群。令 $W_{\mathbb{R}}$ （分别地， $W_{\mathbb{C}}$）为 $\mathbb{R}$ （分别地， $\mathbb{C}$）的韦伊群，即 $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ 和 $W_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{C}^\times, j \rangle$，并满足对任意 $z \in \mathbb{C}^\times$ 都有关系 $j^2 = -1$ 和 $jzj^{-1} = \bar{z}$。存在一个短正合列

$$1 \to W_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) \to 1.$$

G 的 Arthur 参数是一个连续群同态

$$\psi^{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^L G := \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

使其在两边都与到伽罗瓦群 $(\mathbb{C}/\mathbb{R})$的投影相容，且 $\psi^{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times)$ 有界并由半单元素组成。在对 $\mathbb{C}$进行基变换后，我们得到一个表示

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) : W_{\mathbb{C}} \times SL_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G}$$

它是奇偶性为 $(-1)^{n+1}$ 的共轭自对偶表示（参见 [Mok14，引理 2.2.1]）。$BC(\psi^{\mathbb{R}})$的同构类决定了 $\psi^{\mathbb{R}}$，模去 $\widehat{G}$-共轭作用。若 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$ 的不可约成分全都是与 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$具有相同奇偶性的共轭自对偶表示，我们就称 $\psi^{\mathbb{R}}$ 具有良好奇偶性。在良好奇偶性假设下，我们可以写成

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{r} (z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}} \boxtimes S_{m_i}, \quad z \in \mathbb{C}^\times \tag{1.1}$$

对某个 $k_i \in \mathbb{Z}$， $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 而言，满足 $n \equiv k_i + m_i$ 模 2，其中 S_{m_i} 表示 $SL_2(\mathbb{C})$的 m_i维不可约表示。我们将 G 的纯 ***Arthur*** 包 定义为

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G) := \bigsqcup_{(p,q):p+q=n} \Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(U(p,q)).$$

我们希望将它与定义在 H over$\mathbb{Q}_p$ 上的某个分裂经典群的纯 Arthur 包进行比较。为此，我们令 $\delta \in \mathbb{Z}$ 为任意一个满足以下条件的数：对所有 i，都有 $k_i + \delta > m_i$。令

$$N = \sum_{i=1}^{r} (k_i + \delta) m_i.$$

- 如果 δ 为奇数，那么 $N \equiv n$ 模 2。我们取 H （及其朗兹对偶群 H）为

n	H	$\widehat{H}$
odd	$Sp(N-1)$	$SO(N, \mathbb{C})$
even	$SO(N+1)$	$Sp(N, \mathbb{C})$

- 如果 δ 为偶数，那么 N 为偶数。我们取 H 为

n	H	$\widehat{H}$
odd	$SO(N+1)$	$Sp(N, \mathbb{C})$
even	$O(N)$	$O(N, \mathbb{C})$

（注意，仅在第 2.2 小节 2.3 中，我们将用 p表示分裂的 $SO(N)$-进特殊偶正交群 $SO(N)$，并用 H表示全偶正交群 $O(N)$。）

令 $W_{\mathbb{Q}_p}$ 为 $\mathbb{Q}_p$的韦伊群。由于 H 是分裂的， H 的阿瑟参数等价于一个连续群同态

$$\psi^{\mathbb{Q}_p} : W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to \widehat{H},$$

使得 $\psi^{\mathbb{Q}_p}(W_{\mathbb{Q}_p})$ 有界，且由单位连通分支$\widehat{H}^0$中的半单元素组成。将其与 $\widehat{H}$的标准表示 std$_{\widehat{H}}$ 复合，可得一个表示

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p} : W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to GL_N(\mathbb{C}),$$

其为自对偶的正交型（奇偶性 $+1$）或辛型（奇偶性 -1），具体取决于 $\widehat{H}$的类型。std $_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的同构类在 $\widehat{H}$-共轭作用下确定 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$。如果 std $_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的不可约成分全都是与 std $+1$ 具有相同

奇偶性的自对偶表示，我们就称 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 具有良奇偶性。本文中，我们始终假设 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 在 $W_{\mathbb{Q}_p}$上平凡。于是，在良好奇偶性假设下，我们可以写成

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i=1}^{r'} 1_{W_{\mathbb{Q}_p}} \boxtimes S_{a_i} \boxtimes S_{b_i} \tag{1.2}$$

其中，当 H 为正交群时，$a_i + b_i$ 为偶数；当 H 为辛群时，$a_i + b_i$ 为奇数。我们将 纯 *Arthur* 包定义为

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H) := \begin{cases} \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H) & \text{if } H \text{ is symplectic,} \\ \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H) \sqcup \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H') & \text{if } H \text{ is orthogonal.} \end{cases}$$

这里，H' 是由某个判别式为一的二次型定义的 H 的非分裂内形式。为了与 **(1.1)** 中的 $\psi^{\mathbb{R}}$ 进行比较，我们取 $r = r'$、$a_i = k_i + \delta$ 和 $b_i = m_i$。注意，条件 $k_i + \delta > m_i$ 蕴含对于所有 i，$a_i > b_i$。

为了描述 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 与 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$ 之间的关系，我们先关联两个较大的集合，即分别与 $\psi^{\mathbb{R}}$ 和 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征相同的不可约容许表示的同构类集合。$\psi^{\mathbb{R}}$ 的无穷小特征由 $\lambda^{\mathbb{R}} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ 表示，满足

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \{-\frac{m_i - 1}{2} + \frac{k_i}{2}, \cdots, \frac{m_i - 1}{2} + \frac{k_i}{2}\}.$$

作为多重集。在条件 $k_i + \delta > m_i$ 下，对于所有 i，我们有 $\lambda_i > (1 - \delta)/2$。良好奇偶性假设蕴含 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 上的良好奇偶性假设，即当 n 为奇数时 $\lambda_i \in \mathbb{Z}$，当 n 为偶数时 $\lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$。用 λ 表示，我们有

$$N = \sum_{i=1}^{n} (2\lambda_i + \delta).$$

将 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征记为 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$。令 $\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$（分别为 $\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$）表示 G（分别为 H）的朗兰兹参数中无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{R}}$（分别为 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$）的 $\widehat{G}$（分别为 $\widehat{H}$）-共轭类的集合。我们定义一个单射

$$\iota : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \to \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$$

如下。对于任意 $\phi^{\mathbb{R}} \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，它可由其到 $\mathbb{C}$ 的基变换刻画；该基变换是 $W_{\mathbb{C}}$ 的奇偶性为 $(-1)^{n+1}$ 的共轭自对偶表示：

$$BC(\phi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{n} (z/\bar{z})^{t_i} (z\bar{z})^{s_i}, \quad z \in \mathbb{C}^{\times} \tag{1.3}$$

其中 $t_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$、$s_i \in \mathbb{C}$ 满足

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \{t_1 + s_1, \cdots, t_n + s_n\}$$

作为多重集。注意，若 $(z/\bar{z})^t (z\bar{z})^s$ 出现在 **(1.3)** 中，则其共轭对偶 $(z/\bar{z})^t (z\bar{z})^{-s}$ 也会出现。因此 $s_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 和 $-t_i > (1 - \delta)/2$。类似地，任何 $\phi^{\mathbb{Q}_p} \in \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 都可以通过与标准 $\hat{\imath}$ 的复合来刻画，而 $\hat{\imath}$ 是 $W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C})$ 的一个表示。我们令 $\iota(\phi^{\mathbb{R}}) = \phi^{\mathbb{Q}_p}$，其中

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \phi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i=1}^{n} |\cdot|^{s_i}_{W_{\mathbb{Q}_p}} \boxtimes S_{2t_i + \delta}.$$

映射 ι 可以扩展为完备朗兰兹参数集合之间的映射。完备朗兰兹参数由一对对象组成：一个朗兰兹参数，以及其中心化子的分支群的不可约特征标。设 $S_{\phi^{\mathbb{R}}} = Z_{\widehat{G}}(\phi^{\mathbb{R}})$ 和 $S_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} = Z_{\widehat{H}}(\phi^{\mathbb{Q}_p})$ 为朗兰兹参数的中心化子。当 H 为辛群时，我们也考虑 $S^{+}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} = Z_{O(N,\ \mathbb{C})}(\phi^{\mathbb{Q}_p})$。为了写出

这些中心化子群，我们将 $BC(\phi^{\mathbb{R}})$ 和 $\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \phi^{\mathbb{Q}_p}$ 中的同构不可约分量归为一组，如下所示

$$BC(\phi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i \in K} \left((z/\bar{z})^{t_i} (z\bar{z})^{s_i} \right)^{\oplus l_i}$$

and

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \phi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i \in K} \left(|\cdot|_{W_{\mathbb{Q}_p}}^{s_i} \boxtimes S_{2t_i+\delta} \right)^{\oplus l_i}$$

其中， K 是不同不可约分量的指标集，而 l_i表示重数。由于 $BC(\phi^{\mathbb{R}})$是奇偶性为 $(-1)^{n+1}$的共轭自对偶表示，我们可以将其分解为

$$K = I^+ \sqcup I^- \sqcup J \sqcup J^\vee \tag{1.4}$$

其中， I^+ （分别为 I^-）标记与 $BC(\phi^{\mathbb{R}})$ 奇偶性相同（分别相反）的共轭自对偶不可约分量，而 J 标记一组非共轭自对偶不可约分量，其共轭对偶由 $J^\vee$标记。容易验证，关于奇偶性， $\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 也有相同的分解。在对 $\lambda^{\mathbb{R}}$作出良好奇偶性假设后，我们有 $I^- = \varnothing$,

$$I^+ = \{ i \in K \mid s_i = 0 \}$$

并且我们可以选择

$$J = \{ i \in K \mid s_i > 0 \}.$$

于是，如 [Mok14, （2.4.13）],

$$S_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong \prod_{i \in I^+} O(l_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J} GL(l_j).$$

在 p-进一侧，我们可以得到类似的结果（参见 [Art13, （1.4.8）]）：

- 当 H 是正交的,

$$S_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} \cong \prod_{i \in I^+} O(l_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J} GL(l_j).$$

- 当 H 是辛的,

$$S_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} \cong (\prod_{i \in I^+} O(l_i, \mathbb{C}))^+ \times \prod_{j \in J} GL(l_j),$$

其中 $(\cdot)^+$ 表示我们取满足以下条件的 $(g_i)_{i \in I^+}$

$$\prod_{i \in I^+} \det(g_i)^{2t_i+\delta} = 1$$

and

$$S^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} \cong \prod_{i \in I^+} O(l_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J} GL(l_j)$$

由于这些同构在中心化子群的内自同构意义下唯一，因此当 H 为正交时，我们得到一个同构 $S_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong S_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ （当 H 为辛时，则得到 $S_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong S^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$），且该同构在内自同构意义下唯一。令 $A_{\phi^{\mathbb{R}}} = \pi_0(S_{\phi^{\mathbb{R}}})$ 和 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} = \pi_0(S_{\phi^{\mathbb{Q}_p}})$, 二者均为阿贝尔群。当 H 为正交时，我们得到一个典范同构 $A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$。当 H 为辛时，令 $A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} = \pi_0(S^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}})$ （亦为阿贝尔群），并得到一个典范同构 $A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$。注意 $A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} \cong A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}} \times Z(O(N, \mathbb{C}))$。在这两种情况下，都存在一个特征的典范映射 $\sim A_{\phi^{\mathbb{R}}} \to A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$，从而可以将 ι 扩展为完备朗兰兹参数之间的映射。根据局部朗兰兹对应（参见第1.3小节），这个扩展后的映射在具有固定无穷小特征的不可约表示同构类之间诱导出一个映射

$$\tilde{\iota} : \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \to \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H),$$

其中

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) := \bigsqcup_{(p,q):p+q=n} \Pi(U(p,q))_{\lambda^{\mathbb{R}}}$$

and

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) := \begin{cases} \Pi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \text{if } H \text{ is symplectic,} \\ \Pi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \bigsqcup \Pi(H')_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \text{if } H \text{ is orthogonal.} \end{cases}$$

当 H 为正交时， $\tilde{\iota}$ 是单射。当 H 为辛时， $\tilde{\iota}$ 在商上诱导出一个单射，将 $\Pi(U(p,\ q))$ 与 $\Pi(U(q,\ p))$ 对应起来。注意， $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}^{pure}(G)$ 和 $\Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}^{pure}(H)$ 分别是 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}},\ G)$ 和 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p},\ H)$ 的子集。我们的第一个主要定理如下:

定理 1.5。 当 H 为正交时， $\tilde{\iota}$ 限制为一个双射 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{pure}}(G) \xrightarrow{\simeq} \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{pure}}(H)$。当$H$ 为辛时， $\tilde{\iota}$ 限制为一个双射

$$\bigsqcup_{(p,q):p+q=n,\, p\equiv\frac{n-1}{2} \bmod 2} \Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(U(p,q)) \xrightarrow{\simeq} \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{pure}}(H).$$

该定理的一个特殊情形曾在 [DHXZ25, 猜想 1.2.1] 中被猜想。在端oscopy理论中，阿瑟包也配备了映射

$$\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{pure}}(G) \xrightarrow{\epsilon^{\mathbb{R}}} \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{R}}}) \tag{1.6}$$

and

$$\Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{pure}}(H) \xrightarrow{\epsilon^{\mathbb{Q}_p}} \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}), \tag{1.7}$$

其中 $A_{\psi^{\mathbb{R}}} = \pi_0(Z_{\widehat{G}}(\psi^{\mathbb{R}}))$ 和 $A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} = \pi_0(Z_{\widehat{H}}(\psi^{\mathbb{Q}_p}))$ （参见 [Art13] [Mœg09][Mœg11] [MR18] Mok14] [MR19]）。这里的两个分支群可以像朗兰兹参数的情形那样建立联系。令 $S_{\psi^{\mathbb{R}}} = Z_{\widehat{G}}(\psi^{\mathbb{R}})$ 和 $S_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} = Z_{\widehat{H}}(\psi^{\mathbb{Q}_p})$。当 H 为辛时，还考虑 $S_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}^{+} = Z_{O(N,\ \mathbb{C})}(\psi^{\mathbb{Q}_p})$。将 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$ 和 $\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p}$ 中同构的不可约分量分组，得到

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i\in K} \left((z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}} \boxtimes S_{m_i} \right)^{\oplus l_i}$$

and

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i\in K} \left(1_{W_{\mathbb{Q}_p}} \boxtimes S_{a_i} \boxtimes S_{b_i} \right)^{\oplus l_i}.$$

不同不可约分量的指标集 K 可按照奇偶性分解，如（1.4）所示。根据关于 $\psi^{\mathbb{R}}$的良好奇偶性假设，我们有 $K = I^{+}$，对于 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$也同样如此。因此我们有

$$S_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong \prod_{i\in I^{+}} O(l_i, \mathbb{C}) \tag{1.8}$$

（参见 [Mok14, （2.4.13）]）。在 p-进侧，我们有（参见 [Art13, （1.4.8）]）:

- 当 H 为正交时,
$$S_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} \cong \prod_{i\in I^{+}} O(l_i, \mathbb{C}).$$
- 当 H 为辛时,
$$S_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} \cong (\prod_{i\in I^{+}} O(l_i, \mathbb{C}))^{+}$$
其中 $(\cdot)^{+}$ 表示我们取满足以下条件的 $(g_i)_{i\in I^{+}}$
$$\prod_{i\in I^{+}} \det(g_i)^{a_i b_i} = 1$$

并且我们还有

$$S^+_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} \cong \prod_{i\in I^+} O(l_i,\mathbb{C}).$$

同样，这些同构在中心化子群的内自同构意义下唯一；当 H 为正交群时，我们有同构 $S_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong S_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$ 和 $A_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$（当 H 为辛群时，则有同构 $S_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong S^+_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$ 和 $A_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong A^+_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$），且这些同构在内自同构意义下唯一。注意，$A^+_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} \cong A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} \times Z(O(N,\ \mathbb{C}))$。无论哪种情况，我们都有有限维表示的投影$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{R}}}) \to \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}})$ 以及特征 $A_{\psi^{\mathbb{R}}} \to A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$。

定理 1.9。下图交换

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G) & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H) \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon^{\mathbb{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon^{\mathbb{Q}_p}} \\ \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{R}}}) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}). \end{array}$$

注1.10。在本定理的情形下，Moeglin [Mœg11]（分别地，Moeglin-Renard [MR19]）已证明，$\epsilon^{\mathbb{Q}_p}$（分别地，$\epsilon^{\mathbb{R}}$）的像属于 $\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$）（分别地，$\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{R}}}$））。

对于 G的一个一般阿瑟参数 $\psi^{\mathbb{R}}$，我们有

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i\in K} \left(\chi_i \boxtimes S_{m_i}\right)^{\oplus l_i}$$

其中每个 χ_i 都是 $\mathbb{C}^\times$的一个特征。若按 (1.4) 中的奇偶性将 K 分解，并令 $\psi^{\mathbb{R}}_{good}$ 为由下式给出的较小酉群 G_- 的一个 A-参数

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}_{good}) = \bigoplus_{i\in I^+} \left(\chi_i \boxtimes S_{m_i}\right)^{\oplus l_i},$$

则 $A_{\psi^{\mathbb{R}}} \cong A_{\psi^{\mathbb{R}}_{good}}$（参见 (1.8)），且存在一个双射

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}_{good}}(G_-) \xrightarrow{\simeq} \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G), \quad \pi_- \mapsto \pi$$

其中 π_-是 $U(p-|J|,\ q-|J|)$的一个不可约表示，且

$$\pi := \mathrm{Ind}_P^{U(p,q)} \left(\boxtimes_{i\in J} \left(\chi_i \circ \det_{GL_{m_i}}\right)\right) \boxtimes \pi_-$$

对于一个抛物子群 P，其 Levi 因子同构于 $\prod_{i\in J} GL_{m_i}(\mathbb{C}) \times U(p-|J|,\ q-|J|)$。此外，以下交换图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}_{good}}(G) & \xrightarrow{\simeq} & \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon^{\mathbb{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon^{\mathbb{R}}} \\ \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{R}}_{good}}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}(A_{\psi^{\mathbb{R}}}). \end{array}$$

因此，总可以将对 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 的研究化归到良奇偶情形（参见 [MR20，第 4 节.2]）。尽管如此，将定理 1.5 和定理 1.9 推广到良奇偶情形之外，仍然是一个有趣的问题。事实上，本文也讨论坏奇偶性情形，可将其视为另一极端。

事实上，在证明过程中，我们得到了 $\tilde{\iota}$ 在 G 与H 的表示之间的一个映射，该映射适用于任意不一定来自 A-参数的实整数无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$，并且具有值得独立关注的显著性质。为陈述这些性质，设 $\lambda^{\mathbb{R}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为整的，且满足 $\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \neq \varnothing$。那么 $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$。此外，

$\lambda_i \in \mathbb{Z}$ 若 n 为奇数，且$\lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 若 n 为偶数（参见引理 2.7）。若对所有 i均有.....，则称 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性。

$$\begin{cases} \lambda_i \in \mathbb{Z}, & n \text{ is odd}, \\ \lambda_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}, & n \text{ is even}. \end{cases}$$

否则，我们称其具有坏奇偶性。取 $\delta \in \mathbb{Z}$ 使得对所有 i，都有 $\lambda_i > (1-\delta)/2$，并令

$$N = \sum_{i=1}^{n} (2\lambda_i + \delta).$$

在良奇偶情形下，分裂的 p-进群 H 可按之前的方式定义。在坏奇偶性情形下， n 和 N 均为偶数，我们令

$$H = \begin{cases} SO(N+1) & \delta \text{ is odd} \\ O(N) & \delta \text{ is even} \end{cases}$$

在 $\mathbb{Q}_p$ 上分裂。在良奇偶性和坏奇偶性两种情形下，我们均取 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 为 H 的朗兰兹参数 $\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征，使得

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \phi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i=1}^{n} |\cdot|_{W_{\mathbb{Q}_p}}^{\frac{\lambda_i - \lambda_{n+1-i}}{2}} \boxtimes S_{\lambda_i + \lambda_{n+1-i} + \delta}$$

我们可以定义

$$\iota : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \to \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$$

and

$$\tilde{\iota} : \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \to \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$$

如前所述。以下结果由推论 2.38 和定理 2.41 得出。

定理 1.11。*(1)* 如果我们通过线性性将 $\tilde{\iota}$ 扩展到虚表示，那么 $\tilde{\iota}$ 保持标准表示不变。*(2)* 对于 $\phi^{\mathbb{R}} \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，令 $\phi^{\mathbb{Q}_p} = \iota(\phi^{\mathbb{R}})$。当 H 为正交时， $\tilde{\iota}$ 诱导一个双射$\Pi^{\mathrm{ABV},}_{\phi^{\mathbb{R}}}{}^{\mathrm{pure}}(G) \to \Pi^{\mathrm{ABV},}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\mathrm{pure}}(H)$。当 H 为辛时， $\tilde{\iota}$ 诱导一个双射

$$\bigsqcup_{(p,q):p+q=n,\, p\equiv\frac{n-1}{2} \bmod 2} \Pi^{\mathrm{ABV}}_{\phi^{\mathbb{R}}}(U(p,q)) \xrightarrow{\simeq} \Pi^{\mathrm{ABV,pure}}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}(H).$$

当$\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有坏奇偶性时，我们也可以得到定理 1.5 和定理 1.9 的类似结果。在这种情况下，$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}},\ G) = \Pi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$（分别为 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p},\ H) = \Pi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$）与 $\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$（分别为$\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$）之间存在双射。对于具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$的 Arthur 参数 $\psi^{\mathbb{R}}$，其基变换具有如下形式

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{r} (z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}} \boxtimes S_{m_i}$$

其中 $k_i \in \mathbb{Z}, m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且 $k_i + m_i$ 为奇数。我们可以完全按照良奇偶情形，为 $\psi^{\mathbb{Q}}$附加一个 p-进 A-参数 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$。设 $\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}$（分别为 $\phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$）是 $\psi^{\mathbb{R}}$（分别为 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$）相应的朗兰兹参数（见 (2.5) (2.17)）。那么 $\phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} = \iota(\phi_{\psi^{\mathbb{R}}})$ 和 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$（分别为 $\Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$）由一个由 $\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}$（分别为 $\phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$）参数化的表示组成（参见 [MR20] [Mœg09]）。因此 $\tilde{\iota}$诱导一个双射

$$\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(G) \xrightarrow{\simeq} \Pi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H).$$

最后， $A_{\psi^{\mathbb{R}}} = A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}} = 1$ 以及 $\epsilon^{\mathbb{R}}$ 和 $\epsilon^{\mathbb{Q}_p}$ 都映射到平凡表示。因此，这里的定理 1.9 的类似结论是显然的。

1.2. 证明策略。 让我们回到定理 1.5 和定理 1.9，此时 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性。当 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 正则时，$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$是一个纯 Adams-Johnson 包，它已根据完备朗兰兹参数计算得到（见附录 B）。相应的 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$满足离散对角限制条件，在这种情况下，Moeglin 给出了 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$的显式公式，同样是根据完备朗兰兹参数表示的。由于 $\tilde{\iota}$ 是显式定义的，因此可以直接验证定理 1.5 和定理 1.9（见第3.1小节）。当 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 奇异时，可以通过应用平移函子从正则情形得到 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$，而 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$ 则可以通过取雅克限制从离散对角限制的情形得到（见第3.2小节）。因此，只需建立平移与雅克限制之间的比较结果即可。我们通过比较实群与 p-进群的朗兰兹参数空间的几何来实现这一点（见第 4 节）。

G 的朗兰兹参数空间（即 ABV 空间），其无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{R}}$，是 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ G的一个偏旗簇 $X_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，并带有 K 的左作用：$=G^{\sigma}$，其中$\frown G$上的某个对合为 σ。存在一个双射

$$\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \xrightarrow{\simeq} \widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}.$$

H 的朗兰兹参数空间（即 Vogan 簇），其无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$，是 H的李代数中的一个仿射空间 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ $\widehat{\ }$，并带有 H中一个约化$\widehat{\ }$子群 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 的伴随作用。存在一个双射

$$\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\simeq} H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}.$$

在此双射下，ι的像对应于 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$的一个 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-稳定开子集$V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$。我们将在第2节证明，$\iota$ 可以提升为商叠之间的对应，如下所示

$$[\widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}] \xleftarrow{\theta} [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xrightarrow{\iota} [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}],$$

其中，我们仍用 ι表示开子叠的自然嵌入；若 H是正交的，则 θ 是同构；若 H 是辛的，则 θ 是有限二对一态射。上述定理 1.11 基本上可由这一观察得出。

令 $K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$（分别地，$K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}、H)$）为由 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$（分别地，$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}、H)$）生成的自由 $\mathbb{Z}$-模。令 $K\mathrm{Per}(\widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}})$（分别地，$K\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}})$）为等变反常层的格罗滕迪克群。通过分别针对纯内形式 G 和 H 的局部朗兹对应（参见第1.3小节），可以定义完美配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \times K\mathrm{Per}(\widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}) \to \mathbb{Z} \tag{1.12}$$

and

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) \times K\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \to \mathbb{Z}. \tag{1.13}$$

考虑映射

$$\mathcal{R} : K\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \to K\mathrm{Per}(\widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}), \tag{1.14}$$

定义为 $\mathcal{R} := R\theta_* \circ \iota^*$。相对于上述定义的配对，它具有一个伴随映射

$$\mathcal{R}^* : K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \to K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H). \tag{1.15}$$

我们将证明，$\mathcal{R}^*$ 在不可约表示上与 $\tilde{\iota}$ 相等，但可能相差某些符号（参见命题 2.47）。最后，我们将通过比较平移与 Jacquet限制在这些配对下的转置来比较二者。平移的转置由某些拉回—推前函子给出（参见定理 4.1）。Jacquet限制的转置由 Lusztig 的层诱导给出（参见猜想 4.3）；这将在 [CDX]中得到证明。

通过朗兰兹参数空间的几何来关联实群与 p-进群，这一思想并不新鲜。朝这一方向的早期工作包括 Lusztig-Zelevinsky [Zel85], Ciubotaru- Trapa [CT12], 以及 Barchini-Trapa [BT25]。具体而言，Barchini-Trapa 为每个

经典类型及某些例外类型的约化群 G，构造了一个从附属于 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的 Vogan簇到附属于 $G(\mathbb{R})$ 的 ABV空间的映射。我们的构造方向相反：将一个实群的 ABV空间映射到一个不同类型且秩更大的 p-进群的 Vogan簇中（该映射可能是二对一的）。我们希望在未来的工作中探讨我们的映射与他们的映射之间的关系。

1.3. 关于局部朗兰兹对应的工作假设。 我们的结果依赖于纯内形式 G 和 H 的局部朗兰兹对应的存在性，因为 $\tilde{\iota}$ 的定义以及配对 (1.12)、(1.13) 都依赖于此。对于 G，我们使用 Langlands [Lan89] 和 Shelstad [She79] 的结果。对于 H，我们使用 Arthur [Art13] 和 Moeglin-Renard [MR18]，的结果；这些结果仍依赖于 Atobe-Gan-Ichino-Kaletha-Minguez-Shin [AGI+24] 最近的工作之后，扭曲加权基本引理的有效性。特别地，我们需要假设他们的结果也可推广到全偶正交群（参见猜想 2.21）。在证明过程中，我们还使用 Kazhdan-Lusztig猜想（参见定理 2.4、猜想 2.16、猜想 2.24），该猜想指出，在配对 (1.12)、(1.13) 下，标准表示（分别为不可约表示）与标准层（分别为简单反常层）互为对偶，至多相差一些符号。对于 G，这是 Vogan对偶 [Vog82] 的推论（另见 [ABV92，定理 1.24]）。对于 H，我们先作出以下假设。

假设 第 1 节。 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 由 *Lusztig* 意义下的幺幂表示构成 .

对于非分歧 p-进约化群内形式的幺幂表示，Lusztig[Lus95a] [Lus02a]（在伴随群的情形下）和 Solleveld [Sol23]（一般情形下）也构造了局部朗兰兹对应。此外，他们已证明了与其构造的局部朗兰兹对应相关的配对所满足的 Kazhdan-Lusztig猜想[Lus95b] [Lus02b] [Sol25]。为比较局部朗兰兹对应的不同选择，我们提出另一个假设：

假设 2。 *Lusztig* 和 *Solleveld* 建立的幺幂表示局部朗兰兹对应，与 *Arthur* 和 *Moeglin-Renard* 对 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 建立的对应一致。

当 H 是特殊奇正交群且 p 足够大时，Waldspurger 和 Moeglin 已证明这两个假设 [MW03] [Wal07] [Wal16]。为了理解 G 的纯 Arthur 参数包，我们总可以通过取$\delta \equiv n+1$ 模 2 将问题限制到这一情形。

1.4. 致谢。本研究最初通过使用 Atlas 程序开展大量计算实验而启动。这些实验结果在整个研究过程中给予了我们重要的启发和鼓励。作者谨向 Atlas 的开发者致以谢意。此外，Q.Z. 谨此感谢 Peter Trapa 的有益讨论。

B.X. 获得中国科学技术部资助，项目编号为 2021YFA1000700，并获得国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12571027。T.D. 获得国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12401013，并获得北京市自然科学基金资助，项目编号为 1244042。

2. Geometry

2.1. $U(p$ 的朗朗兹对应，$q)$。

2.1 （实群的朗兰兹对应）。设 G为一个准分裂实群，G 为其带有固定钉扎的（复）朗兰兹对偶群。特别地，我们固定了一个带有 Cartan 子群 $\widehat{B} \supset \widehat{T}$的 Borel 子群。设 $\hat{\mathfrak{g}}$、$\hat{\mathfrak{t}}$ 分别为 $\widehat{G}$、$\widehat{T}$ 的李代数。令 $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 为非平凡元素，并构成 L 群 ${}^L G := \widehat{G} \rtimes \{1, \tau\}$。记$W_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{C}^\times, j \rangle$ 为实 Weil 群。令 $\lambda^{\mathbb{R}} \in \hat{\mathfrak{t}}$ 表示一个整无穷小特征

G 并记 $\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 为具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$的朗兰兹参数 $\phi^{\mathbb{R}}\colon W_{\mathbb{R}} \to {}^L G$的 $\widehat{G}$-共轭类集合。这里，若 $\phi^{\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{C}^\times$ 上的限制为以下形式，则称其具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$：

$$\phi^{\mathbb{R}}(z) = z^{\lambda'}\bar{z}^{\mathrm{Ad}\,\phi^{\mathbb{R}}(j)\cdot\lambda'}$$

对于某个在 $\widehat{G}$ 下与 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 共轭的半单元 $\lambda' \in \widehat{\mathfrak{g}}$。那么，$G$ 的纯内形式的朗兰兹对应是一个双射

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \xrightarrow{\sim} \Xi(\lambda^{\mathbb{R}}, G) := \{(\phi^{\mathbb{R}}, \epsilon) \mid \phi^{\mathbb{R}} \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}},\, \epsilon \in \widehat{A}_{\phi^{\mathbb{R}}}\}$$

（参见 [Vog93，定理 6]）。这里，$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G)$ 是具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 的 G 的纯内形式的不可约容许表示的同构类集合，$A_{\phi^{\mathbb{R}}}$ 是 $\phi^{\mathbb{R}}$ 的中心化子 $Z_{\widehat{G}}(\phi^{\mathbb{R}})$ 的分支群，而 $\widehat{A}_{\phi^{\mathbb{R}}}$ 是其不可约表示的集合。集合 $\Xi(\lambda^{\mathbb{R}}, G)$ 称为无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 的完整朗兰兹参数集合。

Adams-Barbasch-Vogan [ABV92] 将右侧重新表述为不可约反常层的集合。更具体地说，令

$$\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) = \{y \in \widehat{G} \rtimes \tau \subset {}^L G \mid y^2 \in \mathrm{Ad}(\widehat{G})(e^{2\pi i\lambda^{\mathbb{R}}})\}.$$

由于假设 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 是整的，元素 $e^{2\pi i\lambda^{\mathbb{R}}}$ 属于 $\widehat{G}$ 的中心 $Z(\widehat{G})$。因此，$\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) = \{y \in \widehat{G} \rtimes \tau \subset {}^L G \mid y^2 = e^{2\pi i\lambda^{\mathbb{R}}}\}$。令 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) \subset \widehat{G}$ 为稳定经过 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 的典范平坦的抛物子群，并令 $X_{\lambda^{\mathbb{R}}} = \widehat{G}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 为相应的偏旗簇。乘积 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 配备对角 $\widehat{G}$ 作用

$$\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}} := [\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})]$$

称为*ABV*空间。ABV空间上的不可约反常层有一种简洁的参数化，即

$$\mathrm{Irr}\,\mathrm{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})) \cong \left\{(C, \mathcal{V}) \mid \begin{array}{c} C \text{ a } \widehat{G}\text{-orbit on } \mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}, \\ \mathcal{V} \text{ a simple } \widehat{G}\text{-equivariant local system on } C. \end{array}\right\},$$

其中 $(C, \mathcal{V})$ 对应于反常层 $i_{C!*}\mathcal{V}[\dim\, C]$。右侧的一对 $(C, \mathcal{V})$ 在*loc. cit.*中称为完全几何参数

注意，$\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 是有限多个 $\widehat{G}$-轨道的不交并。因此，对 $\widehat{G}$-轨道的任意一组代表元 $y_i \in \mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$，我们有商叠的分解

$$[\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})] = \bigsqcup_i [\widehat{K}_i\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}]$$

其中 $K_i = Z_{\widehat{G}}(y_i)$。特别地，

$$\mathrm{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})) \cong \bigoplus_i \mathrm{Per}(\widehat{K}_i\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}).$$

命题 2.2 ([ABV92，第 5, 6], [章，AdC，命题 7.4])。存在一个双射

$$\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})$$

定义如下。给定 $\phi^{\mathbb{R}} \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，存在唯一的方式将 $\phi^{\mathbb{R}}$ 到$\mathbb{C}^\times$ 的限制写成

$$\phi^{\mathbb{R}}(z) = z^{\lambda'}\bar{z}^{\mathrm{Ad}\,\phi^{\mathbb{R}}(j)\lambda'}$$

对于某个半单元 $\lambda' \in \widehat{\mathfrak{g}}$。令 $y = e^{\pi i\lambda'}\phi^{\mathbb{R}}(j)$，并令 $\widehat{P}(\lambda')$ 为 G 中经过 λ' 的典范平坦的稳定子。那么上述双射将

$$\phi^{\mathbb{R}} \mapsto (y, \widehat{P}(\lambda')).$$

$Z_{\widehat{G}}(\phi^{\mathbb{R}})$ 与 $Z_{\widehat{G}}(y$的约化商之间存在典范同构，$\widehat{P}(\lambda'))$，因此上述双射可提升为

$$\Xi(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}\operatorname{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})).$$

从现在起，我们将用 $\Xi(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$ 同时表示完备朗兰兹参数的集合$(\phi^{\mathbb{R}}、\epsilon)$和完全几何参数的集合 $(C、\mathcal{V})$。

因此，我们得到一个双射

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \xrightarrow{\sim} \Xi(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Irr}\operatorname{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})).$$

Adams-Barbasch-Vogan 将这一双射提升为完美配对，使得可以利用反常层的局部重数计算特征标公式。对于一个参数 $\xi = (C、\mathcal{V}) \in \Xi(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$，我们用 $\pi(\xi) \in \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$ 表示某个纯内形式 G_ξ 的对应不可约表示，并用 $M(\xi)$ 表示以 $\pi(\xi)$为其朗兰兹商的标准表示。此外，我们用 $\mathcal{P}(\xi) = j_{C!*}\mathcal{V}[\dim C]$、$\mu(\xi) = j_{C!}\mathcal{V}[\dim C]$[1] 表示等变导出范畴 $D^b(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}))$ 中的简单对象和标准对象（这些对象实际上属于反常心 $\operatorname{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}))$）。令 $\mathbf{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$ 表示具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$的 G 的纯内形式的容许表示范畴。$\mathbf{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$ 中的简单对象恰好是 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}、G)$。定义一个完美配对

$$\langle -, - \rangle : K\operatorname{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \times KD^b(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.3}$$

by

$$\langle \pi(\xi), \mathcal{P}(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(G_\xi)\delta_{\xi,\xi'},$$

其中，C 是出现在 $\xi = (C$中的$\mathcal{V})$轨道，$e(G_\xi)$ 是 G_ξ ([Kot83]) 的 Kottwitz 符号，而 $\delta_{\xi\text{中的}\xi'}$ 是克罗内克 delta。

定理 2.4 ([ABV92，定理 1.24])。在上述配对下，有

$$\langle M(\xi), \mu(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(G_\xi)\delta_{\xi,\xi'}.$$

对于任意 $\mathcal{P} \in \operatorname{Per}(\widehat{G}\backslash(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}))$，其特征循环是一个形式线性组合

$$CC(\mathcal{P}) = \sum_C m_C(\mathcal{P})[\overline{T^*_C(\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}})}], \quad m_C(\mathcal{P}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

其中求和遍历 $\widehat{G}$-轨道 C，它们位于 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times X_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ [KS，第 9 节4] 或 [HTT，定义 2.22]中。对于任意 $\phi \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，令 C_ϕ 为根据命题 2.2 所对应的轨道。于是，与 ϕ 相联系的 ABV-包定义为

$$\Pi_\phi^{\mathrm{ABV,pure}}(G) := \{\pi(\xi) \mid \xi \in \Xi(\lambda^{\mathbb{R}}, G), m_{C_\phi}(\mathcal{P}(\xi)) \neq 0\}.$$

对于 G的任意 A-参数 $\psi^{\mathbb{R}}$，可以通过下式关联一个 L-参数

$$\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}(w) := \psi^{\mathbb{R}}\left(w, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & \\ & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right), \quad w \in W_{\mathbb{R}} \tag{2.5}$$

将 $\psi^{\mathbb{R}}$ 的无穷小特征定义为 $\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}$的无穷小特征。记 $\Psi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 为具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$的 A-参数的 $\widehat{G}$-共轭类集合。于是规则 $\psi^{\mathbb{R}} \mapsto \phi_{\psi^{\mathbb{R}}}$给出一个包含 $\Psi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \hookrightarrow \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$。对于 $\psi \in \Psi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，我们令

$$\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{ABV,pure}}(G) := \Pi_{\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}}^{\mathrm{ABV,pure}}(G).$$

现在我们专门讨论酉群 $U(p, q)$。

[1]我们对 $\mu(\xi)$ 的定义与 [ABV92] 中的定义相差一个次数为 $\dim C$ 的上同调移位。

2.6（ $U(p,q)$ 的情形）.设 n 为正整数，若 n 为偶数，则 G 为 $U(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$；若 n 为奇数，则 G 为 $U(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2})$。设

$$J=\begin{pmatrix} & & -1\\ & \iddots & \\ (-1)^n & & \end{pmatrix}.$$

则 $\widehat{G}=GL_n(\mathbb{C})$ 和 $\tau\quad\widehat{G}$ 由 $\tau(g)=J^tg^{-1}J^{-1}$ 给出。令 $\widehat{B}$（分别为 $\widehat{T}$）表示上三角（分别为对角）矩阵子群。令 $W^{\widehat{G}}:=W(\widehat{G},\widehat{T})$ 为 $\widehat{G}$ 的 Weyl 群。令 $\lambda^{\mathbb{R}}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n=\hat{\mathfrak{t}}$ 为 G 的主导积分无穷小特征标，即对所有 $1\leqslant i\leqslant n-1$，$\lambda_i-\lambda_{i+1}\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 成立。则 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 是由单根集合 $\{\alpha_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n-1,\ \lambda_i=\lambda_{i+1}\}$ 定义的 $\widehat{G}$ 的标准抛物子群。

引理 2.7. *(1)* $U(p$ 的纯内形式的同构类由 $U(p'、q')$ 代表，其中 $p'+q'=n$ 且 $1\leqslant p'\leqslant n$（此处及下文中，$U(p'、q')$ 与 $U(q'、p')$ 表示两个不同的纯内形式，当且仅当 $p'\neq q'$）。*(2)* 若 n 为奇数，则 $\lambda^{\mathbb{R}}\in\mathbb{Z}^n$、$\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})=\mathrm{Ad}(\widehat{G})\cdot J^{-1}\tau$，且 *ABV* 空间同构于 $[O(n、\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$。*(3)* 若 n 为偶数，则 $\lambda^{\mathbb{R}}\in\mathbb{Z}^n$ 或 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$：• ；若 $\lambda^{\mathbb{R}}\in\mathbb{Z}^n$，则 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})=\mathrm{Ad}(\widehat{G})\cdot\tau$，且 *ABV* 空间同构于 $[Sp(n、\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$；若 $\lambda^{\mathbb{R}}\in(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$，则 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})=\mathrm{Ad}(\widehat{G})\cdot J^{-1}\tau$，且 *ABV* 空间同构于 $[O(n、\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$。

若 $\widehat{K}=O(n,\mathbb{C})$（分别地，$\widehat{K}=Sp(n,\mathbb{C})$），则称 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有**良奇偶性**（分别地，具有**坏奇偶性**）。综上，我们有以下几种情形：

parity of n	$\lambda^{\mathbb{R}}$	ABV space $\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$	
odd	$\mathbb{Z}^n$	$[O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$	good parity
even	$(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$	$[O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$	good parity
even	$\mathbb{Z}^n$	$[Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$	bad parity

证明。对于实群 G，考虑相应的伽罗瓦群 $(\mathbb{C}/\mathbb{R})=\{1,\tau\}\quad G_{\mathbb{C}}$ 作用，并构造半直积 $G_{\mathbb{C}}\rtimes\{1,\tau\}$。$G$ 的纯内形式等价于非单位连通分支 $G_{\mathbb{C}}\rtimes\tau\subset G_{\mathbb{C}}\rtimes\{1,\tau\}$ [中的二阶元素 $g\tau$（Vog93，定义 2.6],），它通过共轭作用在 $G_{\mathbb{C}}$ 上诱导一个对合，其不动点是 $G_{\mathbb{C}}$ 的一个实形式。纯内形式的同构类定义为其 $G_{\mathbb{C}}$-共轭类（注意，它并非由相应的实形式决定）。在 $G=U(p,q)$ 的情形下，作用 $\tau\quad G_{\mathbb{C}}$ 由 $\tau(h)=I_{p,q}{}^t\bar{h}^{-1}I_{p,q}$ 给出，其中 $I_{p,q}=\mathrm{diag}(I_p,-I_q)$。假设 $g\tau$ 的阶为 2，也就是说，$g\in G_{\mathbb{C}}$ 满足 $g\tau(g)=1\in G_{\mathbb{C}}$。由于 $g\tau(g)=\underline{gI_{p,q}{}^t\bar{g}^{-1}}I_{p,q}=(gI_{p,q})\cdot{}^t(gI_{p,q})^{-1}$，我们可知 $gI_{p,q}$ 是 Hermitian 形式。根据 Hermitian 形式分类，存在 $h\in G_{\mathbb{C}}$ 使得 $h(gI_{p,q})^t\bar{h}=I_{p',q'}$，其中 p',q' 分别是 $gI_{p,q}$ 的正、负惯性指数。于是，我们可以用其共轭替换 $g\tau$

$$hg\tau h^{-1}=hg\tau(h)^{-1}\tau=hgI_{p,q}{}^t\bar{h}I_{p,q}\tau=I_{p',q'}I_{p,q}\tau.$$

这表明，G 的纯内形式的同构类可由 $g\tau=I_{p',q'}I_{p,q}\tau$ 表示，其中 $1\leqslant p'\leqslant n$；其相关实形式恰为 $U(p',q')$。

接下来我们讨论第（2）部分和第（3）部分。回忆一下，根据 $\tau(g)=J\,{}^tg^{-1}J^{-1}$，$\tau\quad\widehat{G}$。令 $y=g\tau\in\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$。由于 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 是整的，

$$e^{2\pi i\lambda_1}I_n=e^{2\pi i\lambda^{\mathbb{R}}}=y^2=(g\tau)^2=g\tau(g)=gJ^tg^{-1}J^{-1}. \tag{2.8}$$

这个方程意味着

$$e^{-2\pi i\lambda_1}I_n=\tau(e^{2\pi i\lambda_1}I_n)=\tau(g)g=g\tau(g)=e^{2\pi i\lambda_1}I_n$$

这迫使 $e^{2\pi i\lambda_1}=\pm 1$。因此， $\lambda_1\in\mathbb{Z}$ 或 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$。于是，$\lambda^{\mathbb{R}}\in\mathbb{Z}^n$ 或 $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$。

假设 $\lambda^{\mathbb{R}}\in\mathbb{Z}^n$。方程（2.8）变为 $I_n=gJ{}^tg^{-1}J^{-1}$。如果 n 是奇数，那么 $J^{-1}={}^tJ^{-1}$，该方程可写为 $I_n=(gJ)\,{}^t(gJ)^{-1}$，因此 gJ 是对称的。$\widehat{G}$ 对 $g\tau$ 的共轭作用为

$$\mathrm{Ad}(h)\cdot g\tau=hg\tau h^{-1}=hg\tau(h^{-1})\tau=(hgJ\,{}^th)J^{-1}\tau. \tag{2.9}$$

选取 h 使得 $hgJ\,{}^th=I_n$，我们看到 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 等于 $J^{-1}\tau$ 的 $\widehat{G}$-轨道。伴随作用 $\mathrm{Ad}(J^{-1}\tau)$ 是转置逆，因此我们有 $\widehat{K}=Z_{\widehat{G}}(J^{-1}\tau)=O(n,\ \mathbb{C})$。若 n 为偶数，则 $J^{-1}=-{}^tJ^{-1}$，且方程（2.8）变为 $-I_n=(gJ)\,{}^t(gJ)^{-1}$，从而 gJ 是反对称的。这次我们可以在（2.9）中选取 h 使得 $hgJ\,{}^th=J$，并且看到 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 等于 $JJ^{-1}\tau=\tau$ 的 $\widehat{G}$-轨道，且 $\widehat{K}=Z_{\widehat{G}}(\tau)=Sp(n,\ \mathbb{C})$。

现在假设 $\lambda^{\mathbb{R}}\in(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$。那么方程（2.8）变为 $I_n=-gJ{}^tg^{-1}J^{-1}$。如果 n 是奇数，则这迫使 gJ 为斜对称的。这不可能，因为不存在奇数阶的可逆斜对称矩阵。如果 n 是偶数，那么 gJ 是对称的，而 $\mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 等于 $J^{-1}\tau$ 的 $\widehat{G}$ 轨道，其中 $\widehat{K}=O(n,\ \mathbb{C})$。□

为比较实参数空间与 p-进参数空间，我们希望对 ABV空间作另一种描述。$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}$（分别地，$\mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}$）表示由可逆的 n 阶 n 阶对称（分别地，斜对称）矩阵组成的集合，并配备按合同作用的 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 作用。

引理 2.10。存在一个代数栈同构

$$[O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]\xrightarrow{\sim}[\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})],\quad g\mapsto {}^tgg.$$

如果 n 是偶数，则存在一个同构

$$[Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]\xrightarrow{\sim}[\mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})],\quad g\mapsto {}^tgJ^{-1}g.$$

证明。由于每个可逆对称矩阵都与单位矩阵合同，合同作用 $GL_n(\mathbb{C})$ 对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}$ 是传递的，而单位矩阵的稳定子是正交群 $O(n,\ \mathbb{C})$。因此，我们得到簇的同构 $O(n,\ \mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}$对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}$, $g\mapsto {}^tgg$ ，其中左侧的右乘作用 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 变为右侧的合同作用。第一个断言由此得证。第二个断言类似。□

引理 2.11。令 $\phi^{\mathbb{R}}\in\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$，并通过 $\widehat{G}$-共轭作用，假设

$$\phi^{\mathbb{R}}(z)=z^{\lambda^{\mathbb{R}}}\bar{z}^{\mu},\quad z\in\mathbb{C}^{\times}$$

其中 $\mu\in\hat{}\mathfrak{t}$ 且 $\phi^{\mathbb{R}}(j)$ 正规化 $\widehat{T}$。

(1) 假设 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性。双射链

$$\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}\xrightarrow{\sim}O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$$

将

$$\phi^{\mathbb{R}}\mapsto h\mapsto\dot{s}$$

其中 $s\in W^G$ 是任意一个对合，使得 $s\lambda^{\mathbb{R}}=-\mu$, $\dot{s}\in$ 对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}$ 是相应的置换矩阵，而 h 是任意一个满足 ${}^thh=\dot{s}$的矩阵。

(2) 假设 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有坏奇偶性。双射链

$$\Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}\xrightarrow{\sim}Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$$

将.....
映射到

$$\phi^{\mathbb{R}}\mapsto h\mapsto\dot{s}$$

其中，$s\in W^G$ 是任意一个无不动点对合，使得 $s\lambda^{\mathbb{R}}=-\mu$, $\dot{s}$ 是表示 s 的任意一个带符号斜对称置换矩阵，而 h 是满足 ${}^thJ^{-1}h=\dot{s}$ 的任意矩阵。

证明。根据命题 2.2，$\widehat{G}$ 对 $\phi^{\mathbb{R}}$ 的轨道对应于 $\widehat{G}$ 对有序对 $(y,\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))\in\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 的轨道，其中 $y=e^{\pi i\lambda^{\mathbb{R}}}\phi^{\mathbb{R}}(j)$。令 $y=gJ^{-1}\tau$表示某个元素 $g\in\widehat{G}$。那么，g 归一化 $\widehat{T}$，并表示某个元素 $s\in W^{\widehat{G}}$。再次根据命题 2.2，我们有 $\mathrm{Ad}(\phi^{\mathbb{R}}(j))\lambda^{\mathbb{R}}=\mu$。由于 $e^{\pi i\lambda^{\mathbb{R}}}$ 中心化 $\widehat{\mathfrak{t}}$，我们有 $\mathrm{Ad}(y)\lambda^{\mathbb{R}}=\mu$。因此

$$\mu=\mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{Ad}(J^{-1}\tau)\lambda^{\mathbb{R}}=-\,\mathrm{Ad}(g)\lambda^{\mathbb{R}}$$

或者等价地，$\mathrm{Ad}(g^{-1})\mu=-\lambda^{\mathbb{R}}$。因此 $s^{-1}\mu=\mathrm{Ad}(g^{-1})\mu=-\lambda^{\mathbb{R}}$。

假设 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性。由引理 2.7，存在一个元素 $h\in GL_n(\mathbb{C})$，使得 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=J^{-1}\tau$。因此，$(y,\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$的轨道与 $(J^{-1}\tau,h\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$的轨道相同，而 $\phi^{\mathbb{R}}$ 在 $O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 中的像等于 h的陪集。最后，h 的陪集在 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 中的像为 ${}^thh$。由于 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=(hg\,{}^th)J^{-1}\tau$，条件 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=J^{-1}\tau$蕴含$hg\,{}^th=I_n$，从而得到 ${}^thh=g^{-1}$。因此，双射链将 $\phi^{\mathbb{R}}$ 映射为对称矩阵 g^{-1}。由此可知，$s^2=1$ 与 g^{-1}，$\dot{s}$ 是 $\widehat{T}$-合同的，其中 $\dot{s}$ 是表示 s 的对称置换矩阵。还需证明，对于满足$s\lambda^{\mathbb{R}}=s'\lambda^{\mathbb{R}}=-\mu$的对合 $s,s'\in W^G$，元素 $\dot{s},\dot{s}'$ 是 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$-合同的。根据引理 C.2 中的论证，我们还可以假设 $s,s'\in\mathfrak{I}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$（参见 (C.1)）。由于 $s^{-1}s'\in W^{M(\lambda^{\mathbb{R}})}$（莱维子群 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$的 Weyl 群，其中$M(\lambda^{\mathbb{R}})$），由引理 C.4 可知，$s,s'$是 $W^{M(\lambda^{\mathbb{R}})}$-共轭的，因此 $\dot{s}$和$\dot{s}'$ 可由某个提升元素 $w\in W^{M(\lambda^{\mathbb{R}})}$的预置换矩阵 $\dot{w}$ 共轭。注意，对于置换矩阵 $\dot{w}$，有 $\dot{w}^{-1}={}^t\dot{w}$。因此，$\dot{s}$ 和 $\dot{s}'$ 在 $\dot{w}$下合同。特别地，它们是 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$-合同的。

假设 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有坏奇偶性。根据引理 2.7，存在一个元素 $h\in GL_n(\mathbb{C})$，使得 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=\tau$。因此，$(y,\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$ 的轨道与 $(\tau,\ h\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$的轨道相同。因此，$\phi^{\mathbb{R}}$ 在 $Sp(n,\ \mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 中的像等于 h的陪集，而 h 的陪集在 $\mathrm{Skem}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$ 中的像为 ${}^thJ^{-1}h$。由于 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=(hg\,{}^th)J^{-1}\tau$，条件 $\mathrm{Ad}(h)\cdot y=\tau$意味着 $hg\,{}^th=J$，因此 ${}^thJ^{-1}h=g^{-1}$。所以，这条双射链将 $\phi^{\mathbb{R}}$映射到斜对称矩阵 g^{-1}。由此可知，$s^2=1$ 与 g^{-1}、$\dot{s}$ 是$\widehat{T}$-合同的，其中 $\dot{s}$ 是表示 s的带符号反对称置换矩阵。还需证明，对于满足 $s\lambda^{\mathbb{R}}=s'\lambda^{\mathbb{R}}=-\mu$的无不动点对合 s、$s'\in W^{\widehat{G}}$，$\dot{s}$、$\dot{s}'$是 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$-合同的。由于 $s^{-1}s'\in W^{M(\lambda^{\mathbb{R}})}$，引理 C.9 表明 s、s'是 $W^{M(\lambda^{\mathbb{R}})}$-共轭的。因此，$\dot{s}$、$\dot{s}'$是$\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$-合同的。

□

2.2. p-进辛/正交群的朗兰兹对应 ps.

2.12（p-进群的朗兰兹对应，[Vog93，CFM+22]）。设 $W_{\mathbb{Q}_p}=I_{\mathbb{Q}_p}\rtimes\langle\mathrm{Fr}\rangle$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的韦伊群，其中 $I_{\mathbb{Q}_p}$ 表示惯性子群，Fr 是算术弗罗贝尼乌斯 $x\mapsto x^p$ 的一个固定提升。设 H 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的准分裂连通约化代数群，$\widehat{H}$ 是其复朗兰兹对偶群，${}^LH$ 是由 H 确定的 L 群。设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}:W_F\to{}^LG$ 是 [CFM+22 §4.1]，意义下的无穷小特征，并假设它 $\widehat{\ }$ 是**非分歧的**，即在惯性 $I_{\mathbb{Q}_p}$ 上平凡。记$\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 为具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 的朗兰兹参数 $\phi^{\mathbb{Q}_p}:W_{\mathbb{Q}_p}\times SL_2(\mathbb{C})\to{}^LH$ 的 H-共轭类集合（模$\widehat{H}$-共轭）。这里，$\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 是映射

$$\lambda^{\mathbb{Q}_p}:W_{\mathbb{Q}_p}\longrightarrow{}^LH,\quad w\mapsto\phi^{\mathbb{Q}_p}\left(w,\begin{pmatrix}|w|^{1/2}&\\&|w|^{-1/2}\end{pmatrix}\right).$$

H 的纯内形式的猜想朗兰兹对应是指存在一个自然双射

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p},H)\xrightarrow{\sim}\Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p},H):=\{(\phi^{\mathbb{Q}_p},\epsilon)\mid\phi^{\mathbb{Q}_p}\in\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}},\epsilon\in\widehat{A}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}\}$$

其中， $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 表示 H的纯内形式的不可约光滑表示的同构类集合， $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ 表示 $Z_{\widehat{H}}(\phi^{\mathbb{Q}_p})$ 的分支群，而 $\widehat{A}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ 是其不可约表示的集合。

与实数情形类似，集合 $\Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 也可由 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$的*Vogan*簇上的某个简单反常层集合参数化，其定义为

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \widehat{\mathfrak{h}} \mid \mathrm{Ad}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}))x = px\},$$

其中， $\widehat{\mathfrak{h}}$ 是 $\widehat{H}$的李代数，并配备了 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = Z_{\widehat{H}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p})$的共轭作用，且只有有限多个轨道。于是我们可以考虑等变反常层范畴 $\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}})$ 以及等变导出范畴 $D^b(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}})$。我们有

$$\mathrm{Irr}\,\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \cong \left\{(C, \mathcal{V}) \mid \begin{array}{c} C \text{ an } H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\text{-orbit on } V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}, \\ \mathcal{V} \text{ a simple } H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\text{-equivariant local system on } C. \end{array}\right\}.$$

命题 2.13 ([CFM+22，命题 4.2。2])。存在一个双射

$$\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}, \quad \phi^{\mathbb{Q}_p} \mapsto x := d\big(\phi^{\mathbb{Q}_p}|_{SL_2(\mathbb{C})}\big)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

此外， $Z_{\widehat{H}}(\phi^{\mathbb{Q}_p})$ 与 $Z_{H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}}(x)$的约化商典范同构。因此，映射 *(2.14)* 诱导出一个双射

$$\Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\,\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}).$$

因此，我们得到一个猜想的双射

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) \xrightarrow{\sim} \Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\,\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}).$$

对于参数 $\xi = (C, \mathcal{V}) \in \Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$，我们将 $\pi(\xi) \in \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 记作某个纯内形式 H_ξ of H对应的不可约表示，并将 $M(\xi)$ 记作以 $\pi(\xi)$ 为其朗兰兹商的标准表示。此外，我们将 $\mathcal{P}(\xi) = j_{C!*}\mathcal{V}[\dim C]$、$\mu(\xi) = (H^0 j_{C!}\mathcal{V})[\dim C]$ 记作等变导出范畴$D^b(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}})$中的简单对象和标准对象。令 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 表示 H 的纯内形式的、无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$的容许表示范畴。$\mathrm{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 中的简单对象恰为 $\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$。定义一个完美配对

$$\langle -, - \rangle : K\,\mathrm{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) \times KD^b(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.15}$$

by

$$\langle \pi(\xi), \mathcal{P}(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(H_\xi)\delta_{\xi,\xi'},$$

其中， C 是出现在 $\xi = (C, \mathcal{V})$中的轨道， $e(H_\xi)$ 是 H_ξ ([Kot83])的 Kottwitz 符号，而$\delta_{\xi,\xi'}$ 是克罗内克 delta。

Co猜想 2.16 (Kazhdan-Lusztig猜想)。 在上述配对下，我们有

$$\langle M(\xi), \mu(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(H_\xi)\delta_{\xi,\xi'}.$$

该猜想最初由 Zelevinsky [Zel81] 针对 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$提出；一般情形也称为 Lusztig 关于标准模特征标公式的猜想 [Lus83]。此处的表述遵循 [Vog93]。通过结合 [CG97, 定理 8.6.23]和 [Ari96]，该猜想在 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$ 的情形下得到了证明。对于幺幂表示，该猜想最初由 Lusztig 在伴随群的情形下证明 [Lus95b] [Lus02b] ，之后由 Solleveld 推广到所有情形 [Sol25]。其证明方法是借助几何方法研究分次仿射赫克代数的表示论。更多详情请参见 [Sol25, 定理 5.4]。

对于任意的 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的 A-参数 H，都可以关联一个 L-参数：

$$\phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(w, x) := \psi^{\mathbb{Q}_p}\left(w, x, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & \\ & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}\right), \quad w \in W_{\mathbb{Q}_p},\, x \in SL_2(\mathbb{C}) \tag{2.17}$$

$\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征定义为 $\phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$的无穷小特征。记 $\Psi(G)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 为具有无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$的 A-参数在 $\widehat{H}$ 下的共轭类集合。那么，上述关联给出了一个包含 $\Psi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \hookrightarrow \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$。

最后，对于任意 $\phi^{\mathbb{Q}_p} \in \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ （分别地， $\psi^{\mathbb{Q}_p} \in \Psi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$），ABV-包 $\Pi^{\mathrm{ABV},\ \mathrm{pure}}_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$ （分别地，$\Pi^{\mathrm{ABV},\ \mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$）可以用与实群相同的方式定义。

2.18 （ $GL_N(\mathbb{Q}_p)$的情形）。 对于 $H = GL_N(\mathbb{Q}_p)$, 我们在 $V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 和 $H^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 上加上上标 GL，以避免混淆。

Vogan簇 $V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 还有另一种描述。设 $W := \mathbb{C}^N$，并赋予其 $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ 的作用。记 W_k 为 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ 对应于特征值 p^k 的特征子空间。那么存在一个同构

$$V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \cong E_W := \bigoplus_{k\in\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(W_k, W_{k+1}) \subset \mathrm{End}(W) = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}).$$

在此同构下，$H^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 被识别为 $G_W := \prod_{k\in\mathbb{C}} GL(W_k)$ （出现的 k 只有有限多个）。

根据 Zelevinskii [Zel81], , $V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 中的 $H^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道集合可如下用组合方式参数化。线段 是 $\mathbb{C}$ 中具有以下形式的子集:

$$[a,b] = \{a, a+1, a+2, \dots, b-1, b\} \quad \text{for some } a, b \in \mathbb{C} \text{ with } b - a \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

多重线段 是由线段组成的多重集，记作 $\mathbf{m} = \{[a_j,\ b_j]\}_j$ 或 $\mathbf{m} = \sum_j [a_j,\ b_j]$。于是存在一个双射

$$\begin{aligned} H^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \text{multisegments } \mathbf{m} \mid \begin{array}{c} \forall\, k \in \mathbb{C}, \text{the number of times } k \text{ occurs} \\ \text{in } \mathbf{m} \text{ equals } \dim W_k \end{array} \right\}, \\ O_{\mathbf{m}} &\longmapsto \mathbf{m}. \end{aligned}$$

更确切地说，回忆一下，每个元素 $x \in V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 都可视为 $W = \bigoplus_k W_k$ 上的一个自同态，它是幂零的且次数齐次为一。因此，存在 W 的一个齐次基，使得 x 的矩阵处于 Jordan标准形。这意味着，每个次数为 k 的基向量 $v_k \in W_k$ 都属于唯一一条形如 $0 \overset{x}{\longmapsto} v_a \overset{x}{\longmapsto} v_{a+1} \overset{x}{\longmapsto} \cdots \overset{x}{\longmapsto} v_b \overset{x}{\longmapsto} 0$ 的链。这样的链称为一个 ***Jordan***胞。于是，对于上述形式的任意多重线段$\mathbf{m} = \sum_j [a_j,\ b_j]$，相应的轨道 $O_{\mathbf{m}} \subset V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 由那些 Jordan胞与线段 $[a_j,\ b_j]$ 构成双射的 x 所组成，而与 $[a_j,\ b_j]$ 对应的胞具有形式 $0 \overset{x}{\longmapsto} v_{a_j} \overset{x}{\longmapsto} \cdots \overset{x}{\longmapsto} v_{b_j} \overset{x}{\longmapsto} 0$。

引理 2.19. 令 $\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 为 $H = GL_N(\mathbb{Q}_p)$ 的一个参数，其形式为

$$\phi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i=1}^{r} |\cdot|^{s_i}_{W_{\mathbb{Q}_p}} \boxtimes S_{t_i}$$

其中， $s_i \in \mathbb{C}$、 $t_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$和 S_{t_i} 表示 $SL_2(\mathbb{C})$的 t_i维不可约表示。那么，在双射 ***(2.14)*** 下，$\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 的 $\widehat{H}$-轨道对应于多重线段

$$\mathbf{m} = \left\{ \left[s_i + \tfrac{1}{2}(1 - t_i),\ s_i + \tfrac{1}{2}(t_i - 1) \right] \right\}_{i=1}^{r}.$$

证明。T 元素 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 是一个分块对角矩阵，共有 r 个块，其中第 i 个块为

$$\begin{pmatrix} p^{s_i + \frac{1}{2}(t_i - 1)} & & & \\ & p^{s_i + \frac{1}{2}(t_i - 3)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{s_i + \frac{1}{2}(1 - t_i)} \end{pmatrix},$$

而 $x = d\big(\phi^{\mathbb{Q}_p}|_{SL_2(\mathbb{C})}\big)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 是一个分块对角矩阵，共有 r 个块，其中第 i 个块为

$$\begin{pmatrix}0&1&&&&\\&0&2&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&0&t_i-1&\\&&&&0&\end{pmatrix}.$$

因此，对应于第 i 个块的标准基向量 e_j 构成一个 x 的Jordan胞，并且是 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 的特征向量，其特征值为 $p^{s_i+\frac{1}{2}(t_i-1)}$，$p^{s_i+\frac{1}{2}(t_i-3)}$，……，$p^{s_i+\frac{1}{2}(1-t_i)}$。所以，第 i 个块对应于线段 $[s_i+\frac{1}{2}(1-t_i),\ s_i+\frac{1}{2}(t_i-1)]$。引理得证。□

2.20 （辛群/正交群的情形）。现在令 H 为 p 进辛群 $\widehat{\ }$ 或分裂特殊正交群，其对偶群 H 为 $SO(N,\ \mathbb{C})$ 或 $Sp(N,\ \mathbb{C})$。

当 H 为特殊偶正交群时，我们也用 H^+ 表示相应的全偶正交群，用 $\widehat{H}^+ = O(N,\ \mathbb{C})$ 表示其对偶群。定义 $\Phi(H^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 为 $\Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 关于 $\widehat{H}^+$ 共轭作用的商。令 H' 为由某个判别式为一的二次型定义的 H 的非分裂内形式，并令 H'^+ 为相应的全偶正交群。那么

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H) = \Pi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \bigsqcup \Pi(H')_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$$

并定义

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) := \Pi(H^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \bigsqcup \Pi(H'^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$$

H^+ 和 H'^+的不可约容许表示的同构类集合，这些表示由$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$ 经诱导得到。预期局部朗兰兹对应将如下扩展到非连通群 H^+ 。

猜想 2.21。

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) \xrightarrow{\sim} \Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) := \{(\phi^{\mathbb{Q}_p}, \epsilon) \mid \phi^{\mathbb{Q}_p} \in \Phi(H^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}},\ \epsilon \in \widehat{A}^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}\},$$

其中$A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ 和$\widehat{A}^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ 的定义与连通约化群情形相同 .

对于 H^+，我们有命题 2.13、配对 (2.15) 以及 Kazhdan-Lusztig猜想 2.16 的类似结果，即有双射

$$\Phi(H^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}, \quad \phi^{\mathbb{Q}_p} \mapsto x := d\big(\phi^{\mathbb{Q}_p}|_{SL_2(\mathbb{C})}\big)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

$$\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) \xrightarrow{\sim} \Xi(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\,\mathrm{Per}(H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}),$$

一个完美配对

$$\langle -, - \rangle : K\,\mathrm{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+) \times KD^b(H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.23}$$

定义为

$$\langle \pi(\xi), \mathcal{P}(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(H^+_\xi)\delta_{\xi,\xi'},$$

and

猜想 2.24 （**扭曲 Kazhdan-Lusztig 猜想**。关于上述配对，我们有

$$\langle M(\xi), \mu(\xi') \rangle = (-1)^{\dim C} e(H^+_\xi)\delta_{\xi,\xi'}.$$

回到 H，现在我们用 GL_N的 Vogan 簇来描述它的 Vogan 簇。令 W 为向量空间 $\mathbb{C}^N$。设 $\langle -,\ - \rangle$是定义在 W上的非退化双线性形式；当$\widehat{H} = SO(N,\ \mathbb{C})$时为对称形式，当 $\widehat{H} = Sp(N,\ \mathbb{C})$时为辛形式。于是，我们可以将 $\widehat{H}$认作$SL_N(\mathbb{C})$ 中保持型 $\langle -,\ - \rangle$不变的子群。也就是说

$$\widehat{H} = \{g \in GL_N(\mathbb{C}) \mid g^* = g^{-1}, \det g = 1\}, \quad \widehat{\mathfrak{h}} = \{x \in \mathfrak{gl}_N \mid x^* = -x\} \subset \mathfrak{gl}_N$$

其中， g^* 表示关于型 $\langle -,\ -\rangle$的 g 的伴随算子： $W \to W$， x^*的情形也类似。利用这一点，我们将H 的无穷小特征（分别地，朗兰兹参数）集合认作 GL_N的相应集合的一个子集，并将 H 的 Vogan 簇认作

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{GL} \cap \widehat{\mathfrak{h}} = \{x \in E_W \mid x^* = -x\}.$$

and

$$H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{GL} \cap \widehat{H} = \{g \in G_W \mid g^* = g^{-1}, \det g = 1\}.$$

当 H 是辛群时，我们将 $H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 的定义扩展为

$$H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \times \langle -I_N \rangle.$$

Then

$$H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \{g \in G_W \mid g^* = g^{-1}\}.$$

只要它有定义。

引理 2.25. 设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 是 H 的一个无穷小特征，并且按如下意义是整的： $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 在 $W = \mathbb{C}^N$ 上的特征值具有 p^i 的形式，其中各个 i仅相差整数。

(1) 各个 i要么全都属于 $\mathbb{Z}$ ，要么全都属于$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$。

为方便起见，若各个 i全都属于 $\mathbb{Z}$ （分别地，全都属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$），则称 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑于 $\mathbb{Z}$ （分别地，支撑于$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$）。

(2) $\langle -,\ -\rangle$在任意 i 上限制为非退化形式。在特别情况下，维数 W_i =维数 W_{-i}。*(3)* 反过来，若 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$ 的非分歧无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 满足： $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持于 $\mathbb{Z}$ 或 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$，且维数 W_i = 维数 W_{-i}，则 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 来自某个辛群/正交群的无穷小特征。*(4)* 我们对 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 和 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 有如下显式描述：

N	$\langle -,-\rangle$	$\mathrm{supp}\,\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$	$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$	$H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$
odd	*symm*	$\mathbb{Z}$	$\prod_{i\leqslant -1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})$	$\prod_{i\leqslant -1} GL(W_i) \times SO(W_0)$
even	*skew*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$	$\prod_{i<-\frac{1}{2}} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1}) \times \mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})$	$\prod_{i\leqslant -\frac{1}{2}} GL(W_i)$
even	*symm*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$	$\prod_{i<-\frac{1}{2}} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1}) \times \mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})$	$\prod_{i\leqslant -\frac{1}{2}} GL(W_i)$
even	*skew*	$\mathbb{Z}$	$\prod_{i\leqslant -1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})$	$\prod_{i\leqslant -1} GL(W_i) \times Sp(W_0)$
even	*symm*	$\mathbb{Z}$	$\prod_{i\leqslant -1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})$	$\prod_{i\leqslant -1} GL(W_i) \times SO(W_0)$

若 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\leqslant -1} GL(W_i) \times SO(W_0)$，则 $H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\leqslant -1} GL(W_i) \times O(W_0)$。否则， $H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$。

证明。由于 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 保持型 $\langle -,\ -\rangle$，若 $i \neq -j$，则有 $W_i \perp W_j$。事实上，若 $v_i \in W_i$ 且 $v_j \in W_j$，则 $\langle v_i,\ v_j\rangle = \langle \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})v_i,\ \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})v_j\rangle = p^{i+j}\langle v_i,\ v_j\rangle$，这仅当 $i = -j$ 时才可能非零。由于 $\langle -,\ -\rangle$ 在 W 上非退化，其在 $W_i \times W_{-i}$ 上的限制必定非退化。因此，对于 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 的任意特征值 p^i， p^{-i} 也是一个特征值。由于所有 i 都相差整数，这迫使 $i \in \mathbb{Z}$ 或 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$；若某个 i 属于 $\mathbb{Z}$ （分别为 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$），则其他 i 也都属于其中。这就证明了前两条结论。

齐次的一次映射 $x \in E_W$ 的伴随仍为一次，而 $g_i \in GL(W_i)$ 的伴随是一个元素 $g_i^* \in GL(W_{-i})$。因此，

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in E_W \mid x_i^* = -x_{-i-1}\}$$

$$\cong \begin{cases} \prod_{i\leqslant -1}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1}) & \text{if } i\in\mathbb{Z},\\ \prod_{i<-\frac{1}{2}}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})\times\{f:W_{-\frac{1}{2}}\to W_{\frac{1}{2}}\mid f^*=-f\} & \text{if } i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}=\{g=(g_i)\in G_W\mid g_i^*=g_{-i}^{-1},\det g_0=1\}$$
$$\cong \begin{cases} \prod_{i\leqslant -1}GL(W_i)\times\{f\in GL(W_0)\mid f^*=f^{-1},\det f=1\} & \text{if } i\in\mathbb{Z},\\ \prod_{i\leqslant -\frac{1}{2}}GL(W_i) & \text{if } i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}. \end{cases}$$

接下来需要简化条件 $f^*=-f$和 $f^*=f^{-1}$。对于 $f^*=f^{-1}$，注意，若 $\langle-,-\rangle$是对称（分别为斜对称），则 $f^*=f^{-1}$表示 $f\in O(W_0)$（分别为 $f\in Sp(W_0)$）。考虑条件 $f^*=-f$。对于每个这样的 f，我们可以在 $W_{-\frac{1}{2}}$上构造一个双线性形式：$(v,v'):=\langle f(v),v'\rangle$。利用伴随算子，我们可知

$$(v,v')=\langle f(v),v'\rangle=\langle v,f^*(v')\rangle=-\langle v,f(v')\rangle$$
$$=\begin{cases} -\langle f(v'),v\rangle=-(v',v) & \text{if } \langle-,-\rangle \text{ is symmetric},\\ \langle f(v'),v\rangle=(v',v) & \text{if } \langle-,-\rangle \text{ is skew-symmetric}. \end{cases}$$

因此，我们得到一个线性映射

$$\{f:W_{-\frac{1}{2}}\to W_{\frac{1}{2}}\mid f^*=-f\}\longrightarrow\begin{cases}\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}}) & \text{if } \langle-,-\rangle \text{ is symmetric},\\ \mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}}) & \text{if } \langle-,-\rangle \text{ is skew-symmetric},\end{cases}\tag{2.26}$$

容易证明这是一个同构。证明至此完成。 □

2.3. **满秩部分与几何比较**。现在我们来讨论参数空间 $\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 与 $[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}]$之间的几何关系。

2.27（GL_N的情形）。设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$是 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$的一个整无穷小特征。$V^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}=E_W$的**满秩部分**是 $H^{GL}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}=G_W$-稳定开子空间

$$E_W^{reg}=\prod_i\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg},$$

其中，若线性映射 $f:W_k\to W_{k+1}$ 具有可能的最大秩，则称其为正则。我们希望将商 $[G_W\backslash E_W^{reg}]$与实群 $GL_n(\mathbb{C})$的 ABV空间识别起来。

设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 满足以下条件：

假设 2.28。 存在一个数 i_0 使得

- p^{i_0} 是 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 在 $W=\mathbb{C}^N$上的一个特征值；
- $\forall\, i\leqslant i_0$，$\dim W_i\leqslant\dim W_{i+1}$；• $\forall\, i\geqslant i_0$，$\dim W_i\geqslant\dim W_{i+1}$。

考虑空间

$$E_W^{reg,\diamond}=\prod_{i\neq i_0}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg}$$

赋予自然的 G_W-作用以及映射

$$\varphi:E_W^{reg}\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow E_W^{reg,\diamond}$$

通过遗忘 $\mathrm{Hom}(W_{i_0},W_{i_0+1})_{reg}$ 分量得到。空间 $E^{reg}{}_{,W}{}^{\diamond}$ 等于乘积 $E^{reg}{}_{,W}{}^{<}\times E^{reg}{}_{,W}{}^{>}$，其中

$$E_W^{reg,<}=\prod_{i<i_0}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg},\quad E_W^{reg,>}=\prod_{i>i_0}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg}.$$

同样，$G_W=G_W^{\leqslant}\times G_W^{>}$，其中

$$G_W^{\leqslant}=\prod_{i\leqslant i_0}GL(W_i),\quad G_W^{>}=\prod_{i>i_0}GL(W_i)$$

设 $x^\diamond=(x^<,x^>)\in E^{reg}{}_{,W}{}^{\diamond}=E^{reg}{}_{,W}{}^{<}\times E^{reg}{}_{,W}{}^{>}$ 为任意一点，并记 $G_W(x^\diamond)=G_W^<(x^<)\times G_W^>(x^>)$ 为其在 G_W 中的稳定子。由上述关于 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$, $x_i^\diamond$ 的假设可知: $W_i\to W_{i+1}$ 对于 $i<i_0$ 是单射，而对于 $i>i_0$ 是满射。因此，我们得到 W_{i_0} 上的一个滤过（即部分旗）$\mathbf{Fil}^{i_0}$，它由 W_i 的像取得， $i<i_0$ 沿着单射 $(x^<)^{i_0-i}:W_i\to W_{i_0}$。同样，我们在 W_{i_0+1} 上得到一个滤过 $\mathbf{Fil}^{i_0+1}$，它由对于 $i\geqslant i_0+1$ 的满射映射 $(x^>)^{i-(i_0+1)}:\ W_{i_0+1}\to W_i$ 的核取得。于是，我们得到抛物子群 $P_{i_0}\subset GL(W_{i_0}),\ P_{i_0+1}\subset GL(W_{i_0+1})$，它们分别是滤过 $\mathbf{Fil}^{i_0}$、$\mathbf{Fil}^{i_0+1}$ 的稳定子。通过为向量空间 W_{i_0} 和 W_{i_0+1} 选择一组基，我们可以将 $GL(W_{i_0})$ 和 $GL(W_{i_0+1})$ 分别识别为 $GL_n(\mathbb{C})$，其中 $n=\dim W_{i_0}=\dim W_{i_0+1}$，并将 P_{i_0} 和 P_{i_0+1} 识别为 $GL_n(\mathbb{C})$ 的抛物子群。

命题 2.29 ([DHXZ25, 定理 3.1.5])。

(1) $E^{reg}{}_{,W}{}^{\diamond}$ 是单个 G_W-轨道。更确切地说， $E^{reg}{}_{,W}{}^{<}$（分别为 $E^{reg}{}_{,W}{}^{>}$）是单个 $G_W^<$-（分别为 $G_W^>$-）轨道。*(2)* 纤维 $\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 同构于 $GL_n(\mathbb{C})$。在此同构下，作用 $G_W^<(x^<)\curvearrowright\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 对应于通过右乘逆元的 $P_{i_0}\quad GL_n(\mathbb{C})$，而作用 $G_W^>(x^>)\quad\curvearrowright\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 对应于通过左乘的 $P_{i_0+1}\quad GL_n(\mathbb{C})$。*(3)* 我们有一个同构

$$E_W^{reg}\cong G_W\times_{G_W(x^\diamond)}\varphi^{-1}(x^\diamond)$$

因而有叠的同构

$$\begin{aligned}[G_W\backslash E_W^{reg}]&\cong[G_W\backslash(G_W\times_{G_W(x^\diamond)}\varphi^{-1}(x^\diamond))]\cong[G_W(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]\\&\cong[(P_{i_0}\times P_{i_0+1})\backslash GL_n(\mathbb{C})]\cong[\Delta GL_n(\mathbb{C})\backslash(GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0}\times GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0+1})].\end{aligned}$$

注记 2.30（$G_W^<(x^<)$的显式描述）。对于每个 W_i，我们可以选取一组基 $\{\alpha_{i,\ 1},\ \ldots\ldots,\ \alpha_{i,\ \dim W_i}\}$，使得 $x^<(\alpha_{i,\ j})=\alpha_{i+1,\ j}$对 $i<i_0$成立。记 $W_i^\circ=\mathrm{span}\{\alpha_{i,\ 1+\dim W_{i-1}},\ \ldots\ldots,\ \alpha_{i,\ \dim W_i}\}$，它是 W_i中 $x^<(W_{i-1})$的一个补空间，并且满足 $W_i=x^<(W_{i-1})\oplus W_i^\circ$。令 i_{st}为满足 $W_{i_{st}}\neq0$的最小指标。则稳定子 $G_W^<(x^<)$ 可描述为

$$G_W^<(x^<)=\left\{\left(g_{i_{st}},\begin{pmatrix}g_{i_{st}}&*_{i_{st},i_{st}+1}\\0&g_{i_{st}+1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}g_{i_{st}}&*_{i_{st},i_{st}+1}&*_{i_{st},i_{st}+2}\\0&g_{i_{st}+1}&*_{i_{st}+1,i_{st}+2}\\0&0&g_{i_{st}+2}\end{pmatrix},\ldots,\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\begin{pmatrix}g_{i_{st}}&*_{i_{st},i_{st}+1}&\cdots&*_{i_{st},i_0}\\0&g_{i_{st}+1}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&*_{i_0-1,i_0}\\0&\cdots&0&g_{i_0}\end{pmatrix}\right)\ \middle|\ g_i\in GL(W_i^\circ),*_{jk}\text{ arbitrary}\right\}.$$

这里，若 $W_i^\circ=0$（即 W_{i-1} 和 W_i 具有相同的维数），我们就删除包含 g_i的行和列。同构 $G_W^<(x^<)\xrightarrow{\sim}P_{i_0}$ 就是投影到最后一个因子的投影。

对于 $G_W^>(x^>)$，也有类似的描述。

注2.31。上述满秩部分最初由第一作者在其学位论文 [Den16]中引入并研究，方法是取由抛物型多重线段标记的轨道并。一个称为对称多线段的特殊情形，以及映射 φ的构造，在 [Den23 第 4]节中得到了研究。

注意到，叠 $\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{GL}=[\Delta GL_n(\mathbb{C})\backslash(GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0}\times GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0+1})]$ 是$GL_n(\mathbb{C})$（视为实群）对于某个整无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$的 ABV空间。因此我们得到一个开浸入

$$\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{GL}\cong[G_W\backslash E_W^{reg}]\hookrightarrow[G_W\backslash E_W].$$

2.32 （一种变体）。 上述构造有一个变体。假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 满足以下强化条件：

假设 2.33。 存在一个数 i_0 使得

- p^{i_0} 是 $W=\mathbb{C}^N$上的 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 的特征值；
- $\forall\, i\leqslant i_0+1$，$\dim W_i\leqslant\dim W_{i+1}$；• $\forall\, i\geqslant i_0$，$\dim W_i\geqslant\dim W_{i+1}$。

那么 $\dim W_{i_0}=\dim W_{i_0+1}=\dim W_{i_0+2}$。考虑空间

$$E_W^{reg,\diamond}=\prod_{i\neq i_0,i_0+1}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg}$$

以及投影

$$\varphi: E_W^{reg}\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow E_W^{reg,\diamond}.$$

通过忘掉 $\mathrm{Hom}(W_{i_0},W_{i_0+1})_{reg}$ 和 $\mathrm{Hom}(W_{i_0+1},W_{i_0+2})_{reg}$ 得到。对于任意点$x^\diamond\in E^{reg}{}_{,W}{}^{\diamond}$，我们再次得到 W_{i_0} 的滤过 Fil^{i_0} 和 W_{i_0+2}的滤过 Fil^{i_0+2}，从而得到抛物子群 P_{i_0}、$P_{i_0+2}\subseteq GL_n(\mathbb{C})$。

命题 2.34。

(1) $E^{reg}{}_{,W}{}^{\diamond}$ 是一个单独的 G_W-轨道。*(2)* 纤维 $\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 同构于 $GL_n(\mathbb{C})\times GL_n(\mathbb{C})$。在此同构下，作用$G_W(x^\diamond)\quad\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 被识别为

$$(P_{i_0}\times GL_n(\mathbb{C})\times P_{i_0+2})\quad(GL_n(\mathbb{C})\times GL_n(\mathbb{C})),$$
$$(p_{i_0},g,p_{i_0+2})\cdot(g_1,g_2)=(p_{i_0+2}g_1g^{-1},gg_2p_{i_0}^{-1}).$$

(3) 我们有一个同构

$$\begin{aligned}[G_W\backslash E_W^{reg}]&\cong[G_W\backslash(G_W\times_{G_W(x^\diamond)}\varphi^{-1}(x^\diamond))]\cong[G_W(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]\\&\cong[(P_{i_0}\times GL_n(\mathbb{C})\times P_{i_0+2})\backslash(GL_n(\mathbb{C})\times GL_n(\mathbb{C}))]\\&\cong[\Delta GL_n(\mathbb{C})\backslash(GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0}\times GL_n(\mathbb{C})/P_{i_0+2})].\end{aligned}$$

证明与命题 2.29 几乎完全相同。

2.35 （辛群/正交群的情形）。 现在回到 2.20 的设定。我们将给出一个与命题 2.29 类似的陈述。

设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 是 H的一个整无穷小特征。通过包含 $\widehat{H}\hookrightarrow GL_N(\mathbb{C})$，将其视为 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$的无穷小特征，并假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$满足假设 2.28。注意，由引理 2.25 可知，对于任意 i，都有 $\dim W_i=\dim W_{-i}$；若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑在 $\mathbb{Z}$（分别为$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$）中，则 $\dim W_i$的最大可能值由 $i=-1$，0，1（分别由 $i=-\frac{1}{2}$，$_{12}$）取得，而假设 2.28 中的数i_0可取为 $i_0=-1$（分别为 $i_0=-\frac{1}{2}$）。因此，若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$支撑在 $\mathbb{Z}$中，则 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 实际上满足更强的假设 2.33。

Set

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg}:=E_W^{reg}\cap V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$$
$$\cong\begin{cases}\prod_{i\leqslant-1}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg} & \text{if } \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \text{ supported in } \mathbb{Z}\\ \prod_{i<-\frac{1}{2}}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg}\times\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg} & \text{if } \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \text{ supported in } \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z},\ \ \langle-,-\rangle \text{ is skew}\\ \prod_{i<-\frac{1}{2}}\mathrm{Hom}(W_i,W_{i+1})_{reg}\times\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg} & \text{if } \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \text{ supported in } \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z},\ \ \langle-,-\rangle \text{ is symm}\end{cases}$$

其中，$\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$（分别地，$\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$）表示可逆对称矩阵（分别地，斜对称矩阵）的集合（参见引理 2.25）。这是 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$的一个 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-稳定开子簇。我们

于是定义

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg,\diamond} := \varphi(V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg}) = \begin{cases} \prod_{i<-1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})_{reg} & \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \text{ is supported in } \mathbb{Z}, \\ \prod_{i<-\frac{1}{2}} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})_{reg} & \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr}) \text{ is supported in } \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}, \end{cases}$$

其中，$\varphi: E_W^{reg} \twoheadrightarrow E^{reg,W}{}^{\diamond}$ 若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 中，则为 2.27 中定义的映射；若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持在 $\mathbb{Z}$ 中，则为 2.32 中定义的映射。为简便起见，我们仍用 φ 表示投影 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg} \twoheadrightarrow V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$。

与 GL_N 情形一样，任取一点 $x^\diamond \in V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$ 都会诱导出 W_{i_0} 上的一个滤过 Fil^{i_0}，从而得到 $GL(W_{i_0}) \cong GL_n(\mathbb{C})$ 的一个抛物子群 $P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) := P_{i_0}$，其中 $n = \dim W_{i_0}$。

命题 2.36。设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 满足假设 *2.28*，并令 $n =$ 维数 W_{i_0}。空间$V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$是一个单一的 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道，因此对任意一点 $x^\diamond \in V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$，我们有一个同构

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg} \simeq H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \times_{H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)} \varphi^{-1}(x^\diamond)$$

因此

$$[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg}] \cong [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) \backslash \varphi^{-1}(x^\diamond)].$$

商 $[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]$ 的显式描述及其在各情形下的另一种描述汇总于下表。

N	$\langle -,- \rangle$	$\mathrm{supp}\,\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$	$[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]$	*alternative description*
odd	*symm*	$\mathbb{Z}$	$[(P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \times SO(n,\mathbb{C}))\backslash GL_n(\mathbb{C})]$	$[SO(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$
even	*skew*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$	$[P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})\backslash \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}]$	$[O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$
even	*symm*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$	$[P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})\backslash \mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}]$	$[Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$
even	*skew*	$\mathbb{Z}$	$[(P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \times Sp(n,\mathbb{C}))\backslash GL_n(\mathbb{C})]$	$[Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$
even	*symm*	$\mathbb{Z}$	$[(P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \times SO(n,\mathbb{C}))\backslash GL_n(\mathbb{C})]$	$[SO(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$

证明。证明与 GL_N 情形类似。为完整起见，我们在此给出细节。

首先，假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 中。回顾一下，在这种情况下

$$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{reg,\diamond} = \prod_{i<-\frac{1}{2}} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})_{reg}, \; H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\leqslant-\frac{1}{2}} GL(W_i)$$

并且纤维 $\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 可根据$\langle -,- \rangle$分别识别为 $\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$ 或斜对称空间 $\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$。这与在 $G_W^<$ $E^{reg,W}{}^{<}$ 中研究的情形几乎完全相同，不同之处在于，在 GL_N 情形下，抛物子群 P_{i_0} 在纤维 $GL_n(\mathbb{C})$ 上的左乘作用，替换为 P_{i_0} 在 $\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$ 或斜对称空间 $\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$ 上的合同作用。因此，根据命题 2.29，$V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$ 是单个 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道，且稳定子 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)$ 可识别为 $GL(W_{-\frac{1}{2}})$ 的抛物子群 $P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) = P_{i_0}$。选取 $W_{-\frac{1}{2}}$ 的一组基后，我们可将 $\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})_{reg}$（分别将 $\mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}})$）识别为空间 $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}$（分别为斜对称空间 $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}$）；根据引理 2.10，它与 $O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})$（分别与 $Sp(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})$）相同。这就给出了商 $[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]$ 所需的描述。

现在假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 的支集包含于 $\mathbb{Z}$。在这种情况下，$V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond} = \prod_{i<-1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})_{reg}$, $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\leqslant-1} GL(W_i) \times S\,\mathrm{Isom}(W_0)$，其中 $S\,\mathrm{Isom}(W_0)$ 是保持型 $\langle -, -\rangle$的等距变换群，作用于 W_0，且行列式为 1；而纤维 $\varphi^{-1}(x^\diamond)$ 恰为 $\mathrm{Hom}(W_{-1}, W_0)_{reg} \cong GL_n(\mathbb{C})$。显然，$S\,\mathrm{Isom}(W_0)$ 在 $V^{reg,}{}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$ 上的作用是平凡的，因此只需考察作用$\prod_{i\leqslant-1} GL(W_i)$ $\prod_{i<-1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1})_{reg}$，而这同样可通过研究 GL_N情形来处理。因此，点 $x^\diamond$ 的稳定子为 $P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \times S\,\mathrm{Isom}(W_0)$，证毕。□

推论 2.37。 在上述设定中，假设 H 是特殊偶正交群。那么我们也有同构

$$V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \simeq H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \times_{H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)} \varphi^{-1}(x^\diamond), \qquad [H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \cong [H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) \backslash \varphi^{-1}(x^\diamond)],$$

并且我们有以下显式描述

N	$\langle -,- \rangle$	$\operatorname{supp} \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$	$[H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) \backslash \varphi^{-1}(x^\diamond)]$	*alternative description*
even	*symm*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$	$[P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \backslash \operatorname{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}]$	$[Sp(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$
even	*symm*	$\mathbb{Z}$	$[(P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) \times O(n,\mathbb{C})) \backslash GL_n(\mathbb{C})]$	$[O(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})]$

推论 2.38. 在上述设定中，令 n = 维数 W_{i_0}。存在准分裂实酉群 $G = U(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ 或 $U(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2})$ 的一个整无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$，使得

- $P(\lambda^{\mathbb{Q}_p}) = \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$，并且
- 存在自然映射

$$[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xleftarrow[open]{\iota_{geom}} [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xrightarrow{\theta} \mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}} \tag{2.39}$$

具体见下表。

	N	$\langle -, - \rangle$支撑 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$		n	$\lambda^{\mathbb{R}}$	$\theta\colon [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \to \mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$
(a)	*odd*	*symm*	$\mathbb{Z}$	*odd*	$\mathbb{Z}^n$	$[SO(n,\ \mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})] \to [O(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) /\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$
(b) *(c)*	*even*	*skew*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$	*odd* *even*	$\mathbb{Z}^n$ $(\frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z})^n$	$[O(n,\ \mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})] = [O(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) /\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$
(d)	*even*	*symm*	$\frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}$	*even*	$\mathbb{Z}^n$	$[Sp(n,\ \mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})] = [Sp(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) /\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$
(e)	*even*	*skew*	$\mathbb{Z}$	*even*	$\mathbb{Z}^n$	$[Sp(n,\ \mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})] = [Sp(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) /\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$
(f)	*even*	*symm*	$\mathbb{Z}$	偶数	$(\frac{1}{2}\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z})^n$	$[SO(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})] \to [O(n,\mathbb{C}) \backslash GL_n(\mathbb{C}) / \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]$

这里， $\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}$ 是 G在无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{R}}$下的*ABV*空间，而映射 θ 要么是同构，要么是有限二对一映射。

(1) 若 H 不是特殊偶正交群，则映射ι_{geom} 和 θ 诱导出L-参数共轭类的一个包含，我们仍将其记作ι_{geom}

$$\iota_{geom} : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \hookrightarrow \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}.$$

复合映射 $\theta_* \circ \iota^*_{geom}$ 定义了一个映射

$$\mathcal{R} : K\operatorname{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow K\operatorname{Per}(\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}})$$

其伴随

$$\mathcal{R}^* : K\operatorname{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \longrightarrow K\operatorname{Rep}_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$$

在配对*2.4*、*2.162.24*下，将标准表示映到标准表示（相差若干符号），并限制为不可约对象之间的映射（忽略这些符号）

$$\tilde{\iota}_{geom} : \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \longrightarrow \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H).$$

此外，如果 H 不是辛群，则 $\tilde{\iota}_{geom}$ 是单射；如果 H 是辛群，则 $\tilde{\iota}_{geom}$ 在商上诱导一个单射，该单射将 $U(p、\ q)$ 的不可约表示与$U(q、\ p)$相对应。

(2) 如果 H 是偶正交群，我们有如下映射:

$$[H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xleftarrow[open]{\iota_{geom}} [H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xrightarrow{\theta^+} \mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}} \tag{2.40}$$

其中 θ^+ 是一个同构。同样，这些映射诱导出

$$\iota_{geom} : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \hookrightarrow \Phi(H^+)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}},$$
$$\mathcal{R}^+ : K\operatorname{Per}(H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow K\operatorname{Per}(\mathcal{X}_{\lambda^{\mathbb{R}}}),$$
$$\mathcal{R}^{+*} : K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \longrightarrow \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+),$$

$$\tilde{\iota}_{geom} : \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \hookrightarrow \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H^+),$$

其中 $\mathcal{R}^{+*}$ 将标准表示映射为相差若干符号的标准表示，且 $\tilde{\iota}_{geom}$ 是单射。

注意，上文出现的所有商叠识别都是诱导等价，即它们均具有 $[G_2\backslash X] \cong [G_1\backslash Y]$ 的形式，其中 $G_1 \supseteq G_2$ 是某些代数群，G_2 是某些簇，且 $Y = G_1 \times_{G_2} X$。在此情形下，[ABV92, 命题 20.2] 证明了范畴 $\mathrm{Per}(G_2\backslash X) \cong \mathrm{Per}(G_1\backslash Y)$ 的等价保持微局部重数。因此，映射 $\tilde{\iota}_{geom}$ 将两边的 ABV 包对应起来。具体而言，我们有如下定理。

定理 2.41. 在上述设定中，假设 $\iota_{geom}(\phi^{\mathbb{R}}) = \phi^{\mathbb{Q}_p}$。若 H 是奇正交群，则

$$\tilde{\iota}_{geom} : \Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{ABV,pure}}(G) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{ABV,pure}}(H).$$

若 H 是偶正交群，则

$$\tilde{\iota}_{geom} : \Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{ABV,pure}}(G) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{ABV,pure}}(H^+).$$

若 H 是辛群，则

$$\tilde{\iota}_{geom} : \bigsqcup_{\substack{p+q=n \\ p\equiv\frac{n-1}{2} \bmod 2}} \Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}^{\mathrm{ABV}}(U(p,q)) \xrightarrow{\sim} \Pi_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}^{\mathrm{ABV,pure}}(H).$$

2.4. **显式对应**。推论 2.38 中描述的实朗兰兹参数空间与 p-进朗兰兹参数空间之间的关系相当灵活。具体而言，对于 G 的一个整无穷小特征$\lambda^{\mathbb{R}}$，存在不同的分裂 p-进经典群 H 及无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$，使得可以构造 $\tilde{\iota}_{geom}$。在引言中，我们针对每个整的 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 构造了一族 $(H,\ \lambda^{\mathbb{Q}_p})$，并将证明它们属于推论 2.38 的情形。下面回顾这一构造。设 $\lambda^{\mathbb{R}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 是G的一个整支配无穷小特征。我们选取 $\delta \in \mathbb{Z}$ 使得 $\lambda_n > (1-\delta)/2$。令 $\lambda_i = \lambda_i + (\delta-1)/2$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$。于是$\lambda_n > 0$。

2.42 （对应 $\lambda^{\mathbb{R}} \mapsto \lambda^{\mathbb{Q}_p}$）。我们描述一种无穷小特征的对应：当 δ 为奇数（分别为偶数）时，该对应符合 2.38 的 (a)、(c)、(e)（分别为 (b)、(d)、(f)）情形。设

$$N = \sum_{x\in[-\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_1]} (\text{the number of } \tilde{\lambda}_i\text{'s with } \tilde{\lambda}_i \geqslant |x|) = \sum_{i=1}^{n}(2\tilde{\lambda}_i + 1) = \sum_{i=1}^{n}(2\lambda_i + \delta).$$

这里，与 2.18 中一样，$[-\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_1]$ 表示线段 $\{-\tilde{\lambda}_1,\ -\tilde{\lambda}_1+1,\ \dots\dots,\ \tilde{\lambda}_1\}$。我们为 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 配上 $GL_N(\mathbb{Q}_p)$ 的非分歧整无穷小特征 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$，使得作为多重集，

$$\big\{\text{eigenvalues of } \lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})\big\} = \sum_{x\in[-\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_1]} (\text{the number of } \tilde{\lambda}_i\text{'s with } \tilde{\lambda}_i \geqslant |x|) \cdot [p^x]$$

其中 $c\cdot[d]$ 表示多重集 $\{d, \underbrace{\dots\ d}_{c \text{ times}},\ \}$.

注意，$[p^x]$的重数关于 $x = 0$ 对称，并且随着x 趋近于 0 而增加。因此，$\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 来自辛群/特殊正交群 H 的无穷小特征，并满足假设 2.28。各情形的条件汇总于下表。

	n	$\lambda^{\mathbb{R}}$	δ	N	H	奇偶性
(a)	odd	$\mathbb{Z}^n$	odd	odd	$Sp(N-1)$	good
(b)	odd	$\mathbb{Z}^n$	偶数	偶数	$SO(N+1)$	good
(c)	偶数	$(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$	odd	even	$SO(N+1)$	good
(d)	偶数	$\mathbb{Z}^n$	偶数	偶数	$O(N)$	bad
(e)	偶数	$\mathbb{Z}^n$	odd	even	$SO(N+1)$	bad
(f)	偶数	$(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$	偶数	偶数	$O(N)$	good

在此处的偶正交情形中，我们将取 H 为分裂完全偶正交群，该群在前一小节中记作 H^+ 。

2.43 (显式L-参数之间的映射)。在引言中，我们定义了一个映射

$$\iota : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}, \quad \phi^{\mathbb{R}} \mapsto \phi^{\mathbb{Q}_p} \tag{2.44}$$

其中若

$$BC(\phi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{n} (z/\bar{z})^{t_i}(z\bar{z})^{s_i} \tag{2.45}$$

then

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \phi^{\mathbb{Q}_p} := \bigoplus_{i=1}^{n} |\cdot|_{W_{\mathbb{Q}_p}}^{s_i} \boxtimes S_{2t_i+\delta}. \tag{2.46}$$

另一方面，根据推论 2.38，我们得到了一个由几何构造的 L-参数映射

$$\iota_{geom} : \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}.$$

ι 和ι_{geom} 都提升为不可约表示上的映射

$$\tilde{\iota},\ \tilde{\iota}_{geom} : \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}}, G) \longrightarrow \Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p}, H)$$

（ $\tilde{\iota}$的定义见第 1.1 小节。）

命题 2.47. 固定 $W = \mathbb{C}^N$ 上的一个配对 $\langle -, - \rangle$，该配对诱导出从 $\widehat{H}$ 到 $GL_N(\mathbb{C})$ 的嵌入；给定 ${V^{reg}}_{,\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$ 中的一点 $x^{\diamond}$，以及 W 上的一组基，我们有

$$\iota = \iota_{geom}, \quad \tilde{\iota} = \tilde{\iota}_{geom}.$$

为了使这些映射相匹配，最好选择一组与 $x^{\diamond}$ 配合良好的 W 的基。

2.48 （ W_i 的显式基）**.** 在 2.42 的设定中， $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 的特征值具有如下形式： p^k，其中 k 位于线段中

$$I := [-\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1] = \{-\tilde{\lambda}_1, -\tilde{\lambda}_1 + 1, \ldots, \tilde{\lambda}_1\}.$$

固定一个元素 $x^{\diamond} \in {V^{reg}}_{,\lambda^{\mathbb{Q}_p}}{}^{\diamond}$并通过包含映射 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \hookrightarrow E_W$将其视为 ${E^{reg}}_{,W}{}^{\diamond}$的一个元素。如 2.27 中所述，我们可以分解 $x^{\diamond} = (x^{<}, x^{>})$，而 $x^{<}$ 在W_{i_0}上诱导出一个滤过 Fil^{i_0} ： 若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑在 $\mathbb{Z}$中，则 $i_0 = -1$；若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$中，则 $i_0 = -\frac{1}{2}$。也就是说，滤过 Fil^{i_0} 中的各项是单射 $(x^{<})^{i_0-i}$: $W_i \to W_{i_0}$的像。

于是我们可以选取 W_{i_0}的一组基 $\{\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n\}$，使其子集构成滤过 Fil^{i_0}中各子空间的基。更准确地说， $\{\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_{\dim W_i}\}$是子空间 $\mathrm{Im}\ ((x^{<})^{i_0-i}:W_i \to W_{i_0})$的一组基。通过单射 $(x^{<})^{i_0-i}$，我们得到每个 W_i $(i \leqslant i_0)$的一组基，仍记作 α_j。于是， $x^{<}$ 将基向量映为基向量。特别地，$\{\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_i\}$在 $\lambda_i > \lambda_{i+1}$时是 $W_{-\tilde{\lambda}_i}$的一组基。

利用每个 $W_i \times W_{-i}$上的完美配对 $\langle -, - \rangle$，我们得到与 W_i上的基对偶的 W_{-i}的基；又由于 $(x^{>})^* = -x^{<}$, $x^{>}$ 将基向量映到基向量或零，记 W_{-i_0}上的对偶基为$\{\alpha_1^*、\ldots\ldots、\alpha_n^*\}$，并在 $\lambda_i > \lambda_{i+1}$的情况下，将 $\{\alpha_1^*、\ldots\ldots、\alpha_i^*\}$认作 $W_{\tilde{\lambda}_i}$的基。

If $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$(Fr) 支撑在 $\mathbb{Z}$中，我们还选取 W_0的一组基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$，使得 t

$$\langle \beta_i, \beta_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij} & \lambda^{\mathbb{R}} \text{ good parity,} \\ (-1)^{i+1}\delta_{i,n+1-j} & \lambda^{\mathbb{R}} \text{ bad parity.} \end{cases}$$

证明$\iota = \iota_{geom}$。我们首先验证 $\iota = \iota_{geom}$。注意， H 的两个 L-参数作为映射取值于 $GL_N(\mathbb{C})$ 时，彼此 H-共轭，当且仅当它们彼此 $GL_N(\mathbb{C})$-共轭。类似地，Vogan簇 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 中的两点彼此 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-共轭，当且仅当它们在包含映射$V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \hookrightarrow V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{GL} = E_W$ 下的像彼此 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}^{GL} = G_W$-共轭。因此，只需证明对任意 $\phi^{\mathbb{R}} \in \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}}$， 下图交换

$$\begin{array}{ccccc} \Phi(G)_{\lambda^{\mathbb{R}}} & \xrightarrow[(2.44)]{\iota} & \Phi(H)_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow{2.19} & G_W\backslash E_W \\ {\scriptstyle 2.2}\downarrow & & & & \uparrow \\ \widehat{K}\backslash\widehat{G}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) & \xrightarrow[2.10]{} & \mathrm{S}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) & \xrightarrow[2.38]{\iota_{geom}} & H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \phi^{\mathbb{R}} & \longmapsto & \phi^{\mathbb{Q}_p} & \longmapsto & O_{\mathbf{m}} \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ h & \longmapsto & \dot{s} & \longmapsto & x \end{array} .$$

这里，S_n 表示 Sym_n 或 Skew_n，具体取决于 λ 具有良奇偶性还是坏奇偶性。

假设 $BC(\phi^{\mathbb{R}})$具有形式 (2.45)。沿上方路径追踪可知， $\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 由 (2.46) 给出；根据引理 2.19, $\binom{}{}$ 轨道 $O_{\mathbf{m}} \in G_W\backslash E_W$ 对应于多重线段 2.49

$$\mathbf{m} = \left\{[s_i + \tfrac{1}{2}(1-(2t_i+\delta)), s_i + \tfrac{1}{2}((2t_i+\delta)-1)]\right\}_{i=1}^{r} = \left\{[s_i - t_i - (\delta-1)/2, s_i + t_i + (\delta-1)/2]\right\}_{i=1}^{r}$$

另一方面，根据引理 2.11，左侧的垂直箭头将 $\phi^{\mathbb{R}}$ 映射到 h ，后者又被映射到矩阵 $\dot{s}$。如果 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性，那么 $\dot{s}$ 就是一个置换矩阵，因此对应的置换 s 满足（参见引理 2.11）

$$s \cdot (s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n) = (-s_1 + t_1, \ldots, -s_n + t_n), \tag{2.50}$$

并且 h 是任意一个满足 ${}^t hh = \dot{s}$的矩阵。如果$\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有坏奇偶性，则 $\dot{s}$ 是一个满足上述方程的带符号斜对称置换矩阵，并且 h 满足 ${}^t hJ^{-1}h = \dot{s}$。接下来，我们需要更仔细地追溯ι_{geom} 的定义。

假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$(Fr) 支撑在 $\mathbb{Z}$ 中，并且 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性（分别地，坏奇偶性）。那么 $\iota_{geom}(\dot{s})$是映射 $x = (x^<, x_{-1}, x_0, x^>) \in V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \subset E_W$的 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道，其中 $x^\diamond = (x^<, x^>)$ 是本命题中固定的元素，而 $x_0 \circ x_{-1}\colon W_{-1} \to W_1$ 在由 2.48 中选取的基所诱导的同构$W_{-1} \cong \mathbb{C}^n \cong W_1$ 下，对应于映射 $(-{}^t h)h = -\dot{s}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$（分别地， $-{}^t hJ^{-1}h = -\dot{s}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$）。由 (2.50)，我们有

$$-\dot{s} \cdot (s_1 - t_1, \ldots, s_n - t_n) = (s_1 + t_1, \ldots, s_n + t_n)$$

这意味着与 x 对应的多重线段是$\mathbf{m}$。因此交换图可交换。

假设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}$(Fr) 的支集包含于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$，且 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 具有良奇偶性（分别地，坏奇偶性）。那么 $\iota_{geom}(\dot{s})$是 $x = (x^<$的$H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道， $x_{-\frac{1}{2}}$， $x^>)$，其中$x_{-\frac{1}{2}}\colon W_{-\frac{1}{2}} \to W_{\frac{1}{2}}$在如下对应关系下对应于 $\dot{s}$

$$\{f : W_{-\frac{1}{2}} \to W_{\frac{1}{2}} \mid f^* = -f\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}), \tag{2.51}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \{f : W_{-\frac{1}{2}} \to W_{\frac{1}{2}} \mid f^* = -f\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Skew}(W_{-\frac{1}{2}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})\right) \tag{2.52}$$

其中第一个映射是 (2.26)，它将 f 映到对称型（分别为斜对称型） $(v, v') = \langle f(v), v' \rangle$；第二个映射则取型 $(-, -)$的矩阵。因此，相对于在 2.48 中为 $W_{-\frac{1}{2}}$和 $W_{\frac{1}{2}}$选取的基， $x_{-\frac{1}{2}}$的矩阵等于 $\dot{s}$；由与前一种情形相同的论证，$^-$与 x 对应的多重线段是$\mathbf{m}$。因此交换图可交换。这表明 $\iota = \iota_{geom}$。 □

的证明。现在我们转而证明等式 $\tilde{\iota} = \tilde{\iota}_{geom}$。在坏奇偶性情形（参见 (d) (e)）中，分支群 $A_{\phi^{\mathbb{R}}}$ 和 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$ 均为平凡群，因此无需证明。接下来考虑良奇偶情形。我们需要证明，在 §1.1 中以组合方式定义的辛群 H 对应的同构 $A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$（分别为正交群 H 对应的同构 $A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$），与由 (2.40)（分别由 (2.39)）给出的同构相同。

回顾引理 2.10，$\phi^{\mathbb{R}}$ 对应于 Weyl 群 $W^{\widehat{M}(\lambda^{\mathbb{R}})}$ 中视为对称群，s 事实上，s 可以选取为满足 $\hat{s(i)} = i$ 当且仅当 $\lambda_i = \lambda_{s(i)}$，且这样的 s 在对 $W^{\widehat{M}(\lambda^{\mathbb{R}})}$ 施加共轭作用后唯一，见引理 C.5。取 $\dot{s} \in GL_n(\mathbb{C})$ 为提升 s 的置换矩阵，并取 $h \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $\dot{s} = {}^t hh$，由引理 2.11 的证明可知，$\phi^{\mathbb{R}}$ 对应于 ABV空间中的元素 $(y,\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$，其中 $y = \mathrm{Ad}(h)^{-1}(J^{-1}\tau) \in \mathcal{I}(\lambda^{\mathbb{R}})$。还要回顾一下，我们已将

$$A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^+},$$

其中 I^+ 定义见 (1.4)。我们的首要任务是用元素 s来描述 I^+。

引理 2.53. 集合 I^+ 与集合 $\{\lambda_j | 1 \leqslant j \leqslant n, s(j) = j\}$之间存在双射。更确切地说，记

$$BC(\phi^{\mathbb{R}}) = z^{\lambda^{\mathbb{R}}} \bar{z}^{-s\lambda^{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{j=1}^{n} (z/\bar{z})^{\frac{\lambda_j + \lambda_{s(j)}}{2}} (z\bar{z})^{\frac{\lambda_j - \lambda_{s(j)}}{2}},$$

$BC(\phi^{\mathbb{R}})$ 中由 λ_j 索引的不可约分量为

$$\bigoplus_{\substack{i: s(i)=i \\ \lambda_i = \lambda_j}} (z/\bar{z})^{\frac{\lambda_i + \lambda_{s(i)}}{2}} (z\bar{z})^{\frac{\lambda_i - \lambda_{s(i)}}{2}} = \bigoplus_{\substack{i: s(i)=i \\ \lambda_i = \lambda_j}} (z/\bar{z})^{\lambda_j}.$$

引理 *2.53* 的证明. 根据定义 (1.4)，I^+ 由集合索引

$$\left\{ \frac{\lambda_j + \lambda_{s(j)}}{2} | 1 \leqslant j \leqslant n, \lambda_j - \lambda_{s(j)} = 0 \right\} = \{\lambda_j | 1 \leqslant j \leqslant n, \lambda_j = \lambda_{s(j)}\}.$$

我们选择 s 的方式使得 $\lambda_j = \lambda_{s(j)}$ 当且仅当 $s(j) = j$。因此，I^+ 由集合$\{\lambda_j | 1 \leqslant j \leqslant n,$ $s(j) = j\}$索引。□

任取满足 $s(j) = j$的 j。我们首先在由 λ_j索引的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset A_{\phi^{\mathbb{R}}}$ 生成元中构造一个显式元素。对于标准基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，定义 $\varepsilon_j \in GL_n(\mathbb{C})$ 为 $\varepsilon_j(e_i) = (-1)^{\delta_{ij}} e_i$，也就是说，$\varepsilon_j$是一个对角矩阵，除第 j 个对角项为 -1 外，其余对角项均为 1。注意

$$y = \mathrm{Ad}(h)^{-1}(J^{-1}\tau) = \dot{s}^{-1}J^{-1}\tau$$

并且 $s(j) = j$ 意味着 $\dot{s} = (\dot{s})^{-1}$ 与 $\varepsilon_j = \varepsilon_j^{-1} = {}^t\varepsilon_j$可交换。因此我们有

$$\mathrm{Ad}(\varepsilon_j)y = \varepsilon_j \dot{s}^{-1} {}^t\varepsilon_j J^{-1}\tau = y$$

并且 ε_j 确实中心化 $(y,\ \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$。根据构造，$\varepsilon_j$ 属于 $GL_n(\mathbb{C})$ 的分块正交子群，该子群支撑在由 i所索引的行与列上，其中有 $s(i) = i$ 和 $\lambda_i = \lambda_j$。根据中心化子的描述

$$S_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong \prod_{i \in I^+} O(l_i, \mathbb{C}) \times \prod_{j \in J} GL(l_j)$$

由 §1.1 中给出，ε_j 属于因子 $O(l_i,\ \mathbb{C})$，该因子由对应于 λ_j的元素 $i \in I^+$ 索引；并且由于 ε_j 中的 -1项，它下降为 $O(l_i,\ \mathbb{C})$的分支群中的非平凡元素。

现在，我们通过追溯几何构造，找出与 H 辛（分别为正交）情形对应的 $A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$（分别为 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$）中的元素。由 (2.40)（分别为 (2.39)），$\phi^{\mathbb{R}}$ 对应于某个 $x \in V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \cap \varphi^{-1}(x^\diamond)$ 的 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道。若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 的支集位于

$\mathbb{Z}$ 中，如上所述，我们有 $x=(x^<,\ x_{-1},\ x_0,\ x^>)\in V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$，其中 $x^\diamond=(x^<,\ x^>)$ 是 2.48 中固定的元素，而 $x_{-1}:\ W_{-1}\to W_0$ 在由 2.48 中选取的基所诱导的同构 $W_{-1}\cong\mathbb{C}^n\cong W_0$ 下，对应于映射 $h:\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$。此外，我们有 $x_0=-{}^th$，并且

$$-\dot{s}=-{}^thh=x_0x_{-1}.$$

识别 $P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})=\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$（参见推论 2.38），我们有

$$H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\cong\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})\times\mathrm{Isom}(W_0).$$

我们断言，在同构

$$\begin{aligned}(2.54)\quad [\widehat{G}\backslash(\widehat{G}\cdot y\times\widehat{G}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))]&\cong[O(n,\mathbb{C})\backslash GL_n(\mathbb{C})/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})]\\&\cong[(\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})\times\mathrm{Isom}(W_0))\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]=[H^+_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)]\end{aligned}$$

稳定 $(y,\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))$ 的元素 ε_j，对应于稳定 x 的元素 $\tilde{\varepsilon}_j=(x_{-1}\circ\varepsilon_j\circ x_{-1}^{-1},\varepsilon_j)\in\mathrm{Isom}(W_0)\times\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$。为此，首先注意到，在 (2.54) 中的第一个映射下，

$$(y,\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))\mapsto h$$

其中 $h\in\widehat{G}$ 满足 $\mathrm{Ad}(h)(y)=J^{-1}\tau$。相应的稳定子上的映射是

$$Z_{\widehat{G}}(y,\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))\xrightarrow[\cong]{\mathrm{Ad}\,h}Z_{\widehat{G}}(J^{-1}\tau,h\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))=Z_{O(n,\mathbb{C})}(h\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}))\xrightarrow[\cong]{k\mapsto(k,h^{-1}kh)}Z_{O(n,\mathbb{C})\times\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})}(h)$$

在其之下

$$\varepsilon_j\mapsto h\varepsilon_jh^{-1}\mapsto(h\varepsilon_jh^{-1},\varepsilon_j)=(x_{-1}\circ\varepsilon_j\circ x_{-1}^{-1},\varepsilon_j)=\tilde{\varepsilon}_j.$$

这就证明了该断言。

最后，我们检查 $\tilde{\varepsilon}_j$ 是否属于由 $\mathrm{std}_{\widehat{H}}\circ\phi^{\mathbb{Q}_p}$ 中的不可约因子 $1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{2\lambda_j+\delta}$ 索引的分量 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\subset A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$（分别为 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$）。为此，我们将 x 分解为与式 (2.49) 中的多重线段 $\mathbf{m}$ 相对应的箭图子表示的直和。然后，$\tilde{\varepsilon}_j$ 仅在由线段 $[-\lambda_j,\lambda_j]$ 索引的不可约箭图子表示上非平凡地作用；该子表示对应于因子 $1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{2\lambda_j+\delta}$。因此，由几何诱导的同构 $A_{\phi^{\mathbb{R}}}\cong A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$（分别为 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$）与 §1.1 中的同构一致，并且在 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持于 $\mathbb{Z}$ 中的情形下，证明完毕。

我们继续考虑 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$中的情形。在此情 – se

$$H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\cong\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}).$$

这里，$\iota_{geom}(\dot{s})$是 $x=(x^<,\ x^{-\frac{1}{2}},\ x^>)$的 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道，其中 $x^{-\frac{1}{2}}:\ W_{-\frac{1}{2}}\to W_{\frac{1}{2}}$在该同一对应下对应于 $\dot{s}$

$$\{f:W_{-\frac{1}{2}}\to W_{\frac{1}{2}}\mid f^*=-f\}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sym}(W_{-\frac{1}{2}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}).$$

我们在 $\iota=\iota_{geom}$ 的证明中论证过，相对于所选取的 $W_{-\frac{1}{2}}$和$W_{\frac{1}{2}}$的基，$x^{-\frac{1}{2}}$的矩阵等于 $\dot{s}$。现在，元素 $\varepsilon_j\in\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})=P(\lambda^{\mathbb{Q}_p})$导出一个稳定 x的元素。如同前一种情形，ε_j 诱导出 $A^+_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$（分别为 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}$）中由$1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{2\lambda_j+\delta}$标记的生成元。这就完成了证明。

□

2.55（对应 $\psi^{\mathbb{R}}\mapsto\psi^{\mathbb{Q}_p}$）**.** 现在我们转向 A-参数的对应。设 $\psi^{\mathbb{R}}$ 是 G 的一个 A-参数，其无穷小特征为 $\lambda^{\mathbb{R}}$。它在 $\mathbb{C}$ 上的基变换可写成如下形式

$$BC(\psi^{\mathbb{R}})=\bigoplus_{i=1}^{r}(z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}}\boxtimes S_{m_i}$$

其中 $k_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, S_{m_i} 是 $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可约 m_i 维表示。作为多重集

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \{\frac{1}{2}(k_i + m_i - 1), \frac{1}{2}(k_i + m_i - 3), \dots, \frac{1}{2}(k_i + 1 - m_i)\}.$$

由于 $\lambda_n > (1-\delta)/2$，根据我们的假设，对于每个 i，都有 $k_i + \delta > m_i$。

对于 $\psi^{\mathbb{R}}$，我们赋予其一个 A-参数 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$，它属于 H，满足

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}} \circ \psi^{\mathbb{Q}_p} = \bigoplus_{i=1}^{r} 1_{W_{\mathbb{Q}_p}} \boxtimes S_{a_i} \boxtimes S_{b_i}$$

其中 $b_i = m_i$ 且 $a_i = k_i + \delta$。容易验证，$\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的无穷小特征$\lambda^{\mathbb{Q}_p}$ 就是 2.42 中与 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 相对应的无穷小特征。此外，容易看出 $\iota(\phi_{\psi^{\mathbb{R}}}) = \phi_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$.

3. Proof of Theorem 1.5 and 1.9

从现在起，我们在良奇偶情形下采用 §2.4 中的设定。本节将在正则情形下证明主要定理 1.5 和 1.9，即 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 是正则的。随后，我们将说明如何将奇异情形归结为正则情形，但需借助一个将在下一节证明的比较结果。

3.1. 正则情形。 在本小节中，我们验证当 $\lambda^{\mathbb{R}}$ 为正则时的定理 1.5 和定理 1.9，即 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$。

3.1（$\mathbb{R}$ 上的 Adams-Johnson 包）。 在实侧，A-包 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(U(p,\ q))$ 与 Adams-Johnson 构造的参数包一致（见 [AMR18]）。我们先回顾这一内容，然后给出该参数包的另一种参数化方式，使之与 p-adic 侧的参数化方式相匹配。

回顾

$$BC(\psi^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{r} (z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}} \boxtimes S_{m_i}, \quad z \in \mathbb{C}^{\times}$$

其中 $k_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $n \equiv k_i + m_i$ 模 2。设 $A_i = \frac{m_i - 1}{2} + \frac{k_i}{2}$ 和 $B_i = -\frac{m_i - 1}{2} + \frac{k_i}{2}$，则在此情形下 $[B_i,\ A_i]$ 彼此不相交。我们将下标排列为使 $A_i > A_{i+1}$。Arthur 参数包 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(U(p,\ q))$ 是上同调的，可按如下方式构造。设

$$G^{an} := U(n,0) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \,|\, {}^t\bar{g} g = I_n\},$$

且 T 为对角矩阵子群，且

$$L := U(m_1, 0) \times \cdots \times U(m_r, 0)$$

为分块矩阵子群。通过扭曲 G^{an} 的有理结构，定义其内形式 $G' := U(p,\ q)$，扭曲所用对象为 $I_{p,\ q}$。于是，在此对应下，$G'_{\mathbb{C}} = G^{an}_{\mathbb{C}}$和 T 是 G' 的子群。设 $K' = U(p) \times U(q)$属于 G'。令 $Q_{\mathbb{C}}$为 $G'_{\mathbb{C}}$ 的标准复抛物子群，其 Levi 因子为 $L_{\mathbb{C}}$，并以 $\mathfrak{q}$表示其李代数。考虑 L的 A-参数

$$\psi_L^{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^L L,$$

$\widehat{}$使得 $SL_2(\mathbb{C})$ 被映到 L 的主 $SL_2(\mathbb{C})$，且

$$\psi_L^{\mathbb{R}}(z) = \psi^{\mathbb{R}}(z)(\frac{z}{\bar{z}})^{-\delta_{\widehat{G}} + \delta_{\widehat{L}}}, \quad z \in \mathbb{C}^{\times},$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$其中 $\delta_{\widehat{G}}$（分别为 $\delta_{\widehat{L}}$）表示 G（分别为 L）中的正余根半和。相应的 A-包仅由一个特征组成

$$\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}} : (t_1, \cdots, t_r) \mapsto \det(t_1)^{a_1} \cdots \det(t_r)^{a_r},$$

其中 $t_i \in U(m_i, 0)$ 和

$$a_i = \frac{k_i + m_i - n}{2} + \sum_{j<i} m_j \in \mathbb{Z}.$$

此处 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_r$。对于任意 $w \in W(G'_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$，令 L_w 为 G' 的子群，满足 $L_w(\mathbb{C}) = w(L(\mathbb{C}))$。我们将特征 $\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}}$ 变换为 L_w，记作 $w\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}}$。定义

$$\pi(\psi^{\mathbb{R}}, w) := \mathcal{R}^{\frac{1}{2}\dim(K'\cap L_w\backslash K')}_{w(\mathfrak{q})}(w\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}}).$$

这是良好范围内的上同调诱导，在文献中也记作 $A_{w(\mathfrak{q})}(w\Lambda_{L,\ \psi^{\mathbb{R}}})$ 。因此，$\pi(\psi^{\mathbb{R}},\ w)$ 是 G' 的不可约表示。

定理 3.2 (Adams-Johnson [AJ87], Arancibia-Mœglin-Renard [AMR18])。存在一个双射

$$\begin{aligned} W(G',T)\backslash W(G'_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}})/W(L_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}}) &\xrightarrow{\simeq} \Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(G') \\ w &\mapsto \pi(\psi^{\mathbb{R}}, w). \end{aligned}$$

现在我们给出该定理中双商的一个更具组合性的描述。令 $W(G'_{\mathbb{C}},\ T_{\mathbb{C}})$ 对应于对称群 S_n。对于任意 $w \in W(G'_{\mathbb{C}},\ T_{\mathbb{C}})$，令

$$p_i := \sharp\Big\{ \sum_{j<i} m_j < a \leqslant \sum_{j\leqslant i} m_j \,|\, w(a) \leqslant p \Big\}, \quad q_i := m_i - p_i$$

for $1 \leqslant i \leqslant r$。令 $\underline{p} = (p_1,\ \cdots,\ p_r)$ 以及 $\underline{q} = (q_1,\ \cdots,\ q_r)$。这诱导出一个双射

$$W(G',T)\backslash W(G'_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}})/W(L_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\simeq} \Big\{ (\underline{p},\underline{q}) \in \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0} \,|\, p_i + q_i = m_i, \sum_i p_i = p, \sum_i q_i = q \Big\}.$$

注意，若 w 被映至 $(\underline{p},\ \underline{q})$，

$$L_w \cong U(p_1,q_1) \times \cdots \times U(p_r,q_r).$$

对所有满足 $p+q=n$ 的 (p,q) 取不交并，可得一个双射

$$\Big\{ (\underline{p},\underline{q}) \in \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0} \,|\, p_i + q_i = m_i \Big\} \xrightarrow{\simeq} \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G).$$

为了与 p-进一侧进行比较，我们将给出 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 的另一种参数化。对于每个对 (p,q)，令 $l_i = \min\{p_i, q_i\}$，并且当 $p_i \neq q_i$ 时令 $\eta_i = (-1)^{1+\sum_{j>i} m_j}\mathrm{sgn}(p_i - q_i)$，否则任取 $\{\pm 1\}$ 中的元素。令 $\underline{l} = (l_1, \ldots, l_r)$ 和 $\underline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$。那么，对应关系 $(p,q) \mapsto (l,\eta)$ 定义了一个双射

$$\Big\{ (\underline{p},\underline{q}) \,|\, p_i + q_i = m_i \Big\} \xrightarrow{\simeq} \Big\{ (\underline{l},\underline{\eta}) \in \mathbb{Z}^r_{\geqslant 0} \times \{\pm 1\}^r \,|\, l_i \in [0, \lfloor m_i/2 \rfloor] \Big\} / \sim,$$

其中，等价关系由 $(l,\eta) \sim (l',\eta')$ 给出：若对所有 i 都有 $l_i = l'_i$，且 $l_i = m_i/2$，则成立。我们用 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}; p, q)$（分别用 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}; l, \eta)$）表示 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 中与 (p,q)（分别与 (l,η)）对应的表示。

对于所考虑的 $\psi^{\mathbb{R}}$，端oscopy映射 (1.6) 的像落在不可约表示的子集中

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G) \to \widehat{A}_{\psi^{\mathbb{R}}}, \quad \pi \mapsto \epsilon_\pi.$$

我们可以将 $A_{\psi^{\mathbb{R}}}$ 和 $\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{R}}}$ 识别为 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Jord(\psi^{\mathbb{R}})}$, , 其中 $Jord(\psi^{\mathbb{R}})$ 是 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$ 的不可约分量集合。设 $\pi = \pi(\psi^{\mathbb{R}};\ p,\ q) = \pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\ \eta)$。那么 $\epsilon_\pi \equiv (\epsilon_i)_{i=1}^r$，其中

$$\epsilon_i = (-1)^{m_i(1+\sum_{j>i} m_j) + m_i(m_i-1)/2 + q_i} = \eta_i^{m_i}(-1)^{(m_i-2l_i)(m_i-1-2l_i)/2}. \tag{3.3}$$

ϵ_π 对 $Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = \{\pm I_n\}$ 的限制由下式确定

$$\epsilon_\pi(-I_n) = \prod_{i=1}^r \epsilon_i = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-q}{2}} & n \text{ even}, \\ (-1)^{\frac{p-q+1}{2}} & n \text{ odd}. \end{cases}$$

对于 $(\underline{l},\ \underline{\eta})$，我们由 (3.3) 定义 $\epsilon_{\underline{l},\ \underline{\eta}} := (\epsilon_i)_{i=1}^r$。

最后，可以计算 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}$ 的完整朗兰兹参数；$l,\ \eta)$。这对专家而言是已知结果，我们在附录 B 中给出了详细计算。

定理 3.4（Vogan-Zuckerman [VZ84], Knapp-Vogan [KV95]）。令 $(\phi^{\mathbb{R}}、\epsilon)$ 为 $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l、\eta)$ 的完整朗兰兹参数。那么

$$BC(\phi^{\mathbb{R}})=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=0}^{l_i-1}\Big((\frac{z}{\bar{z}})^{\frac{k_i}{2}}(z\bar{z})^{\frac{m_i-1}{2}-j}\oplus(\frac{z}{\bar{z}})^{\frac{k_i}{2}}(z\bar{z})^{-\frac{m_i-1}{2}+j}\Big)\bigoplus BC(\phi_-^{\mathbb{R}})$$

其中

$$BC(\phi_-^{\mathbb{R}})=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=0}^{A_i-B_i-2l_i}(\frac{z}{\bar{z}})^{B_i+l_i+j},$$

并且 ϵ 在双射 $\widehat{A}_{\phi^{\mathbb{R}}}\to\widehat{A}_{\phi_-^{\mathbb{R}}}$ 下对应于 ϵ_-，其中 ϵ_- 在 $(\frac{z}{\bar{z}})^{B_i+l_i+j}$ 上为 $j\in[0、\ A_i-B_i-2l_i]$ 交替取值，并在 $j=0$ 处取值 η_i。

现在我们转向 p-adic 一侧。注意，在偶正交情形中，H 表示全偶正交群。回顾

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}}\circ\psi^{\mathbb{Q}_p}=\bigoplus_{i=1}^{r}1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{a_i}\boxtimes S_{b_i}$$

其中 $a_i=k_i+\delta$ 且 $b_i=m_i$。我们关于 δ 的假设意味着 $a_i>b_i$。令 $A_i:=(a_i+b_i)/2-1=A_i+(\delta-1)/2$ 以及 $B_i:=(a_i-b_i)/2=B_i+(\delta-1)/2$。由于 $[B_i,A_i]$ 彼此不相交，$[\widetilde{B}_i,\widetilde{A}_i]$ 也是如此，因此 $\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 具有离散对角限制，其意义见 Moeglin[Mœg09]。

定理 3.5 (Moeglin [Mœg09])。

(1) 若 H 是正交的，则存在一个双射

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)\to\Big\{(\underline{l},\underline{\eta})\in\mathbb{Z}^r_{\geqslant 0}\times\{\pm1\}^r\,|\,l_i\in[0,\lfloor m_i/2\rfloor]\Big\}/\sim. \tag{3.6}$$

若 H 是辛的，则存在一个双射

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)\to\Big\{(\underline{l},\underline{\eta})\in\mathbb{Z}^r_{\geqslant 0}\times\{\pm1\}^r\,|\,l_i\in[0,\lfloor m_i/2\rfloor],\prod_i\epsilon_i=1\Big\}/\sim. \tag{3.7}$$

(2) 设 $\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\underline{\eta})$ 是与 (l,η) 对应的表示，而 $(\phi^{\mathbb{Q}_p},\epsilon)$ 是其完整朗兰兹参数。那么

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}}\circ\phi^{\mathbb{Q}_p}=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=0}^{l_i-1}\Big(|\cdot|_{W_{\mathbb{Q}_p}}^{\frac{b_i-1}{2}-j}\boxtimes S_{a_i}\oplus|\cdot|_{W_{\mathbb{Q}_p}}^{-\frac{b_i-1}{2}+j}\boxtimes S_{a_i}\Big)\bigoplus(\mathrm{std}_{\widehat{H}_-}\circ\phi_-^{\mathbb{Q}_p})$$

其中 H_- 与 H 属于同一类型，且

$$\mathrm{std}_{\widehat{H}_-}\circ\phi_-^{\mathbb{Q}_p}=\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=0}^{A_i-B_i-2l_i}1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{2(B_i+l_i+j)+\delta}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$和 ϵ 在双射 $A_{\phi^{\mathbb{Q}_p}}\to A_{\phi_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 下对应于 ϵ_-，其中 ϵ_- 在 $j\in[0,A_i-B_i-2l_i]$ 时遍历 $1_{W_{\mathbb{Q}_p}}\boxtimes S_{2(B_i+l_i+j)+\delta}$，并在 $j=0$ 处取值 η_i。

(3) 端*oscopic*映射的像包含于不可约表示的子集中

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)\to\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}},\quad\pi\mapsto\epsilon_\pi$$

以及 $\epsilon_\pi=\epsilon_{\underline{l},\ \underline{\eta}}$。

与 3.1 中 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 的参数化进行比较，我们立即得到：

推论 3.8. 若 H 是正交的，则 $\tilde{\imath}(\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\eta))_-=\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\ l,\eta)$。若 H 是辛的，则 $\tilde{\imath}(\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\eta))=\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\ l,\eta')$，其中 $\eta'=\pm\eta$ 满足 $(\underline{l},\underline{\eta}')$ 出现在 (3.7) 中。

这证明了正则情形下的定理 1.5 和定理 1.9。

3.2. **奇异情形**。 在本小节中，我们详细说明在无穷小特征奇异的情形下证明定理 1.5 和定理 1.9 的策略。

我们对 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$ 的不可约分量进行编号，使得若 $A_i > A_j$ 且 $B_i > B_j$，则 $i < j$。于是，对于任意 $(l,$ 我们可以按照正则情形通过上同调诱导定义 $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\ \eta)$，并且 Trapa [Tra 01] 已证明 $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\ \eta)$ 是不可约表示或零。为了与 p-进侧进行比较，我们将仿照 [Tra01] 和 [MR19] 中的相同思路，将这些表示描述为对 Adams-Johnson 包中的表示应用平移函子所得的像。

我们选择 $t_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，使得平移后的区间 $[B_i + t_i,\ A_i + t_i]$ 彼此不相交且 $A_i + t_i > A_{i+1} + t_{i+1}$。令 $\psi_{\gg}^{\mathbb{R}} \in \Psi(G)$ 定义为

$$BC(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{i=1}^{r} (z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}+t_i} \boxtimes S_{m_i}.$$

于是，$\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}$ 的无穷小特征 $\lambda_{\gg}^{\mathbb{R}}$ 是正则的。令 $\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}$ 所对应的 Arthur 参数为 $\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p} \in \Psi(H_{\gg})$，如 2.55 中所述。由前一小节可知，定理 1.5 和定理 1.9 对 A- 参数 $\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}$ 和 $\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p}$ 成立。为了联系 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}}(G)$ 与 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$，我们将应用平移函子。对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}^n$，我们定义平移函子

$$\mathcal{T}_i := \psi_{\lambda}^{\lambda - e_i}$$

其中 $e_1,\ \cdots,\ e_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基。在此记号中，我们省略了 λ，其应由上下文确定。

命题 3.9。 我们有

$$\begin{aligned}\pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\underline{\eta}) &= \circ_{i=1}^{r} \left(\mathcal{T}_{1+\sum_{j<i} m_j} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{\sum_{j\leqslant i} m_j}\right)^{t_i} \pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}};\underline{l},\underline{\eta}) \\ &= (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{m_1})^{t_1} \circ (\mathcal{T}_{m_1+1} \circ \mathcal{T}_{m_1+2} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{m_1+m_2})^{t_2} \circ \cdots \\ &\qquad \cdots \circ \left(\mathcal{T}_{1+\sum_{j<r} m_j} \circ \mathcal{T}_{2+\sum_{j<r} m_j} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{\sum_{j\leqslant r} m_j}\right)^{t_r} \pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}};\underline{l},\underline{\eta}).\end{aligned}$$

证明。 这由命题 A.7 和引理 A.8 得出。 □

存在一个典范满同态

$$A_{\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}} \to A_{\psi^{\mathbb{R}}}$$

它将以 i 为指标的 $A_{\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}}$ 的生成元映射到以 $BC(\psi^{\mathbb{R}})$ 中的不可约分量 $(z/\bar{z})^{\frac{k_i}{2}} \boxtimes S_{m_i}$ 为指标的 $A_{\psi^{\mathbb{R}}}$ 的生成元（参见 (1.8)）。这诱导出一个包含

$$\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{R}}} \hookrightarrow \widehat{A}_{\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}}.$$

对于任意 $(l,\ \eta)$，令 $\epsilon_{l,\ \eta}$ 定义 $A_{\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}}$中的一个元素。

定理 3.10 （Moeglin-Renard [MR19]）。

(1) $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\eta) = 0$ 若 $\epsilon_{l,\ \eta} \notin \widehat{A}_{\psi^{\mathbb{R}}}$。 *(2)* $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ 由 $\{\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\eta)\}_{(l,\ \eta)}$的不可约成分构成。 *(3)* 对于任意 $\pi \in \Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$，

$$\epsilon_\pi = \bigoplus_{(\underline{l},\underline{\eta})} \mathrm{mult}(\pi, \pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\underline{\eta}))\, \epsilon_{\underline{l},\underline{\eta}}.$$

此外，ϵ_π 是不可约的。

在 p-进情形下也有类似的构造。注意，$H_{\gg}$ 的秩大于 H的秩。为了关联 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}_{\gg}}$ 对于 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$，我们将应用雅克模块函子。

定义 3.11。设 H' 是 H 的纯内形式， P' 是 H' 的标准极大抛物子群，其 Levi 因子为 $GL_1(\mathbb{Q}_p)\times H'_-$，其中 H'_- 与 H' 属于同一类型。对于 H' 的任意有限长度光滑表示 π 以及任意 $x\in\mathbb{R}$，我们将 $\mathcal{D}_x\pi$ 定义为雅克模块 $\mathrm{Jac}_{P'}\pi$ 在 $GL_1(\mathbb{Q}_p)$ 的作用下投影到 $|\cdot|^x$ 主分量所得的结果。

定义

$$\begin{aligned}\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\underline{\eta}) &:= \circ_{i=1}^{r}\Big((\mathcal{D}_{\tilde{A}_i+1}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_i+1})\circ\cdots\circ(\mathcal{D}_{\tilde{A}_i+t_i}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_i+t_i})\Big)\pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\underline{\eta})\\ &= \Big((\mathcal{D}_{\tilde{A}_1+1}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_1+1})\circ\cdots\circ(\mathcal{D}_{\tilde{A}_1+t_1}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_1+t_1})\Big)\circ\cdots\\ &\quad\cdots\circ\Big((\mathcal{D}_{\tilde{A}_r+1}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_r+1})\circ\cdots\circ(\mathcal{D}_{\tilde{A}_r+t_r}\circ\cdots\circ\mathcal{D}_{\tilde{B}_r+t_r})\Big)\pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\underline{\eta}).\end{aligned}$$

与 $\psi^{\mathbb{R}}$ 类似，存在一个典范满同态

$$A_{\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p}}\to A_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$$

通过像实数情形那样匹配不可约分量，从而诱导出一个包含

$$\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}\hookrightarrow\widehat{A}_{\psi_{\gg}^{\mathbb{Q}_p}}.$$

定理 3.12 (Moeglin [Mœg09])。

(1) $\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\underline{\eta})=0$ 若 $\epsilon_{\underline{l},\underline{\eta}}\notin\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$。*(2)* $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$ 由 $\{\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p}$ 的不可约成分组成；$\underline{l},\underline{\eta})\}_{(\underline{l},\underline{\eta})}$。*(3)* 对任意 $\pi\in\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$,

$$\epsilon_\pi=\bigoplus_{(\underline{l},\underline{\eta})}\mathrm{mult}(\pi,\pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\underline{\eta}))\,\epsilon_{\underline{l},\underline{\eta}}.$$

此外， ϵ_π 是不可约的。

我们的目标是证明

定理 3.13。若 H 是正交的，则 $\tilde{\iota}(\pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\eta))=\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\eta)$。若 H 是辛的，则 $\tilde{\iota}(\pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\eta))=\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\eta')$，其中 $\eta'=\pm\eta$ 满足 $\epsilon_{\underline{l},\eta'}\in\widehat{A}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}$。

定理 3.13 推出奇异情形下的定理 1.5 和定理 1.9。此外，它还表明 $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\underline{l},\eta)$ 与 $\pi(\psi^{\mathbb{Q}_p};\underline{l},\eta)$ 的非消失条件等价。前者由 P.Trapa [Tra01]给出，后者由第三位署名作者 [Xu21]给出（另见[Ato22]）。这些条件涉及的组合结构非常复杂，形式上也大相径庭。在我们的工作之前，第二位署名作者 [Hua25] 已经通过直接比较证明了它们等价。这是一项艰巨的工作，也让我们在研究初期对定理充满信心。

根据定理 3.10 和 3.12， $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$ （分别地，$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{Q}_p}}(H)$）是通过应用平移函子（分别地，Jacquet 函子）由正则情形得到的。因此，如果映射 $\tilde{\iota}$ 与平移函子和 Jacquet 函子相交织，定理 3.13 即得证。根据命题 2.47 $\tilde{\iota}$ 与几何方式定义的映射 $\tilde{\iota}_{geom}$ 一致，而后者在简单对象集合上的作用与映射 $\mathcal{R}^*$ 相差符号，见推论 2.38。因此，我们只需证明以下定理，其中也包括坏奇偶性情形。该定理将在下一节证明。

定理 3.14. 设 $\lambda^{\mathbb{R}}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是 G 的主导积分无穷小特征标。假设存在 $1\leqslant j\leqslant n$，使得 $\lambda_j>\lambda_{j+1}$ （令 $\lambda_{n+1}=1+(1-\delta)/2$）。则下述

交换图可交换

$$\begin{array}{ccc} K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{R}},G) & \xrightarrow{\mathcal{R}^*} & K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda^{\mathbb{Q}_p},H) \\ {\scriptstyle \psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_{\tilde{\lambda}_j}} \\ K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda_-^{\mathbb{R}},G) & \xrightarrow{\mathcal{R}^*} & K\Pi_{\mathrm{pure}}(\lambda_-^{\mathbb{Q}_p},H_-), \end{array}$$

其中 $\lambda_-^{\mathbb{R}}=\lambda^{\mathbb{R}}-e_j$，而 $\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}$ 是 $\lambda_-^{\mathbb{R}}$ 在赋值 *2.42* 下的像。

4. Comparison of translation and derivative

本节旨在证明定理 3.14，从而完成定理 1.5 和 1.9 的证明。

定理 3.14 等价于下列交换图的交换性

$$\begin{array}{ccc} K\mathrm{Per}(H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & K\mathrm{Per}(\widehat{K}\backslash X_{\lambda_-^{\mathbb{R}}}) \\ {\scriptstyle \mathcal{D}^*_{\tilde{\lambda}_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}})^*} \\ K\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & K\mathrm{Per}(\widehat{K}\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}}) \end{array}$$

其中，在配对 2.15（分别为 2.3）下，$\mathcal{D}^*_{\tilde{\lambda}_j}$（分别为 $(\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}})^*$）是 $\mathcal{D}_{\tilde{\lambda}_j}$（分别为 $\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}}$）的伴随算子。

首先，我们要给出 $(\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}})^*$ 的一个几何构造。令 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}},\ \lambda_-^{\mathbb{R}}):=\widehat{P}(\lambda_-^{\mathbb{R}})\cap\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})$。存在自然投影

$$X_{\lambda_-^{\mathbb{R}}}=\widehat{G}/\widehat{P}(\lambda_-^{\mathbb{R}})\xleftarrow{p_1}\widehat{G}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}},\lambda_-^{\mathbb{R}})\xrightarrow{p_2}\widehat{G}/\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})=X_{\lambda^{\mathbb{R}}}.$$

定理 4.1. 我们有

$$(\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}})^*=Rp_{2*}\circ p_1^*$$

$\hat{}$ $\hat{}$作为从 $K\mathrm{Per}(K\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}})$ 到 $K\mathrm{Per}(K\backslash X_{\lambda^{\mathbb{R}}})$的映射。

$\bar{}$

证明。由引理 A.9，我们有一个分解 $\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}}=\psi_{\lambda'}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}}\circ\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda'}$，它是格罗滕迪克群上的映射，其中

$$\lambda'=\lambda^{\mathbb{R}}+(e_1+\cdots+e_{j-1}).$$

容易验证 $\widehat{P}(\lambda')=\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}},\lambda_-^{\mathbb{R}})$。因此，只需证明 $(\psi_{\lambda^{\mathbb{R}}}^{\lambda'})^*=Rp_{2*}$ 和 $(\psi_{\lambda'}^{\lambda_-^{\mathbb{R}}})^*=p_1^*$。这由 [DHXZ25，命题 2.2.1] 得出。□

接下来，我们提出一种几何构造，利用 Lusztig [Lus95c] 引入的归纳过程，构造 $\mathcal{D}_{\tilde{\lambda}_j}$ 的伴随算子 $\mathcal{D}^*_{\tilde{\lambda}_j}$。

固定一个元素 $x^\diamond\in V^{reg,\lambda^{\mathbb{Q}_p}\diamond}$。回顾分次向量空间 $W=\mathbb{C}^N$，它配有配对 $\langle-,\ -\rangle$，以及在 2.48 中引入的、适配于 $x^\diamond$ 的分次基。我们将 $W=\tilde{}\ \tilde{}W'\oplus W^-\oplus W''$ 分解为 $I=[-\lambda_1,\ \lambda_1]$-分次向量空间，其中 W'（分别地，W''）是一维的，$\tilde{}$ $\tilde{}$集中在次数 $-\lambda_j$（分别地，λ_j），并由向量 α_j（分别地，α_j^*）张成，而 W^- 由其余基向量张成。换言之，

$$W'_k=\begin{cases}\mathbb{C}\alpha_j\subset W_{-\tilde{\lambda}_j} & \text{if } k=-\tilde{\lambda}_j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},\quad W''_k=\begin{cases}\mathbb{C}\alpha_j^*\subset W_{\tilde{\lambda}_j} & \text{if } k=\tilde{\lambda}_j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

$$W_k^-=\begin{cases}\mathrm{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}\}\subset W_{-\tilde{\lambda}_j} & \text{if } k=-\tilde{\lambda}_j\\ \mathrm{span}\{\alpha_1^*,\dots,\alpha_{j-1}^*\}\subset W_{\tilde{\lambda}_j} & \text{if } k=\tilde{\lambda}_j\\ W_k & \text{otherwise}\end{cases}$$

于是， H_- 可视为保持型 $\langle -,\ - \rangle$ 的 $GL(W^-)$ 的子群。我们令 $P \subset H$ 为稳定旗 $0 \subset W'' \subset W'' \oplus W^- \subset W$ 的抛物子群，并令 $M \subset P$ 为稳定子空间 W^- 的莱维子群。记 N 为 P 的根基，因此 $P = MN$；并记 $P = MN$ 为 H 中相应的子群。于是我们有自然同构

$$M \cong GL_1 \times H_-, \quad \widehat{M} \cong GL_1(\mathbb{C}) \times \widehat{H}_-$$

通过它我们得到无穷小特征

$$\lambda_M^{\mathbb{Q}_p} = (|\cdot|^{\tilde{\lambda}_j}, \lambda_-^{\mathbb{Q}_p})$$

M。

我们可以分别取群 P、 M 和 H_- 的 Vogan簇，并赋予它们相应的无穷小特征中心化子的作用。它们可以（也将）识别如下： $\widehat{\mathfrak{p}}$、 $\widehat{\mathfrak{m}}$、 $\widehat{\mathfrak{h}}_-$ 分别是 $\widehat{P}$、 $\widehat{M}$、 $\widehat{H}_-$ 的李代数，

- $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} = V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \cap \widehat{\mathfrak{p}}$
- $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} = H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \cap \widehat{P}$
- $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} =$ image of $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} \subset \widehat{\mathfrak{p}}$ under the quotient $\widehat{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathfrak{m}}$
- $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} =$ image of $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} \subset \widehat{P}$ under the quotient $\widehat{P} \twoheadrightarrow \widehat{M}$
- $V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} =$ image of $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \subset \widehat{\mathfrak{m}}$ under the quotient $\widehat{\mathfrak{m}} \cong \mathfrak{gl}_1 \times \widehat{\mathfrak{h}}_- \twoheadrightarrow \widehat{\mathfrak{h}}_-$
- $H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} =$ image of $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \subset \widehat{M}$ under the quotient $\widehat{M} \cong GL_1(\mathbb{C}) \times \widehat{H}_- \twoheadrightarrow \widehat{H}_-$.

注意到 $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$ 是 $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^P$ 的 Levi 因子。因此我们有作用 $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^P \twoheadrightarrow H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$ $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$。此外， $V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$ 与 $V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 同构，因为被遗忘的 $\mathfrak{gl}_1$ 因子不含非零幂零元。这些对象构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{H} & \hookleftarrow & \widehat{P} & \twoheadrightarrow & \widehat{M} & \twoheadrightarrow & \widehat{H}_- \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \hookleftarrow & H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} & \twoheadrightarrow & H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \twoheadrightarrow & H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \xleftarrow{q_2} & V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} & \xrightarrow{q_1} & V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow[\cong]{u} & V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathfrak{h}} & \hookleftarrow & \widehat{\mathfrak{p}} & \twoheadrightarrow & \widehat{\mathfrak{m}} & \twoheadrightarrow & \widehat{\mathfrak{h}}_-
\end{array} \tag{4.2}$$

因此我们得到商叠之间的态射

$$[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] \xleftarrow{q_2} [H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}} \backslash V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}}] \xrightarrow{q_1} [H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}] \xrightarrow{u} [H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}].$$

该**Lusztig 诱导**是函子

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{H}} := Rq_{2*} \circ q_1^* \circ u^* : D^b(H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow D^b(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}})$$

注意，复合中的每一步都会保留半单复形。事实上，拉回u^* 是沿着一个连通正规子群的膨胀函子；映射 q_1 是光滑的；叠 上的推前 Rq_{2*} 定义为诱导等价 $[H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^P \backslash V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^P] \cong [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash (H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \times_{H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}}} V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^P)]$ 随后沿适当映射 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \times_{H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}^{\widehat{P}}}$ 进行（导出）层论推前

M

$V^{P}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \to V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$，此处适用分解定理。因此，我们可以将 $\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{H}$限制在半单复形上：

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{H}} : \mathrm{SPer}(H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}) \longrightarrow \mathrm{SPer}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}).$$

以下猜想的证明仍在进行中 [CDX]。

猜想 4.3. 在格罗滕迪克群层面上，我们有 $\mathcal{D}^{*}_{\widetilde{\lambda}_j} =$ 诱导表示$_{\widehat{P}}^{H}$。

在此猜想下，定理 3.14 等价于以下陈述。

定理 4.4. 设 $\lambda^{\mathbb{R}} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 G的一个主导积分无穷小特征标。假设存在 $1 \leqslant j \leqslant n$ 使得 $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ （设 $\lambda_{n+1} = 1 + (1-\delta)/2$）。那么以下交换图可交换

$$\begin{array}{ccc} K\,\mathrm{Per}(H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & K\,\mathrm{Per}(\widehat{K} \backslash X_{\lambda_-^{\mathbb{R}}}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Ind}_{\widehat{P}}^{\widehat{H}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Rp_{2*} \circ p_1^{*}} \\ K\,\mathrm{Per}(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & K\,\mathrm{Per}(\widehat{K} \backslash X_{\lambda}^{\mathbb{R}}), \end{array}$$

其中 $\lambda_-^{\mathbb{R}} = \lambda^{\mathbb{R}} - e_j$，且 $\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}$是 $\lambda_-^{\mathbb{R}}$ 在对应 *2.42* 下的像。

证明。 通过展开（4.2）中 Vogan 簇的满秩部分与其中切片之间的关系，即可证明该定理。

记 $\varphi\colon V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \to V^{reg,\,\diamond}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 为 2.35 中定义的投影。定义

- $V^{\widehat{P},reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} := V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} \cap \widehat{\mathfrak{p}}$,
- $V^{\widehat{P},reg,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} := \varphi(V^{\widehat{P},reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}})$.

记 φ_P为投影 $V^{P,\,reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \twoheadrightarrow V^{P,reg\,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$，它是 φ 的限制。令 $V^{reg}_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 为 $V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 的满秩部分。定义 $V^{reg,\,\diamond}_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$，并通过遗忘与 φ 相同的次数来定义投影映射 φ_-；也就是说，若 φ 遗忘 $V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$ 中的分量 $\mathrm{Hom}(W_{-\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}})$ （分别为 $\mathrm{Hom}(W_{-1}, W_0) \times \mathrm{Hom}(W_0, W_1)$），则 φ_- 遗忘 $V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 中的分量 $\mathrm{Hom}(W^{-}_{-1}, W^{-}_{1})$（分别为 $\mathrm{Hom}(W^{-}_{-1}, W^{-}_{0}) \times \mathrm{Hom}(W^{-}_{0}, W^{-}_{1})$）2 2。类似地定义 $\varphi_M\colon V^{reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \to V^{reg,\,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$。那么，同构 $\bar{u}\colon V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$ 将 φ_M 与 φ_- 对应起来。这些对象构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \xleftarrow{q_2} & V^{\widehat{P}}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow{q_1} & V_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow[\cong]{u} & V_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \longleftarrow & V^{\widehat{P},reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \twoheadrightarrow & V^{reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow{\cong} & V^{reg}_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_P}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_M}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_-}\downarrow \\ V^{reg,\diamond}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}} & \longleftarrow & V^{\widehat{P},reg,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow{q_1^{\diamond}} & V^{reg,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} & \xrightarrow{\cong} & V^{reg,\diamond}_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}} \end{array} .$$

这里，q_1 只是商映射 $\widehat{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow \widehat{\mathfrak{m}}$ 的限制，而从次数来看，$q_1^{\diamond}$ 与 q_1 相同。在此交换图中，只有顶部中间的方块不是笛卡尔的。

现在我们来看切片，即 φ 的纤维。根据定义，P，我们固定的元素 $x^{\diamond}$ 位于 $V^{reg,\,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$。记作 $\bar{x}^{\diamond} = q_1^{\diamond}(x^{\diamond}) \in V^{reg,\,\diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$，并对其在.....中的像使用相同的记号

$V^{reg,\ \lambda^{\mathbb{Q}_p}\ \diamond}$。那么，纤维 $\varphi^{-1}(x^\diamond)$、 $\varphi_P^{-1}(x^\diamond)$、 $\varphi_M^{-1}(\bar{x}^\diamond)$ 和 $\varphi_-^{-1}(\bar{x}^\diamond)$ 通过映射 q_2、 q_1和 u，都与其中任一个相同

$$\{(f_{-1}, f_0) \in \mathrm{Hom}(W_{-1}, W_0)_{reg} \times \mathrm{Hom}(W_0, W_1)_{reg} \mid f_0^* = -f_{-1}\}$$

若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 支持在 $\mathbb{Z}$ 上，或

$$\{f_{-\frac{1}{2}} \in \mathrm{Hom}(W_{-\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}})_{reg} \mid f_{-\frac{1}{2}}^* = -f_{-\frac{1}{2}}\}$$

若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 支持在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 上。根据命题 2.36，这些纤维还可进一步与 $\mathbf{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}$、$\mathbf{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}$ 或 $GL_n(\mathbb{C})$ 等同，为方便起见，我们将其记作 F。

现在我们希望将满秩部分写成诱导空间。对于 $V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$、 $V^{reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$ 和 $V^{reg}_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}$，命题 2.36 适用（关于 $V^{reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$，需对 GL_1-因子稍作修改）。对于 $\widehat{V}^{P,\ reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$，我们有类似的结果：

引理 4.5。

(1) $V^{\widehat{P},\ reg\ \diamond}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$，构成单个 $H^{\widehat{P}}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}$-轨道。因此，

$$[H^{\widehat{P}}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}} \backslash V^{\widehat{P},reg}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}] \cong [H^{\widehat{P}}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) \backslash \varphi_P^{-1}(x^\diamond)].$$

(2) 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) & \hookleftarrow & H^{\widehat{P}}_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) & \hookrightarrow & H_{\lambda_-^{\mathbb{Q}_p}}(\bar{x}^\diamond) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \varphi^{-1}(x^\diamond) & \xleftarrow[\cong]{q_2} & \varphi_P^{-1}(x^\diamond) & \xrightarrow[\cong]{u \circ q_1} & \varphi_-^{-1}(\bar{x}^\diamond) \end{array}$$

- 若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$上，则交换图同构于

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) & \hookleftarrow & \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}, \lambda_-^{\mathbb{R}}) & \hookrightarrow & \widehat{P}(\lambda_-^{\mathbb{R}}) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ F & = & F & = & F \end{array}$$

- 若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支撑于 $\mathbb{Z}$ 上，且 H 不是偶正交的，则交换图同构于

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) \times S\,\mathrm{Isom}(W_0) & \hookleftarrow & \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}, \lambda_-^{\mathbb{R}}) \times S\,\mathrm{Isom}(W_0) & \hookrightarrow & \widehat{P}(\lambda_-^{\mathbb{R}}) \times S\,\mathrm{Isom}(W_0) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ F & = & F & = & F \end{array}$$

其中 $S\,\mathrm{Isom}(W_0)$ 表示 $(W_0, \langle -, - \rangle)$ 的等距群，行列式为 1。对于 H 偶正交情形，只需将 $S\mathrm{Isom}$ 替换为 Isom。

暂且假设这一点。因此，如果 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 支撑在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 上，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
[\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}})\backslash F] & \xleftarrow{p_2} & [\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}},\lambda^{\mathbb{R}}_{-})\backslash F] & & \xrightarrow{\qquad\qquad p_1\qquad\qquad} & & [\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}_{-})\backslash F] \\
\big|\cong & & \big|\cong & & & & \big|\cong \\
[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\backslash\varphi^{-1}(x^\diamond)] & \leftarrow & [H^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(x^\diamond)\backslash\varphi_P^{-1}(x^\diamond)] & \to & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(\bar{x}^\diamond)\backslash\varphi_M^{-1}(\bar{x}^\diamond)] & \to & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}(\bar{x}^\diamond)\backslash\varphi_-^{-1}(\bar{x}^\diamond)] \\
\big|\cong & & \big|\cong & & \big|\cong & & \big|\cong \\
[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] & \longleftarrow & [H^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}\backslash V^{\widehat{P},reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}] & \longrightarrow & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}\backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}] & \longrightarrow & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}\backslash V^{reg}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}] \\
{\scriptstyle\iota_{geom}}\big\downarrow & \text{(Cartesian)} & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\iota_{geom,-}} \\
[H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}] & \xleftarrow{q_2} & [H^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}\backslash V^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}] & \xrightarrow{q_1} & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}] & \xrightarrow{u} & [H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}\backslash V_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}]
\end{array},$$

若 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{Fr})$ 支持在 $\mathbb{Z}$ 上，则顶行中的群将替换为与 $S\mathbf{Isom}(W_0)$ 或 Isom 的乘积。因此，由基变换可得，

$$\iota^*_{geom}\circ \mathrm{Ind}^{\widehat{H}}_{\widehat{P}} = \iota^*_{geom}\circ Rq_{2*}\circ q_1^*\circ u^* \cong Rp_{2*}\circ p_1^*\circ \iota^*_{geom,-}.$$

结合推论 2.38 中的映射 θ，定理的证明至此完成。

还需证明引理 4.5。

对于 (1)，考虑交换图

$$\begin{array}{ccc}
H^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M} & \twoheadrightarrow & H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-} \\
\bigcap & & \bigcap \\
V^{\widehat{P},reg,\diamond}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M} & \xrightarrow{u\circ q_1^\diamond} & V^{reg,\diamond}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}
\end{array}.$$

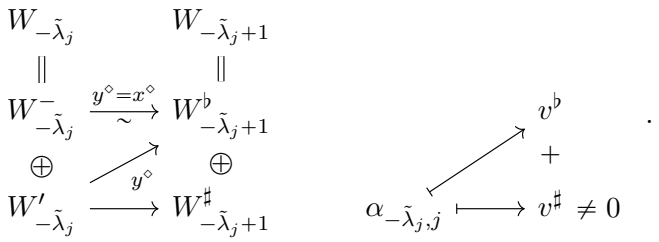
回想一下，根据命题 2.36，右侧的作用是传递的。因此，若 $H^P_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(\bar{x}^\diamond)$ 在纤维 $(u\circ q_1^\diamond)^{-1}(\bar{x}^\diamond)$ 上传递作用，则引理 4.5 的第 (1) 部分成立。将 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(\bar{x}^\diamond)$ 视为 $H^P_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(\bar{x}^\diamond)$ 的一个子群，只需证明 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(\bar{x}^\diamond)$ 传递作用即可。

纤维 $(u\circ q_1^\diamond)^{-1}(\bar{x}^\diamond)$ 中的不同元素 $y^\diamond$ 仅在次数 $-\tilde{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_j-1$ 分量上有所不同。根据引理 2.25，只需考虑负次数。在次数 $-\lambda_j$，$y^\diamond$ 由两部分组成：其在 $W^-_{-\tilde{\lambda}_j}$ 上的限制与 $x^\diamond|_{W^-_{-\tilde{\lambda}_j}} = \bar{x}^\diamond|_{W^-_{-\tilde{\lambda}_j}}$ 一致，而其在直线 $W'_{-\tilde{\lambda}_j} = \mathbb{C}\alpha_j$ 上的限制。因此，$y^\diamond$ 完全由 $y^\diamond(\alpha_j)$确定，而 $y^\diamond_j$ 满秩这一条件意味着 $y^\diamond(\alpha_j)\notin x^\diamond(W^-_{-\tilde{\lambda}_j})$。换言之，为避免混淆，我们将 2.48 中选取的基向量记作 $\alpha_{i,j}\in W_i$，而不记作α_j。我们可以将其分解为

$$W_{-\tilde{\lambda}_j+1} = W^\flat_{-\tilde{\lambda}_j+1}\oplus W^\sharp_{-\tilde{\lambda}_j+1}$$

其中，$W^\flat_{-\tilde{\lambda}_j+1} = x^\diamond(W^-_{-\tilde{\lambda}_j})$ 由前 $j-1$ 个基向量$\alpha_{-\tilde{\lambda}_j+1,1},\dots,\alpha_{-\tilde{\lambda}_j+1,j-1}$张成，而$W^\sharp_{-\tilde{\lambda}_j+1}$由其余基向量$\alpha_{-\tilde{\lambda}_j+1,j},\dots$张成。相应地分解$y^\diamond(\alpha_{-\tilde{\lambda}_j,j}) = v^\flat + v^\sharp$。那么，$y^\diamond$ 具有满秩意味着 $v^\sharp\neq 0$。上述讨论可概括为

如下图所示



现在我们声称， $y^\diamond$ 和 $x^\diamond$ 属于同一个 $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}(\bar{x}^\diamond)$-轨道。为此，回顾注2.30可知， $H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}(\bar{x}^\diamond)$ 对$W^-_{-\tilde{\lambda}_j}\oplus W_{-\tilde{\lambda}_j+1}$ 的限制为

$$\left\{\left((\bar{x}^\diamond_{-\tilde{\lambda}_j})^{-1}\circ A\circ \bar{x}^\diamond_{-\tilde{\lambda}_j}, \begin{pmatrix} A & B\\ & C\end{pmatrix}\right) \mid A\in GL(W^\flat_{-\tilde{\lambda}_j}), B\in \mathrm{Hom}(W^\sharp_{-\tilde{\lambda}_j}, W^\flat_{-\tilde{\lambda}_j}), C\in GL(W^\sharp_{-\tilde{\lambda}_j+1})\right\}$$

其中 $(\bar{x}^\diamond_{-\tilde{\lambda}_j})^{-1}$取在 $W^\flat_{-\tilde{\lambda}_j}$上。由于 C可以是 $GL(W^\sharp_{-\tilde{\lambda}_j+1})$中的任意元素，因此存在一种 C 的取法，使得$Cv^\sharp = x^\diamond(\alpha_{-\tilde{\lambda}_j,\ j}) = \alpha_{-\tilde{\lambda}_j+1,\ j}$，即 $W_{-\tilde{\lambda}_j+1}$的第 j个基向量。由于B 可以任意取值，因此存在一种取法使得 $Bv^\sharp = -v^\flat$。然后，令 A为单位矩阵，我们得到

$$\begin{pmatrix}\mathrm{id} & B\\ & C\end{pmatrix}\cdot y^\diamond(\alpha_{-\tilde{\lambda}_j,j}) = v^\flat + Bv^\sharp + Cv^\sharp = x^\diamond(\alpha_{-\tilde{\lambda}_j,j})$$

因此，对于任何限制在 $W_{-\tilde{\lambda}_j}\oplus W_{-\tilde{\lambda}_j+1}$ 上等于 $\left(\mathrm{id}\ \begin{pmatrix}\mathrm{id} & B\\ & C\end{pmatrix}\right)$ 的 $g\cdot y^\diamond = x^\diamond$ 元素

$g\in H_{\lambda_M^{\mathbb{Q}_p}}(\bar{x}^\diamond)$， $y^\diamond\in (q_1^\diamond)^{-1}(\bar{x}^\diamond)$ 都与 $x^\diamond$处于同一轨道，第（1）部分得证。

现在来看第（2）部分。为简便起见，设 $\lambda^{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Fr})$ 支持在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ 上；另一种情形类似。最直接的证明方法是，使用基底2.48，直接考察注2.30中的稳定子矩阵描述。回忆注2.30，对于 $i<0$，子空间

$$W_i^\circ := \mathrm{span}\{\alpha_{i,1+\dim W_{i-1}},\dots,\alpha_{i,\dim W_i}\}\subset W_i$$

一个与 $x^\diamond(W_{i-1})\subset W_i$互补的空间。类似地定义 $W^{-,\ \circ}_{\ i}$，从而得到 $\bar{x}^\diamond(W^-_{i-1})^{\tilde{}}$ $^{\tilde{}}$在 W_i^-中的一个补空间。若只考察次数 $-\lambda_j$ 和 $-\lambda_j+1$，这些空间可以用其基向量很好地描述:

$$\begin{aligned}
W_{-\tilde{\lambda}_j-1}=W^-_{-\tilde{\lambda}_j-1}:&\quad \alpha_1,\dots,\alpha_d\quad (d:=\dim W_{-\tilde{\lambda}_j-1})\\
W_{-\tilde{\lambda}_j}=W^-_{-\tilde{\lambda}_j}\oplus\mathbb{C}\alpha_j:&\quad \overbrace{\underbrace{\alpha_1,\dots,\alpha_d}_{\bar{x}^\diamond(W^-_{-\tilde{\lambda}_j-1})}}^{x^\diamond(W_{-\tilde{\lambda}_j-1})},\overbrace{\underbrace{\alpha_{d+1},\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j}_{W^{-,\circ}_{-\tilde{\lambda}_j}}}^{W^\circ_{-\tilde{\lambda}_j}}\\
W_{-\tilde{\lambda}_j+1}=W^-_{-\tilde{\lambda}_j+1}:&\quad \overbrace{\underbrace{\alpha_1,\dots,\alpha_d,\alpha_{d+1},\dots,\alpha_{j-1},\alpha_j}_{\bar{x}^\diamond(W^-_{-\tilde{\lambda}_j})}}^{x^\diamond(W_{-\tilde{\lambda}_j})},\overbrace{\underbrace{\alpha_{j+1},\dots}_{W^{-,\circ}_{-\tilde{\lambda}_j+1}}}^{W^\circ_{-\tilde{\lambda}_j+1}}.
\end{aligned}$$

接下来，在次数 $-\lambda_j-1$、$-\lambda_j$ 和 $-\lambda_j+1$时， $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)$ 的一个元素具有如下形式:

$$\left(\begin{pmatrix} & \\ \cdots, & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} \end{pmatrix}, \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * & * \\ & & g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j} \\ & & g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * & * & * \\ & & g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j} & * \\ & & g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} & * \\ & & & & g_{-\tilde{\lambda}_j+1} \end{pmatrix}, \cdots \right)$$

其中 $g_i \in GL(W_i^\circ)$,

$$g_{-\tilde{\lambda}_j} = \begin{pmatrix} g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j} \\ g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} \end{pmatrix} \in GL(W^\circ_{-\tilde{\lambda}_j})$$

是一个分块矩阵，其中 $g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} \in GL(W^-_{\cdot,\ -\tilde{\lambda}_j^\circ})$ 以及 $g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} \in GL(\mathbb{C}\alpha_{-\tilde{\lambda}_j,\ j})$。每个矩阵中的每个 $*$ 都是任意的，但必须与下一个矩阵中的对应项相等。类似地， $H^P_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(x^\diamond)$ 中的一个元素具有如下形式

$$\left(\begin{pmatrix} & \\ \cdots, & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} \end{pmatrix}, \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * & * \\ & & g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j} \\ & & & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * & * & * \\ & & g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j} & * \\ & & & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j} & * \\ & & & & g_{-\tilde{\lambda}_j+1} \end{pmatrix}, \cdots \right).$$

缺失的 $g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j}$ 是条件 $g_{-\tilde{\lambda}_j}(W^-_{-\tilde{\lambda}_j}) \subset W^-_{-\tilde{\lambda}_j}$ 所致，该条件来自 $\widehat{P}$。最后，一个属于 $H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}$的元素 $(\bar{x}^\diamond)$ 具有如下形式

$$\left(\begin{pmatrix} & \\ \cdots, & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} \end{pmatrix}, \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * \\ & & g'_{-\tilde{\lambda}_j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & g_{-\tilde{\lambda}_j-1} & * & * \\ & & g'_{-\tilde{\lambda}_j} & * \\ & & & g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j+1} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \\ & & & g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j+1} & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \end{pmatrix}, \cdots \right)$$

其中 $g'_{-\tilde{\lambda}_j} \in GL(W^-_{\cdot,\ -\tilde{\lambda}_j^\circ})$，且

$$g_{-\tilde{\lambda}_j+1} = \begin{pmatrix} g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j+1} & g^{12}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \\ g^{21}_{-\tilde{\lambda}_j+1} & g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \end{pmatrix} \in GL(W^{-,\circ}_{-\tilde{\lambda}_j+1})$$

是一个分块矩阵，其中包含 $g^{22}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \in GL(W^\circ_{-\tilde{\lambda}_j+1})$ 和 $g^{11}_{-\tilde{\lambda}_j+1} \in GL(\mathbb{C}\alpha_{-\lambda_j+1,\ j})$。从这些显式描述中可以清楚看出，投影 $\pi^-_{-\frac{1}{2}}\colon \prod_{i\leqslant -\frac{1}{2}} GL(W_i^-) \twoheadrightarrow GL(W^-_{-\frac{1}{2}})$（分别地，$\pi^-_{-\frac{1}{2}}\colon \prod_{i\leqslant -\frac{1}{2}} GL(W_i^-) \twoheadrightarrow GL(W^-_{-\frac{1}{2}}) = GL(W_{-\frac{1}{2}})$）在这些稳定子群上的限制是单射，并且

$$\pi_{-\frac{1}{2}}\big(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond)\big) \cap \pi^-_{-\frac{1}{2}}\big(H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}(\bar{x}^\diamond)\big) = \pi_{-\frac{1}{2}}\big(H^{\widehat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(x^\diamond)\big).$$

由命题 2.36，我们得到同构

$$\begin{array}{ccc} H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}}(x^\diamond) & \xrightarrow[\cong]{\pi_{-\frac{1}{2}}} & \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}) \\ \bigcap & & \bigcap \\ \varphi^{-1}(x^\diamond) & \xrightarrow{\cong} & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_-}(\bar{x}^\diamond) & \xrightarrow[\cong]{\pi^-_{-\frac{1}{2}}} & \widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}_-) \\ \bigcap & & \bigcap \\ \varphi^{-1}_-(\bar{x}^\diamond) & \xrightarrow{\cong} & F \end{array}.$$

因此，$\pi_{-\frac{1}{2}}$将 $H^{\hat{P}}_{\lambda^{\mathbb{Q}_p}_M}(x^\diamond)$同构地映到 $\widehat{P}(\lambda^{\mathbb{R}}, \lambda^{\mathbb{R}}_{-})$，且与 F上的作用相容。这就完成了（2）的证明。

□

Appendix A. Factorization of translation functors

本附录的灵感来自 [Tra01]。令

$$G^{an} := U(n,0) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \,|\, {}^t\bar{g}g = I_n\},$$

以及 T为对角矩阵子群。通过扭曲 G^{an} 的有理结构，定义其内形式 $G' := U(p,q)$ G^{an} $I_{p,q}$。于是，在此对应下， $G'_{\mathbb{C}} = G^{an}_{\mathbb{C}}$和 T 是 G' 的子群。分别以 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t}$ 表示 G^{an} 和 T的复化李代数。将$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{gl}_n$ 等同，并将 $\mathfrak{t}$ 与对角矩阵李子代数等同。取 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$为上三角矩阵李子代数。以 $\Phi^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 表示与 $\mathfrak{b}$ 相关的正根集，以 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 表示单根集，并以 $W = W(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 表示 Weyl 群。通过微分，我们得到包含关系 $X^*(T) \hookrightarrow \mathfrak{t}^*$。将其像记为 Λ。令 $e_i \in \mathfrak{t}^*$ 为特征的像

$$\chi_i : T \to \mathbb{S}^1, \quad (t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_i.$$

它们构成了 $\mathfrak{t}^*$ 的一组基。将 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 的第 i 个系数记为 λ_i。对于 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$，若对所有 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$，均有 $\lambda_i - \lambda_j \in \mathbb{Z}$，则称 λ 是整的；若对所有 $1 \leqslant i < n$，均有 $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geqslant 0$，则称 λ 是支配的。

由于 W 通过置换 n 坐标忠实地作用于 $\mathfrak{t}^*$，我们可以通过令 $e_{w(i)} := w(e_i)$（对 $w \in W$）来将 W 与 S_n 等同。设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$。令 W_λ为 W中 λ的稳定子。我们将平移函子 $\psi_\lambda^{\lambda - e_i}$记为 $\mathcal{T}_i$。我们省略了 $\mathcal{T}_i$中的 λ，其具体含义应由上下文确定。我们将频繁使用以下平移函子的性质：

$$\psi^\lambda_\mu = \psi^{w(\lambda)}_{w(\mu)} \tag{A.1}$$

对任意 $\lambda,\ \mu \in \mathfrak{t}^*$ 和 $w \in W$。

引理 A.2。设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 是整的，且

$$\mu = \lambda - (e_{j_1} + \cdots + e_{j_r}), \quad j_1 < \cdots < j_r.$$

对于 $\lambda + \Lambda$ 上的任意虚表示相干族 Θ，

$$\psi^\mu_\lambda(\Theta(\lambda)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)).$$

证明。令 $L := \bigwedge^r(\mathsf{Std})$，它是 G' 的不可约表示，其相对于 T 的极端权为 $\nu_0 := e_{j_1} + \cdots + e_{j_r}$。注意权集 $wt(L) = W \cdot \nu_0$。因此， L 的所有权的重数均为一。根据相干族的定义，我们有

$$L^\vee \otimes \Theta(\lambda) = \sum_{\nu' \in wt(L^\vee)} \Theta(\lambda + \nu') = \sum_{\nu \in wt(L)} \Theta(\lambda - \nu).$$

Then

$$\psi^\mu_\lambda(\Theta(\lambda)) = \sum_{\substack{\nu \in wt(L): \\ \lambda - \nu \in W \cdot \mu}} \Theta(\lambda - \nu).$$

不难看出，对于任意的 $\nu \in wt(L)$, $\lambda - \nu \in W \cdot \mu$ 当且仅当 $\nu \in W_\lambda \cdot \nu_0$。此外，若 $s_1(\nu_0) = s_2(\nu_0)$ 对于 $s_1,\ s_2 \in W_\lambda$，则 $s_2^{-1} s_1 \in W_\mu \cap W_\lambda$。因此，

$$\psi^\mu_\lambda(\Theta(\lambda)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(\lambda - s(\nu_0)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\lambda - \nu_0)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)).$$

□

命题 A.3. 假设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 是整的，且

$$\mu = \lambda - (e_{j_1} + \cdots + e_{j_r}), \quad j_1 < \cdots < j_r.$$

若 $\lambda_{j_1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{j_r}$，则

$$m \cdot \psi_\lambda^\mu = \mathcal{T}_{j_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{j_r}$$

在格罗滕迪克群中，其中 $m = |\mathrm{Stab}_{S_r}(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_r})|$ 和 S_r 是对称群，它通过置换 λ_{j_i}'s 作用。

证明。我们可以选取 $w \in W$，使得 $w(\lambda), w(\mu)$ 均为支配的，且 $w(j_1) < \cdots < w(j_r)$。那么，只需证明

$$m' \cdot \psi_{w(\lambda)}^{w(\mu)} = \mathcal{T}_{w(j_1)} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{w(j_r)},$$

其中 $m' = |\mathsf{Stab}_{S_r}(w(\lambda)_{w(j_1)}, \cdots, w(\lambda)_{w(j_r)})| = m$。因此，我们假设 λ, μ 均为支配的，并对 r 进行归纳来证明该公式。若 $r = 1$，则结论显然。令

$$\lambda' = \lambda - (e_{j_2} + \cdots + e_{j_r}).$$

由归纳假设，可设

$$m' \cdot \psi_\lambda^{\lambda'} = \mathcal{T}_{j_2} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{j_r},$$

其中 $m' = |\mathsf{Stab}_{S_{r-1}}(\lambda_{j_2}, \cdots, \lambda_{j_r})|$。于是

$$\mathcal{T}_{j_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{j_r} = m' \cdot (\mathcal{T}_{j_1} \circ \psi_\lambda^{\lambda'}).$$

对于任意无穷小特征为 χ_λ 的 G' 的不可约表示 π，我们取一个定义在 $\lambda + \Lambda$ 上的相干族，使得 $\Theta(\lambda) = \pi$。由引理 A.2，得

$$\psi_\lambda^{\lambda'}(\pi) = \psi_\lambda^{\lambda'}(\Theta(\lambda)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_{\lambda'}} \Theta(s(\lambda')),$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{j_1}(\Theta(s(\lambda'))) = \psi_{\lambda'}^{\mu}(\Theta(s(\lambda'))) = \psi_{s(\lambda')}^{s(\mu)}(\Theta(s(\lambda'))) &= \sum_{t \in W_{s(\lambda')} / W_{s(\lambda')} \cap W_{s'(\mu)}} \Theta(ts(\mu)) \\ = \sum_{t \in W_{s(\lambda')} / W_{s(\lambda')} \cap W_{s'(\mu)}} \Theta(s(s^{-1}ts)(\mu)) &= \sum_{t \in W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu} \Theta(st(\mu)).\end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{T}_{j_1} \circ \psi_\lambda^{\lambda'}(\pi) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_{\lambda'}} \mathcal{T}_{j_1}(\Theta(s(\lambda'))) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_{\lambda'}} \sum_{t \in W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu} \Theta(st(\mu)).$$

注意，$W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu$ 可表示为 $\{(j, j_1) \in S_n \,|\, j \leqslant j_1, \lambda_j = \lambda_{j_1}\} \subseteq W_\lambda$。于是自然嵌入

$$W_{\lambda'} \cap W_\lambda / W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu \to W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu$$

是一个双射。因此

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{j_1} \circ \psi_\lambda^{\lambda'}(\pi) &= \sum_{s \in W_\lambda / W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)) \\ &= |\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}| \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)) = |\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}| \psi_\lambda^\mu(\pi).\end{aligned}$$

由于

$$|\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}| = |\{1 \leqslant i \leqslant r \,|\, \lambda_{j_i} = \lambda_{j_1}\}|,$$

then

$$m = m' \cdot |\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}|.$$

至此，证明完成。 □

可以稍作推广如下。

推论 A.4. 假设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 是整的，并且

$$\mu = \lambda - (e_{j_1} + \cdots + e_{j_r}), \quad j_1 < \cdots < j_r.$$

那么对于任意满足 $\lambda_{j_{\sigma(1)}} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{j_{\sigma(r)}}$的 $\sigma \in S_r$，

$$m \cdot \psi_\lambda^\mu = \mathcal{T}_{j_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{j_{\sigma(r)}}$$

在格罗滕迪克群中，其中 $m = |$稳定子$_{S_r}(\lambda_{j_1}$、 $\cdots$、 $\lambda_{j_r})|$。

证明。 通过置换 $\{e_{j_i}\}_{i=1}^r$，将 S_r 包含在 W 中。由于 $\psi_\lambda^\mu = \psi_{\sigma^{-1}(\lambda)}^{\sigma^{-1}(\mu)}$，因此只需证明

$$m \cdot \psi_{\sigma^{-1}(\lambda)}^{\sigma^{-1}(\mu)} = \mathcal{T}_{j_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{j_r}.$$

设 $\lambda' = \sigma^{-1}(\lambda)$ 和 $\mu' = \sigma^{-1}(\mu)$。那么

$$\mu' = \lambda' - (e_{j_1} + \cdots + e_{j_r}), \quad j_1 < \cdots < j_r.$$

并且 $\lambda'_{j_1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda'_{j_r}$.注意 $m = |\mathrm{Stab}_{S_r}(\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_r})| = |\mathrm{Stab}_{S_r}(\lambda'_{j_1}, \cdots, \lambda'_{j_r})|$。于是由命题 A.3 可得。□

引理 A.5. 假设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 是整的，并且

$$\mu = \lambda - (e_{j_1} + e_{j_2}), \quad j_1 < j_2.$$

If $|\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| \neq 1$, *then*

$$\mathcal{T}_{j_1} \circ \mathcal{T}_{j_2} = \mathcal{T}_{j_2} \circ \mathcal{T}_{j_1}$$

在格罗滕迪克群中。

证明. 情形 $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$ 由推论 A.4 得出。现在假设 $|\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| > 1$。我们可以选取 $w \in W$，使得 $w(\mu)$, $w(\lambda)$ 是支配的。于是

$$w(\mu) = w(\lambda) - (e_{w(j_1)} + e_{w(j_2)}),$$

而这等价于证明

$$\psi_{w(\lambda)}^{w(\mu)} = \mathcal{T}_{w(j_1)} \circ \mathcal{T}_{w(j_2)} = \mathcal{T}_{w(j_2)} \circ \mathcal{T}_{w(j_1)}.$$

因此，我们还将假设 λ， μ 是支配的，且 $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} > 1$。由命题 A.3，我们已经得到

$$\psi_\lambda^\mu = \mathcal{T}_{j_1} \circ \mathcal{T}_{j_2}.$$

还需证明

$$\psi_\lambda^\mu = \mathcal{T}_{j_2} \circ \mathcal{T}_{j_1}.$$

令 $\lambda' = \lambda - e_{j_1}$。对于具有无穷小特征 χ_λ 的 G' 的任意不可约表示 π，我们取 $\lambda + \Lambda$ 上的一个相干族，使得 $\Theta(\lambda) = \pi$。按照命题 A.3 的证明，我们得到

$$\mathcal{T}_{j_2} \circ \mathcal{T}_{j_1}(\pi) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_{\lambda'}} \sum_{t \in W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu} \Theta(st(\mu)).$$

由于 $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} > 1$、 $W_{\lambda'}/W_{\lambda'} \cap W_\mu$ 可以表示为 $\{(j,\ j_2) \in S_n \,|\, j_1 < j \leqslant j_2,\ \lambda_j = \lambda_{j_2}\} \subseteq W_\lambda$。于是自然嵌入

$$W_{\lambda'} \cap W_\lambda / W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu \to W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_\mu$$

是一个双射。因此

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{j_2} \circ \mathcal{T}_{j_1}(\pi) &= \sum_{s \in W_\lambda / W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)) \\ &= |\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}| \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_\mu} \Theta(s(\mu)) = |\frac{W_\lambda \cap W_\mu}{W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu}| \psi_\lambda^\mu(\pi). \end{aligned}$$

最后， $W_\lambda \cap W_\mu = W_{\lambda'} \cap W_\lambda \cap W_\mu$。至此，证明完成。

□

我们还考虑 $\mathcal{T}_i$ 的以下推广。对于 $\{1, \cdots, n\}$ 和 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 中的任意线段 $[a, b]$，我们定义

$$\mathcal{T}_{[a,b]} := \psi_\lambda^{\lambda - \sum_{i=a}^{b} e_i}.$$

由推论 A.4，我们有

$$\mathcal{T}_{[a,b]} = \mathcal{T}_a \circ \cdots \circ \mathcal{T}_b \tag{A.6}$$

当 $\lambda_a > \cdots > \lambda_b$ 时。

命题 A.7。 在 *§3.2* 的设定中，设

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_{[1,\cdots,m_1]}^{t_1 - t_2} \circ \mathcal{T}_{[1, m_1+m_2]}^{t_2 - t_3} \circ \cdots \mathcal{T}_{[1,n]}^{t_r}.$$

Then

$$\pi(\psi^{\mathbb{R}}; \underline{l}, \underline{\eta}) = \mathcal{T}(\pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}; \underline{l}, \underline{\eta})).$$

证明。 这是对 [Tra01, 引理 3.13]) 的重新诠释。 □

引理 A.8. 在 *§3.2* 的设定下，我们有

$$\circ_{i=1}^{r} \left(\mathcal{T}_{1+\sum_{j<i} m_j} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{\sum_{j \leqslant i} m_j}\right)^{t_i} \pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}; \underline{l}, \underline{\eta}) = \mathcal{T}(\pi(\psi_{\gg}^{\mathbb{R}}; \underline{l}, \underline{\eta})).$$

证明. 由 (A.6) 和引理 A.5 可得。 □

假设 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ 是整的且 $1 \leqslant j \leqslant n$。在应用平移函子 $\mathcal{T}_j$ 时，通过取 W-共轭作用（参见 (A.1)），我们总可以假设 λ 是支配的，并且 $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ 或 $j = n$。这也是定理 3.14 的设定。令 $\lambda_- = \lambda - e_j$。为了求得 $(\psi_\lambda^{\lambda_-})^*$（参见定理 4.1），我们需要如下分解 $\psi_\lambda^{\lambda_-}$。

引理 A.9. 在上述设定下，令 $\lambda' = \lambda + (e_1 + \cdots + e_{j-1})$。则

$$\psi_\lambda^{\lambda_-} = \psi_{\lambda'}^{\lambda_-} \circ \psi_\lambda^{\lambda'}$$

在格罗滕迪克群中。

证明. 对于任意无穷小特征为 λ 的不可约表示 π of G'，我们取 G' 在 $\lambda + \Lambda$ 上的一族虚表示的相干族 Θ，使得 $\Theta(\lambda) = \pi$。由引理 A.2,

$$\psi_\lambda^{\lambda_-}(\Theta(\lambda)) = \sum_{s \in W_\lambda / W_\lambda \cap W_{\lambda_-}} \Theta(s(\lambda_-)).$$

根据以下一般事实，此表达式等于 $(\psi_{\lambda'}^{\lambda_-} \circ \psi_\lambda^{\lambda'})(\Theta(\lambda))$。 □

命题 A.10. 设 F 是 $\mathfrak{t}^*$ 的一个面， F' 和 F'' 是 F 闭包中的两个面。假设 $\lambda \in F$、 $\lambda' \in F'$、 $\lambda'' \in F''$ 都是整的。对于 $\lambda + \Lambda$ 上 G' 的任意虚表示相干族 Θ，我们有

$$\psi_\lambda^{\lambda''} \circ \psi_{\lambda'}^{\lambda}(\Theta(\lambda')) = |W_{\lambda'} \cap W_{\lambda''} / W_\lambda| \sum_{s \in W_{\lambda'} / W_{\lambda'} \cap W_{\lambda''}} \Theta(s(\lambda'')) \tag{A.11}$$

证明。 稍作修改即可由 [Vog81, 命题 7.2.22(b)],

$$\psi_{\lambda'}^{\lambda}(\Theta(\lambda')) = \sum_{s \in W_{\lambda'} / W_\lambda} \Theta(s\lambda).$$

此外，根据同上中的引理 7.3.1 和命题 7.2.22(a),

$$\psi_\lambda^{\lambda''}(\Theta(s\lambda)) = \psi_{s\lambda}^{s\lambda''}(\Theta(s\lambda)) = \Theta(s\lambda'').$$

因此

$$\psi_{\lambda}^{\lambda''} \circ \psi_{\lambda'}^{\lambda}(\Theta(\lambda')) = \sum_{s \in W_{\lambda'}/W_{\lambda}} \Theta(s\lambda'').$$

由于对于任意 $t \in W_{\lambda'} \cap W_{\lambda''}$，右侧等于 (A.11) 的右侧。□

要完成引理 A.9 的证明，只需注意到 $|W_{\lambda} \cap W_{\lambda_-}/W_{\lambda'}| = 1$。

Appendix B. Langlands parameter for Adams-Johnson packet

本节将证明定理 3.4。$\pi(\psi^{\mathbb{R}}; p, q)$ 的构造使用了上同调诱导 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$。我们将首先回顾 [KV95 中的一个一般结果，即推论 11.219]，该结果用于求得良好范围内 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$的朗兹商参数。随后，我们将在本附录余下部分将此结果应用于 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}; p, q)$。特别地，我们将遵循 [Ada11]，求得 $U(p, q)$的离散系列表示的完备朗兹参数。

B.1. 的朗兹商参数 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$。本小节将按照 [KV95] 回顾良好范围内 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$ 的朗兹商参数计算。

设 G 为连通实约化群，$\mathfrak{g}$ 为其复化李代数。设 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中一个 θ-稳定的抛物子代数，$\mathfrak{l}$ 和 $\mathfrak{u}$ 分别为其李维子代数和幂零根基。设 Λ 为 L 的一维特征，并将其与 $\mathfrak{l}^*$ 中的微分等同。取 $\mathfrak{l}$ 的 Cartan子代数 $\mathfrak{h}$，以及一个正根系 $\Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \subseteq \Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$。结合分解 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ 中的 $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h})$，我们得到 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 的正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) := \Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) \sqcup \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})$。记 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 的半和为 δ_G。若 $\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}), \mathrm{Re}\langle \Lambda|_{\mathfrak{h}} + \delta_G, \alpha\rangle > 0$，则称 $(\mathfrak{q}, \Lambda)$ 处于良好范围，或称 Λ 对于 $\mathfrak{q}$ 处于良好范围。此定义不依赖于 $\mathfrak{h}$ 或 $\Delta^+(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$ 的选取，因为 Λ 在 $L_{\mathbb{C}}$ 的伴随作用下是不变量。

定理 B.1 ([KV95，推论 11。219])。假设 Λ 处于 $\mathfrak{q}$的良好范围内，则 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$不可约。$(MAN、\xi、\nu)$ 的朗兹商参数（对应于 $A_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$）描述如下：设 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$ 是实李代数 $\mathfrak{l}_0$ 中一个极大分裂的、θ稳定的 *Cartan*子代数，L的 $\mathfrak{l}$的一个正根系$\Delta^+(\mathfrak{l}$取 $\mathfrak{a}_0$先于 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0$，且 $\Delta^+(\mathfrak{g}、\mathfrak{h}) = \Delta^+(\mathfrak{l}、\mathfrak{h}) \sqcup \Delta(\mathfrak{u}、\mathfrak{h})$，则

- $A =$ 指数 $\mathfrak{a}_0$，$\nu =$ 是 $\mathfrak{l}$的正限制根的半和；
- $MA = Z_G(\mathfrak{a}_0)$；
- ξ 是与 *Harish-Chandra* 参数 $(\Lambda|_{\mathfrak{h}} + \delta_G)|_{\mathfrak{t}}$相关的 M 的离散级数表示；
- N 由其复李代数 $\mathfrak{n}$ 确定，使得 $\Delta(\mathfrak{n}、\mathfrak{h})$ 包含 Δ^+ 实$(\mathfrak{l}、\mathfrak{h})$，且$\nu$ 在限制到 $\Delta(\mathfrak{n}$时是支配的，$\mathfrak{a})$。

这里，如果存在张成集 $\{E_1、\cdots、E_r\} \subset \mathfrak{a}_0$、$\{E_{r+1}、\cdots、E_s\} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{t}_0$，使得 $\Delta^+(\mathfrak{l}、\mathfrak{h})$ 由关于 $\{E_i\}$ 的字典序定义：当且仅当存在一个指标 i，使得对于 $1 \leqslant j \leqslant i-1$，$\langle \alpha、E_j\rangle = 0$ 且$\langle \alpha、E_i\rangle > 0$ 时，$\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}、\mathfrak{h})$ 为正，我们就称 $\Delta^+(\mathfrak{l}，\mathfrak{h})$ 将 $\mathfrak{a}_0$ 置于 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0$之前。

在 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}$ 的情形下，有：$p、q)$、$L \cong U(p_1、q_1) \times \cdots \times U(p_r、q_r)$。于是，$A$ 是 $U(p_d$ 的极大分裂环面的乘积，$q_d)$ 对于 $1 \leqslant d \leqslant r$ 成立。特别地，$A \cong \mathbb{R}^l_{>0}$ 和 $M \cong U(p-l、q-l) \times (S^1)^l$，其中 $l = l_1 + \cdots + l_r$ 和 $l_d = \min\{p_d、q_d\}$。M 的离散系列表示 ξ 可以写成张量积 $\sigma \boxtimes \chi$，其中 $U(p-l$ 的 σ 是离散系列表示，$(S^1)^l$ 的 χ 是特征。接下来，我们希望在 $U(p_d$ 中指定一个极大分裂环面 $q_d)$，并计算 ν（见 B.2）；描述 σ 的完整朗兰兹参数（见 B.3）。所有这些结果将在 B.4 和 B.5 中汇总，以给出 $\pi(\psi^{\mathbb{R}}$ 的完整朗兰兹参数；$p、q)$。

B.2. 中的极大分裂环面 $q)$，$q)$。令 $n=p+q$ 和 $l=\min\{p,\ q\}$。$G=U(p,\ q)$ 的任意极大分裂环面 A 都同构于 $\mathbb{R}^l_{>0}$。我们通过描述其李代数 $\mathfrak{a}_0$ 来指定其中一个。

首先，我们引入一些术语。对于 $I\subseteq\{1,\ \cdots,\ n\}$ 和 $\nu=(\nu_1,\ \cdots,\ \nu_n)\in\mathbb{C}^n$，我们将 ν的一个 I块称为一个元组 $\nu_I:=(\nu_i)_{i\in I}$。对于 $I,\ J\subseteq\{1,\ \cdots,\ n\}$ 和 $X=(x_i^j)\in\mathfrak{gl}_n$，我们将 X 的一个$I\times J$块称为其子矩阵$X_I^J:=(x_i^j)_{i\in I}^{j\in J}$。

在本小节中，设B $=\{1,\ \cdots,\ l\}$、D $=\{l+1,\ \cdots,\ n-l\}$和C $=\{n-l+1,\ \cdots,\ n\}$。然后取 A，使其李代数 $\mathfrak{a}_0$ 由满足以下条件的 $X\in\mathfrak{gl}_n$ 构成

$$X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}}=\begin{pmatrix}&&a_1\\&\iddots&\\a_l&&\end{pmatrix},\quad X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}&&a_l\\&\iddots&\\a_1&&\end{pmatrix},\ \text{with } a_i\in\mathbb{R},$$

且在其 B $\times$ C 和 C $\times$B 块之外的元素均为零。对于这样的 A，其中心化子 $Z_G(A)$ 等于 MA，其中 $M\cong U(p-l,\ q-l)\times(S^1)^l$。更明确地说，每个 $X\in M$都有

$$X_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}e^{c_1\sqrt{-1}}&&\\&\ddots&\\&&e^{c_l\sqrt{-1}}\end{pmatrix},\quad X_{\mathrm{C}}^{\mathrm{C}}=\begin{pmatrix}e^{c_l\sqrt{-1}}&&\\&\ddots&\\&&e^{c_1\sqrt{-1}}\end{pmatrix},\ \text{with } c_i\in\mathbb{R},$$

$X_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}}\in U(p-l,\ q-l)$，并且在其 B $\times$B、D $\times$D 和 C $\times$C 块之外的元素均为零。

现在我们计算 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{gl}_n$中的正限制根的半和。令 $\mathfrak{t}\subseteq\mathfrak{gl}_n$ 为由对角矩阵组成的标准Cartan子代数，令 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{gl}_n$ 为由上三角矩阵组成的标准 Borel 子代数。它们确定正根系 $\{e_i-e_j\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}\subseteq\Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})$，其半和 $\delta_G\in\mathfrak{t}^*\cong\mathbb{C}^n$ 具有如下形式：$(\frac{n+1}{2}-1,\ \cdots,\ \frac{n+1}{2}-n)$。注意，相对于实形式 $U(p,\ q)$，$\mathfrak{t}$是紧的。考虑关于非紧根 e_i-e_{n+1-i}、$i\in$ B 的 Cayley 变换。它们彼此强正交，因此我们可以将这些 Cayley 变换复合起来，记作$\mathbf{c}$，并得到新的Cartan子代数 $\mathfrak{h}:=\mathbf{c}(\mathfrak{t})$。根据 [Kna96, (6.66)]，$\mathfrak{h}=\mathfrak{t}'\oplus\mathfrak{a}$可描述如下。令 E_i^j为初等矩阵，其 $(i,\ j)$项为 1，其余项均为 0。紧Cartan子代数 $\mathfrak{t}$ 分解为 $\mathfrak{t}^\Delta\oplus\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}\oplus\mathfrak{t}^\nabla$，其中

- $\mathfrak{t}^\Delta$ 由 $E_i^i+E_{n+1-i}^{n+1-i}$, $i\in$ B,
- $\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$ 张成;
- E_i^i, $i\in$ D,
- $\mathfrak{t}^\nabla$ 由 $E_i^i-E_{n+1-i}^{n+1-i}$, $i\in$ B 张成。

于是，$\mathbf{c}$ 在 $\mathfrak{t}':=\mathfrak{t}^\Delta\oplus\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}$上是恒等映射，并将 $\mathfrak{t}^\nabla$ 映到 $\mathfrak{a}$。更明确地说，$\mathbf{c}(E_i^i-E_{n+1-i}^{n+1-i})=E_i^{n+1-i}+E_{n+1-i}^i$。通过 Cayley 变换 $\mathbf{c}$，正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\subseteq\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 被映到正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\subseteq\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$。也可以验证，$\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 将 $\mathfrak{a}$置于 $\mathfrak{t}'$之前。因此，$\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$的半和，记作 ν，可通过将 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\circ\mathbf{c}^{-1}$ 的半和限制到 $\mathfrak{a}$来计算。在这些映射下

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbb{C}^n&\longrightarrow&\mathfrak{t}&\xrightarrow{\ \mathbf{c}\ }&\mathfrak{h}=\mathfrak{t}'\oplus\mathfrak{a}&\longleftarrow&\mathbb{C}^l\\(t_1,\cdots,t_n)&\longmapsto&\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}&&\begin{pmatrix}&&a_1\\&0&\\a_1&&\end{pmatrix}&\longmapsto&(a_1,\cdots,a_l)\end{array},$$

$\delta_G\in\mathfrak{t}^*\cong\mathbb{C}^n$ 被限制在 $(n-1、\ \cdots、\ n+1-2l)\in\mathbb{C}^l\cong\mathfrak{a}^*$，这表示所需的 ν。

B.3. $U(p, q)$的离散系列。本小节回顾附属于 $G = U(p, q)$（其中 $n = p+q$）的离散系列表示的完整朗格朗兹参数。我们主要遵循[KV95，第 XI 节8]，介绍一般连通实约化群 G的离散系列的 Harish-Chandra 参数化及上同调诱导构造。若 G 有离散系列，则它必定有紧致 Cartan 子群 T。我们固定 G的极大紧子群K，并假设 $T \subseteq K$。为方便起见，选取一个包含 $\mathfrak{t}$的 Borel 子代数 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$。它确定一个正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \subseteq \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$，正根半和记作 δ_G。正则支配权 $\mu \in \mathfrak{t}^*$ 表示 G的离散系列的无穷小特征，当且仅当 $\mu - \delta_G \in \mathfrak{t}^*$ 可提升为 T的一个特征。在这种情况下，对于每个 $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 都有一个无穷小特征为 μ 的离散系列$\pi_{w\mu}$，它由一个上同调诱导模实现。我们称$\pi_{w\mu}$的 $w\mu$ 为 Harish-Chandra 参数。两个离散系列$\pi_{w\mu}$ 和$\pi_{w'\mu}$ 同构，当且仅当 $w'w^{-1}$属于 $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$，其中 $\mathfrak{k}$是 K的复李代数。这些结果引自 [KV95，定理 11.178]。因此，无穷小特征为 μ的离散系列集合与 $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})\backslash W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$之间存在双射。

集合 $\{\pi_{w\mu} \mid w \in W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})\backslash W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})\}$构成一个 L-簇 $\Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}(G)$，它附属于某个离散 L-参数 $\phi^{\mathbb{R}}: W_{\mathbb{R}} \to \widehat{G} \rtimes$ 伽罗瓦群 $(\mathbb{C}/\mathbb{R})$。根据 [Ada11，第 5] 节， ϕ 由下式确定：

$$BC(\phi^{\mathbb{R}}) : \mathbb{C}^\times = W_{\mathbb{C}} \to \widehat{G}, \quad z \mapsto (\frac{z}{\bar{z}})^\mu \tag{B.2a}$$

其中， $\mu \in \delta_G + X^*(T) \subset \frac{1}{2}X^*(T)$被视为 $\frac{1}{2}X_*(\widehat{T})$中的一个元素。此外， $\phi(j) \in \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}}$ 在 $\widehat{T} \subseteq \widehat{G}$ 上的伴随作用为 $t \mapsto t^{-1}$。由于 μ是正则的，$\operatorname{Im}\phi^{\mathbb{R}} \subset \widehat{G} \rtimes W_{\mathbb{R}}$在 $\widehat{G}$ 中的中心化子是有限群 $\{t \in \widehat{T} \mid t^2 = 1\}$。因此， $A_{\phi^{\mathbb{R}}} = S_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong \{\pm 1\}^n$，其中 n 是 G的秩。

$\widehat{}$存在一种参数化 $\Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}(G) \to S_{\phi^{\mathbb{R}}}$，由若干性质所规定；其中最重要的一条是，L-簇中的泛型表示被映到 $S_{\phi^{\mathbb{R}}}$的平凡表示。这种参数化见 [Ada11，第 7]节（适用于与紧形式 G内同的实形式）。为简洁起见，我们不讨论一般情形，而是引用 loc.cit. 第 9 节中关于 $G = U(p, q)$ 的结果。必须同时考虑 G的所有纯内形式。更明确地说，取

$$\Pi^{\mathrm{pure}}_{\phi^{\mathbb{R}}}(G) := \bigsqcup_{p+q=n} \Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}(U(p, q)),$$

其中 $U(p, q)$和 $U(q, p)$在 $p \neq q$时表示不同的纯内形式。按照 [Ada11，第 2], 节，我们令 $z = ((-1)^{n-1}, \cdots, (-1)^{n-1}) \in (S^1)^n \cong T$, $\mathcal{X}_1(z) := \{t \in T \mid t^2 = z\}$，并且

$$x_{\mathrm{bp}} = \left(\sqrt{-1}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{p,q} = (\sqrt{-1})^{n-1} \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}.$$

于是我们得到

- a bijection $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\phi^{\mathbb{R}}}(G) \to \mathcal{X}_1(z)$ sending $\pi_{w\mu} \in \Pi_{\phi^{\mathbb{R}}}(U(p, q))$ to $(-1)^n w^{-1} x_{p,q}$,
- a bijection $\widehat{S}_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong \{\pm 1\}^n \to \mathcal{X}_1(z)$ sending $\epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ to ϵx_{bp}.

第一个双射由 [Ada11, (5.6)] 得出；这里， $w \in S_n$ 在 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ 上的作用为 $w\mu$: $= (\mu_{w^{-1}(1)}, \cdots, \mu_{w^{-1}(n)})$。第二个双射由 [Ada11, (6.10) 和 (9.3)] 得出。$\widehat{}$因此，在 $\pi_{w\mu}$ 的完整朗兰兹参数 (ϕ, ϵ) 中，元素 $\epsilon \in A_{\phi^{\mathbb{R}}} \cong \{\pm 1\}^n$ 是

$$\epsilon_i = \begin{cases} (-1)^{n-i}, & w(i) \leqslant p, \\ (-1)^{n+1-i}, & w(i) > p. \end{cases} \tag{B.2b}$$

备注 B.3。 当 n 为奇数时，我们对基点x_{bp} 的选择与 Adam 的选择 x_b 相差一个符号，这相当于选择了不同的泛型表示：Ada11 中的双射 $\widehat{S}_{\phi^{\mathbb{R}}} \to \Pi^{\mathrm{pure}}_{\phi^{\mathbb{R}}}(G)$（推论 9.6]）将平凡特征 $1_{S_{\phi^{\mathbb{R}}}}$ 映射到$U(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$的泛型表示，

而我们的双射将 $1_{S_{\phi^{\mathbb{R}}}}$映射到$U(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2})$的泛型表示。这两个泛型表示可以通过 $U(\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2})$与 $U(\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2})$之间的同构相识别，但在 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\phi^{\mathbb{R}}}(G)$中被视为不同的元素。 —— ——

B.4. 的显式朗兰兹商参数 $p,\ q$)。 令 $\psi^{\mathbb{R}}$ 为$U(p,\ q)$的一个 A-参数，其具有整正则无穷小特征和良奇偶性。对于 $\Pi_{\psi^{\mathbb{R}}}(U(p,\ q))$中的一个表示，我们将计算其标准模，由此可以容易地读出其完整朗兰兹参数。如第 1.1 节所述，将 $\psi^{\mathbb{R}}$ 的基变换分解为

$$BC(\psi^{\mathbb{R}})=\bigoplus_{i=1}^{r}(\frac{z}{\bar{z}})^{k_i/2}\boxtimes S_{m_i},\quad k_i,m_i\in\mathbb{Z}$$

并假设

- （奇偶性） $\forall i=1,\ \cdots,\ r$, k_i+m_i与 $n=p+q$具有相同的奇偶性，并且
- （正则性） $\forall i=1,\ \cdots,\ r-1$, $k_i-m_i\geqslant k_{i+1}+m_{i+1}$。

如 2.55 中所述， $\psi^{\mathbb{R}}$ 的无穷小特征由下式表示

$$\lambda:=\left(\frac{k_1}{2}+\frac{m_1-1}{2},\cdots,\frac{k_1}{2}-\frac{m_1-1}{2},\cdots,\frac{k_r}{2}+\frac{m_r-1}{2},\cdots,\frac{k_r}{2}-\frac{m_r-1}{2}\right)\in\mathbb{C}^n.$$

奇偶性和正则性条件意味着 $\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$ 是一个项取自 $\frac{n-1}{2}+\mathbb{Z}$的递减序列，因此我们处于第 3 节的设置中。——

纯 Arthur 包 $\Pi^{\mathrm{pure}}_{\psi^{\mathbb{R}}}(G)$由以下内容参数化

$$\mathcal{D}:=\{(\underline{p},\underline{q})\in\mathbb{N}^r\times\mathbb{N}^r\mid p_i+q_i=m_i\}\cong\frac{\{(\underline{l},\underline{\eta})\in\mathbb{N}^r\times\{\pm1\}^r\mid l_i\leqslant\frac{m_i}{2}\}}{(\frac{m_i}{2},+)\sim(\frac{m_i}{2},-)}=:\mathcal{E}.$$

回顾第 3 节中的双射

$$W(U(p,q),T)\backslash W(G_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}})/W(L_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}})\cong\mathcal{D}\cong\mathcal{E}$$

在本小节中，我们固定一个参数 (p,q) （由此得到一对 (l,η)），并为其在相应双陪集中的类选取一个代表元 $w\in S_n=W(G_{\mathbb{C}},T_{\mathbb{C}})$。将定理 B.1 特化到 $\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ l,\eta)=\pi(\psi^{\mathbb{R}};\ p,q)=A_{w(\mathfrak{q})}(w\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}})$。

回顾 $w(\mathfrak{q})$ 和 $w\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}}$ 的定义。我们定义了一个子群 $L\subseteq U(n,0)$，其复李代数为 $\mathfrak{l}=\mathfrak{gl}_{m_1}\times\cdots\times\mathfrak{gl}_{m_r}$，它是标准抛物子代数 $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{gl}_n$ 的 Levi 因子。接着，取 $L_w\subseteq U(p,q)$ 使其满足 $L_w(\mathbb{C})=(wL)(\mathbb{C})$。由此可得$L_w\cong U(p_1,q_1)\times\cdots\times U(p_r,q_r)$，并且特征 $w\Lambda_{L,\psi^{\mathbb{R}}}$ 在此同构下具有 $\det^{a_1}\boxtimes\cdots\boxtimes\det^{a_r}$ 的形式，其中

$$a_d=\frac{k_d+m_d-n}{2}+\sum_{c<d}m_c.$$

为简化记号，我们记

- $w(\mathfrak{q})$为 $\mathfrak{q}'$；
- L_w 为 L'；
- $\mathfrak{l}_w$ （ L_w的复李代数）为 $\mathfrak{l}'$；
- $w\Lambda_L$的微分，$\psi^{\mathbb{R}}|_T$ 为 $\Lambda'\in\mathfrak{t}^*$。

按照 B.1 小节的记法，将 $\mathfrak{q}'$ 的幂零根基记为 $\mathfrak{u}'$。在本小节中，我们将始终使用这些记号。

B.4.1. 指标划分。 取 P_d、$\mathrm{Q}_d\subseteq\{1,\ \cdots,\ n\}$，使得 $|\mathrm{P}_d|=p_d$、$|\mathrm{Q}_d|=q_d$，且 $\mathrm{P}_1<\cdots<\mathrm{P}_d<\mathrm{Q}_d<\cdots<\mathrm{Q}_1$。这里， $I<J$表示 I中的所有元素都小于 J中的任意元素。于是，我们的要求迫使

$$\mathrm{P}_d=\{p_1+\cdots+p_{d-1}<i\leqslant p_1+\cdots+p_d\},\quad \mathrm{Q}_d=\{n-(q_1+\cdots+q_d)<i\leqslant n-(q_1+\cdots+q_{d-1})\}.$$

我们可以在该双陪集中选取 $w \in S_n$，使其以保序的方式将 $\{m_1+\cdots+m_{d-1}、\ \cdots、\ m_1+\cdots+m_d\}$映射到 $\mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d$。同构 $L \xrightarrow{\simeq} U(p_1、\ q_1)\times\cdots U(p_r、\ q_r)$ 可以通过以下方式实现

$$X \mapsto \left(X^{\mathrm{P}_1\sqcup\mathrm{Q}_1}_{\mathrm{P}_1\sqcup\mathrm{Q}_1}, \cdots, X^{\mathrm{P}_r\sqcup\mathrm{Q}_r}_{\mathrm{P}_r\sqcup\mathrm{Q}_r}\right).$$

还有另一个划分 $\mathrm{P}_d\sqcup\mathrm{Q}_d = \mathrm{B}_d\sqcup\mathrm{D}_d\sqcup\mathrm{C}_d$，使得 $|\mathrm{B}_d| = l_d = |\mathrm{C}_d|$，且 $\mathrm{B}_d < \mathrm{D}_d < \mathrm{C}_d$。显然，$\mathrm{B}_d \subseteq \mathrm{P}_d$，$\mathrm{C}_d \subseteq \mathrm{Q}_d$，而 D_d 包含于 P_d 或 Q_d，这取决于$p_d > q_d$ 是否成立。令 $n_d = n + \sum_{c<d} p_c - q_c$，则 $i \mapsto n_d + 1 - i$ 给出一个反序双射 $\mathrm{B}_d \to \mathrm{C}_d$。

B.4.2. 分裂环面 A 及其特征 ν。我们首先希望选取一个极大分裂的θ-稳定 Cartan子代数 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}'_0 \oplus \mathfrak{a}_0$，其中 $\mathfrak{l}'_0$，并选取一个正根系 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\ \mathfrak{h})$ 使$\mathfrak{a}_0$先于 $\sqrt{-1}\mathfrak{t}'_0$。由于 $L' \cong U(p_1,\ q_1)\times\cdots\times U(p_r,\ q_r)$，我们可以按照 B.2 小节中的方法，对每个 $U(p_d,\ q_d)$分别作出选择，然后取直积。取以下空间:

- $\mathfrak{t}^\Delta = \mathfrak{t}^\Delta_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}^\Delta_r$，其中 $\mathfrak{t}^\Delta_d$由 $E^i_i + E^{n_d+1-i}_{n_d+1-i}$, $i \in \mathrm{B}_d$,
- $\mathfrak{t}_\mathrm{D} = \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_r}$张成，$\mathfrak{t}_{\mathrm{D}_d}$由 E^i_i, $i \in \mathrm{D}_d$张成，且
- $\mathfrak{t}^\nabla = \mathfrak{t}^\nabla_1 \oplus \cdots \mathfrak{t}^\nabla_r$由 $E^i_i - E^{n_d+1-i}_{n_d+1-i}$, $i \in \mathrm{B}_d$张成;
- $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r$由 $E^{n_d+1-i}_i + E^i_{n_d+1-i}$, $i \in \mathrm{B}_d$张成。

那么，$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^\Delta \oplus \mathfrak{t}_\mathrm{D} \oplus \mathfrak{t}^\nabla$ 是 $\mathfrak{l}$的紧嘉当子代数。令 $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{a}$，其中 $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}^\Delta \oplus \mathfrak{t}_\mathrm{D}$和 $A = \exp \mathfrak{a}_0$。

选择 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{t}) = \{e_i - e_j | i < j \in \mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d\}$。关于非紧根 $e_i - e_{n_d+1-i}$, $i \in \mathrm{B}_d$ 的 Cayley 变换的复合将 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{t}^\nabla$ 变为 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{a}$。通过此 Cayley 变换，正根系 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{t}) \subseteq \Delta(\mathfrak{l}',\mathfrak{t})$ 被映射为正根系 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{h}) \subseteq \Delta(\mathfrak{l}',\mathfrak{h})$，后者将 $\mathfrak{a}$ 置于 $\mathfrak{t}'$ 之前。因此，$\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{a}) \subseteq \Delta(\mathfrak{l}',\mathfrak{a})$ 与从 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{h}) \subseteq \Delta(\mathfrak{l}',\mathfrak{h})$ 得到的非零限制相同，而 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{a})$ 的半和 ν 与 $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{h})$ 的半和 $\delta_{L'}$ 的限制相同。按照 B.2 小节中的计算，我们知道 $\nu \in \mathfrak{a}^*$ 具有如下形式

$$(m_1-1,\cdots,m_1+1-2l_1;\cdots;m_r-1,\cdots,m_r+1-2l_r) \tag{B.4a}$$

在 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r \cong \mathbb{C}^{l_1+\cdots+l_r}$ 之下。

B.4.3. 群 M。中心化子 $Z_G(A)$等于 MA，其中 $M \cong U(p-l,\ q-l)\times(S^1)^l$。更明确地说，令 $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{D}_r$，其中 D_d如子子节 B.4.1 所述。则每个$X \in M$ 都有

$$X^{\mathrm{B}_d}_{\mathrm{B}_d} = \begin{pmatrix} e^{c_1\sqrt{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{c_{l_d}\sqrt{-1}} \end{pmatrix}, \quad X^{\mathrm{C}_d}_{\mathrm{C}_d} = \begin{pmatrix} e^{c_{l_d}\sqrt{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{c_1\sqrt{-1}} \end{pmatrix}, \text{ with } c_i \in \mathbb{R},$$

$X^\mathrm{D}_\mathrm{D} \in U(p-l,\ q-l)$，并且在 $\mathrm{B}_d\times\mathrm{B}_d$、$\mathrm{C}_d\times\mathrm{C}_d$ 和 $\mathrm{D}\times\mathrm{D}$ 块之外的元素均为零（$d = 1,\ \cdots,\ r$）。此外，$\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}^\Delta \oplus \mathfrak{t}_\mathrm{D}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的紧Cartan子代数，其中

- $\mathfrak{t}^\Delta = \mathfrak{t}^\Delta_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}^\Delta_r$被识别为 $(S^1)^{l_1} \times \cdots \times (S^1)^{l_r} \subseteq M$ 的复李代数,
- $t_\mathrm{D} = \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_r}$被识别为 $U(p-l$ 的紧Cartan子代数的复李代数，$q-l) \subseteq M$。

B.4.4. 离散系列 ξ。令 δ'_G为 $\Delta^+(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})'$:= $\Delta^+(\mathfrak{l}',\ \mathfrak{t}) \sqcup \Delta(\mathfrak{u}',\ \mathfrak{t})$的半和。由于从 $\mathfrak{t}$ 到 $\mathfrak{h}$的 Cayley 变换在 $\mathfrak{t}'$上为恒等变换，因此 M 的离散系列 ξ 具有 Harish-Chandra 参数 $(\Lambda' + \delta'_G)|_{\mathfrak{t}'} \in (\mathfrak{t}')^*$。我们将这个参数更明确地写出来。

在识别 $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{C}^n$ 下，Λ' 的 $\mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d$ 块的所有元素均等于

$$a_d = \frac{k_d + m_d - n}{2} + \sum_{c<d} m_c.$$

Note

- $\Delta^+(\mathfrak{l}',\mathfrak{t}) = \bigsqcup_d \{e_i - e_j \mid i<j \in \mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d\}$,
- $\Delta(\mathfrak{u}',\mathfrak{t}) = \bigsqcup_{c<d} \{e_i - e_j \mid i \in \mathrm{P}_c \sqcup \mathrm{Q}_c, j \in \mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d\}$.

于是，$\delta'_G \in \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{C}^n$ 的 $\mathrm{P}_d \sqcup \mathrm{Q}_d$ 块为

$$\left(\frac{n+1}{2} - \sum_{c<d} m_c - 1, \cdots, \frac{n+1}{2} - \sum_{c<d} m_c - m_d\right).$$

沿着.....取限制

$$\mathfrak{t}' = \bigoplus_{d=1}^{r} \mathfrak{t}_d^{\Delta} \oplus \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_d} \hookrightarrow \mathfrak{t},$$

并且可以验证

- 在 $\mathbb{C}^{l_d} \cong \mathfrak{t}_d^{\Delta}$, $\Lambda' + \delta'_G$ 上的所有项都等于

$$\left(a_d + \frac{n+1}{2} - \sum_{c<d} m_c - 1\right) + \left(a_d + \frac{n+1}{2} - \sum_{c<d} m_c - m_d\right) = k_d, \tag{B.4b}$$

- 在 $\mathbb{C}^{\mathrm{D}_d} \cong \mathfrak{t}_{\mathrm{D}_d}$, $\Lambda' + \delta'_G$ 上取如下形式

$$\left(\frac{k_d + m_d - 2l_d + 1}{2} - 1, \cdots, \frac{k_d + m_d - 2l_d + 1}{2} - (m_d - 2l_d)\right). \tag{B.4c}$$

记 $(\Lambda' + \delta'_G)|_{\mathfrak{t}^{\Delta}}$ 为 χ，并记 $(\Lambda' + \delta'_G)|_{\mathfrak{t}_{\mathrm{D}}}$ 为 $\mu_\circ$ 由于 $M \cong U(p-l, q-l) \times (S^1)^l$，根据上同调诱导的乘积性质，

$$\xi = \pi_{(\Lambda' + \delta'_G)|_{\mathfrak{t}'}} \cong \pi_\mu \boxtimes \chi,$$

其中，π_μ是 $U(p-l$的 $q-l)$ 离散系列，其 Harish-Chandra 参数为 μ； $\chi \in (\mathfrak{t}^{\Delta})^*$被提升为 $(S^1)^{l_1} \times \cdots \times (S^1)^{l_r}$的一个特征，仍记作 $\chi_\circ$

B.5. 的完整朗兹参数 $p\,q)_\circ$ 我们已经看到， $\pi(\psi^{\mathbb{R}} pq) = \underline{A}_{\mathfrak{q}'}(\Lambda')$ 是诱导表示 $\mathrm{Ind}_{\underline{M}\underline{A}\underline{N}}^{G}(\xi \boxtimes \nu)$的朗兹商，其中 $MA \cong U(p-l\,q-l) \times (S^1)^l \times \mathbb{R}^l_{>0}$，并且

$$\xi \boxtimes \nu \cong \pi_\mu \boxtimes \chi \boxtimes \nu.$$

仍需读　　出上述标准模中的完整朗兹参数 $(\phi^{\mathbb{R}} \epsilon)$ e.

B.5.1. 非温和部分。根据 **(B.4a)** 和 **(B.4b)**， $(S^1)^l \times \mathbb{R}^l_{>0} \cong (\mathbb{C}^\times)^l = (\mathbb{C}^\times)^{l_1} \times \cdots \times (\mathbb{C}^\times)^{l_r}$的特征 $\chi\boxtimes\nu$可改写为

$$\boxtimes_{d=1}^{r} \boxtimes_{j=0}^{l_d-1} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{k_d}{2}} (z\bar{z})^{\frac{m_d-1}{2}-j}.$$

在局部朗兰兹对应下，它确定了以下 l 维的 $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ 表示：

$$\bigoplus_{d=1}^{r} \bigoplus_{j=0}^{l_d-1} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{k_d}{2}} (z\bar{z})^{\frac{m_d-1}{2}-j}.$$

该表示的共轭对偶为

$$\bigoplus_{d=1}^{r} \bigoplus_{j=0}^{l_d-1} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{\frac{k_d}{2}} (z\bar{z})^{-\frac{m_d-1}{2}+j}.$$

上述两个表示构成了 $BC(\phi^{\mathbb{R}})$ 的非温和部分，如定理 **3.4** 所述。

B.5.2. 离散系列部分。 根据小节 B.3，要写出 π_μ 的完整朗兰兹参数 $(\phi_-^{\mathbb{R}},\ \epsilon_-)$，我们必须找出相对于 $\mathfrak{gl}_{|\mathrm{D}|}$ 中标准博雷尔子群支配的 $\mu_{\mathrm{Std}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{D}}^*$，以及 $\sigma \in W(\mathfrak{gl}_{|\mathrm{D}|},\ \mathfrak{t}_{\mathrm{D}})$，使得 $\mu = \sigma\mu_{\mathrm{Std}}$。这里，$\mathfrak{gl}_{|\mathrm{D}|}$ 被视为 $\mathbb{C}^{|\mathrm{D}|} \cong \mathfrak{t}_{\mathrm{D}} \subseteq \mathfrak{t} \cong \mathbb{C}^n$ 上的自同态，并以自然方式看作 $\mathfrak{gl}_n$ 的子代数。

由于 $k_d - m_d \geqslant k_{d+1} + m_{d+1}$ 对于 $1 \leqslant d \leqslant r-1$，因此由 (B.4c) 可知，$\mu_{\mathrm{Std}} \in \mathfrak{t}_{\mathrm{D}}^* \cong \mathbb{C}^{|\mathrm{D}|}$具有如下形式

$$\left(\frac{k_1}{2} + \frac{m_1 - 2l_1 - 1}{2}, \cdots, \frac{k_1}{2} - \frac{m_1 - 2l_1 - 1}{2}, \cdots, \frac{k_r}{2} + \frac{m_r - 2l_r - 1}{2}, \cdots, \frac{k_r}{2} - \frac{m_r - 2l_r - 1}{2}\right).$$

由 (B.2a)，$\phi_-^{\mathbb{R}}$ 具有基变换

$$BC(\phi_-^{\mathbb{R}}) = \bigoplus_{d=1}^{r} \left((\frac{z}{\bar{z}})^{\frac{k_d + (m_d - 2l_d - 1)}{2}} \oplus \cdots \oplus (\frac{z}{\bar{z}})^{\frac{k_d - (m_d - 2l_d - 1)}{2}} \right),$$

如定理 3.4 所示。

取划分 $\mathrm{D} = \Delta_1 \sqcup \cdots \sqcup \Delta_r$，使得 $|\Delta_d| = |\mathrm{D}_d|$，且 $\Delta_1 < \cdots < \Delta_r$。$\mu_{\mathrm{Std}}$ 的 Δ_d 块恰好是 μ 的 D_d 块。取 D 的置换 σ，它将 Δ_d 中的指标映射到 D_d中的指标，并对每个 $d = 1,\ \cdots,\ r$保持其顺序，于是有 $\mu = \sigma\mu_{\mathrm{Std}}$：按我们的记号，$\forall i \in \mathrm{D},\ \sigma\mu_{\mathrm{Std}}$ 在 i 处的元素为 $\mu_{\mathrm{Std},\ \sigma^{-1}(i)}$，故 $(\sigma\mu_{\mathrm{Std}})_{\mathrm{D}_d} = \mu_{\mathrm{Std},\ \sigma^{-1}(\mathrm{D}_d)} = \mu_{\mathrm{Std},\ \Delta_d} = \mu_{\mathrm{D}_d}$。在由 (B.2b) 给出的$\Pi_{\phi_-^{\mathbb{R}}}(U(p-l,\ q-l)) \to \widehat{A}_{\phi_-^{\mathbb{R}}} \cong \{\pm 1\}^{|\mathrm{D}|}$ 下，$\pi_{\sigma\mu_{\mathrm{Std}}}$ 被映射为 $\epsilon_- = (\epsilon_{-,\ i})_{i \in \mathrm{D}}$，其中

$$\epsilon_{-,i} = \begin{cases} (-1)^{|\mathrm{D}| - c_i}, & \sigma(i) \leqslant p, \\ (-1)^{|\mathrm{D}| + 1 - c_i}, & \sigma(i) > p, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant c_i \leqslant |\mathrm{D}|$ 表示 i 在 D 中的位置。由于 $\sigma(\Delta_d) = \mathrm{D}_d$，对于 $i \in \Delta_d,\ \sigma(i) \leqslant p$ 是否成立取决于 $\mathrm{D}_d \subseteq \mathrm{P}_d$ 还是 Q_d。因此，$\epsilon_- \in \{\pm 1\}^{|\mathrm{D}|}$ 还可以进一步描述如下：

- 它在每个 Δ_d 上交替；
- 它在 Δ_d 的起点处取值 $(-1)^{n-(m_1+\cdots+m_{d-1})}\mathrm{sgn}(p_d - q_d)$；
- 它在 Δ_d 的端点处取值 $(-1)^{n+1-(m_1+\cdots+m_d)}\mathrm{sgn}(p_d - q_d) = \eta_d$。

这也与定理 3.4 的结果一致；注意，索引 $\Delta_d \to \mu_{\mathrm{Std},\ \Delta_d} = [\frac{k_d}{2} - \frac{m_d - 2l_d - 1}{2}, \frac{k_d}{2} + \frac{m_d - 2l_d - 1}{2}] = [B_d + l_d,\ A_d - l_d]$ 是逆序的。

Appendix C. Parameterization of orbits in $K\backslash G/P$

我们沿用第2.1小节第2.5节中的记号。令 $\widehat{G} = GL_n(\mathbb{C})$。通过规定 $e_{w(i)} = w(e_i)$，将 $W^{\widehat{G}}$ 与对称群 S_n 等同，其中 $e_1,\ \cdots,\ e_n$ 是 $\widehat{\mathfrak{t}}$的标准基。令$\lambda = (\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$ 为 G的整主导无穷小特征。我们先考虑良奇偶情形，即当 n为奇数时取 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$，当 n为偶数时取 $\lambda \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z})^n$。

我们记

$$\mathfrak{I}_\lambda := \{s \in W^{\widehat{G}} \mid s^2 = 1,\ \text{and } s(i) = i \text{ if } \lambda_i = \lambda_{s(i)}\}. \tag{C.1}$$

注意，$W^{M(\lambda)}$ 通过共轭作用于 $\mathfrak{I}_\lambda$。

引理 C.2. 存在一个满射

$$\mathfrak{I}_\lambda / W^{\widehat{M}(\lambda)} \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda) \tag{C.3}$$

将 s 映到表示 s的置换矩阵 $\dot{s}$。

证明。令 B 为 G中的上三角矩阵子群。由 [RS90, §10.2]可知，我们有一个双射

$$\{s \in W^{\widehat{G}} \mid s^2 = 1\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{B}, \quad s \mapsto \dot{s}$$

这是一个反序映射，其中左侧配备 Bruhat序。对于满足 $s^2 = 1$的 $s \in W^G$，如果存在 i 使得 $s(i) \neq i$ 且 $\lambda_i = \lambda_{s(i)}$，那么 $\dot{s}$ 包含如下分块

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 其行与列由 $\{i,\ s(i)\}$ 标记。该分块在

$\{i,\ s(i)\}$-分块 $GL_2(\mathbb{C}) \subset M(\lambda)$ 的作用下与单位矩阵合同。换言之，存在 $g \in M(\lambda)$ 使得 ${}^t g\dot{s}g = \dot{s}'$，其中 $s' \in W^G$ 满足：对于 $j \neq i$ 或 $s(i)$，有 $s'(j) = s(j)$，且 $s'(i) = i$。按照上述方式对各个 i 重复这一过程，我们最终看到 $\dot{s}$ 与一个来自 $\mathfrak{I}_\lambda$ 的元素 $P(\lambda)$-合同。这表明我们有一个满射

$$\mathfrak{I}_\lambda \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda).$$

最后，若将 $s \in \mathfrak{I}_\lambda$ 替换为满足 $w \in W^{M(\lambda)}$ 的 wsw^{-1}，则令 $\dot{w}$ 为 w 的一个置换提升，我们有 ${}^t\dot{w} = \dot{w}^{-1}$。因此，$\dot{w}\dot{s}\dot{w}^{-1} = \dot{w}\dot{s}\,{}^t\dot{w}$ 与 $\dot{s}$ 属于同一个 $\widehat{P}(\lambda)$- 合同类，上述满射遂下降到 (C.3)。□

引理 C.4. 将指标集写成若干块的不交并

$$\{1,\dots,n\} = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_r, \qquad \lambda \text{ is constant on each } J_u,$$

使得

$$W^{\widehat{M}(\lambda)} \ \cong\ \mathrm{Sym}(J_1) \times \cdots \times \mathrm{Sym}(J_r),$$

通过共轭作用于 S_n。

对于 $s \in \mathfrak{I}_\lambda$，令

$$A_{u,v}(s) := \#\{\, i \in J_u :\ s(i) \in J_v \,\} \qquad (1 \leqslant u, v \leqslant r).$$

那么，当且仅当 s、$t \in \mathfrak{I}_\lambda$ 在 $W^{M(\lambda)}$ 下共轭时，

$$A_{u,v}(s) = A_{u,v}(t) \qquad \text{for all } u, v.$$

证明。设 $w \in W^{M(\lambda)}$。根据定义，w 逐块保持集合 J_u 不变。对于任意 u，v，我们有一个双射

$$J_u \xrightarrow{\ w\ } J_u, \qquad i \longmapsto w(i),$$

and

$$(wsw^{-1})(w(i)) = w(s(i)).$$

因此 $s(i) \in J_v$ 当且仅当 $(wsw^{-1})(w(i)) \in J_v$，计数可得 $A_{u,v}(wsw^{-1}) = A_{u,v}(s$).

对于 $s \in I_\lambda$，由定义可知，若 $s(i) \in J_u$ 且 $i \in J_u$，则 $s(i) = i$。因此，每个 $s \in \mathfrak{I}_\lambda$ 都是以下元素的乘积：(i) 位于每个 J_u 中的不动点，以及 (ii) 将两个不同块中的元素配对的对换。

定义这些互不相交的子集（对于固定的 s）

$$F_u(s) := \{\, i \in J_u :\ s(i) = i \,\}, \qquad E_{u,v}(s) := \{\, i \in J_u :\ s(i) \in J_v \,\} \quad (u \neq v).$$

Then

$$J_u = F_u(s) \ \sqcup \bigsqcup_{v \neq u} E_{u,v}(s), \qquad |F_u(s)| = A_{u,u}(s), \quad |E_{u,v}(s)| = A_{u,v}(s).$$

此外，由于 s 是一个对合，映射 s 限制为一个双射

$$s :\ E_{u,v}(s) \xrightarrow{\sim} E_{v,u}(s) \qquad (u \neq v).$$

假设 $A_{u,\ v}(s) = A_{u,\ v}(t)$ 对所有 u，v 均成立，其中 s，$t \in I_\lambda$。

(a) 对每个 u，任意选取一个双射

$$\beta_u :\ F_u(s) \xrightarrow{\sim} F_u(t)$$

它存在是因为 $|F_u(s)| = A_{u,u}(s) = A_{u,u}(t) = |F_u(t)|$。

(b) 对于每个满足 $u<v$ 的有序对 (u,v)，任意选取一个双射

$$\alpha_{u,v}:\ E_{u,v}(s)\xrightarrow{\sim}E_{u,v}(t)$$

其存在是因为 $|E_{u,\ v}(s)|=A_{u,\ v}(s)=A_{u,\ v}(t)=|E_{u,\ v}(t)|$。现在定义一个双射

$$\alpha_{v,u}:\ E_{v,u}(s)\xrightarrow{\sim}E_{v,u}(t)$$

按以下规则

$$\alpha_{v,u}(s(i))\ :=\ t(\alpha_{u,v}(i))\qquad (i\in E_{u,v}(s)).$$

这是良定义的且为双射，因为 $s:\ E_{u,\ v}(s)\to E_{v,\ u}(s)$ 和 $t:\ E_{u,\ v}(t)\to E_{v,\ u}(t)$都是双射。

(c) 对每个 u，定义一个映射 $w_u: J_u\to J_u$，如下:

$$w_u|_{F_u(s)}:=\beta_u,\qquad w_u|_{E_{u,v}(s)}:=\alpha_{u,v}\quad (v\neq u).$$

由于集合 $F_u(s)$ 和 $E_{u,\ v}(s)$ （对 $v\neq u$）划分了 J_u，且目标集合 $F_u(t)$ 和 $E_{u,\ v}(t)$ 以相同的基数划分 J_u，因此 w_u 是一个双射。故 $w_u\in$对称空间(J_u)。

Let

$$w:=w_1\cdots w_r\ \in\ \mathrm{Sym}(J_1)\times\cdots\times\mathrm{Sym}(J_r)\ \cong\ W^{\widehat{M}(\lambda)}.$$

只需验证交织恒等式

$$w\circ s=t\circ w\quad \text{on }\{1,\dots,n\}.$$

- 若 $i\in F_u(s)$，则 $s(i)=i$，且根据构造有 $w(i)\in F_u(t)$，所以 $t(w(i))=w(i)=w(s(i))$。- 若 $i\in E_{u,\ v}(s)$ 且 $u\neq v$，则 $s(i)\in E_{v,\ u}(s)$ 并且根据 $\alpha_{v,\ u}$ 的定义，

$$w(s(i))=w_v(s(i))=\alpha_{v,u}(s(i))=t(\alpha_{u,v}(i))=t(w_u(i))=t(w(i)).$$

因此 $w\circ s=t\circ w$，从而 $wsw^{-1}=t$。这表明 s 和 t 是 $W^{M(\lambda)}$-共轭的。证明完毕。□

命题 C.5。 映射 (C.3) 是一个双射。

证明。 将指标集 $\{1,\dots,n\}$ 写成若干块的不交并

$$\{1,\dots,n\}=J_1\sqcup\cdots\sqcup J_r$$

使得 λ 在每个 J_a 上为常数，并且在不同的块上取不同的值。对每个 $a=1,\dots,r$，令 $m_a:=|J_1|+\cdots+|J_a|$，并定义标准部分旗子空间

$$F_a:=\mathbf{Span}(e_1,\dots,e_{m_a})\subset\mathbb{C}^n,$$

从而 $P(\lambda)$ 恰好是部分旗 $0\subset F_1\subset\cdots\subset F_r=\mathbb{C}^n$ 的稳定子。给定$X\in$对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}$，令 $B_X(u,\ v):=u^tXv$为附属于 X 的非退化对称双线性形式。对于 $a,\ b\in\{1,\ .....,\ r\}$，定义整数

$$d_{a,b}(X):=\dim\big(F_a\cap F_b^{\perp_X}\big),\qquad F_b^{\perp_X}:=\{v\in\mathbb{C}^n: B_X(v,F_b)=0\}.$$

断言: $d_{a,\ b}(X)$ 在 $P(\lambda)$-合同下是不变量。

事实上，对于 $X'=p^tXp$有 $B_{X'}(u,\ v)=B_X(pu,\ pv)$，因此 $F_b^{\perp_{X'}}=p^{-1}(F_b^{\perp_X})$，因为对于 $p\in P(\lambda)$有$pF_b=F_b$。因此

$$d_{a,b}(X')=\dim(F_a\cap p^{-1}(F_b^{\perp_X}))=\dim(pF_a\cap F_b^{\perp_X})=\dim(F_a\cap F_b^{\perp_X})=d_{a,b}(X).$$

现在令 $X=\dot{s}$专门取为 $s\in\mathfrak{I}_\lambda$。由于 $B_{\dot{s}}(e_i,\ e_j)=1$当且仅当 $j=s(i)$，可检验S:

$$e_i\in F_b^{\perp_{\dot{s}}}\iff B_{\dot{s}}(e_i,F_b)=0\iff s(i)>m_b.$$

因此

$$d_{a,b}(\dot{s})=\#\{\,i\leqslant m_a:\ s(i)>m_b\,\}.\tag{C.6}$$

另定义

$$c_{a,b}(s):=\#\{\,i\leqslant m_a:\ s(i)\leqslant m_b\,\}=m_a-d_{a,b}(\dot{s}).$$

由矩阵 $(c_{a,\ b}(s))_{a,\ b}$，我们可以通过容斥公式从引理 C.4 中恢复每对块 $u,\ v$对应的数值 $A_{u,\ v}(s)$

$$A_{u,v}(s) = \big(c_{u,v}(s) - c_{u,v-1}(s)\big) - \big(c_{u-1,v}(s) - c_{u-1,v-1}(s)\big),$$

其中我们令 $c_{0,\ b} = c_{a,\ 0} = 0$。

对于 $s \in \mathfrak{I}_\lambda$，我们有 $A_{u,\ u}(s) = \#${的不动点为 s在 J_u} 中，而对于 $u \neq v$ 整数 $A_{u,\ v}(s)$统计了将 J_u 与 J_v配对的对换次数，并且是对称的：$A_{u,\ v}(s) = A_{v,\ u}(s)$。

假设 $\dot{s}$和 $\dot{t}$（其中 $s,\ t \in \mathfrak{I}_\lambda$）属于同一个 $\widehat{P}(\lambda)$-轨道。那么根据断言 A，对于所有 $a,\ b$，有 $d_{a,\ b}(\dot{s}) = d_{a,\ b}(\dot{t})$，因此 $c_{a,\ b}(s) = c_{a,\ b}(t)$，从而对于所有 $u,\ v$，有 $A_{u,\ v}(s) = A_{u,\ v}(t)$。由引理 C.4，$s$ 和 t通过 $W^{\widehat{M}(\lambda)}$共轭。因此，映射 $\mathfrak{I}_\lambda/W^{\widehat{M}(\lambda)} \to$ 对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda)$ 是单射。结合引理 C.2给出的满射性，它是一个双射。

□

现在我们转向坏奇偶性情形，即 n 是偶数且 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$。我们称 $s \in S_n$ 为无不动点的，如果对于任意 $i \in \{1、\ \cdots、\ n\}$，都有 $s(i) \neq i$。我们用 $\mathfrak{I}^S_{\widehat{G}}$表示 W^G中无不动点的

$\widehat{}$ $\frown$对合的集合。注意，$W^{M(\lambda)}$通过共轭作用在 $\mathfrak{I}^S_{\widehat{G}}$上作用。

引理 C.7。存在一个满射

$$\mathfrak{I}^S_{\widehat{G}}/W^{\widehat{M}(\lambda)} \twoheadrightarrow \mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda) \tag{C.8}$$

通过将 s 映射到矩阵 $\dot{s}$，其中 $\dot{s}$ 是提升 s 的带符号置换矩阵，满足

$$^t\dot{s} = -\dot{s}.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$证明。设 B 为 G中上三角矩阵构成的子群。由 [RS90, §10.2]可知，存在一个双射

$$\{s \in W^{\widehat{G}} \mid s^2 = 1, s \text{ is fixed point free}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Skew}_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{B}, \quad s \mapsto \dot{s}$$

该双射是反序的，其中左侧赋予 Bruhat序。与引理 C.2 的证明一样，$W^{\widehat{M}(\lambda)}$对 s 的共轭作用不会改变所得 $\dot{s}$的 $\widehat{P}(\lambda)$-合同类。因此，上述双射下降为满射 (C.8)。□

引理 C.9. 将指标集写成若干块的不交并

$$\{1, \ldots, n\} = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_r, \qquad \lambda \text{ is constant on each } J_u,$$

使得

$$W^{\widehat{M}(\lambda)} \ \cong\ \mathrm{Sym}(J_1) \times \cdots \times \mathrm{Sym}(J_r),$$

在 S_n 上通过共轭作用。

对于 $s \in \mathfrak{I}^S_{\widehat{G}}$，令

$$A_{u,v}(s) := \#\{\, i \in J_u :\ s(i) \in J_v \,\} \qquad (1 \leqslant u, v \leqslant r).$$

$\frown$那么，两个元素 s、$t \in \mathfrak{I}^S_{\widehat{G}}$ 在 $W^{M(\lambda)}$ 下共轭，当且仅当

$$A_{u,v}(s) = A_{u,v}(t) \qquad \text{for all } u, v.$$

证明。写作 $E_{u,v}(s) := \{\, i \in J_u :\ \ s(i) \in J_v \,\}$. 那么 $|E_{u,v}(s)| = A_{u,v}(s)$，且 s 限制为一个双射 $E_{u,\ v}(s) \xrightarrow{\sim} E_{v,u}(s)$，对所有 u, v 均成立。条件 $s \in \mathfrak{I}^S_G$ 表示没有不动点，但允许出现 $u = v$；此时 $s|_{E_{u,u}(s)}$是该子集上的无不动点对合。

假设对所有 $u,\ v$，$A_{u,\ v}(s) = A_{u,\ v}(t)$。

(i) 对每个 $u < v$，任取一个双射 $\alpha_{u,\ v} : E_{u,\ v}(s) \to E_{u,\ v}(t)$，并定义 $\alpha_{v,\ u} : E_{v,\ u}(s) \to E_{v,\ u}(t)$，使得 $\alpha_{v,\ u}(s(i)) := t(\alpha_{u,\ v}(i))$。这保证了与配对 J_u 和 J_v 的对换相容。

(ii) 对于每个 u，限制 $s|_{E_{u,\ u}(s)}$ 和 $t|_{E_{u,\ u}(t)}$ 都是定义在具有相同基数的集合上的无不动点对合$A_{u,\ u}$。因此，存在某个置换 $\beta_u \in$斜对称空间$(E_{u,\ u}(s))$使它们共轭。

现在通过如下定义 $w_u \in$对称空间(J_u)

$$w_u|_{E_{u,v}(s)} := \alpha_{u,v} \quad (v \neq u), \qquad w_u|_{E_{u,u}(s)} := \beta_u.$$

这些部分的定义域彼此不相交，且覆盖 J_u，所以 w_u 是 J_u的一个置换。令 $w := \frown w_1 \cdots w_r \in$对称空间$(J_1) \times \cdots \times$对称空间$(J_r) \cong W^{M(\lambda)}$。根据构造，可以逐个在每个 $E_{u,\ v}(s)$ 上验证$w \circ s = t \circ w$，因此 $wsw^{-1} = t$。这就证明了引理。□

命题 C.10. 映射 (C.8)是一个双射。

P证明。 假设 $\dot{s}$ 和 $\dot{t}$ 属于同一个 $\widehat{P}(\lambda)$-轨道，因此存在 $p \in \widehat{P}(\lambda)$ 使得

$$p^t \, \dot{s} \, p = \dot{t}.$$

令 $J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_r$为 $\{1, \ldots, n\}$ 在$\widehat{\ }$上的分块分解，其中 λ在每个块上保持常数，并令 $m_a := |J_1| + \cdots + |J_a|$。令 $F_a :=$ **张成**$(e_1, \ldots, e_{m_a})$，于是 $P(\lambda)$ 恰好是部分旗 $0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = \mathbb{C}^n$的稳定子。

对于 $X \in$斜对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}$，定义

$$d_{a,b}(X) := \dim\big(F_a \cap F_b^{\perp_X}\big), \qquad F_b^{\perp_X} := \{v \in \mathbb{C}^n : \ v^t X F_b = 0\}.$$

$\widehat{\ }$与对称情形完全相同，$d_{a,\ b}(X)$ 在 $P(\lambda)$-合同下是不变量，因此 $d_{a,\ b}(\dot{s}) = d_{a,\ b}(\dot{t})$ 对所有 a，b均成立。

对于 $X = \dot{s}$，容易验证，$e_i \in F_b^{\perp_{\dot{s}}}$当且仅当 $s(i) > m_b$（$\dot{s}$中的符号不会影响配对是否为零）。因此

$$d_{a,b}(\dot{s}) = \#\{\, i \leqslant m_a : \ s(i) > m_b \,\}, \qquad c_{a,b}(s) := \#\{\, i \leqslant m_a : \ s(i) \leqslant m_b \,\} = m_a - d_{a,b}(\dot{s}).$$

因此，对于所有 a，b，均有 $c_{a,\ b}(s) = c_{a,\ b}(t)$。与命题 C.5 的证明中一样，这些数决定块关联计数

$$A_{u,v}(s) := \#\{\, i \in J_u : \ s(i) \in J_v \,\},$$

通过对累积计数 $c_{a,\ b}$ 使用容斥原理得到。因此，对于所有 u，v，均有 $A_{u,\ v}(s) = A_{u,\ v}(t)$。

设 $\dot{s}$ 和 $\dot{t}$ 满足 s，$t \in \mathfrak{J}_{\widehat{G}}^S$，且二者属于同一 $\widehat{P}(\lambda)$-轨道。那么，对于所有 a，b，均有 $d_{a,\ b}(\dot{s}) = d_{a,\ b}(\dot{t})$，因而 $c_{a,\ b}(s) = c_{a,\ b}(t)$，于是对于所有 u，v，均有 $A_{u,\ v}(s) = A_{u,\ v}(t)$。由引理 C.9，$s$ 与 t 在 $W^{\widehat{M}(\lambda)}$下共轭。因此，映射 $\mathfrak{J}_{\widehat{G}}^S / W^{\widehat{M}(\lambda)} \to$斜对称空间$_n(\mathbb{C})_{reg}/\widehat{P}(\lambda)$ 是单射。

□

References

[AAM24] J. Adams、R. N. Arancibia 和 P. Mezo, *Equivalent Definitions of Arthur Packets for Real Classical Groups* **300** 2024 1503 , 《美国数学会回忆录》（），第 期。4790263

MR[92] ABV J. Adams、D. Barbasch 和 D. Vogan, *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups* 104, ¨ 1992 , 《数学进展》，第 卷，Birkhauser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，。[Ada11] J. Adams, *Discrete series and characters of the component group*, 《迹公式的稳定化》，《Shimura 变体的迹公式稳定化：算术应用》，第 1 卷，International Press，萨默维尔，2011年，369–387 页。[AdC] J. Adams 和 F. du Cloux, *Algorithms for representation theory of real reductive groups* 2, , 第 期–。MR[AGI+24] H. Atobe、W.-T. Gan、A. Ichino、T. Kaletha、A. Minguez 和 S.-W. Shin, *Local intertwining relations and co-tempered a-packets of classical groups* 2410 13504 2024 , arXiv: 。（）。[AJ87] J. Adams 和 J. F. Johnson, *Endoscopic groups and packets of nontempered representations*, 《Compositio Math.》64 (1987年)，第 3 期，271–309。[AM24] R. N. Arancibia 和 P. Mezo, *Equivalent definitions by arthur packets for pure inner forms of real classical groups* 2403 16748 2024 , 预印本，arXiv: 。（）。[AMR18] R.N. Arancibia、C. Mœglin 和 D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, 《Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.》（6）**27** (2018年)，第 5 期，1023–1105。[Ari96] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the hecke algebra of $G(m, 1, n)$*, 《京都大学数学杂志》**36** (1996年)，第 4 期，789–808。[Art84] J. Arthur, *On some problems suggested by the trace formula*, 《李群表示》，II（马里兰州大学公园市，1982年/1983年），《数学讲义丛书》，第 1041 卷，Springer，柏林，1984年，1–49 页。

[Art13], *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, 《Colloquium Publications》, 第 61 卷, 美国数学会, 2013年。[Ato22] H. Atobe, *Construction of local A-packets*, 《J. Reine Angew. Math.》790 (2022年), 1–51。[Ato23], *The set of local A-packets containing a given representation*, 《J. Reine Angew. Math.》804 (~~2023年~~), 263–286。[BT25] L. Barchini 和 P. Trapa, *A note on the orbits of a symmetric subgroup in the flag variety*, 《几何与分析中的对称性》, 第 1 卷, Toshiyuki Kobayashi 纪念文集, 《数学进展》, 第 357 卷, Birkh
¨ [2025] 2025, 225 239 4867013 auser/Springer, 新加坡, © 页–。
[ ]
MR CDX Y. Cai、T. Deng 和 B. Xu, *On an adjunction of Jacquet restriction and Lusztig induction*, 编写中。[CFM+22] C. Cunningham、A. Fiori、A. Moussaoui、J. Mracek 和 B. Xu, *Arthur packets for p-adic groups by way of microlocal vanishing cycles of perverse sheaves with examples* **276**, 《》, 《美国数学会回忆录》(2022 1353, +216 4391878), 第 期, ix。MR CG N. Chriss 和 V. Ginzburg,
[97]
Representation theory and complex geometry, Birkh¨auser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 1997年。[CT12] D. Ciubotaru 和 P. Trapa, *Duality between* $(n\ \mathbb{R})$ *and the degenerate affine Hecke algebra for* $\mathfrak{gl}(n)$ **134** 2012 1, 141 170
一般线性群, , 一般线性群, , , 《美国数学杂志》( ), 第 期–。MR 2876142
[16] *Parabolic induction and geometry of orbital varieties for* $GL(n)$Den T. Deng, arXiv 预印本 arXiv:1603.06387 (2016年)。[Den23], *Study of multiplicities in induced representations of* GL_n *through a symmetric reduction*, 《manuscripta mathematica》171 (2023年), 第 1 期, 23–72。[DHXZ25] T. Deng、C. Huang、B. Xu 和 Q. Zhao, *On a geometric comparison of representations of complex and p-adic* $_n$ 2504 15653 2025 一般线性群, 预印本, arXiv: 。( )。[HLL22] A. Hazeltine、B. Liu 和 C.-H. Lo, *On the intersection of local arthur packets for classical groups and applications* 2201 10539 2022 , 预印本, arXiv: 。
( )。[HTT] R. Hotta、K. Takeuchi 和 T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, 《数学进展》, 第 236 卷, Birkh¨auser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 译自 1995 年日文版, 译者为 Takeuchi。MR 2307361
[25] Hua C. Huang, *Non-zero condition on Mœglin-Renard's parametrization for Arthur packets of* $U(p,\ q)$, 预印本, arXiv:2409.09358v2 (2025年)。[KMSW14] T. Kaletha、A. Minguez、S.-W. Shin 和 P.-J. White, *Endoscopic classification of representations: inner forms of unitary groups* 1409 3731 2014 , 预印本, arXiv: 。
( )。[Kna96] A. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, 《数学进展》, 第 140 卷, Birkh¨auser Boston, 马萨诸塞州波士顿, 1996年。[Kot83] R. E. Kottwitz, *Sign changes in harmonic analysis on reductive groups*, 《美国数学会汇刊》278 (1983年), 第 1 期, 289–297。[KS] M. Kashiwara 和 P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, 《数学科学基础丛书》 [数学科学基本原理], 第 292 卷, Springer-Verlag, 柏林, 附有 Christian Houzel 撰写的法文篇章, 为
1990 1299726 原版的修订重
[95] *Cohomological induction and unitary representations*
印本。MR KV A. Knapp 和 D. Vogan, , 《普林斯顿数学丛书》, 第 45 卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1995 年。[Lan89] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, 《半单Lie群上的表示理论与调和分析》, 《数学综述专著》, 第 31 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1989年, 101–170 页。[Lus83] G. Lusztig, *Some examples of square integrable representations of semisimple p-adic groups*, 《美国数学会汇刊》277 (1983年), 第 2 期, 623–653。[Lus95a], *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups*, 《Internat. Math. Res. Notices》(1995年), 第 11 期, 517–589。[Lus95b], *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. II*, 《Representations of groups》, 第 16 卷, 1995年, 217 275页–。[Lus95c], *Study of perverse sheaves arising from graded Lie algebras* **112** 1995 2, , 《Adv. Math.》( ), 第 期 147 217 –。[Lus02a], *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups. II*, 《Represent. Theory》6 (2002年), 243–289。[Lus02b], *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. III*, 《Represent. Theory》6 (2002年), ~~202–242~~。[Mœg09] C. Mœglin, *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique*, 《自守形式与L-函数 II: 局部方面》, 《当代数学》, 第 489 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2009年, 179–257 页。[Mœg11], *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, 《关于某些 L-函数》, 《Clay 数学论文集》, 第 13 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011年, 333–374 页。

Paquets d'Arthur spéciaux unipotents aux places archimédiennes et correspondance de [Mœg17] ,*Howe* , 《群与代数的表示论、数论与不变量理论》, 《数学进展》, 第323卷, Birkh¨auser/Springer, Cham, 2017年, 469–502页。[Mok14] C.-P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, 《美国数学会回忆录》235（2014年）, 第1108号, vi + 248。[MR18] C. Mœglin 和 D. Renard, *Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires non quasi-déployés*, 《表示论、朗兰兹函子性与自守形式中的相对方面》, 《数学讲义丛书》, 第2221卷, Springer, Cham, 2018年, 341–361页。[MR19] *Sur les paquets d'Arthur des groupes unitaires et quelques conséquences pour les groupes classiques* **299** 2019 1, 53 88 , 《太平洋数学杂志》（）, 第–期。[MR20] , *Sur les paquets d'Arthur des groupes classiques réels*, 《欧洲数学会杂志》（JEMS）22（2020年）, 第6期, 1827–1892页。[MW03] C. Mœglin 和 J.-L. Waldspurger, *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour* $(2n+1)$ **152** 2003 3, 461 623 SO, 《数学发明》（）, 第–期。[RS90] R. W. Richardson 和 T. A. Springer, *The Bruhat order on symmetric varieties*, 《献给几何学》35（ 1990 1 3, 389 436 1066573 ）, 第–期。MR She D. Shelstad, [79] *Characters and inner forms of a quasi-split group over* R, 《组合数学》39（1979年）, 第1期, 11–45页。[Sol23] M. Solleveld, *A local Langlands correspondence for unipotent representations*, 《美国数学杂志》145（2023年）, 第3期, 673–719页。[Sol25] , *Graded Hecke algebras, constructible sheaves and the p-adic Kazhdan-Lusztig conjecture*, 《代数杂志》667（2025年）, 865–910页。[Tra01] P. Trapa, *Annihilators and associated varieties of* $A_q(\lambda)$ *modules for* $U(p,q)$, 《组合数学》129（2001年）, 第1期, 1–45页。[Vog81] D. Vogan, *Representations of real reductive lie groups*, 《数学进展》第15卷, Birkh¨auser Boston, 1981年（英文）。[Vog82] , *Irreducible characters of semisimple Lie groups. IV. Character-multiplicity duality*, 《杜克数学杂志》 **49** 1982 4, 943 1073 683010 （）, 第–期。MR Vog , ,《群与代数的表示论》, [93] *The local Langlands conjecture* 《当代数学》, 第145卷, 美国数学会, 美国罗得岛州普罗维登斯, 1993年, 305–379页。[VZ84] D. Vogan 和 G. Zuckerman, *Unitary representations with nonzero cohomology*, 《组合数学》53（1984年）, 第1期, 51–90页。[Wal07] J.-L. Waldspurger, *Le groupe* $_N$ *tordu* **137** 2007 2, 一般线性群, 235 336 *sur un corps p-adique. II*, 《杜克数学杂志》（）, 第–期。[Wal16] , *Representations of unipotent reduction for* $SO(2n+1)$*, ii: endoscopy*, 预印本, arXiv:1612.02635（2016年）。[Xu21] B. Xu, *A combinatorial solution to Mœglin's parametrization of Arthur packets for p-adic quasisplit* $Sp(N)$ *and* $O(N)$ **20** 2021 4, 1091 1204 , 《Jussieu数学研究所杂志》（）, 第–期。[Zel81] A. V. Zelevinsky, *The p-adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture*, 《泛函分析及其应用》15（1981年）, 第2期, 9–21, 96页。[Zel85] , *Two remarks on graded nilpotent classes*, 《数学科学进展》40（1985年）, 第1(241)期, 199–200页。MR 783619

Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Huairou District Beijing 101408, China
Email address: dengtaiw@bimsa.cn

Department of Mathematics, Tsinghua University, Haidian District Beijing 100084, China
Email address: hc21@mails.tsinghua.edu.cn

Yau Mathematical Sciences Center and Department of Mathematics, Tsinghua University, Haidian District Beijing 100084, China
Email address: binxu@tsinghua.edu.cn

Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Haidian District Beijing 100084, China
Email address: zhao qixian@tsinghua.edu.cn