arXiv:2603.16317v1 [stat.OT] 17 Mar 2026

# 非寿险定价中的多重校准与平衡公平

Michel Denuit 统计学、生物统计学与精算科学研究所 鲁汶数据分析与建模研究所 UCLouvain 新鲁汶，比利时 Marie Michaelides 数学与计算机科学学院 精算数学与统计学 赫瑞瓦特大学 爱丁堡，英国 Julien Trufin 数学系 布鲁塞尔自由大学（ULB） 布鲁塞尔，比利时

2026年3月18日

**摘要**

众所周知，自动校准是保险保费的一项重要要求，因为它能确保保费收入与相应的理赔在平均意义上相平衡，不仅在组合层面如此，在保费相近的各个群体内部也同样如此。此外，公平性已成为一项主要关切，因为不公平待遇可能使保险公司面临诉讼或声誉受损的风险。将公平性转化为条件均值独立性，使精算师能够将自动校准与公平性结合为多重校准这一概念。本文探讨多重校准在保险领域中的性质，并提出切实可行的实施方法，包括通过局部回归，或在各群体内进行偏差校正并纳入可信度调整。基于机动车保险数据的案例研究说明了多重校准在保险定价中的重要性。

**关键词：**保险定价、自动校准、公平性、充分性、多重校准。

# 1 引言与研究动机

财务均衡是保险定价中的一项重要属性，因为它能确保保费与相应的理赔金额在均值上相符。这一属性不仅必须在组合层面成立（整体平衡），也必须在有意义的投保人群体中成立。数值证据表明，机器学习工具（如提升回归树或神经网络）所产生的候选保费，可能与观察到的理赔总额存在显著偏差。参见 Denuit 等人（2019年）及其中的参考文献。Denuit 等人（2021）、Denuit 和 Trufin（2023年、2024）、Lindholm 等人（2023年）、W¨uthrich（2023年）以及 W¨uthrich 和 Ziegel（2024）提出以自动校准作为解决方案，因为它能确保支付相同保费的投保人所缴纳的金额与相应的理赔总额在均值上相符。

除财务均衡外，歧视是私人保险业的另一个重要问题。有关该主题的总体概述，读者可参阅例如 Frees 和 Huang（2023年）以及 Charpentier（2024）。欧盟禁止基于性别的歧视便是这方面的一个标志性案例。2011年，欧洲法院裁定，必须禁止任何基于性别的保险歧视。自2012年12月21日起，所有在欧盟开展业务的保险公司均须提供男女通用保费和保险金。在北美，种族是若干州和省份中另一个受保护特征的例子。欧盟指令中列出的受保护属性对于在欧盟运营的保险公司尤为重要。除性别外，该清单还包括其他一些常用于保险的特征，例如年龄、健康状况或残疾状况。再如，Fr¨ohlich 和 Williamson（2024）在其对公平机器学习技术的研究中，将“具有移民背景”视为敏感特征。

欧盟禁止在保险风险分类中使用性别的指令要求实现个体公平。一般而言，这意味着仅在禁止特征上存在差异的投保人所承担的保费必须相同。在这种情况下，敏感特征不会纳入风险分类方案，商业保费也不会以明确的方式取决于该敏感特征。然而，如果价目表中的某些费率因子与被排除的敏感特征相关，间接歧视或代理歧视仍可能存在。例如，机动车保险保费通常会因车辆动力或行驶距离而异。如果这些特征与性别相关——例如，男性往往驾驶动力更强的汽车，行驶距离也更长——那么保险保费仍会间接地基于性别而产生差别。欧盟指南明确考虑了这种情况，后文将对此进行说明。

本文讨论的是法律未要求实现个体公平的敏感特征。在这种情况下，保险公司可以让商业保费随敏感特征而变化。典型例子包括健康状况或残疾状况等受保护变量，以及作为禁止费率因子的代理变量。由于使用这些特征可能使保险公司面临消费者组织的投诉或监管机构的正式调查，因此，能够以某种待定义的方式证明价目表在接受审查的敏感特征方面具有公平性至关重要。

保险和机器学习文献中有多种关于公平性的处理方法。我们提及精算公平性、个体公平（或 Dwork 等，2012 年提出的无意识公平）、反事实公平（Kusner 等，2017 年），以及若干群体

公平性标准（Barocas 等人，2019 年提出的独立性、分离性和充分性）。本文沿用 Baumann and Loi（2023）的观点，他们主张在保险定价中采用弱版本的充分性具有重要意义。这一群体公平性概念要求在给定保费的条件下，响应变量与敏感特征条件均值独立。充分性基于条件均值独立性，因此直观上颇具吸引力，并且与自动校准结合得很好，由此形成了 Hebert-Johnson 等人（2018年）提出的多重校准概念。换言之，如果某项保费在整个保险组合中经过自动校准，且在每个群体内也经过自动校准，那么相对于将保险组合划分成的各个群体而言，该保费就是多重校准的。本文考察的群体根据敏感特征划分。Baumann and Loi（2023）在第3.3节中提到，将充分性强化为多重校准是未来研究的一个方向；而 Fissler 等人（2022年）在其工伤赔偿保险应用中，已实现按性别和薪资进行条件校准。本文进一步发展这些思路，并将公平性与自动校准联系起来。

本文其余部分安排如下。第2节将保险费率厘定问题形式化。第3节回顾自动校准概念。第4节专门讨论公平性概念，并介绍本文所考虑的、基于条件均值独立性的群体公平概念。第5节通过多重校准将自动校准与公平性结合起来，第6节则说明如何通过多重平衡校正来实现多重校准。第7节给出数值示例。最后，第8节总结本文的主要贡献并讨论研究结果。

# 2 非寿险定价

机器学习文献主要研究二元结果和算法式决策系统。典型例子包括犯罪风险评估、招聘、大学录取、贷款或社会服务干预等，这些场景通常对应“是或否”的情形。在保险核保阶段，二元响应变量很有用，因为保险公司需要决定是否承保某项风险。然而，在考虑保险定价时，分析中会纳入索赔相关响应变量（索赔次数、赔款严重程度和索赔总额），而这些响应变量并非二元变量（可以是整数型、连续型或混合型）。

本文考虑一般的索赔相关响应变量 $Y \geq 0$。为便于说明，可以认为 $Y$ 对应于保险组合中某位投保人的年度索赔频率。根据信度理论，我们将 $M$ 记为$Y$的真实均值，即

$$\mathrm{E}[Y|M=\mu]=\mu.$$

假设随机变量 $M$ 的期望有限。请注意，最后一个等式可以改写为 $\mathrm{E}[Y|M]=M$，几乎必然成立。本文中，随机变量之间的每个等式都假定以概率 1 成立，即几乎必然成立。

真实均值 $M$ 无法观测，纯属概念，但仍有助于对保险费率厘定问题进行形式化，其中 $M$ 对应于保险公司应收取的纯保费。这是因为，在适用大数定律的任何大型保险组合中，个体偏差 $Y-M$ 都会相互抵消。收取 $M$

对应于精算公平性，但这在实践中几乎不可能实现，因为 $M$ 无法观测。与算法公平性问题不同，保险中的风险分类针对的是无法在个体层面观测的 $M$。在群体层面， $M$的分布反映了相关保险公司所针对的被保险人群构成。

由于 $M$ 未知，保险公司只能使用其数据库中记录的有关各投保人的信息。这对应于随机向量 $\boldsymbol{X}$中汇集的特征集合 $X_1$、.....、 $X_p$。在这里，信息 $\boldsymbol{X}$ 被用来替代 $M$ ，因此我们假设给定 $M$时， $Y$与 $\boldsymbol{X}$ 相互独立。精算定价旨在基于 $\boldsymbol{X}$尽可能准确地评估纯保费。这意味着目标是响应变量 $Y$ 在给定可用信息$\boldsymbol{X}$时的条件期望 $\mu(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}]$ 。下文将 $\mu(\boldsymbol{X})$称为最佳估计价格，沿用 Lindholm 等（2022）的说法。注意，条件独立假设使我们可以写出

$$\mu(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}, M]\big|\boldsymbol{X}\big] = \mathrm{E}[M|\boldsymbol{X}]$$

因此， $\mu(\boldsymbol{X})$也能根据保险公司可获得的信息近似估算个体保费 $M$ 。

未知函数 $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(\boldsymbol{x}) = \mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}]$ 由技术保费 $\boldsymbol{x} \mapsto \pi_0(\boldsymbol{x})$近似表示。技术保费仅供内部用途，是对 $\mu(\boldsymbol{X})$最准确的近似。保险公司可据此计算投保人价值，例如将预期成本 $\pi_0(\boldsymbol{X})$与合同实际产生的收入进行比较。这些收入对应于实际收取的商业保费 $\pi(\boldsymbol{X})$，用于提供保险保障（不含税费、佣金和一般费用）。与 $\pi_0(\cdot)$相比，保费结构 $\pi(\cdot)$通常经过简化，会省略某些特征，或以较低的粒度使用这些特征。

下文假设 $\pi_0(\boldsymbol{X})$、 $\pi(\boldsymbol{X})$和 $\mu(\boldsymbol{X})$是连续随机变量，且在 $(0, \infty)$ 上具有正的概率密度函数。这样便于阐述；通常，只要可用信息 $\boldsymbol{X}$ 中至少包含一个连续特征，且函数 $\pi_0(\cdot)$和 $\pi(\cdot)$是由基于 $\boldsymbol{X}$构建的实数评分确定的连续递增函数，这一假设便成立。通常采用对数链接函数，并且 $\pi_0(\boldsymbol{x}) = \exp(\mathrm{score}_0(\boldsymbol{x}))$，其中 $\mathrm{score}_0(\boldsymbol{x})$由提升法、随机森林或神经网络得出。此外，为了提高透明度，并符合大多数保险商业信息技术系统所采用的乘法保费结构，$\pi(\boldsymbol{x})$是由广义加性模型生成的加性评分的指数。请注意，本文始终假设商业保费仅根据与风险相关的费率因子而变动，不包含非风险因素校正项（例如价格爬升）。为简单起见，我们假设保险期间为1年。如有需要，可将暴露量纳入分析，以考虑较短的保险期间；数值示例第7节中便采用了这种做法。

公平性仅适用于商业保费 $\pi(\boldsymbol{X})$。为了解这一情况，可以参考欧盟内性别这一例子：由于禁止将性别用于商业保费，因此性别不会影响商业保费，但通常会影响技术保费。商业保费可视为保险公司对投保人作出的决策，而技术保费则对应于预测，正如 Scantamburlo 等人（2025）所定义的那样。由于 $\pi_0(\cdot)$ 仅供内部用途，因此无需

使其具备公平性。相反，它必须尽可能准确，以便保险公司能够应对逆向选择，并监控因采用商业保费而在保险组合内产生的保费转移。具体而言，任何偏离 $\pi(\boldsymbol{X}) - \pi_0(\boldsymbol{X})$ 都对应着向另一种风险特征转移（若为正值）或从另一种风险特征转出（若为负值）。

本文聚焦于 $\pi(\cdot)$，在这一情形下，财务均衡与公平性都具有意义。不过值得一提的是，本文研究的公平概念能够提升任何候选保费的表现。因此，对于技术保费而言，提升其准确性（以任意布雷格曼损失衡量，包括偏差）同样有意义。

# 3 自动校准

一般而言，自动校准可确保：在借助所讨论的自动校准预测变量定义的邻域内，响应变量的平均值与预测变量的取值相匹配。参见例如 Kr¨uger 和 Ziegel（2021）。在自动校准下，支付相同保费的投保人所缴纳的金额，平均而言与相应的理赔总额相匹配。因此可以避免投保人之间的补贴性转移，从而有助于防止逆向选择效应。

接下来将在保险情境下对这一概念作形式化定义。

**Defi定义 3.1**。 若商业保费 $\pi(\cdot)$ 满足

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p] = p \text{ for all premium amount } p. \tag{3.1}$$

自动校准是保险定价中的一项重要性质，因为它确保每个支付相同保费的投保人群体平均而言都能实现自我融资。换言之，(3.1) 保证被收取相同保费的投保人所支付的保费 $p$ 恰好足以覆盖该群体的预期理赔额。

注意，(3.1) 可以等价地改写为

$$\mathrm{E}[Y - \pi(\boldsymbol{X})|\pi(\boldsymbol{X}) = p] = \mathrm{E}[\mu(\boldsymbol{X}) - \pi(\boldsymbol{X})|\pi(\boldsymbol{X}) = p] = 0 \text{ for all premium amount } p.$$

这表明，在平均意义上，支付相同保费的投保人群体内部，净现金流 $Y - \pi(\boldsymbol{X})$ 以及定价误差 $\mu(\boldsymbol{X}) - \pi(\boldsymbol{X})$ 会相互抵消。因此，自动校准似乎是候选保费一项颇具吸引力的要求。从概念上看，(3.1) 也可以用真实均值 $M$ 表示为 $\mathrm{E}[M|\pi(\boldsymbol{X})] = \pi(\boldsymbol{X})$，这保证了商业保费在平均意义上也反映了应收取的保费。注意，当 $\pi(\boldsymbol{X})$ 通过对加性评分取指数得到时，在 (3.1) 中也可以等价地按评分进行条件化。

# 4 公平概念

## 4.1 敏感特征

现在假设数据库中记录了一个敏感特征 $S$。虽然允许使用该特征，但必须格外谨慎，因为这可能使保险公司面临有关

不公平待遇的投诉。本文假设，对于某些 $j_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$， $S = X_{j_0}$ 以便简化说明；相关讨论见下文备注4.2。这意味着保险公司实际上会使用 $S$ 进行保费计算，但希望证明其使用方式公平且负责任。 $S$ 的典型例子包括健康状况或残疾状况等敏感特征，以及社会经济特征。在法律要求个体公平的情况下，例如欧盟禁止使用性别作为特征， $S$ 可能对应于一个与被禁止使用的特征相关的特征，如下例所示。

**例4.1**。 鉴于欧盟禁止基于性别的歧视，法律所要求的个体公平意味着保费 $\pi(\cdot)$ 必须满足约束$\pi(\boldsymbol{x},$ 男性$) = \pi(\boldsymbol{x},$ 女性$) = \pi(\boldsymbol{x})$，对所有风险特征 $\boldsymbol{x}$均如此。换言之，具有相同费率因子 $\boldsymbol{x}$ 的男性和女性必须支付相同的保费。如果不满足这一条件，就会构成直接歧视。因此，这项要求与“无意识公平”或“盲视”的概念相似，但法律在一定程度上禁止使用代理变量。根据《欧盟法院就C-236/09号案件（Test-Achats）判决对理事会指令2004/113/EC的适用指南》第17条，仍允许使用可能与性别相关的真实风险因素。指南还举例说明了禁令的适用范围。简而言之，保险公司不得在价目表中纳入对理赔没有影响、但与性别相关的特征。因此，仍允许使用代理变量替代性别，即使这会导致间接歧视。在此，$S$ 可以是一个与性别高度相关、同时又是真实风险因素的费率因子 $X_{j_0}$，前提是保险公司希望证明其遵守的不仅是反歧视法的字面规定，也包括其立法精神。

注释 4.2。 尽管本文重点讨论对于某些 $j_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$， $S = X_{j_0}$的情形，但敏感特征 $S$ 也可能由 $\boldsymbol{X}$中的若干特征组合而成，例如残疾和区域，以确保残疾人无论居住在哪个区域，都能平等获得保险的机会。在这些更复杂的情形中，也可以进行类似分析，其中 $S = \psi(\boldsymbol{X})$适用于某个给定函数 $\psi$。请注意， $S$ 甚至可能是另一项预测或保费。例如，$\psi(\boldsymbol{X})$可以是根据费率因子 $\boldsymbol{X}$对投保人性别的预测。

注释 4.3。 在本文所考虑的公平概念下，实践中与 $S$ 不包含于 $\boldsymbol{X}$ 或无法从 $\boldsymbol{X}$ 推导出的情形无关。事实上，这种情况意味着，要么法律禁止使用 $S$，要么保险公司拒绝让保费取决于 $S$。除非 $Y$ 和 $S$ 在给定 $\pi(\boldsymbol{X})$的条件下相互独立，否则任何公平的保费（按下文介绍的多重校准意义而言）都必然取决于$S$，因而与法律规定的禁令或保险公司的商业决策相冲突。

## 4.2 充分性

个体公平要求仅在被禁止特征上存在差异的个体必须受到同等对待，而群体公平性则是一种整体性概念，它源于对由敏感特征 $S$ 定义的群体进行比较。群体公平性要求，采用定价结构 $\pi(\cdot)$ 所产生的利益或损害应在这些群体之间得到公平分配

，其中公平分配由恰当的群体公平性标准界定。经典的群体公平性标准包括独立性、分离性和充分性。例如，Baumann and Loi（2023年）和 Charpentier（2024）讨论了这些标准在保险领域中的应用。

一般而言，对于公平性标准并没有共识，不同情境可能需要不同的标准。此外，各项公平性标准往往彼此不兼容，因此必须选择其中一项。根据 Baumann and Loi（2023年）所做的分析，充分性似乎是私人保险情境下恰当的公平性条件。严格来说，充分性对应于给定 $\pi$ 时，$Y$ 与 $S$ 的条件独立性（$\boldsymbol{X}$）。这是一个相当严格的要求，会排除人口统计均等，因为人口统计均等要求 $\pi$（$\boldsymbol{X}$）与 $S$ 独立。根据 Charpentier（2024，第命题 9.3），如果候选保费 $\pi$（$\cdot$）相对于 $S$ 满足独立性和充分性，那么 $Y$ 与 $S$ 独立。因此，除非 $S$ 不影响 $Y$，否则没有任何保费 $\pi$（$\cdot$）能够同时满足人口统计均等和充分性。

本文采用 Baumann and Loi（2023年）保留的较弱版本的充分性，其定义借助于给定 $\pi$时 $Y$ 与 $S$ 的条件均值独立性（$\boldsymbol{X}$）。计量经济学中使用条件均值独立性这一概念，以判断回归模型是否需要额外的特征。事实证明，这一概念在保险保费情境下也有直观的解释。由此得到以下定义。

**定义4.4**。 如果保费 $\pi(\cdot)$ 相对于敏感特征 $S = X_{j_0}$取值于 $\mathcal{S}$ 是公平的，则

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s] = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s'] \text{ for all } p \text{ and } s, s' \in \mathcal{S}. \tag{4.1}$$

要求（4.1）在直观上颇具吸引力。这意味着，只要支付相同金额的保费，由 $S$ 所划分的各组之间的预期给付就相等。保险公司可以利用这一论点证明，在保费计算中使用 $S$ 是负责任的，并且能够保护投保人权益，因为只要保费相同，保险业务的回报（以保险公司支付的金额 $Y$ 衡量）平均而言就是相同的。

如果 $Y \in \{0, 1\}$，那么（4.1）对应于在给定$\pi$（$\boldsymbol{X}$）的条件下，$Y$ 与 $S$ 的条件独立性。然而，对于索赔频率和赔款严重程度等更一般的响应变量，（4.1）是一个较弱的要求。可以利用数据检验条件均值独立性。关于综述，读者可参阅 Lundborg（2022年）；关于检验程序的最新进展，可参阅 Zhang等人（2025）。

# 5 多重校准

## 5.1 定义

鉴于自动校准是保险定价中的核心概念，根植于金融均衡，因此将其与作为群体公平性概念保留的条件均值独立性 (4.1) 相结合是很自然的。事实证明，这对应于 Hebert-Johnson 等人 (2018) 在机器学习文献中提出的多重校准概念。其正式定义如下。

**定义 5.1**。 若商业保费 $\pi(\cdot)$满足以下条件，则称其相对于取值于 $\mathcal{S}$ 的敏感特征 $S = X_{j_0}$ 是多重校准的：

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s] = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s'] = p \text{ for all } p \text{ and } s, s' \in \mathcal{S}. \tag{5.1}$$

与 (4.1) 相比，我们可以看到，(5.1) 不仅要求条件期望相等，还要求它们等于条件中涉及的保费金额 $p$ 。注意，(5.1) 可以等价地改写为

$$\mathrm{E}[Y - \pi(\boldsymbol{X})|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s] = 0 \text{ for all } p \text{ and } s \in \mathcal{S}.$$

因此，无论敏感特征 $S$ 的取值 $s$ 如何，在所有支付相同保费金额的投保人群体中，净损失 $Y - \pi(\boldsymbol{X})$ 的平均值均为零。这体现了这些群体中理赔与保费的补偿关系，也让人想起边际总额法的核心平衡方程。此外，(5.1) 可以改写为

$$\mathrm{E}[\mu(\boldsymbol{X}) - \pi(\boldsymbol{X})|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s] = 0 \text{ for all } p \text{ and } s \in \mathcal{S}.$$

这表明，对于支付相同保费金额且敏感特征 $S$ 取值相同 $s$ 的投保人群体，定价误差 $\mu(\boldsymbol{X}) - \pi(\boldsymbol{X})$ 的平均值为零。因此，多重校准对商业保费而言是一项颇具吸引力的要求。

## 5.2 性质

我们先证明，多重校准强化了自动校准。

**性质 5.2**。 *(i)* 任何关于 $S = X_{j_0}$ 多重校准的保费 $\pi(\cdot)$ 也是自动校准的。

*(ii)* 如果 $\pi(\cdot)$ 是自动校准的，那么条件均值独立性 $(4.1)$ 意味着相对于 $S = X_{j_0}$ 的多重校准。

证明。对于任意多重校准保费，我们有

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})] = \mathrm{E}\big[\underbrace{\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S]}_{=\pi(\boldsymbol{X})}\big|\pi(\boldsymbol{X})\big] = \pi(\boldsymbol{X})$$

因此它也是自动校准的，正如条目 (i) 中所述。关于条目 (ii)，注意到 (4.1) 与自动校准共同意味着

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S] = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})] = \pi(\boldsymbol{X}).$$

证毕。 □

因此，针对自动校准保费推导出的所有性质同样适用于多重校准保费。尤其是，多重校准预测器绝不会过拟合。借助凸序，这一结论已针对自动校准预测器得到了形式化表述。回顾 Denuit 等人

（2005 年，第3.4节），给定两个具有有限期望的随机变量 $Z$ 和 $T$，如果 $T$ 在凸序意义下小于 $Z$（记作 $T \preceq_{\text{cx}} Z$），则

$$\mathrm{E}[g(T)] \leq \mathrm{E}[g(Z)] \text{ for all convex functions } g, \tag{5.2}$$

假设期望存在。换言之，$T \preceq_{\text{cx}} Z$ 表示 $T$ 的离散程度小于 $Z$，而 $T$ 和 $Z$ 的期望值相同。特别地，$\mathrm{Var}[T] \leq \mathrm{Var}[Z]$。

根据W¨uthrich（2023年）的引理3.1，我们知道，对于任意自动校准的 $\pi(\cdot)$，$\pi(\boldsymbol{X}) \preceq_{\text{cx}} \mu(\boldsymbol{X})$ 均成立。因此，关于 $S = X_{j_0}$ 的任何多重校准保费 $\pi(\cdot)$ 都满足

$$\pi(\boldsymbol{X}) \preceq_{\text{cx}} \mu(\boldsymbol{X}) \preceq_{\text{cx}} Y.$$

这表明，多重校准能够防止过拟合，也就是说，自动校准保费的变异性不会大于 $\mu(\boldsymbol{X})$，也不会大于 $Y$。

我们知道，$\mu(\boldsymbol{X})$是自动校准的，因为

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y|\mu(\boldsymbol{X})] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\mu(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X}]\big|\mu(\boldsymbol{X})\big] \\ &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}]\big|\mu(\boldsymbol{X})\big] = \mu(\boldsymbol{X}). \end{aligned}$$

下一个结果表明，对于每个$j \in \{1, \ldots, p\}$，$\mu(\boldsymbol{X})$关于 $S = X_j$ 也是多重校准的。

**性质5.3**。 最佳估计价格 $\mu(\boldsymbol{X})$ 关于任意 $S = X_j, j = 1, 2, \ldots, p$均为多重校准。

证明。 只需写出

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y|\mu(\boldsymbol{X}), S] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\mu(\boldsymbol{X}), S, \boldsymbol{X}]\big|\mu(\boldsymbol{X}), S\big] \\ &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}]\big|\mu(\boldsymbol{X}), S\big] \\ &= \mu(\boldsymbol{X}), \end{aligned}$$

由此即完成证明。 □

由于纯保费对应于条件期望，因此只有当平均响应对应的期望损失最小时，才能对其进行一致估计。众所周知，Bregman 损失函数类对（条件）均值泛函具有严格一致性，因此在保险定价中，它们是唯一有意义的损失函数。对于凸函数 $\ell(\cdot)$，回顾一下，布雷格曼损失函数 $L(\cdot, \cdot)$ 定义为

$$L(y, m) = \ell(y) - \ell(m) - \ell'(m)(y - m) \tag{5.3}$$

其中，$\ell'$ 表示凸函数 $\ell$的次梯度。对于（5.3）中的 Bregman 损失函数，如果 $\mathrm{E}[L(Y, \widehat{\pi}_2(\boldsymbol{X}))] \leq \mathrm{E}[L(Y, \widehat{\pi}_1(\boldsymbol{X}))]$，则保费 $\pi_2(\cdot)$优于$\pi_1(\cdot)$。由于多重校准预测器也经过自动校准，根据 Kr¨uger 和 Ziegel（2021）的定理3.1，对于两个多重校准保费 $\pi_1(\cdot)$和 $\pi_2(\cdot)$，当且仅当 $\pi_1(\boldsymbol{X}) \preceq_{\text{cx}} \pi_2\boldsymbol{X}$时，对于（5.3）中的每个 Bregman 损失函数，均有不等式 $\mathrm{E}[L(Y, \pi_2(\boldsymbol{X}))] \leq \mathrm{E}[L(Y, \pi_1(\boldsymbol{X}))]$ 成立。这表明，凸序是比较多重校准保费相对表现的适当工具。

# 6 多重平衡校正

Denuit 等人（2021）提出了平衡校正，作为恢复自动校准的一种实用方法。具体而言，候选保费 $\pi(\cdot)$的平衡校正版 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$定义为

$$\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})]. \tag{6.1}$$

根据（6.1）得到的新保费 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$ 始终是自动校准的，正如 W¨uthrich（2023）中的命题 3.3 所示；这一结论不需要 Denuit 等人（2021）所假设的单调性条件。（6.1）背后的直觉是，$\pi(\cdot)$ 虽然包含信息，但尺度未必恰当，因此违反了定义自动校准的财务均衡。条件期望（6.1）通过保留由 $\pi(\cdot)$ 诱导的顺序，同时对对应于 $\pi(\boldsymbol{X})$ 相同取值的保险损失求平均，从而校正候选保费。

受恢复自动校准的平衡校正（6.1）启发，我们来介绍恢复多重校准的多重平衡校正。

**定义 6.1**。 相对于 $S$ 的保费 $\pi(\cdot)$ 的多重平衡校正版本 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 定义为

$$\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S]. \tag{6.2}$$

接下来的结果表明，通过多重平衡校正（6.2）得到的保费 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 始终相对于 $S$ 多重校准。

**命题 6.2.** 由式 *(6.2)* 定义的保费 $\pi(\cdot)$ 的多重平衡校正版 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 关于 $S = X_{j_0}$ 是多重校准的。

证明. 所述结果可由下式推出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}), S] &= \mathrm{E}\big[Y\big|\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S], S\big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[Y\big|\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S], S, \pi(\boldsymbol{X})\big]\Big|\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S], S\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[Y\big|S, \pi(\boldsymbol{X})\big]\Big|\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S], S\Big] \\
&= \mathrm{E}\big[\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X})\big|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}), S\big] \\
&= \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}),
\end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

事实证明，多重平衡校正能够针对任意布雷格曼损失函数提升保费的表现。下面给出这一结论的精确表述。

**命题 6.3.** 对于任意保费 $\pi$，有

$$\mathrm{E}\big[L\big(Y, \pi(\boldsymbol{X})\big)\big] \geq \mathrm{E}\big[L\big(Y, \pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X})\big)\big] \geq \mathrm{E}\big[L\big(Y, \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X})\big)\big] \geq \mathrm{E}\big[L\big(Y, \mu(\boldsymbol{X})\big)\big]$$

对所有损失函数 (5.3) 均成立。

证明。 由于 $\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})] \preceq_{\mathrm{cx}} \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})\ S]$，我们有 $\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}) \preceq_{\mathrm{cx}} \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) \preceq_{\mathrm{cx}} \mu(\boldsymbol{X})$。由此可得所述结果，这基于 Denuit 和 Trufin（2024）的命题 4.5，以及自动校准预测器的 Bregman 支配与凸序之间的等价性。 □

注 6.4。 由候选保费 $\pi(\cdot)$ 得到的多重平衡校正保费，不一定与由其平衡校正版 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$ 得到的多重平衡校正保费一致。事实上，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y|\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}),S] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}),\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}),S]\big|\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}),S\big]\\ &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}),S]\big|\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}),S\big]\\ &= \mathrm{E}\big[\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X})\big|\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}),S\big].\end{aligned}$$

因此，基于 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$ 的多重平衡校正保费，是对 $S$ 的每个取值，将基于 $\pi(\cdot)$ 的多重平衡校正保费在 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$ 的水平集上取平均后得到的。因此，这两种多重平衡校正保费可能不同，因为这种平均会移除与预测 $Y$ 相关的信息（给定 $S$ 后）。当且仅当以 $\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X})$ 为条件化变量时，$\pi(\boldsymbol{X})$ 对每个 $S$ 的取值所携带的全部预测信息都得以保留（也就是说，当且仅当 $\pi(\boldsymbol{X})$ 相对于 $\sigma(\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X})\ S)$ 可测）时，两者才会相同。一个简单的充分条件是，映射 $p \mapsto \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p]$ 在 $\pi(\boldsymbol{X})$ 的值域上是一一对应的，因此可以从 $\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X})$ 中恢复 $\pi(\boldsymbol{X})$。特别是，当映射 $p \mapsto \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p]$ 严格递增时，就满足这一条件，这意味着 $\pi(\boldsymbol{X})$ 与 $\mu(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}$ 对风险的排序相同。

最后，我们考虑备注4.3中讨论的情形：敏感特征 $S$ 未被纳入可接受的评级因子集合，这可能是出于监管规定，也可能是保险公司的商业决策。接下来的结果展示了多重平衡校正如何体现备注4.3中强调的结构性限制。

**命题 6.5.** 假设 $S$ 未被纳入可接受的评级因子集合 $\boldsymbol{X}$。那么，对于任意可接受的保费 $\pi(\cdot)$，以下结论成立。

*(i)* 相应的保费 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 相对于 $S$是多重校准的，即

$$\mathrm{E}[Y|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X},S),S] = \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X},S).$$

*(ii)* 一般而言，$\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 取决于 $S$，因此并不构成可接受的保费。

*(iii)* 当且仅当满足以下条件时，多重平衡校正保费 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 不取决于 $S$：

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}),S] = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})],$$

也就是说，当且仅当给定保费 $\pi(\boldsymbol{X})$时，$Y$和 $S$ 条件均值独立。

*(iv)* 多重平衡校正可表示为

$$\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X},S) = \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X},S]\big|\pi(\boldsymbol{X}),S\big].$$

特别地，$\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 当且仅当$\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X},S]$ 关于 $\sigma(\pi(\boldsymbol{X})\ S)$可测时，与$\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X},S]$ 一致。

证明。根据多重平衡校正的定义，$\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) \ S]$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S), S] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S), S]\big|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S), S\big] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S]\big|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S), S\big] \\
&= \mathrm{E}[\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S)|\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S), S] \\
&= \pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S).
\end{aligned}$$

这证明了第 (i) 项下的结论。

考虑第 (ii)–(iii) 项，注意到 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}, S) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) \ S]$ 通常取决于$S$。因此，$\pi_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 独立于 $S$ 当且仅当，

$$\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S] = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})],$$

这证明了第 (ii)–(iii) 项下的结论。

最后，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S] &= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}, \pi(\boldsymbol{X}), S]\big|\pi(\boldsymbol{X}), S\big] \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|\boldsymbol{X}, S]\big|\pi(\boldsymbol{X}), S\big]
\end{aligned}$$

证明了第 (iv) 项下的结论，至此证明完毕。 □

命题 6.5 展示了备注4.3的一个例子。当 $S$ 被排除在可接受的评级因子集合 $\boldsymbol{X}$之外时，只有在 $Y$ 和 $S$ 在给定保费的条件下条件均值独立这一特殊情形下，才能实现多重校准。否则，强制进行多重校准必然会导致保费依赖于 $S$ ，因而不具备可接受性。

# 7 多重校准的实际实现

本节提出了切实可行的方法，使候选保费 $\pi(\cdot)$ 相对于纳入 $\boldsymbol{X}$ 的敏感特征 $S$ 实现多重校准。这些方法因 $S$ 的形式不同而有所差异。

## 7.1 类别型敏感特征

假设敏感特征 $S$ 为类别型，具有若干水平 $\ell \in \mathcal{S}$。原则上，可以通过在每个组别 $S = \ell$ 中分别对 $\pi(\cdot)$ 进行自动校准来实现多重校准；具体而言，针对 $S$ 的每个水平，将 $\pi(\cdot)$ 替换为其平衡校正版 $\pi_{\mathrm{bc}}(\cdot)$。然而，如果某些组别的风险暴露量有限，这种简单方法就会遇到问题，非参数平滑也无法奏效。

本节介绍两种实现多重校准的经验方法。第一种通过显式的多重平衡校正来实现多重校准，第二种则通过迭代偏差校正程序直接强制实现多重校准。本节中，我们考虑一个由观测值组成的数据集（$N_i$， $\boldsymbol{X}_i$， $S_i$， $w_i$） ， $i = 1$，.....， $n$，其中 $N_i$表示索赔次数，$S_i = X_{i,\ j_0} \in \mathcal{S}$ 表示类别型敏感特征， $w_i \geq 0$ 表示已知权重（通常为风险暴露量）。实际应用中，我们将观测到的索赔频率 $Y_i = \frac{N_i}{w_i}$ 作为响应变量，它由索赔次数除以暴露量得到。 —

### 7.1.1 通过分组回归进行直接经验多重平衡校正

多重平衡校正就是在敏感特征 $S$所定义的每个组内分别恢复平衡。也就是说，我们不在整体层面强制实现自动校准，而是针对每个 $\ell \in \mathcal{S}$，在给定 $S = \ell$的条件下施加平衡条件。根据如何在每个组内估计条件均值函数 $\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) \; S = \ell]$，这一原则可通过多种方式实现。例如，可以采用 Ciatto 等（2023）提出的局部线性回归，或采用 W¨uthrich（2023）提出的保序回归。

为便于说明，我们在此描述一种基于保序回归的实现。对于每个水平 $\ell \in \mathcal{S}$，考虑条件均值函数

$$m_\ell(p) = \mathrm{E}\big[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = \ell\big], \qquad p > 0.$$

在单调性约束下，针对每个组 $S = \ell$，以非参数方式估计 $m_\ell(\cdot)$，即可得到多重平衡校正的经验实现。具体而言，我们将 $\widehat{m}_\ell$ 定义为加权保序回归问题的解

$$\widehat{m}_\ell \in \underset{m \text{ non-decreasing}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i:\, S_i = \ell} w_i \big(Y_i - m(\pi_i)\big)^2, \qquad \ell \in \mathcal{S}, \tag{7.1}$$

将搜索范围限制为非递减的条件均值函数，即要求若 $p \le p'$，则在 $\{\pi_i$ 的值域 $S_i = \ell\}$ 上有 $m(p) \le m(p')$。随后，通过代入规则得到相应的经验多重平衡校正保费

$$\widehat{\pi}_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}_i) = \widehat{m}_{S_i}\big(\pi(\boldsymbol{X}_i)\big), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7.2}$$

其中，$\widehat{m}_\ell(\cdot)$ 是式 (7.1) 的解。

这种构造直接对应于 W¨uthrich（2023）通过保序回归实现的自动校准平衡校正，只是重新校准是在类别型敏感特征 $S$ 的每个水平内分别进行的。根据构造，式 (7.2) 中的保费 $\widehat{\pi}_{\mathrm{mbc}}(\cdot)$ 是多重平衡校正保费的经验实现

$$\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}), S],$$

因此，通过在给定 $S$ 的条件下强制实现平衡，该方法实现了多重校准。

当某些 $\ell \in \mathcal{S}$ 水平的暴露量有限时，式（7.1）中的完全非参数估计可能不稳定，从而产生方差较高、样本外表现较差的阶梯函数。因此，下一节将介绍一种正则化程序，以放宽完全非参数的分组方法。该程序不再在 $S$ 的每个水平内分别估计条件均值函数，而是在有限个 ($\pi$， $S$) 单元格上强制实现平衡，并通过暴露量驱动的收缩，在各组之间借力，从而稳定局部校正。

### 7.1.2 通过迭代偏差校正正则化实施多重校准

现在，我们介绍一种正则化经验程序，可直接强制实现多重校准，而无需显式应用多重平衡校正。该程序从基准保费出发，

通过迭代调整保费，使得在选定的离散化水平下，按当前保费水平和敏感特征划分的每个群体内的平均残差均为零。当数据稀疏时，采用暴露量驱动的收缩来稳定局部校正项。

**分箱与残差偏差**。固定一个整数 $K \geq 1$。从初始保费$\pi^{(0)}(\cdot) = \pi(\cdot)$出发，考虑在迭代 $j \geq 0$ 时将 $\pi^{(j)}(\boldsymbol{X})$ 的值域划分为 $K$ 个互不相交的区间 $\{B_1^{(j)}, \ldots, B_K^{(j)}\}$（例如经验分位数箱）。对于每个观测值 $i$ =1、.....、 $n$，定义残差

$$R_i^{(j)} = Y_i - \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i).$$

对于每个分箱 $k \in \{1, \ldots, K\}$和每个水平 $\ell \in \mathcal{S}$，定义索引集

$$I_{k\ell}^{(j)} = \big\{ i : \ \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i) \in B_k^{(j)}, \ S_i = \ell \big\},$$

以及相应的暴露量

$$w_{k\ell}^{(j)} = \sum_{i \in I_{k\ell}^{(j)}} w_i, \qquad w_{k\bullet}^{(j)} = \sum_{\ell \in \mathcal{S}} w_{k\ell}^{(j)}.$$

当 $w_{k\ell}^{(j)} > 0$时，将单元格级和合并分箱均值残差定义为

$$\widehat{b}_{k\ell}^{(j)} = \frac{1}{w_{k\ell}^{(j)}} \sum_{i \in I_{k\ell}^{(j)}} w_i R_i^{(j)}, \qquad \widehat{b}_k^{(j)} = \frac{1}{w_{k\bullet}^{(j)}} \sum_{\ell \in \mathcal{S}} \sum_{i \in I_{k\ell}^{(j)}} w_i R_i^{(j)}.$$

量 $\widehat{b}_{k\ell}^{(j)}$ 是 $\mathbf{E}\Big[ Y - \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) \ \big| \ \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) \in B_k^{(j)}, \quad S = \ell \Big]$ 的暴露度加权样本对应量。

**暴露量驱动的收缩**。 当 $w_{k\ell}^{(j)}$ 较小时，估计值 $\widehat{b}_{k\ell}^{(j)}$ 不稳定。为使校正项更加稳定，我们将 $\widehat{b}_{k\ell}^{(j)}$ 向合并分箱层级量 $\widehat{b}_k^{(j)}$ 收缩，具体如下：

$$\widetilde{b}_{k\ell}^{(j)} = z_{k\ell}^{(j)} \widehat{b}_{k\ell}^{(j)} + \big(1 - z_{k\ell}^{(j)}\big) \widehat{b}_k^{(j)}, \qquad z_{k\ell}^{(j)} = \frac{w_{k\ell}^{(j)}}{w_{k\ell}^{(j)} + c}, \tag{7.3}$$

其中 $c >$ 0是一个调节参数，用于控制跨组汇总的程度。

**更新步骤**。 设 $\eta \in (0, 1]$ 为步长。对于满足 $\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i) \in B_k^{(j)}$ 且 $S_i = \ell$的每个观测值 $i$ ，更新

$$\pi^{(j+1)}(\boldsymbol{X}_i) = \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i) + \eta \, \widetilde{b}_{k\ell}^{(j)}. \tag{7.4}$$

此次更新通过对应的（$\pi$， $S$）单元格中残差偏差的暴露度正则化估计来调整保费。

**停止准则**。 当剩余校正项变得可以忽略时，停止迭代。一种简便的准则是保留满足以下条件的解：

$$\max_{k,\ell:\, w_{k\ell}^{(j)}>0} \frac{\left|\eta\, \bar{\widetilde{b}}_{k\ell}^{(j)}\right|}{\bar{\pi}_{k\ell}^{(j)}} \le \delta,$$

其中，$\bar{\pi}_{k\ell}^{(j)}$ 和 $\bar{\widetilde{b}}_{k\ell}^{(j)}$ 表示在 $i \in I_{k\ell}^{(j)}$ 范围内对 $\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i)$ 和 $\widetilde{b}_{k\ell}^{(j)}$ 按暴露量加权的平均值，而 $\delta > 0$ 是由精算师选定的容差参数。

**解读**。 在收敛时，该过程会得出保费 $\pi^{(J)}(\cdot)$，使得对于每个分箱 $B_k^{(J)}$ 和每个水平 $\ell \in \mathcal{S}$，相应单元格内按暴露量加权的平均残差都接近于零。等价地，在分箱方案所确定的分辨率下，由 $(\pi^{(J)}(\boldsymbol{X}),\ S)$ 定义的群组内，$Y$ 与 $\pi^{(J)}(\boldsymbol{X})$ 之间不再存在系统性平均偏差。

这一性质是多重校准要求 $\mathrm{E}[Y|\pi^{(J)}(\boldsymbol{X}) = p,\ S = \ell] = p,\ p > 0,\ \ell \in \mathcal{S}$ 的离散对应形式，其中精确条件化由基于分箱归属的条件化取代。由于分箱会在迭代过程中更新，且其定义使用当前保费 $\pi^{(j)}(\cdot)$，因此应将所得保费 $\pi^{(J)}(\cdot)$ 理解为通过不动点性质实现多重校准，而非通过单次应用多重平衡校正得出。

相比之下，如果使用基准保费 $\pi(\cdot)$ 固定分箱，并执行一次更新，则该过程便简化为在所选分箱粒度下，对多重平衡校正保费 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}),\ S]$ 的离散化经验近似。

**关于信度权重的作用**。 在经典的 Bühlmann–Straub 框架中，可信度源自明确的随机数据生成结构。潜在参数 $\Theta$ 控制个体风险层级上的重复观测，从而得到众所周知的方差分解，即过程方差与结构方差。

在当前的多重校准设定中，并未假设存在此类结构性潜在参数。该过程完全是横截面且算法式的。对于给定的保费分箱 $k$ 和群体 $\ell$，量

$$b_{k\ell} = \mathrm{E}[Y - \pi(X)|\pi(X) \in B_k,\ S = \ell]$$

可以视为附属于单元格 $(k, \ell)$ 的潜在系统性偏差参数，但该参数是由当前保费诱导的，而非源自底层的随机异质性。每个单元格内的观测值仅起到重复测量的作用，用于估计这一条件均值残差。

因此，与信度理论的类比是代数层面上的，而非结构层面上的。与 $\widehat{\ }$Bühlmann–Straub 模型一样，当暴露量 $w_{k\ell}$ 较小时，经验估计量 $b_{k\ell}$ 会存在较大噪声。形如以下形式的方差分解

$$\mathrm{Var}[\widehat{b}_{k\ell}] = \frac{\mathrm{E}[\sigma_{k\ell}^2]}{w_{k\ell}} + \mathrm{Var}[b_{k\ell}]$$

$\widehat{}$促使我们将单元格特定估计量向合并分箱层级量 $b_k$收缩，从而得到权重

$$z_{k\ell} = \frac{w_{k\ell}}{w_{k\ell} + c}.$$

因此，所得校正项

$$\widetilde{b}_{k\ell} = z_{k\ell}\widehat{b}_{k\ell} + (1 - z_{k\ell})\widehat{b}_k$$

应主要被理解为一种由暴露量驱动的正则化工具。它能稳定低暴露量单元格中的局部偏差估计，同时允许在数据充足时进行更细粒度的调整。

然而，与经典信度理论不同，我们并不假设存在一个包含随机潜在参数 $\Theta$ 的显式层级模型。这里的可信度权重提供了一种有原则且精算上可解释的收缩机制，但多重校准程序本身仍是一种后处理算法，而非完整指定的概率信度模型所推导出的结果。

### 7.1.3 数值示例

我们将所提出的多重校准程序应用于 Noll 等（2018）使用的数据集。该数据集包含一个法国机动车第三者责任保险组合，共有 677 991 条记录，每条记录对应一份保单。每份保单均观测到 12 个变量，详见表 7.1。完整数据集的详细说明请参阅 Noll 等（2018）。

表 7.1： `freMTPL2freq` 数据集中各变量的说明。

| 变量 | 描述 |
|---|---|
| `IDpol` | 保单编号。 |
| `ClaimNb` | 理赔次数。 |
| `Exposure` | 以年度单位计的总暴露量。 |
| `Area` | 地区代码（A、B、C、D、E 或 F）。 |
| `Region` | 保单登记所在的法国大区，包含 22 个类别的分类变量等级。 |
| `Density` | 投保人居住城市的人口密度（每平方公里居民人数）投保人居住的地方。 |
| `BonusMalus` | 奖惩等级，范围为 50 至 230（参考等级：100）。 |
| `DrivAge` | 车辆驾驶员的年龄，以年为单位。 |
| `VehAge` | 车辆的年龄，以年为单位。 |
| `VehGas` | 车辆使用的燃料类型（柴油或普通汽油）。 |
| `VehPower` | 汽车功率，取值范围为 4 至 15 的分类变量。 |
| `VehBrand` | 汽车品牌，共有 11 个类别的分类变量。 |

结果变量 $Y$ 是观测到的索赔频率，定义为 $Y = \frac{N}{w}$，其中$N = \texttt{ClaimNb}$ 和$w = \texttt{Exposure}$以保单年为单位。对于多重校准分析，我们考虑一个离散型敏感属性

$$S^{\mathrm{d}} = \texttt{bin_VehAge},$$

通过将 VehAge 分为三个大小大致相等的分箱得到：$(0, 3], (3, 9]$ 和$> 9$。定价变量为

$$\boldsymbol{X} = \{\texttt{Area}, \texttt{Region}, \texttt{Density}, \texttt{BonusMalus}, \texttt{DrivAge}, \texttt{VehAge}, \texttt{VehGas}, \texttt{VehBrand}\},$$

而 bin VehAge仅用于校准。

数据被随机划分为训练集（60%）、验证集（20%）和测试集（20%）。基准保费由采用对数链接函数和暴露量偏置项的泊松广义加性模型得出。具体而言，我们假设

$$N_i|\boldsymbol{X}_i \sim \mathrm{Poisson}\big(w_i\lambda(\boldsymbol{X}_i)\big),$$

with

$$\ln \lambda(\boldsymbol{X}_i) = \beta_0 + \sum_m f_m(X_{i,m}).$$

相应的频率保费则定义为

$$\pi(\boldsymbol{X}_i) = \lambda(\boldsymbol{X}_i) = \mathrm{E}[Y_i|\boldsymbol{X}_i].$$

尽管 $\pi(\cdot)$在平均意义上经过校准，但其在不同保费水平和不同车辆年龄组中均表现出系统性的残差偏差。

从 $\pi(\cdot)$ 出发，我们考虑五种保费构造方法。第一种是忽略敏感属性保费本身。第二种对应于将可信度参数 $c$ 设得非常大时，迭代多重校准过程的极限情形所得到的自动校准。在这种情况下，

$$z_{k\ell} = \frac{w_{k\ell}}{w_{k\ell} + c} \approx 0,$$

更新中仅纳入分箱级偏差，从而实现自动校准。作为针对同一目标的非迭代基准方法，我们还考虑基于加权保序回归的经典平衡校正 $\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi_0(\boldsymbol{X})]$。当 $c$ 有限时，可得到完全多重校准：通过由暴露量驱动的收缩，结合分箱级偏差和单元级偏差，以实现 $\mathrm{E}[Y - \pi(\boldsymbol{X})|\mathrm{bin}\ S] \approx 0$。最后，多重平衡校正定义为 $\pi_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})\ S]$，通过在各车辆-年龄组内进行加权保序回归估计。全文使用 $K = 10$ 个保费分箱、步长 $\eta = 0.2$ 和停止阈值 $\delta = 0.01$。残差偏差按各保费分箱和车辆-年龄组内按暴露量加权的平均值计算。

图 7.1 展示了残差结构。基准保费在各保费分箱中呈现出明显的单调失真，最高分箱中的定价偏低尤为显著。

经过自动校准（迭代或保序）后，这种全局模式消失，整体残差曲线基本变得平坦。然而，同一保费分箱内不同车辆年龄组之间仍存在显著差异，表明相对于 $S$ 仍存在持续的条件偏差，如第二行的图所示。

应用完全多重校准或多重平衡校正可以消除这些组特异性失真。在这两种情况下，各彩色曲线都在所有分箱中紧密围绕零对齐。多重校准通过结合暴露量驱动的收缩进行迭代偏差更新来实现这一点，从而产生平滑的残差剖面。多重平衡校正则通过分组保序回归直接实施条件校准。局部的轻微振荡反映了估计量的阶梯式特性以及缺乏跨组正则化。总体而言，这两种方法都成功恢复了条件平衡，同时保留了保费层级校准；其中，迭代方法产生的模式略为规整。

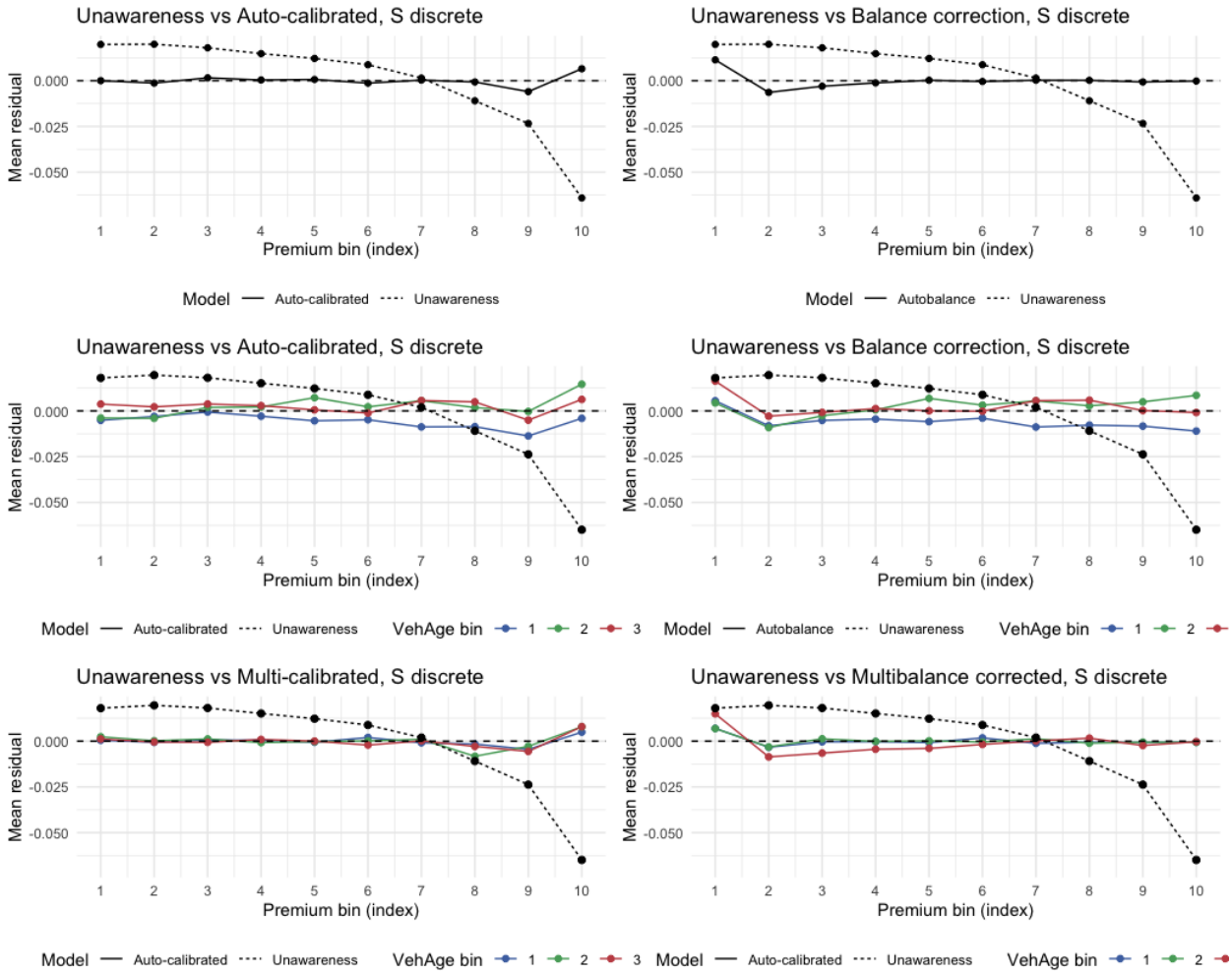



图 7.1：离散车辆年龄组在各保费分箱中的平均残差定价偏差。上排：基线与自动校准。中排：通过迭代算法进行自动校准（左）和通过保序回归进行平衡校正（右）。下排：多重校准（迭代）和多重平衡校正（分组保序回归）。

表7.2报告了测试集上的样本外表现，采用泊松偏差和基尼系数进行评估。基准模型的偏差明显最高，这证实保费评分的校准失准会实质性地影响预测准确性。尽管基准广义加性模型是在协变量空间中通过极大似然估计得到的，但它并不能保证所生成的保费满足自动校准。因此，保费水平上的系统性失真在保险组合层面汇总后，会转化为似然损失。

与基线相比，自动校准显著降低了偏差，表明校正保费层面的失真本身就能提升拟合充分性。引入针对车辆年龄的条件校准后，偏差进一步降低：多重校准保费的总体偏差最低，优于自动校准方案。相比之下，非迭代平衡和多重平衡校正的偏差略高。总体而言，迭代程序（自动校准和多重校准）在偏差方面优于其保序对应方法。

在区分能力方面，所有校准模型均显著优于基线。校准模型的基尼系数相差不大，其中自动校准和平衡校正取得了最高值。

表7.2：测试集上的样本外表现比较。

| 模型 | 偏差 | 基尼系数 |
|---|---|---|
| 基线 | 36 310.68 | 0.5783 |
| 自动校准 | 33 882.79 | **0.7237** |
| 平衡校正 | 33 912.20 | 0.7221 |
| 多重校准 | **33 779.73** | 0.6876 |
| 多重平衡校正 | 33 808.72 | 0.6938 |

## 7.2 连续敏感特征

现在考虑敏感特征 $S$ 为连续变量的情形。在这种设定下，多重校准要求 $\mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s] = p$，其中 $(p, s)$ 属于 $(\pi(\boldsymbol{X}), S)$ 的支持集。与分类情形类似，我们介绍两种经验方法。第一种方法通过直接估计联合 $(\pi, S)$ 空间中的条件均值曲面来实现多重校准。第二种方法则通过正则化迭代偏差校正程序来实现多重校准。我们采用与前文相同的数据结构。

### 7.2.1 通过双变量局部广义线性模型进行直接经验多重平衡校正

当敏感特征 $S$ 为连续变量时，我们估计条件均值曲面

$$m(p, s) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p, S = s],$$

通过在联合（$\pi$、$S$）空间中使用局部广义线性模型。

为估计给定点（$p$, $s$）处的 $m(p, s)$，我们为每个观测值（$N_i$, $\pi_i$, $S_i$, $w_i$）赋予一个权重

$$\nu_i(p, s) = \nu\left(\frac{\pi_i - p}{h_\pi}, \frac{S_i - s}{h_S}\right),$$

其中，$\nu(\cdot,\ \cdot)$ 是一个定义在有界集合上的对称权重函数，$h_\pi$ 和 $h_S > 0$是控制各方向局部性的带宽参数。在（$p,\ s$）处，我们拟合一个适应响应变量特性的仅含截距项的广义线性模型，并使用暴露量权重 $w_i$。在典范连接函数 $g$下，我们得到局部似然方程

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i(p,s)\, w_i\, Y_i = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(p,s)\, w_i\, \mu(p,s),$$

其解给出

$$\widehat{m}(p,s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_i(p,s)\, w_i\, Y_i}{\sum_{i=1}^{n} \nu_i(p,s)\, w_i}.$$

响应变量仍为观测到的索赔频率 $Y = N/w$，并使用暴露量加权局部广义线性模型进行估计。一个自然的代入估计量是将$\pi(\boldsymbol{X}_i)$替换为 $\widehat{m}\big(\pi(\boldsymbol{X}_i)\ S_i\big)$。虽然该估计量旨在实现关于 $(\pi, S)$ 的条件平衡，但通常无法保留关于 $\pi$ 的边际自校准。为恢复边际一致性，我们因此引入一个中心化步骤。首先，我们估计边际条件均值

$$\widehat{m}_0(p) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p]$$

使用保费评分的一维局部广义线性模型。然后，我们定义

$$\delta(p,s) = \widehat{m}(p,s) - \widehat{m}_0(p),$$

并通过一维局部回归估计其在给定 $p$ 条件下的条件期望。将此估计记为 $\mathrm{E}[\delta(p,S)|\pi = p]$，我们构造中心化的多重平衡校正

$$\widehat{\pi}_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}_i) = \widehat{m}_0\big(\pi(\boldsymbol{X}_i)\big) + \delta\big(\pi(\boldsymbol{X}_i), S_i\big) - \widehat{\mathrm{E}}\big[\delta\big(\pi(\boldsymbol{X}_i), S\big)|\pi = \pi(\boldsymbol{X}_i)\big]\,.$$

这种中心化保证每个保费水平下的平均校正项与边际平衡调整一致，同时将残差偏差重新分配到 $S$ 的不同取值上。根据构造，$\widehat{\pi}_{\mathrm{mbc}}(\boldsymbol{X}) \approx \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})\ S]$，同时保留保费维度上的近似自校准。

这一过程构成了第7.1.1节所述组别多重平衡校正的连续型对应方法。它通过一次平滑步骤实现条件平衡，但其表现取决于联合（$\pi$、$S$）空间中的观测局部密度。在暴露量有限的地区，二维平滑可能变得不稳定，因此接下来将介绍正则化的迭代替代方法。

### 7.2.2 通过迭代偏差校正实现多重校准的正则化经验实施

我们提出一种正则化经验程序，以顺序方式实现多重校准。我们不一次性估计完整的条件均值曲面，而是在联合的（$\pi,\ S$）空间中迭代消除残差偏差，并结合一维和二维平滑器与暴露量驱动的收缩，以稳定局部校正。

**局部残差偏差**。令 $\pi^{(0)}(\boldsymbol{X}) = \pi(\boldsymbol{X})$ 表示基准保费。对于迭代$j = 0$，1，2，.....，$J$，定义残差

$$R_i^{(j)} = Y_i - \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i).$$

在每次迭代中，我们估计两个平滑的条件均值函数：

$$\widehat{b}^{(j)}(p) = \mathrm{E}\big[Y - \pi^{(j)}(\boldsymbol{X})|\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) = p\big]\,,$$

$$\widehat{b}^{(j)}(p,s) = \mathrm{E}\big[Y - \pi^{(j)}(\boldsymbol{X})|\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) = p,\ S = s\big]\,.$$

第一项对应边际保费水平偏差，其作用相当于离散算法中的分箱偏差，从而确保相对于保费的自动校准。第二项则刻画在给定保费水平和分组变量的条件下仍然存在的系统性偏差。一维和二维平滑回归均在当前保费空间 $\pi^{(j)}(\boldsymbol{X})$ 中进行。

**暴露量驱动的收缩**。为稳定数据有限地区的局部偏差估计，我们在联合 $(\pi,\ S)$ 空间中引入可信度权重。在迭代过程开始之前，我们使用 $k$ 近邻估计器，近似每个点 $(p,\ s)$ 周围观测值的局部密度，并将其转换为局部有效暴露量 $w_{\mathrm{loc}}(p,\ s)$。我们将可信度权重定义为

$$z(p,s) = \frac{w_{\mathrm{loc}}(p,s)}{w_{\mathrm{loc}}(p,s) + c},$$

其中，$c > 0$ 是控制收缩程度的调节参数。

与分类情形不同，在分类情形中，可信度权重取决于随迭代变化的单元格暴露量；而 $w_{\mathrm{loc}}(p,\ s)$ 反映的是连续 $(\pi,\ S)$ 空间中数据本身的可用性。因此，我们只计算一次权重 $z(p,\ s)$，并在整个迭代过程中保持不变。这一做法确保收缩反映的是数据的结构性稀疏，而非连续保费更新引起的波动，并避免校正项与正则化之间产生反馈。

我们将按点定义可信度加权的条件校正项为

$$\delta^{(j)}(p,s) = z(p,s)\Big(\widehat{b}^{(j)}(p,s) - \widehat{b}^{(j)}(p)\Big).$$

与第7节2.1一样，我们应用一个中心化步骤，以保持相对于保费水平的自动校准。因此，我们定义

$$\widetilde{b}^{(j)}(p,s) = \widehat{b}^{(j)}(p) + \delta^{(j)}(p,s) - \mathrm{E}\big[\delta^{(j)}(p,S)|\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) = p\big]\,.$$

我们通过对 $\delta^{(j)}(\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}),\ S)$ 关于 $\pi^{(j)}(\boldsymbol{X})$ 进行一维局部回归来计算中心化项。

$$\widetilde{b}^{(j)}(p,s) = \widehat{b}^{(j)}(p) + \delta^{(j)}(p,s) - \mathrm{E}\big[\delta^{(j)}(p,S)|\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}) = p\big]\,.$$

我们使用与保费评分中相同的一维局部平滑步骤来估计最后一项中的条件期望。这保证了校正项在每个保费水平上积分为 $\widehat{b}^{(j)}(p)$，从而在重新分配连续分组变量 $S$各取值间残差偏差的同时，维持边际自校准。

**更新步骤**。 对于步长 $\eta \in (0,1],$ ，我们以加法方式更新保费，如下所示

$$\pi^{(j+1)}(\boldsymbol{X}_i) = \pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i) + \eta\, \widetilde{b}^{(j)}\big(\pi^{(j)}(\boldsymbol{X}_i), S_i\big).$$

步长参数 $\eta$ 控制调整速度，我们选择该参数以确保算法稳定收敛。

**停止准则**。 在初始化时，我们使用基于分位数的划分，对 $\pi^{(0)}(\boldsymbol{X})$和 $S$构建保费和分组变量的固定网格。我们仅使用这些网格来评估收敛情况。对于该固定网格中的每个单元格（$k,\ \ell$），我们计算当前保费和校正项的按暴露量加权的平均值 $\pi_{k\ell}^{(j)}$ 和 $b_{k\ell}^{(j)}$ 。当

$$\max_{k,\ell} \frac{\left|\eta\, \overline{b}_{k\ell}^{(j)}\right|}{\overline{\pi}_{k\ell}^{(j)}} \le \delta,$$

满足用户指定的容差参数 $\delta > 0$时。

**解释**。 算法完成后，我们得到保费 $\pi^{(J)}(\cdot)$，在联合（$\pi,\ S$）空间中，所选分辨率下不再存在系统性残差偏差。

**关于可信度权重的作用**。 与分类情形一样，我们从代数而非结构的角度理解其与经典 Bühlmann–Straub 可信度理论的联系。我们不假设存在任何潜在参数 $\Theta$，且该过程完全是横截面式和算法式的。

在连续情境下，我们将其视为

$$b(p,s) = \mathrm{E}[Y - \pi(\boldsymbol{X}) | \pi(\boldsymbol{X}) = p,\ S = s]$$

附加于当前保费的潜在系统性偏差曲面。位于（$p,\ \ s$）附近的观测值为估计这一条件均值残差提供了重复信息。当局部有效暴露量 $w_{\mathrm{loc}}(p,\ \ s)$ 较小时，这些估计会变得不稳定，因此需要向边际偏差收缩。

因此，信度权重 $z(p,\ \ s) = \frac{w_{\mathrm{loc}}(p,\ s)}{w_{\mathrm{loc}}(p,\ s)+c}$ 充当一种由暴露量驱动的正则化手段，在稀疏区域降低方差，同时在数据充足时允许进行更细粒度的调整。因此，我们将可信度用作稳定机制，而非层次随机模型的推论；多重校准程序仍是一个用于强制实现条件平衡的后处理算法。

### 7.2.3 数值示例

现在，我们使用与第7.1.3节相同的机动车第三者责任保险频率数据集和数据划分，来说明连续多重校准程序。在此，我们将车辆年龄视为连续分组变量，并设定

$$S = \texttt{VehAge}.$$

车辆年龄不作为定价变量，仅作为校准维度。我们使用前文所述的同一泊松广义加性模型（采用对数链接函数和暴露量偏置项）得到基准保费 $\pi(\cdot)$。这些保费在不同保费水平上以及以车辆年龄为条件时，均呈现系统性的残差偏差。

从 $\pi(\cdot)$ 出发，我们考虑五种保费构造方法。第一种是忽略敏感属性保费本身。第二种对应于可信度参数 $c$ 较大时迭代算法的极限情形，此时通过对保费评分进行一维局部回归来实现自动校准。作为以相同目标为导向的直接非迭代基准方法，我们还考虑如下定义的平衡校正：

$$\pi_{\mathrm{bc}}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X})],$$

通过一维局部广义线性模型进行估计。

接下来，我们比较两种针对连续变量 $S = \texttt{VehAge}$ 实现条件平衡的方法。我们通过第7节 7.2.2 节的迭代过程实现完全多重校准。在每次迭代中，我们在当前保费空间中使用局部广义线性模型估计边际偏差 $\widehat{b}^{(j)}(p)$ 和联合偏差曲面 $\widehat{b}^{(j)}(p,\ s)$，应用由暴露量驱动的收缩，并按照第7节 7.2.1 节所述对校正项进行中心化。局部广义线性模型使用 `R` 中的 `locfit` 函数进行估计，邻域参数为 $\alpha = 0.5$，表示最近邻所占比例。我们采用局部线性拟合、步长 $\eta = 0.2$ 和停止阈值 $\delta = 0.01$。

作为一种直接的非迭代替代方法，我们通过第7.2.1节介绍的中心化双变量局部广义线性模型实施多重平衡校正。具体而言，我们使用相同的平滑参数，在联合（$\pi, S$）空间中进行二维局部泊松回归，以估计条件均值曲面 $m(p, s) = \mathrm{E}[Y|\pi(\boldsymbol{X}) = p,\ S = s]$。随后，我们应用中心化步骤，以保留边际自校准。

我们使用由$\pi(\cdot)$构造的十个保费分箱，并针对 `VehAge`的每个取值，在验证集上评估残差偏差。为便于直观观察，这些曲线以阴影包络的形式概括，表示每个保费分箱内不同车辆年龄对应的残差偏差的最小值和最大值。图 7.2 展示了残差结构。基准保费在各保费分箱中呈现明显的单调失真，在最高分箱中存在显著的定价不足。经过自校准（迭代校正或直接平衡校正）后，全局残差曲线基本变平，证实这两种方法都实现了自校准，如上方面板所示。然而，每个保费分箱内不同车辆年龄之间的离散程度仍然明显，表明关于 $S$的条件偏差依然存在；图 7.2 中两种方法对应的中间面板阴影区域更宽，正体现了这一点。

应用完全多重校准或多重平衡校正，可显著减少这种离散程度。与自动校准相比，底行的阴影区域明显收窄，表明这两种方法都能有效消除连续车辆车龄维度上的条件性偏差。迭代多重校准过程产生了最平滑的残差模式，体现了收缩和平衡偏差反复更新所带来的稳定作用。直接多重平衡校正只需一步即可实现相近的对齐效果，少数局部差异则归因于二维有限样本平滑。

表 7.3 报告了测试集上的样本外表现，评估指标为泊松偏差和基尼系数。结果模式再次与第 7.1.3 节讨论的分类情形一致。

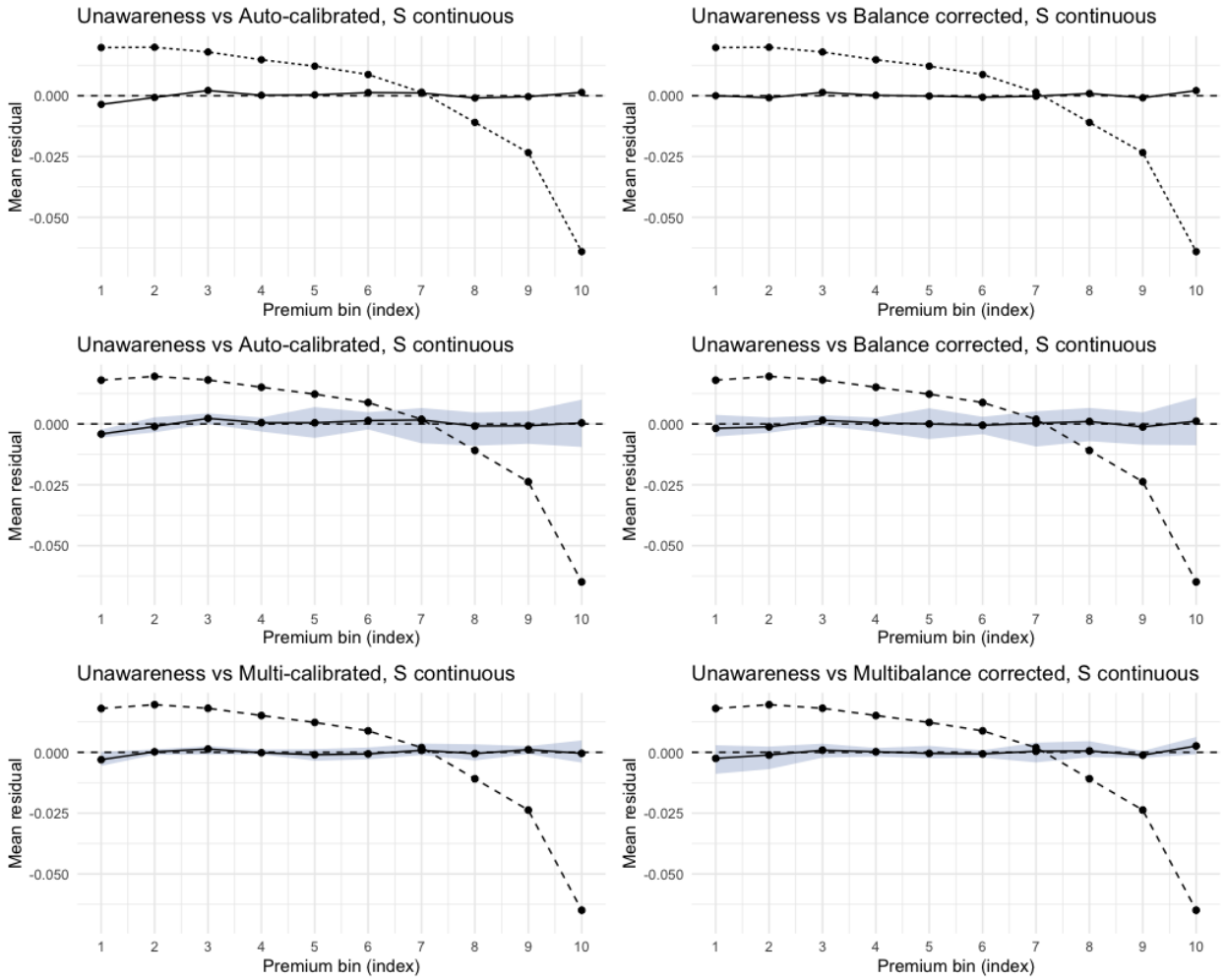



图 7.2：连续车辆车龄下各保费分箱的平均残差定价偏差。第一行：基线与自动校准。第二行：通过迭代算法进行自动校准（左）和通过保序回归进行平衡校正（右）。第三行：多重校准（迭代）和多重平衡校正（分组保序回归）。

基准模型的偏差最高，反映出评分层面的校准失误。自动校准显著降低了偏差，证实修正保费层面的失真能够改善模型适切性。

引入针对连续车辆车龄的条件校准可进一步提升效果。多重校准保费的总体偏差最低，优于自动校准规格。非迭代平衡校正和多重平衡校正得到的偏差值非常接近，但略高。总体而言，在连续情形下，迭代程序（自动校准和多重校准）能提供最佳的适配表现。

在区分能力方面，所有校准模型都显著优于基准模型。各校准规格的基尼系数相差不大。多重平衡校正的基尼值最高，其次是平衡校正和自动校

准，而多重校准的基尼值略低。

表 7.3：测试集上的样本外表现比较。

| 模型 | 偏差 | 基尼系数 |
|---|---|---|
| 基线 | 36 310.68 | 0.5783 |
| 自动校准 | 33 793.14 | 0.6941 |
| 平衡校正 | 33 799.32 | 0.6973 |
| 多重校准 | **33 781.86** | 0.6904 |
| 多重平衡校正 | 33 814.61 | **0.7023** |

# 8 讨论

本文将多重校准应用于保险保费。这一概念尤具吸引力，因为它能确保财务均衡，并保证基于敏感特征划分的各群体，其保险业务预期回报相同。本文提出并通过机动车保险组合示例说明了几种实现多重校准的方法。有趣的是，多重校准能提升候选保费的表现，而施加公平性约束通常会降低准确性。


# 致谢

第一作者谨此感谢FWO和F.R.S.-FNRS通过卓越科学（EOS）计划为ASTeRISK项目（40007517）提供的资助。第三作者谨此感谢ACTIONS研究讲席在风险基金会名义下提供的支持；该研究讲席由法国巴黎银行Cardif与法国精算师协会共同发起。


# 参考文献


- Barocas, S., Hardt, M., Narayanan, A.（2019）。《公平性与机器学习》。fairml-book.org。- Baumann, J., Loi, M.（2023）。《公平性与风险：关于保险公司可采用的群体公平性定义的伦理论证》。《哲学与技术》36，文章编号45。- Charpentier, A.（2024）。《保险、偏见、歧视与公平性》。施普林格。- Ciatto, N., Verelst, H., Trufin, J., Denuit, M.（2023）。自动校准能否改善提升度拟合优度? European Actuarial Journal 13，479-486。- Denuit, M., Charpentier, A., Trufin, J.（2021）。机器学习保险定价中的自动校准与Tweedie支配。《保险：数学与经济学》101，485-497。

- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M.J., Kaas, R.（2005）。《相关风险的精算理论：度量、序与模型》。Wiley，纽约。- Denuit, M., Sznajder, D., Trufin, J.（2019）。基于洛伦兹曲线、集中曲线、基尼指数和凸序的模型选择。《保险：数学与经济学》89，128-139。- Denuit, M., Trufin, J.（2023）。自动校准下基于皮尔逊相关系数、集中曲线和洛伦兹曲线的模型选择。European Actuarial Journal 13，871-878。- Denuit, M., Trufin, J.（2024）。非寿险定价中平衡校正下的凸序与洛伦兹序：综述与新进展。《保险：数学与经济学》118，123-128。- Dwork, C., Hardt, M., Pitassi, T., Reingold, O., Zemel, R.（2012）。基于认知的公平性。理论计算机科学创新会议（ITCS 2012）论文集，第214–226页。- Fissler, T., Lorentzen, C., Mayer, M.（2022）。模型比较与校准评估：机器学习与精算实践中一致评分函数的用户指南。arXiv预印本 arXiv:2202.12780。- Frees E. W., Huang F.（2023）。具有辨别力的（定价）精算师。《北美精算学报》27，2-24。- Fr¨ohlich, C., Williamson, R.C.（2024）。保险为公平机器学习带来的启示。2024年ACM公平性、问责制与透明度会议论文集，第407-421页。- Hebert-Johnson, U., Kim, M., Reingold, O., Rothblum, G.（2018）。多重校准：针对（可计算识别的）群体的校准。国际机器学习会议论文集，第1939-1948页。- Kr¨uger, F., Ziegel, J.F.（2021）。预测支配的一般条件。《商业与经济统计学杂志》39，972-983。- Kusner, M. J., Loftus, J., Russell, C., Silva, R.（2017）。反事实公平性。载于 Guyon, I., Luxburg, U. V., Bengio, S., Wallach, H., Fergus, R., Vishwanathan, S., Garnett, R.（编），《神经信息处理系统进展》，第30卷。- Lindholm, M., Lindskog, F., Palmquist, J.（2023）。局部偏差调整、持续时间加权概率与费率单元的自动构建。Scandinavian Actuarial Journal 2023，946-973。- Lindholm, M., Richman, R., Tsanakas A., W¨uthrich, M.V.（2022）。无歧视保险定价。《ASTIN公报》52，55-89。- Lundborg, A. R.（2022）。变量显著性检验的现代方法。博士论文，阿波罗—剑桥大学知识库。

- Noll, A., Salzmann, R., W¨uthrich, M.（2018年）。案例研究：法国机动车第三者责任索赔。可通过 SSRN 获取：https://ssrn.com/abstract=3164764。 - Scantamburlo, T., Baumann, J., Heitz, C.（2025）。论预测建模者与决策者：为何公平性需要的不只是公平的预测模型。AI & Society 40, 353-369。 - W¨uthrich, M. V.（2023年）。自动校准下基于基尼指数的模型选择。European Actuarial Journal 13, 469-477。 - W¨uthrich, M. V., Ziegel, J.（2024）。低信噪比下的保序再校准。Scandinavian Actuarial Journal 2024(3), 279-299 - Zhang, Y., Huang, L., Yang, Y., Shao, X.（2025）。使用生成式神经网络检验条件均值独立性。arXiv 预印本 arXiv:2501.17345。