arXiv:2603.16322v1 [math.AC] 17 Mar 2026

一维普吕弗整环的可逆理想群作为整数值函数群

DARIO SPIRITO

Abstract. 设 G 是集合 X 上取值于整数环的函数群$\mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 的一个一维 ℓ-子群。我们证明，在关于 G 的谱及其在素理想处的商群的一些假设下， G是自由的。我们将这一结果转用于研究普吕弗整环 D的可逆理想群 Inv(D) 的自由性：特别地，我们引入 *dd*-域 这一类，它由满足以下条件的普吕弗整环组成：存在一个在 Spec(D) 中稠密的集合 X （相对于逆拓扑），且其局部化均为离散赋值环。这一类恰好是满足 Inv(D) 与 $\mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 的一个子群同构（作为 ℓ-群）的普吕弗整环类。

1. Introduction

设 X是一个非空集合，并令 $\mathcal{F}(X,\ \mathbb{Z})$ 表示所有函数$X\ \longrightarrow\ \mathbb{Z}$ 组成的集合。Baer 的经典定理 [2] 指出， $\mathcal{F}(X,\ \mathbb{Z})$ 不是自由群；另一方面，由所有有界函数组成的子群 $\mathcal{F}_b(X,\ \mathbb{Z})$ 是自由的 [15]。在 [17] 和 [19],中，后一结果被用于证明：几乎戴德金整环 D 的可逆理想群 Inv(D)（定义见下文第 2.2 节）总是自由的。类似的方法也被用于研究强离散 Pr¨ufer 整环这一更一般情形下的 Inv(D)（见 [18]），并由此得到了保证 Inv(D) 为自由群的充分条件。

几乎戴德金整环情形的一个有趣特点是，存在一个自然的单射 $\Phi\colon \mathrm{Inv}(D)\ \longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{Max}(D)\ \mathbb{Z})$，它将理想 I 映射到其理想函数 ν_I；特别是，如果每个理想函数都有界，那么 Inv(D)就是自由的。然而，Inv(D)的像一般并不包含在 $\mathcal{F}_b(X,\ \mathbb{Z})$中：因此，为了证明 Inv($D$) 是自由的，有必要构造一个整环升链（它与极大空间子集的降链相关，这让人联想到拓扑空间导集的构造），从而能够将 Inv(D)表示为自由群的平滑并

2020 数学主题分类。13A15；13F05；13G05；06F20；20F60；20K20；54G12。关键词与短语。自由群；整数值函数；Pr¨ufer 整环；几乎戴德金整环；dd-整环。

使得连续商（非典范地）可表示为 $\mathcal{F}_h(\mathrm{Max}(D)\ \mathbb{Z})$ 的子群。

即使并非每个理想函数都有界，$\mathrm{Inv}(D)$ 的像 $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$ 也不是 $\mathcal{F}(\mathrm{Max}(D)\ \mathbb{Z})$ 的任意子群，而是满足“有界比率”性质：若 $g \in \Phi(\mathrm{Inv}(D))^+$ 与 $nf \geq g$ $(\mathrm{Inv}(f))$ g 具有相同的非零集，则存在一个正整数 n 使得 f,（这对应于分别与 f 和 g 对应的理想是具有相同根基的有限生成理想这一事实）。此外，$\Phi(\mathrm{Inv}(D))$ 是一个 ℓ-群，其谱是一维的。

本文研究 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的 ℓ-子群（其中 X 是任意无限集合），将其视为几乎戴德金整环所产生的 ℓ-群的推广，并特别关注一维情形。在环的情形下，这类子群对应于一类我们称为 ***dd*-域** 的普吕弗整环：从纯粹的环论角度看，它们可定义为离散素理想的集合相对于逆拓扑在谱中稠密的普吕弗整环（若 D_P 是离散赋值环，则 P 是离散素理想）。

本文主要的群论结果是定理 8.3，该定理讨论具有单个“无限”素理想的一维 ℓ-群 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\ \mathbb{Z})$（精确定义见第 3 节）；我们证明，在对 G 的谱施加某些温和的拓扑假设，并对按无限素理想取商的商群施加一个代数假设时，这样的群是自由群。由于 ℓ-群的无限素理想大致对应于 Pr¨ufer 整环的非离散素理想，与这一情形对应的环是一维 Pr¨ufer 整环 D，具有单个非离散素理想，且该素理想也不是孤立的（定理 9.1）。

随后，我们将这一结果推广到无限素理想集合（或者在整环情形下，非离散素理想集合）为可数且其中没有任何点属于谱的完美核的情形（见定理 9.3 和 9.4）。这些结果使我们能够证明，在许多情形下，即使超出 [18] 中所考虑的强离散情形，$\mathrm{Inv}(D)$ 仍是自由群（几乎 Dedekind 整环正是一维情形）。

2. Preliminaries and notation

2.1. 普¨吕弗整环。关于赋值整环和普¨吕弗整环的相关事实，我们参考 [10] 。

设 V 是一个商域为 K的整环。那么，对于每个 $x \in K$，若 $x \in V$ 或 $x^{-1} \in V$，则 V 是一个赋值整环。赋值整环总是局部的，其所有有限生成理想都是主理想；其所有局部化也都是赋值整环。

对于每个赋值整环 V，我们可以关联一个从$K \setminus \{0\}$ 到全序阿贝尔群 Γ 的函数 v （称为赋值），使得对于每个 $x,\ y \in K \setminus \{0\}$,

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;
- $v(x + y) \geq$ 最小$\{v(x)\ v(y)\}$ (若 $x + y \neq 0$);

- $x \in V$当且仅当 $v(x) \geq 0$。

若 v 是满射，则 Γ 称为 V的值群 。此外，若 V的克鲁尔维数为 1，则该值群总是同构于加法群 $\mathbb{R}$的一个子群；因此，在这种情况下，我们可以将v 视为从 $K \setminus \{0\}$ 到 $\mathbb{R}$的函数。

如果 V是诺特的，那么 V称为离散赋值环（DVR），且其值群同构于 $\mathbb{Z}$。在此情况下，当将 v 视为到 $\mathbb{R}$的映射时，我们通过以下方式规范化 v：若 x 生成 V的极大理想，则令 $v(x) = 1$ 。

整环 D 是<style id='2'>普吕弗整环，当且仅当它是局部赋值整环，即对于每个极大理想 M， D_M 都是赋值整环。贝祖整环是这样一种整环，其中每个有限生成理想都是主理想；每个贝祖整环都是普吕弗整环。

几乎戴德金整环是这样一种整环：对于每个极大理想 M， D_M 都是离散赋值环。戴德金整环是诺特普吕弗整环；等价地说，它是局部有限的几乎戴德金整环（即每个 $x \in D \setminus \{0\}$ 只包含于有限多个极大理想中）。

如果 D 是 Pr¨ufer 整环，且 P 是素理想，使得 D_P 是离散赋值环，则称 P 是 D 的离散素理想。

2.2. **可逆理想**。设 D 是一个整环，其商域为 K 。 D 的分式理想是 K 的一个 D- 子模 I ，满足对某些 $d \in D$、 $d \neq 0$，有 $dI \subseteq D$ 。分式理想 I 若存在分式理想 J 使得 $IJ = D$，则称其为可逆的。 D 的可逆理想组成的集合 Inv(D) 在乘法运算下构成一个群，其单位元为 D。

每个可逆理想都是有限生成的。如果 D 是 Pr¨ufer 整环，则反过来也成立，即每个有限生成理想都是可逆的。

当 D 是 B´ezout 整环时，Inv(D) 自然同构于 D 的可除性群，也就是说，它是 D 的商域的乘法群与 D 的单位元群之间的商群。当 V 是赋值整环时，Inv(V) 自然同构于 V 的值群。

2.3. **自由群**。设 G 是一个阿贝尔群。那么，若 G 有一个基，即存在一个集合 $E \subset G$ ，使得每个 $g \in G$ 都能唯一地写成 E中元素之和，则 G 是自由的 。等价地，若 G 同构于一族 $\mathbb{Z}$ 的副本的直和，则 G 是自由的。

自由群的子群总是自由的。此外，自由群是投射的，也就是说，如果

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

这是一个正合列，并且 C 是自由的，那么该序列分裂。

若 G 是一个群，则 G 的光滑序列子群是一个良序递增链 $\{H_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ ，由 G 的子群组成，并且对所有极限序数 β，都有 $H_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} H_\alpha$。

我们将用来证明群的自由性的主要方法是以下结果:

定理 2.1。 [8, 第 3 章，引理 7。4] 设 G 是一个群，$\{H_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ 是子群光滑序列，满足 $H_0 = 0$ 且 $\bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha = G$。如果对每个 α，$H_{\alpha+1}/H_\alpha$ 都是自由的，那么 G 是自由的。

注 2.2。 [8, 第 3 章，引理 7。4] 的陈述包含了每个 H_α 都是 G 的纯子群这一假设，也就是说，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$nG \cap H_\alpha = nH_\alpha$ 都成立。这个假设并非必要，因为证明并未用到它。

2.4. **ℓ-群**。 在下文以及全文中，我们只考虑阿贝尔群。关于 ℓ-群的术语，请参阅 [5] 。

阿贝尔群 ℓ-群 （格序群的简称）是一种偏序群，同时也是一个格，也就是说，其中每对元素都有下确界和上确界。如果 G 是一个单位元为 0 的 ℓ-群，那么 $G^+ := \{h \in G \mid h > 0\}$ 就是 G 的正锥 。

G 的理想是 G的凸 ℓ-子群，也就是说，是G 的一个子群 I ，满足: 若 $a,\ b \in I$，则 $a \wedge b \in I$；若 $a \le c \le b$，则 $c \in I$。理想 I称为素理想，若对任意 $a,\ b \in G^+$，只要 $a \wedge b \in I$，就有$a \in I$ 或 $b \in I$。

若 I 是 G的一个素理想，则 G/I 是一个全序群；我们称之为 I处的剩余群。

G 的谱Spec(G)是 G的所有素理想构成的集合。 G的维数是 Spec(G)中各链长度的上确界；特别地，若没有两个真包含于 G 中的素滤子彼此可比较，则 G 的维数为 1（即它是一维的）。我们用 Spec*(G) 表示集合 Spec(G) $\setminus \{G\}$。

2.5. **Pr¨ufer 整环与** ℓ<style id='7>-群。设 D 是一个 Pr¨ufer 整环。那么， D 的可逆分式理想构成的群 Inv(D) 在反向包含关系 [3, 下是一个ℓ-群（定理 2(a)]）；反过来，每个格序群都同构于某个 B´ezout 整环D 的 Inv(D)（见 [9, 第三章定理 5.3] 或定理 11.2]；注意，对于 B´ezout 整环，Inv(D) 同构于 D的可除性群）。

设 D 是一个贝祖整环。根据 [1, 定理 11.3 及随后的讨论，Inv(D) 的素理想是形如 $H_P := \{I \in \text{Inv}(D) \mid ID_P = D_P\}$ 的集合，其中 P 是 D 的某个非零素理想；因此，存在一个双射

$$\Psi\colon \operatorname{Spec}(D) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\operatorname{Inv}(D)),$$
$$P \longrightarrow H_P$$

它反转了序关系。特别地，dim(D) = dim(Inv(D))。

凸群 H_P 也可以看作扩张映射 Inv(D) $\longrightarrow$Inv(D_P)，$I \mapsto ID_P$ 的核。由于该映射是满射，

Inv(D_P) $\simeq$ Inv(D)/H_P，即 D_P 的值群与 Inv(D) 在 H_P 处的剩余群同构。

如果 D 是Pr¨ufer整环，但不一定是B´ezout整环，我们总可以利用Kronecker函数环构造将问题化归到B´ezout情形（定义和性质见第 32]章）：根据引理3.5]„ 如果 D 是Pr¨ufer整环，则扩张映射 Ψ : Inv(D) $\longrightarrow$ Inv(Kr(D)),$I \mapsto I$Kr(D)是 ℓ-群的同构。

因此，我们总可以将问题从 ℓ-群转移到B´ezout整环；考察B´ezout整环情形下的Inv(D)，就足以研究任意Pr¨ufer整环中的相应问题。

2.6. **逆拓扑与可构造拓扑**。设 A为一个环，Spec(A)为 A的谱。对于每个 $f \in A$，令

$$\mathcal{V}(f) := \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \in P\}.$$

除非另有说明，我们总是赋予 Spec(A) 逆拓扑，即由族 $\{V(f) \mid f \in A\}$ 生成的拓扑；其名称源于这样一个事实：它在 Spec(A) 上诱导的序与包含关系的序相反（通常的 Zariski拓扑所诱导的正是包含关系的序）。在逆拓扑下，A 的谱是紧致的。A 的极大理想集合 Max(A) 上的子空间拓扑是 Hausdorff 的，而集合 $\mathcal{V}(f) \cap$ Max(A) 在 Max(A) 中是开闭且紧致的。有关逆拓扑及其与 Zariski拓扑和可构造拓扑之间联系的深入研究，请参见 [6,第 1] 章。

当 G 是一个 ℓ-群时，我们赋予 Spec(G) 外壳—核拓扑：它由集合 $\mathcal{D}$(f) : $= \{P \in$Spec(G) $\mid f \notin P\}$ with$f \in G^+$ （或等价地，with $f \in G$）生成。如果 D 是一个 Pr¨ufer 整环且 $G =$Inv(D)，那么该双射

$$\Psi : \mathrm{Spec}(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{Inv}(D))$$

当 Spec(D) 赋予逆拓扑，而 Spec(Inv(D)) 赋予包核拓扑时，它成为一个同胚：事实上，若 $f \in D$，则 $\Psi(\mathcal{V}(f)) = \mathcal{D}(fD)$；若 $I \in$ Inv(D)，则$I = (f_1$、.....、 $f_n)$ 是有限生成的，且 $\Psi^{-1}(\mathcal{D}(I)) = \mathcal{V}(f_1) \cap \cdots \cap \mathcal{V}(f_n)$。

若 D 是一维的，则 Max(D) $=$ Spec(D) $\setminus \{(0)\}$，而它在映射 Ψ 下的像是 Spec*(Inv(D)) $=$ Spec(Inv(D)) $\setminus$ {Inv(D)}。

2.7. **函数群**。设 X 为一个集合。我们用 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 表示所有函数 $X \longrightarrow \mathbb{Z}$ 组成的群；在自然的逐点序下，该群是一个 ℓ- 群（即，当且仅当对所有 $x \in X$，$f \leq g$ 满足 $f(x) \leq g(x)$）。特别地，对所有 f，$g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$，$(f \wedge g)(x) =$ inf$\{f(x)\ g(x)\}$，且 $(f \vee g)(x) =$sup$\{f(x)\ g(x)\}$。

如果 $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$，$f$的支集 为

$$\mathrm{supp}(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

对于每个 $x \in X$，我们用 e_x 表示位于 x 处的基元素，即满足以下条件的函数

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \\ 0 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

我们将 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z})$ 定义为：$= \langle e_x \mid x \in X \rangle$，通常称其为直和（在直积 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z}) = \prod_{x \in X} e_x \mathbb{Z}$ 中）。

3. Primes at infinity

我们希望研究 ℓ-群 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的谱。为此，我们将 G 的素理想分为两类。

命题 3.1。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群，且设 $x \in X$。

(a) 集合 $P_x := \{f \in G \mid f(x) = 0\}$ 是 G 的一个素理想。*(b)* 若 $P_x \neq G$，则剩余群 G/P_x 与 $\mathbb{Z}$ 同构。*(c)* 集合 $\mathcal{P} := \{P_x \mid x \in X, P_x \neq G\}$ 在 $\operatorname{Spec}(G)$ 中稠密。

证明。显然，P_x 是凸的；若 $f \wedge g \in P_x$，则 $0 = (f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中必有一个为 0，即 $f \in P_x$ 或 $g \in P_x$。所以 P_x 是素理想。

理想 P_x 是求值映射 $v_x : G \longrightarrow \mathbb{Z}$，$v_x(f) := f(x)$ 的核；若 $P_x \neq G$，则 $v_x(G)$ 不只是 (0)，因此 G/P_x 同构于 $\mathbb{Z}$ 的一个非零子群，进而同构于 $\mathbb{Z}$。

若现在 Ω 是 $\operatorname{Spec}(G)$ 的一个开子集，则对某个 $f \in G^+$，有 $\mathcal{D}(f) \subseteq \Omega$。存在一个 $x \in X$ 使得 $f(x) > 0$，因此 $f \notin P_x$，即 $P_x \in \mathcal{D}(f)$；所以 $P_x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(f) \subseteq \mathcal{P} \cap \Omega$，尤其是非空的。因此 $\mathcal{P}$ 是稠密的。□

定义 3.2。设 P_x 如命题 *3.1(a)* 中所述。若 $P_x \neq G$，我们称 P_x 为与 x 相关联的有限素理想，并称 $P \in \operatorname{Spec}^*(G)$ 是 G 的一个有限素理想，如果对于某个 $x \in X$，有 $P = P_x$。

如果 $P \neq G$ 不是有限素理想，我们称 P 为一个无穷远素理想（或 G 的一个无限素理想）。我们用 $\operatorname{Spec}^\infty(G)$ 表示 G 的无穷远素理想集合。

注 3.3。作为无穷远素理想并非 P 固有的代数性质，而取决于它如何实现为 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的子群。例如，设 X 是一个无限集合，G 是由所有 e_x 以及恒等于 1 的函数 $\mathbf{1}_X$ 生成的群；那么，G 是一个以 $\{e_x, \mathbf{1}_X \mid x \in X\}$ 为基的自由群。集合 $P := \langle e_x \mid x \in X \rangle$ 是 G 的一个素理想，并且是 G 的一个无穷远素理想，因为对于每个 $x \in X$，都有 $P \neq P_x$。

现在令 $\overline{x}$ 为一个不属于 X 的元素，令 $X' := X \cup \{\overline{x}\}$，并考虑映射

$$\begin{aligned} \phi \colon G &\longrightarrow \mathcal{F}(X', \mathbb{Z}), \\ e_x &\longmapsto e_x, \\ \mathbf{1}_X &\longmapsto \mathbf{1}_{X'}. \end{aligned}$$

那么， ϕ是 ℓ群之间的同构，连接 G 与 $\phi(G)$；然而， P的像是一个有限素理想，即 $\phi(P) = P_x$。因此 $\mathrm{Spec}^\infty(\phi(G)) \neq \emptyset$。

下面的引理显而易见，但为清晰起见，我们将其明确写出。

引理 3.4。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群， $f \in G^+$，设 $x \in X$。那么， $x \in$支撑(f) 当且仅当 $P_x \in \mathcal{D}(f)$。

4. DD-DOMAINS

如第 2.5 节所述， ℓ-群恰好是作为 Pr¨ufer 整环的可逆理想群出现的结构。本节研究将范围限制在整数值函数群 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的子群时会发生什么。

定义 4.1。设 D 是一个 *Pr¨ufer* 整环。若一个子集 $X \subseteq \mathrm{Spec}(D)$ 满足： X 在 $\mathrm{Spec}(D)$ 中稠密（相对于逆拓扑），且对于每个 $P \in X$， D_P 都是一个离散赋值环，则称其为 D 的离散核 。

如果 D 具有离散核，则称其为离散稠密整环（简称dd-整环）。

等价地，如果 D 的离散素理想集合关于逆拓扑稠密，则称 D 为 dd-整环。然而，dd-整环可以有多个离散核（见例 4.7(3)），上述定义则具有更大的灵活性。

设 D 为 dd-整环， X 为 D 的离散核。对于每个分式理想 I ，我们可以关联一个理想函数（相对于 X 定义），其定义为

$$\begin{aligned} \nu_I \colon X &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ P &\longmapsto v_P(I) \end{aligned}$$

其中 v_P 是相对于 D_P 的赋值。

定理 4.2。设 D 是一个普吕弗整环。

(a) 如果 D 是 *dd-*整环，且 X 是离散核，则映射

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathrm{Inv}(D) &\longrightarrow \mathcal{F}(X, \mathbb{Z}), \\ I &\longmapsto \nu_I, \end{aligned}$$

是一个单射 ℓ-群同态。特别地，$\mathrm{Inv}(D)$ 作为一个 ℓ-群，同构于 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的一个子群。*(b)* 设 X 是任意集合， $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ- 群。若 $\mathrm{Inv}(D) \simeq G$，则 D 是一个 *dd-* 整环。

证明。(a) 由于 v_P 是一个赋值，对于每一对分式理想 I, J，我们都有 $v_P(IJ) = v_P(I) + v_P(J)$。因此 Φ 是一个群同态。此外，Inv(D) 的序结构是反向包含关系，因此 $I \wedge J = I + J$。于是，

$$v_P(I \wedge J) = v_P(I + J) = \min(v_P(I), v_P(J))$$

因此 $\Phi(I \wedge J) = \Phi(I) \wedge \Phi(J)$。由此可知， Φ 是 ℓ-群同态。

我们证明它是单射：假设 $\Phi(I)$是零映射。那么，对所有 $P \in X$，都有$\nu_I(P) = v_P(I) = 0$。因此，

$$I \subseteq \bigcap_{P \in X} ID_P = \bigcap_{P \in X} D_P = D,$$

最后一个等式由 X [14, 定理 5.6(a)] 的稠密性得出（注意，由于 D 是普吕弗整环，局部化映射在扎里斯基拓扑和逆拓扑下均建立了其谱与扎里斯基空间之间的同胚¨引理 2.4]）。此外，$\mathcal{V}(I) \cap X = \emptyset$。由于 I 可逆，它是有限生成的，因此 $\mathcal{V}(I)$是 Spec(D)的一个开集；由于 X 稠密，必有 $\mathcal{V}(I) = \emptyset$，即 $I = D$。因此， Φ 是单射。

(b) 若 P_x 是 G的一个有限素理想，则由命题 3.1(b)可知，剩余群 G/P_x 与 $\mathbb{Z}$ 同构。因此， D 的相应素理想Q_x 满足：局部化 D_{Q_x} 是一个离散赋值环。

此外，由命题 3.1(c)可知， $\mathcal{P} := \{P_x \mid x \in X\}$ 在 Spec(G)中稠密，因此 D 的相应素理想集合在 Spec(D)中稠密。因此， $\mathcal{P}$ 是一个离散核，且 D 是一个 dd- 整环。□

前一个定理的结果也可以用另一种方式表述：

推论 4.3。设 D 是一个普吕弗整环。那么，当且仅当 $\mathrm{Inv}(D)$ 作为一个 ℓ-群同构于某个非空集合 X的$\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的子群时， D 才是一个 *dd*-整环。

对于 dd-域，离散核与有限素理想之间存在紧密联系，下面的命题将说明这一点。

命题 4.4。设 D 是一个离散核为 X的 *dd*-整环，并设 $\Phi : \mathrm{Inv}(D) \longrightarrow G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 为典范同构；设$\Psi : \mathrm{Spec}(D) \longrightarrow \mathrm{Spec}(G)$ 为相应的谱映射。那么，当且仅当 $\Psi(P)$ 是 G的有限素理想时，$P \in X$ 。

证明。若 $P \in X$，则 P 处的有限素理想恰好是所有满足 $\nu_I(P) = 0$ 的可逆理想 I构成的集合，也就是说，是满足$ID_P = D_P$的 I构成的集合。因此 $\Psi(P)$恰好是 P处的有限素理想。由于这些是 G的全部有限素理想，若 $P \in$ Spec(D) $\setminus X$，则 $\Psi(P)$是一个无限素理想。□

在这种解释下，注 3.3 可以看作是通过两个不同的离散核心 X 和 X'，考察同一个 dd-整环 D 的可逆理想群。

如果每当$f, g \in G^+$ 具有相同的支集时，都有 $nf \geq g$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$成立，那么我们称子群 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$具有有界比率 。

推论 4.5。设 D 是一维 *dd*-整环， X 是 D 的离散核。设 Φ 是定理 *4.2(a)* 的陈述中定义的映射。则， $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$ 是有界比率群。

证明。设 $f = \Phi(I)$、 $g = \Phi(J)$ 是 $\Phi(\mathrm{Inv}(D))^+$ 中具有相同支集的元素。则， $\mathcal{V}(I) \cap X = \mathcal{V}(J) \cap X$。由于 D 是一维的， $\mathcal{V}(I)$ $\mathcal{V}(J)$ 都是 $\mathrm{Max}(D)$ 的开闭集；由于 X 稠密，可得 $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J)$，因此 I 和 J 具有相同的根基。由于 I 是有限生成的，存在一个整数 n 使得 $I^n \subseteq J$，因此

$$nf = n\Phi(I) = \Phi(I^n) \geq \Phi(J) = g.$$

因此， $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$是一个有界比群。 □

推论 4.6。设 X 是一个非空集合，且 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个ℓ-群。如果 G 是一维的，那么它是一个有界比群。

证明。设 D 是一个 B′贝祖整环，满足 $\mathrm{Inv}(D) \simeq G$。那么， D 是一个 dd-整环（定理 4.2(a)），且 $\dim(G) = \dim(\mathrm{Inv}(D)) = \dim(D)$。因此， D 是一维的，并且根据推论 4.5， $\Phi(\mathrm{Inv}(D)) \simeq G$ 是一个有界比群。□

例 4.7。

(1) 每个戴德金整环都是 dd-整环。设 $X := \mathrm{Max}(D)$：那么，每个极大理想 M 都是可逆的，而理想函数 ν_M 正是 $\{M\}$的特征函数。由于每个可逆理想都是极大理想的乘积（指数可以为负），像 $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$恰好是直和 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z})$。

(2) 每个几乎戴德金整环都是 dd-整环，并且与戴德金情形一样，离散核是 $X := \mathrm{Max}(D)$。如果 D 不是戴德金整环，则有些极大理想不可逆（因此并非所有 e_x 都属于 $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$）；反过来，有些理想 I 包含于无穷多个极大理想中，因此 $\Phi(\mathrm{Inv}(D))$不包含于 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z})$。

(3) 如果 D 是一个非戴德金整环的几乎戴德金整环，则存在真包含于 $\mathrm{Max}(D)$ 的离散核 X。事实上，由于 D 不是戴德金整环，总有一些不可逆（等价地，不是有限生成）的极大理想；若 M 是其中之一，则 M 不是 $\mathrm{Max}(D)$ 中的孤立点，因此 $\mathrm{Max}(D) \setminus \{M\}$ 是 D的一个离散核。一个不那么显然的离散核是所有非临界极大理想构成的集合（见 [19, 定理 5.6]）。更一般地，每个豪斯多夫零维紧空间都可以实现为某个几乎戴德金整环的极大空间（ [13,第 3], 节），并且此类空间的任意稠密子集都可以用作离散核。

(4) 存在一维 Pr¨ufer 整环，它们是 dd-域，但并非几乎戴德金。例如，若 D 有唯一一个不可逆极大理想，记作 N，且 N 在 $\mathrm{Max}(D)$ 中不是孤立的，那么 $X := \mathrm{Max}(D) \setminus \{N\}$ 是一个离散核（因为其他每个极大理想 M 都是可逆的，因此局部化 D_M 是一个离散赋值环）；此外，若 D_N 不是离散赋值环，则 D 并非几乎

戴德金。参见例 7.3，其中给出了一个由此类整环产生的 ℓ-群。

(5) 设 p 为素数。若 $A = \mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{Z}$ 在 (p) 处的局部化，则整数值多项式环 Int(A) 是 dd-整环；因此，Int($\mathbb{Z}$) 也是 dd-整环。另一方面，若 B 是 p-进整数环，则 Int(B) 不是 dd-整环，因为它不是任何一族一维局部化的交（因此，特别地，Int(B) 不可能有离散核） [4, 命题 3 及后续推论]。

(6) 全部整函数（即处处全纯的所有函数）构成的环 E 是一个 dd-整环。令 M_α为由 $z - \alpha$ 生成的极大理想，则 $X := \{M_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ 是一个离散核（因为每个非零非单位整函数都必有零点），且映射 Φ 的值域是整个 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$。注意， E 是无限维的 [11]。

设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。我们可以构造一个贝祖整环D，使得 Inv(D) $\simeq G$，并且根据定理 4.2 D 将是一个 dd-整环；再次利用定理 4.2，我们可以构造一个同构 Inv(D) $\longrightarrow G' \subseteq \mathcal{F}(X', \mathbb{Z})$，其中 X'是 D 的离散核。一般而言，即使$X' = X$，也不能保证 $G' = G$：例如，若 $G = \langle 2e_x \, | x \in X\rangle$，那么 D 将是一个戴德金整环，而 Φ(Inv(D)) 就是直和 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z}) = \langle e_x \mid x \in X\rangle$。更一般地，不难看出，对于每个普吕弗整环 D， G绝不会是任何从 Inv(D) 到 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的函数 Φ 的像。

这一事实不会造成任何困难，但需要采用一种技术性变通方法。

定义4.8。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。若存在一个具有离散核 Y 的普吕弗整环 D，使得 G 是映射复合的像，我们就称 G 是约化的 。

$$\mathrm{Inv}(D) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{F}(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$$

其中 Φ 是定理 *4.2(b)* 中定义的映射，而 f^* 是由双射 $f : Y \longrightarrow X$ 诱导的映射。

命题 4.9。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。存在一个 X'和一个约化的 ℓ-群 G'，使得 $G \simeq G'$。

证明。 设 D 是一个满足 Inv(D) $\simeq G$ 的普吕弗整环。由定理 4.2，D 是一个 dd-整环，因而它具有离散核 X'。再次应用该定理可知，Inv(D) 同构于$\mathcal{F}(X', \mathbb{Z})$ 的一个子群；根据定义，该群是约化的。□

第 7 节和第 8 节主要结果证明的核心论证将采用群论方法；不过，在处理谱时，使用 B′佐特整环通常更为简便。我们给出两个运用这种证明方法的例子。

引理 4.10. 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个一维 ℓ-群，并设$f \in G$。若支撑(f) 是有限的，则 f 属于每个 $P \in 谱^{\infty}(G)$。

证明。 设 D 是一个贝祖环，并有同构 Φ: Inv$(D) \longrightarrow G$，再设 Ψ: Spec$(D) \longrightarrow$Spec(G) 是典范同胚。那么，

$$\mathrm{supp}(f) = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\} = X \setminus \{x \in X \mid f \in P_x\}.$$

因此， f 属于几乎所有 P_x。设 $I := \Phi^{-1}(f)$：由于 $\Psi(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{D}(f)$，我们有 I 只属于 X' 的有限多个素理想：$= \{\Psi(P_x) \mid x \in X\}$。由于 X' 在 Max(D) 中稠密，因此 $\mathcal{V}(I) \subseteq X'$，即对于所有 $Q \in$ Max$(D) \setminus X'$，都有 $I \nsubseteq Q$。因此 $\Psi(Q) \notin \Psi(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{D}(f)$，即 $f \in \Psi(Q)$。由于 Max$(D)\setminus X'$ 映射到 Spec$^{\infty}(G)$，故命题得证。□

命题 4.11。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个约化的 ℓ-群。那么：

(a) $P_x \neq P_y$ for every $x \neq y$;
(b) for every $x \in X$ there is an $f_x \in G^+$ such that $f_x(x) = 1$.

证明。 设 D 是一个 B´ezout 整环，其离散核为 Y，且 G 是复合映射的像

$$\mathrm{Inv}(D) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{F}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \mathcal{F}(X,\mathbb{Z}).$$

不失一般性，我们可以假设 $Y = X$ （且 f 是恒等映射）。

若 $x \in X$，则 P_x 是 D的素理想 x 的像；特别地，若 $x \neq y$，则 P_x 和 P_y 是不同素理想的像，因而彼此不同。此外，存在一个 $d \in D$，使得 $d \in x \setminus x^2$；若 $f \in \mathcal{F}$（X，$\mathbb{Z}$）是理想（d）的像，则 $f \in G^+$ 和 f（x）$= 1$。□

5. Derived sets

设 T是一个拓扑空间。 T的导集 $\mathcal{D}$（T）$= \mathcal{D}^1$（T）是 T 的所有极限点组成的集合（即所有非孤立点）；更一般地，对于每个序数 α，我们可以定义 T 的第α阶导集

$$\mathcal{D}^{\alpha}(T) := \begin{cases} T & \text{if } \alpha = 0, \\ \mathcal{D}(\mathcal{D}^{\beta}(T)) & \text{if } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap_{\beta<\alpha} \mathcal{D}^{\beta}(T) & \text{if } \alpha \text{ is a limit ordinal.} \end{cases}$$

点 $p \in T$ 的康托尔-本迪克松秩 CB(p)是满足 $p \in \mathcal{D}^{\alpha}(T)$ 的最大 α；如果不存在这样的 α，则为 ∞。T的康托尔-本迪克松秩 CB(T)是满足 $\mathcal{D}^{\alpha}(T) = \mathcal{D}^{\alpha+1}(T)$ 的最小序数 α；在这种情况下，我们定义 $\mathcal{D}^{\infty}(T) := \mathcal{D}^{\alpha}(T) = \mathcal{D}^{\alpha+1}(T)$（这个集合称为 T 的完美核）。因此，

$$\mathcal{D}^{\alpha}(T) = \{p \in T \mid \mathrm{CB}(p) \geq \alpha\}$$

and

$$\mathrm{CB}(T) = \sup\{\mathrm{CB}(p) \mid p \in T\}.$$

如果 T 是紧致的，上面的上确界就是最大值。

我们称 T 为散布的，如果 $\mathcal{D}^\infty(T) = \emptyset$。

我们将关注有限素理想 P_x的康托尔-本迪克松秩。我们将使用以下记号。

定义 5.1。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个约化的 ℓ-群。

- 如果 $P \in \text{谱}^*(G)$，我们用 $\mathrm{CB}(P)$ 表示 P 作为谱$^*(G)$中的一点的康托尔-本迪克松秩。
- 如果 $x \in X$，我们令 $\mathrm{CB}(x) := \mathrm{CB}(P_x)$。
- 若 $f \in G^+$，则定义 $\mathrm{CB}(f) := \sup\{\mathrm{CB}(P) \mid P \in \mathcal{D}(f)\}$。
- 若 $f \in G$，则定义 $\mathrm{CB}(f) = \max(\mathrm{CB}(f^+), \mathrm{CB}(f^-))$，其中 $f^+ := f \vee 0$ 且 $f^- := f \wedge 0$ (且 $\mathrm{CB}(0) = 0$)。

对于每个序数 α 以及 $\alpha = \infty$，我们定义

$$\mathcal{D}_0^\alpha(X) := \{x \in X \mid P_x \in \mathcal{D}^\alpha(\mathrm{Spec}(G)) \cap X\}.$$

注意，记号 $\mathcal{D}_0^\alpha(X)$ 可能存在歧义，因为其定义取决于 G，但这一点并未体现在记号中。不过，我们不会同时处理由不同群诱导的导集，因此为使记号简洁，我们避免明确写出 G 。

引理 5.2. 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个约化的 ℓ-群，并设 $f, g \in G^+$。则 $\mathrm{CB}(f + g) = \max\{\mathrm{CB}(f), \mathrm{CB}(g)\}$。

证明。由于 $f, g \in G^+$，我们有 $\mathcal{D}(f + g) = \mathcal{D}(f) \cup \mathcal{D}(g)$。事实上，假设 $P \in \mathcal{D}(f) \cup \mathcal{D}(g)$：那么不失一般性，$P \in \mathcal{D}(f)$，即 $f \notin P$。由于 $0 \leq f \leq f + g$，P的凸性意味着 $f + g \notin P$，即 $P \in \mathcal{D}(f + g)$。反过来，若 $P \in \mathcal{D}(f + g)$，则$f + g \notin P$，因此 f 和 g 中至少有一个不属于 P（因为P是一个子群）。因此 $P \in \mathcal{D}(f) \cup \mathcal{D}(g)$。根据康托尔-本迪克松秩的定义，结论即得。□

假设 x 是 X的一个孤立点。那么，$\{x\}$ 是开集，因此$\{x\} = \mathrm{supp}(f)$，或者等价地，$\{P_x\} = \mathcal{D}(f)$，其中某个 $f \in G$。若 G是约化的，则可知 G 包含基本元素 e_x。为了将这一事实推广到非孤立元素，我们引入以下概念。

定义 5.3。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群，且设 $x \in X$。若 $q \in G^+$ 是在 x 处的半基本元素，即 $q(x) = 1$ 且$\mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)}(X) = \{x\}$，则称 $q \in G^+$ 为在 x 处的半基本元素 。

引理 5.4。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个约化的 ℓ-群，且设 $x \in X$。

(a) 若 q 在 x处是半基本的，则$\mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)+1}(X) = \emptyset$。*(b)* 若$x \notin \mathcal{D}_0^\infty(X)$，则存在一个在 x处半基本的 $q \in G^+$ 。*(c)* 若 $x \notin \mathcal{D}_0^0(X)$，则 $q = e_x$ 是唯一一个在 x处半基本的元素。

证明。(a) 由于 $\mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)+1}(X) \subseteq \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)}(X)$，我们有

$$\mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)+1}(X) \subseteq \mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)}(X) = \{x\}.$$

由于 $x \notin \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)+1}(X)$，我们必有 $\mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)+1}(X) = \emptyset$。

(b) 由于 $x \notin \mathcal{D}_0^{\infty}(X)$，素理想 P_x 是$\mathcal{D}^{\mathrm{CB}(x)}(\mathrm{Spec}(G))$中的孤立点，因此存在 $\mathrm{Spec}(G)$ 的开集 Ω，使得 $\Omega \cap \mathcal{D}^{\mathrm{CB}(x)}(\mathrm{Spec}(G)) = \{P_x\}$。因此，我们可以找到 $f \in G^+$，使得$P_x \in \mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$；对于这样的 f，我们有 $\mathrm{supp}(f) \cap \mathcal{D}_0^{\mathrm{CB}(x)}(X) = \{x\}$。由于 G是约化的，我们可以找到一个 $g \in G^+$，使得 $g(x) = 1$；因此，$q := f \wedge g$ 在 x 处是半基的。

(c) 如果 $x \notin \mathcal{D}_0^0(X)$，那么同样有 $x \notin \mathcal{D}_0^{\infty}(X)$，因此根据前一点，存在一个半基本元素 q；特别地，$\{x\} = \mathrm{supp}(q) \cap \mathcal{D}_0^0(X) = \mathrm{supp}(f) \cap X = \mathrm{supp}(q)$，从而 $q = ne_x$ for some $n \in \mathbb{N}^+$。由于 q 是半基的，$1 = q(x) = ne_x(x) = n$，因此 $q = e_x$ 是在 x 处半基的唯一元素。□

注 5.5. 设 G 是一个约化 ℓ-群。那么，映射 $\phi: X \longrightarrow \mathrm{Spec}(G)$, $x \mapsto P_x$ 是单射，因此可用于赋予 X 一个拓扑（取决于 G）。容易看出，在此拓扑下，若 $x \in X$ 是一个极限点，那么 P_x 是 $\mathrm{Spec}(G)$ 的一个极限点，因此

$$\phi(\mathcal{D}(X)) \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Spec}(G)) \cap \phi(X) = \mathcal{D}_0(\mathrm{Spec}(G)).$$

归纳论证表明，对所有α，$\phi(\mathcal{D}^{\alpha}(X)) \subseteq \mathcal{D}_0^{\alpha}(\mathrm{Spec}(G))$。然而，这两个集合不一定重合；为说明这一点，我们给出一个拓扑空间 T 的例子，其中存在一个稠密集合 X，使得$\mathcal{D}^{\infty}(X) \neq \mathcal{D}^{\infty}(T) \cap X$。

设 Y是 $[0,1]$, 中的康托空间，并设 $Y' := \{(p, 0) \mid p \in Y\} \subseteq \mathbb{R}^2$。对每个整数 $n \geq 1$, 令 X_n 为所有满足 $x \in [0,1]$ 且对于每个 $k \geq n$，x 在三进制中的第 k位数字为 0 的 $(x, 1/n) \in \mathbb{R}^2$ 所构成的集合（我们将 1 表示为 $0, 2 \cdots 2 \cdots$）。注意，每个 X_n 都是有限集合。令

$$X := \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n \geq 1} X_n, \quad T = X \cup Y'.$$

根据构造，X 在 T 中稠密（若 p的三进制展开为 $p = 0.c_1c_2 \cdots c_n \cdots$，则（$p$，0）是 {（$p_k$，$1/k$）}的极限，其中$p_k = 0.c_1c_2 \cdots c_k$ 以三进制表示）。

$X \setminus \{(0, 0)\} = T \setminus Y'$的每个元素在 T中都是离散的，而 Y' 中的每一点都是极限点；因此，

$$Y' = \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}^2(T) = \cdots = \mathcal{D}^{\infty}(T).$$

特别地，（0，0）$\in \mathcal{D}^{\infty}(T) \cap X$。然而，（0，0）是 X的唯一极限点，因此

$$\mathcal{D}(X) = \{(0,0)\}, \quad \mathcal{D}^2(X) = \emptyset.$$

因此，对于每个 $\alpha \geq 2$ 以及 $\alpha = \infty$，都有 $\mathcal{D}^{\alpha}(X) \neq \mathcal{D}^{\alpha}(T) \cap X$。

我们以一个稍后会用到的引理结束本节。

引理 5.6。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群，并设 $Y \subseteq X$ 是一个非空子集。对于所有的 $y \in Y$，设 q_y 在 y处是半基。那么，$Q := \{q_y \mid y \in Y\}$ 是 G的一个线性无关子集。

证明。假设 $n_1 q_{y_1} + \cdots + n_k q_{y_k} = 0$，其中 $y_1, \ldots, y_k \in Y$（若 $i \neq j$，则 $y_i \neq y_j$）且 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$。令 $\gamma := \sup\{\mathrm{CB}(y_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$，并且不失一般性地假设 $\mathrm{CB}(y_1) = \gamma$。那么，对于所有 $i > 1$，$q_{y_i}(y_1) = 0$，因此

$$0 = (n_1 q_{y_1} + \cdots + n_k q_{y_k})(y_1) = n_1 q_{y_1}(y_1) = n_1,$$

从而 $n_1 = 0$。重复这一过程可得，对于所有 k，都有 $n_k = 0$，因此 Q 是一个线性无关集合。□

6. Basic limit groups

设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。无限素理想的集合 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 可以非常大，因而极难分析。因此，本文主要关注该空间足够小、从而可加以控制的情形：其基本思路是利用导出序列“剥离”孤立点的各层，而这一方法要求 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 是可数的，且与 $\mathrm{Spec}(G)$ 的完美核不相交。

当 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 为空时，我们可以借助环的情形证明其自由性。

命题 6.1。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。若 $\mathrm{Spec}^\infty(G) = \emptyset$，则 G 是自由的。

证明。设 D 是一个 B´ezout 整环，且 $\mathrm{Inv}(D) \simeq G$。如果 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 为空，那么 G 的所有剩余群都同构于 $\mathbb{Z}$，因此 D 的所有赋值群都是离散的；由此可知 D 是一个几乎戴德金整环。根据 [19, 命题 5.3], ，$\mathrm{Inv}(D)$ 是自由的。□

因此，我们只需考虑 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 非空的情形 y;
下文中，我们始终默认这一假设成立。我们也只考虑一维群：在这种情况下，$\mathrm{Spec}^*(G) = \mathrm{Spec}(G) \setminus \{G\}$ 是 $\mathrm{Spec}(G)$ 的极小元集合；由于 G 是 $\mathrm{Spec}(G)$ 的泛点（即它包含于每个非空开集中），$\mathrm{Spec}^*(G)$ 的一个子集在 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 中稠密，当且仅当它在 $\mathrm{Spec}(G)$ 中稠密。此外，在这种情况下，$\mathrm{Spec}^*(G)$ 是一个零维豪斯多夫空间。

下一步是考虑在无穷远处只有一个素理想的 ℓ-群；本节及接下来的两节将聚焦于这种情形。为简化讨论，我们引入以下定义。

定义 6.2。设 X 是一个非空集合，且 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。若 G 是一个基本极限群，则称之为基本极限群，当且仅当 $\mathrm{Spec}^\infty(G)$ 是一个单点集。

在这种情况下，若 P 是其无穷远素理想，我们称剩余群G/P 为 G的无穷远处的剩余群，并记作 $\kappa_\infty(G)$。我们将 π_∞ 表示为典范满射同态

$$\pi_\infty \colon G \longrightarrow \kappa_\infty(G).$$

注 6.3。

(1) 注 3.3 表明，成为 G的基本极限群并非一种抽象性质，而是取决于它在$\mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$中的实现。(2) 设 G 是一个具有无限素理想 P 的基本极限群，并设F 是 G的有限素理想集合。那么， P 是 Spec$^*(G)$ 的一个极限点，因此 $\mathcal{D}$(Spec$^*(G)) = \mathcal{D}(F)\cup\{P\}$；再次应用导集构造，可得 $\mathcal{D}^2$(Spec$^*(G)$)将等于 $\mathcal{D}^2(F)$或 $\mathcal{D}^2(F)\cup\{P\}$。由归纳法可知，$\mathcal{D}^\alpha$(Spec$^*(G)$)将等于 $\mathcal{D}^\alpha(F)$或 $\mathcal{D}^\alpha(F)\cup\{P\}$。特别地，注 5.5 中所示的现象不可能发生：我们总有 $\phi(\mathcal{D}^\alpha(X)) = \mathcal{D}^\alpha$(Spec$^*(G)) \cap \phi(X) = \mathcal{D}_0^\alpha(X)$。因此，对于每个 $A\subseteq X$，都有 CB$(A) =$ CB$(\phi(A))$。

本节及接下来的两节旨在证明：在谱和无穷远处剩余群满足某些条件时，基本极限群是自由群。为此，我们将区分两种情形：无穷远素理想的康托尔-本迪克松秩是后继序数还是极限序数；这两种情形分别在第 7 节和第 8 节讨论。

本节中，我们证明一些结果，使我们能够在不失一般性的前提下，对 Spec$^*(G)$ 和 P 施加进一步限制。

引理 6.4。设 $G\subseteq\mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个约化基本极限群，其无穷远素理想为 P。设 C 是谱 $^*(G)$ 的一个包含 P 的闭子集。那么，限制映射 $\phi\colon G\longrightarrow\mathcal{F}(C,\mathbb{Z})$ 的核是自由群。

证明。设 D 是一个 B´贝祖整环，使得 Inv$(D)\simeq G$，并设 $C'\subseteq$Max(D) 是与 C 对应的闭集。令 $T:=\bigcap\{D_Q\mid Q\in C'\}$。若 $A\in$ Max(D) 是满足 $AT=T$的素理想，则 A 对应于 G的一个有限素理想，因此其值群为 $\mathbb{Z}$；故 $PT=T$。由 [16, 定理 4.10], 可知，Inv(D) 到 Inv(T) 的映射的核是自由群。然而，该核通过交换图对应于 ϕ 的核

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{F}(C,\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Inv}(D) & \longrightarrow & \mathrm{Inv}(T). \end{array}$$

因此，$\ker\phi$ 是自由的。 □

如果拓扑空间 X 的每个子空间的闭包都等于其序列闭包，那么该空间是$Fr\acute{e}chet\text{-}Urysohn$ 空间；也就是说，若 $S\subseteq X$ 和 s 属于 S 的闭包，则存在一个序列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty\subseteq S$，使得 s 是 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限。这个性质非常普遍；例如，每个第一可数空间都是 Fr´echet-Urysohn 空间。

命题 6.5. 设 $G\subseteq\mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个无穷远素理想为 $P\notin\mathcal{D}^\infty(\mathrm{Spec}^*(G))$ 的约化一维基本极限群。那么，我们可以

找到一个集合 X'，以及一个无穷远素理想为 P' 的约化基本极限群 $G' \subseteq \mathcal{F}(X', \mathbb{Z})$，使得：

- $\mathrm{CB}(P') = \mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G'))$；
- $\mathrm{CB}(P'') < \mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G'))$ 对每个素 $P'' \neq P'$ 属于 G'；
- 存在一个满射 $\pi\colon G \longrightarrow G'$，其核是自由的。

此外，如果 $\mathrm{CB}(P)$ 是后继序数，我们可以选择 G'，使得 $\mathrm{CB}(P') = 1$；如果进一步 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 是 *Fr´echet-Urysohn*，我们可以令 X' 为可数集。

证明。由于 $P \notin \mathcal{D}^\infty(\mathrm{Spec}^*(G))$，存在 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 的一个开子集 O，使得 $O \cap \mathcal{D}^{\mathrm{CB}(P)}(\mathrm{Spec}^*(G)) = \{P\}$；由于 G 是一维的，我们还可以假设 O 是开闭的。现在取 $X' := \{x \in X \mid P_x \in O\}$，令 G' 为限制映射 $G \longrightarrow \mathcal{F}(X', G)$ 的像，并应用引理 6.4，即可得到结论。

如果 $\mathrm{CB}(P) = \beta + 1$ 是一个后继序数，令 X' 如上所述，并取 $X'' := X' \cap \mathcal{D}^\beta(X)$。如果 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 也是 Fr´échet-Urysohn，则存在一个以 P 为极限的有限素理想可数序列 $\{P_{x_n}\}$；因此我们取 $X''' := X'' \cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$。在这两种情形下，再应用引理 6.4 即可得到所需结论。□

引理 6.6。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个一维基本极限群，且 β 是一个序数。对于每个 $x \in \mathcal{D}_0^\beta(X)$，令 q_x 在 x 处为半基本的。如果 $f \in$ 核 π_∞ 且 $\mathrm{CB}(f) \leq \beta$，则 $f \in \langle q_x \mid x \in \mathcal{D}_0^\beta(X) \rangle$。

证明。注意，根据引理 5.4(b)，所有这类元素 q_x 都存在。

由于 $f \in$核 π_∞，因此 $\mathcal{D}(f) = \{P_x \mid x \in$支撑$(f)\}$；特别地，支撑$(f) \simeq \mathcal{D}(f)$是紧致的。我们对 β使用归纳法。

若 $\beta = 0$，则支撑(f)必为离散的，因而是有限的，设支撑$(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$。于是，对所有 i，$q_{x_i} = e_{x_i}$且 $f = f(x_1)e_{x_1} + \cdots + f(x_n)e_{x_n}$就是所需的分解。

假设对于每个 $\alpha < \beta$，结论都成立。若 β 是极限序数，则 $\mathrm{CB}($支撑$(f)) < \beta$（因为支撑(f)是紧致的），故由归纳法，结论成立。假设 $\beta = \alpha + 1$ 是极限序数。空间 支撑$(f) \cap \mathcal{D}_0^\beta(X)$是 $\mathcal{D}_0^\beta(X)$中的闭紧子集，因此它是有限的，设其等于 $x_1, \ldots, x_n$。对于每个 i 以及每个 $t \in \mathcal{D}_0^\beta(X)$，我们有 $q_{x_i}(t) = 0$，除非 $t = x_i$；若是如此，则 $q_{x_i}(x_i) = 1$；因此，该函数

$$f_1 := f - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) q_{x_i} \in G$$

对每个 $t \in \mathcal{D}_0^\beta(X)$ 都为 0。根据构造，对于所有 $t \in \mathcal{D}_0^\beta(X)$，$\pi_\infty(f_1) = \pi_\infty(f) = 0$ 和 $f_1(t) = 0$；因此 $\mathrm{CB}(f_1) < \beta$。由归纳法，f_1 可以写成半基本元素 q_y 之和，且 $\mathrm{CB}(y) \leq \alpha$；因此 f 可以写成半基本元素 q_y 之和，且 $\mathrm{CB}(y) \leq \beta$。命题得证。□

推论 6.7。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个一维基本极限群，并假设 谱$^*(G)$ 是散布的。那么，核 π_∞ 是自由的。特别地，若 $\kappa_\infty(G)$是自由的，则 G 是自由的。

证明。 对每个 $x \in X$，取在 x 处半基的 q_x；根据引理 5.4(b)，这样的元素存在，因为 Spec*(G) 是散布的。若 $f \in \ker \pi_\infty$，则根据引理 6.6（使用 $\beta = \mathrm{CB}(f)$），有$f \in \langle q_x \mid x \in X\rangle$；因此 $\ker\ \pi_\infty$ 由 $\mathbf{q} := \{q_x \mid x \in X\}$ 生成。此外，根据引理 5.6，$\mathbf{q}$ 线性无关。因此，它是 $\ker \pi_\infty$ 的一组基。

“特别是”这一结论可通过考察正合序列得出

$$0 \longrightarrow \ker \pi_\infty \longrightarrow G \longrightarrow \kappa_\infty(G) \longrightarrow 0.$$

该断言得证。 □

推论 6.8。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个一维约化基本ℓ-群，并且假设 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 是散布的。对每个 $x \in X$，取在 x处的半基本元素$q_x \in G^+$，并令 $A \subseteq G^+$ 满足$\pi_\infty(A)$ 生成无穷远处的剩余群 $\pi_\infty(G)$。那么，

$$G = \langle A, q_x \mid x \in X\rangle.$$

证明。令 $G' := \langle A,\ q_x \mid x \in X\rangle$。由推论 6.7，核$\pi_\infty = \langle q_x \mid x \in X\rangle \subseteq G'$。若此时 $f \notin$核 π_∞，则存在 a_1，……，$a_k \in A$,λ_1，……，$\lambda_k \in \mathbb{Z}$，使得 $\pi_\infty(f) = \pi_\infty(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k)$；因此，$f_1 := f - \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ 满足 $\pi_\infty(f_1) = 0$，并由证明前面的部分可得 $f_1 \in G'$。由于每个 a_i 都属于 G'，我们有 $f \in G'$。

由此可得 $G' = G$，如所声称。 □

推论 6.7 表明，若 Spec*(G) 是散布的，且无穷远处的剩余群是自由群，则 G 是自由的；接下来两节旨在放宽对 κ_∞(G) 的条件，允许采用其他类别的群（例如可除群）。我们将根据康托尔-本迪克松秩是后继序数（定理 7.9）、具有可数共尾性的极限序数（定理 8.1），还是具有不可数共尾性的极限序数（定理 8.2），区分三种情形。

这三种情形的证明结构基本相同：

- 我们利用命题 6.5，将问题归结为 CB(P) = CB(Spec*(G)) 的情形；
- 我们构造一族 $\{q_x\}_{x\in X}$ 半基元素和一族 $\{f_{\lambda,n}\}$，其像生成 κ_∞(G)；根据推论 6.8，这两族合在一起生成 G；
- 我们构造两个群序列，$\{A_\beta\}$ 和 $\{B_\beta\}$，使得对每个 β：– $A_\beta \subseteq B_\beta \subseteq A_{\beta+1}$；– B_β/A_β 是一个有界挠群；– $A_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的（我们明确找到了一个基）；– 因此，$B_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的；– $\{B_\beta\}$是光滑的，且其并集为 G。

最后两点将证明 G 是自由的，正如所要求的。三种情形的主要区别在于族 $\{f_{\lambda,n}\}$的定义；这种区别是控制 B_β/A_β的扭性所必需的。

作为最后一项预备内容，我们定义允许作为无穷远处剩余群的群类。

定义 6.9. 设 G 是 $\mathbb{R}$ 的子群。G 的一个 $\mathbb{Q}$-基 是一个 $\mathbb{Q}$-线性无关集合 $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，满足

$$G = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(G \cap b_\lambda\mathbb{Q}).$$

注 6.10.

(1) 若 G 是自由的，则任意基都是线性无关的，因而是一个 $\mathbb{Q}$-基。(2) 若 G 是可除的，则它是一个 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，而 G 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间的任意基都是一个 $\mathbb{Q}$-基。

7. The successor ordinal case

本节专门讨论无穷远素理想 P 为后继序数的情形，我们将利用命题 6.5 将问题归结为 $X = \mathbb{N}$的情形。因此，我们可以利用$\mathbb{N}$ 的序结构，引入以下概念。

定义 7.1. 设 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$。我们将 $\mu(f)$ 记为满足 $f(n) \neq 0$的最小整数 n。

定义 7.2. 设 $G \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ 是一个 ℓ-群。若序列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足以下条件，则称其为 G 的阶梯基：

(1) 对所有 n，$a_n \in G^+$；*(2)* $\pi_\infty(\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle) = \kappa_\infty(G)$；*(3)* 序列 $\{\mu(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 严格递增；*(4)* 对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个 $t \in \mathbb{N}^+$，使得对于所有 $k \geq \mu(a_n)$，$(ta_n - a_0)(k) = 0$。

例 7.3. 对于每个 n，$k \in \mathbb{N}$ 令

$$a_n(k) := \begin{cases} 0 & \text{if } k < n, \\ k!/n! & \text{if } k \geq n. \end{cases}$$

a_n 当 n 较小时，其前几个元素如下：

$$\begin{array}{lccccccc} a_0: & 1 & 1 & 2 & 6 & 24 & \cdots \\ a_1: & 0 & 1 & 2 & 6 & 24 & \cdots \\ a_2: & 0 & 0 & 1 & 3 & 12 & \cdots \\ a_3: & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots \end{array}$$

那么，$\{a_n\}$ 是 $G := \langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$的阶梯基。事实上，对于每个 n，我们都有 $\mu(a_n) = n$，因此 $\{\mu(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 严格递增。

此外，$(n!a_n)(k) = k! = a_0(k)$，因此对于所有$k \geq n = \mu(a_n)$，都有$(n!a_n - a_0)(k) = 0$。

此外，阶梯性质保证了 $e_n \in G$，因此 $\mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \subseteq G$。于是，$G$ 是一个基本极限群，因为有限支集元素构成的集合是素理想。

根据构造，它们的像生成 $\kappa_\infty(G)$。

设 $\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{Q}$ 是由 $\pi(a_n) = 1/n!$ 给出的群同态。那么，π 是满射，且 $\ker \pi = \mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$，也就是说，$\pi$ 是 G的剩余映射。特别地，若 D 是一个贝祖整环，且 $\mathrm{Inv}(D) \simeq G$，则 D 的除一个局部化以外，其余局部化都是离散赋值环，而剩下的那个局部化的值群为 $\mathbb{Q}$。

我们使用阶梯基的主要原因，是为了在 G中构造一个集合，使其线性无关，但生成的子群严格包含 $\mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$。在上面的例子中，这由等式 $e_n = n!\ a_n - a_0$ 以及对每个 n都有 $a_n \notin \mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ 这一事实所保证。

下面的命题表明，我们可以找到一个阶梯基，从而良好地控制各元素之间的关系。

命题 7.4. 设 $G \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ 是一个约化一维基本极限群。假设每个有限素理想在谱$^*(G)$中都是孤立的，且 $\kappa_\infty(G)$ 同构于 $\mathbb{Q}$的一个子群。那么，存在一个阶梯基 $\{a_n\}_{n=0}^\infty \subseteq G^+$ 和一个序列 $\{d_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{N}$，使得$d_n | n!$ 并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $k \geq \mu(a_n)$，都有 $(d_n a_n - a_0)(k) = 0$。

证明。由于 G 是约化的，且每个有限素理想都是孤立的，因此对每个 $x \in \mathbb{N}$，都有$e_x \in G$。于是，剩余映射的核恰好是直和 $\mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$。

不失一般性，我们可以将 π_∞ 视为映射 $G \longrightarrow \mathbb{Q}$，使得 $\kappa_\infty(G) \subseteq \mathbb{Q}$。任取满足 $\alpha_0 := \pi_\infty(a_0) \neq 0$的 $a_0 \in G^+$，并且对每个 $n > 0$，令 $H_n := \frac{1}{n!}\alpha_0\mathbb{Z} \cap \kappa_\infty(G)$。于是，$H_n$是 $\frac{1}{n!}\alpha_0\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$的一个子群，因而它本身同构于 $\mathbb{Z}$；因此，存在一个 $\alpha_n \in \kappa_\infty(G)^+$ 使得 $H_n = \alpha_n\mathbb{Z}$，并且我们可以找到一个 $b_n \in G^+$使得 $\pi_\infty(b_n) = \alpha_n$。此外，$\bigcup_n H_n = \kappa_\infty(G)$，从而 $\kappa_\infty(G) = \langle \alpha_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$。

根据构造，$\alpha_0 \in H_n$ 因此 $\alpha_0 = d_n\alpha_n$ 对某个 $d_n \in \mathbb{N}^+$成立（α_0 和 α_n 均为正数）。此外，$n!\alpha_n \in n!H_n \subseteq \alpha_0\mathbb{Z}$，因此$n!\alpha_n \in d_n\alpha_n\mathbb{Z}$；也就是说，$d_n | n!$ 因此，

$$\pi_\infty(d_n b_n - a_0) = d_n\alpha_n - \alpha_0 = 0,$$

也就是说，$d_n b_n - a_0 \in$核$\pi_\infty = \mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$。特别地，存在一个 λ_n，使得对所有 $t \geq \lambda_n$，$(d_n b_n - a_0)(t) = 0$。对于 $n \geq 1$，现在我们递归地定义

$$a_n := b_n - \sum_{i=0}^{\max\{\lambda_n, \mu(a_{n-1})\}} b_n(i)e_i \tag{1}$$

并且我们声称，$\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 是 G的阶梯基。

由于 b_n，$e_i \in G$，我们也有 $a_n \in G$。此外，根据构造，和式 (1) 在 k 中的值要么是 $b_n(k)$，要么是 0，具体取决于k 大于还是小于 $\max\{\lambda_n, \mu(a_{n-1})\}$；由此可得，对所有 k （因此 $a_n \in G^+$），$a_n(k) \geq 0$；而当 $k \leq \max\{\lambda_n, \mu(a_{n-1})\}$时，$a_n(k) = 0$。特别地，

$$\mu(a_n) > \max\{\lambda_n, \mu(a_{n-1})\} \geq \mu(a_{n-1}),$$

因此 $\{\mu(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 严格递增。

我们有 $a_n - b_n \in \mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) =$核 π_∞，因此 $\pi_\infty(a_n) = \pi_\infty(b_n) = \alpha_n$。于是，$\pi_\infty(\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle) = \langle \alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \kappa_\infty(G)$。

最后，假设 $k \geq \mu(a_n)$。那么，$k > \max\{\lambda_n, \mu(a_{n-1})\}$，因此 $a_n(k) = b_n(k)$。由此可得

$$(d_n a_n - a_0)(k) = (d_n b_n - a_0)(k) = 0$$

因为特别地 $k > \lambda_n$。因此，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是满足所述性质的 G 的阶梯基。□

我们需要一些关于支集与无穷远素理想之间关系的初等引理。第一个是引理 4.10 的一个部分逆命题。

引理 7.5. 设 G 是一个 ℓ-群，且 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z}) \subseteq G$，并设 $f \in G$。若支撑(f) 是无限的，则存在一个 $P \in \text{谱}^\infty(G)$ 使得 $f \notin G$。

证明。由于 $\mathcal{F}_s(X, \mathbb{Z}) \subseteq G$，每个 P_x 都是 Spec*(G) 的孤立点。根据假设，$\mathcal{D}(f)$ 包含无限多个有限素理想，因此它尤其是无限的；又由于它也是紧致的，所以这些点不可能全都是孤立点。因此，$\mathcal{D}(f)$ 必定与 Spec$^\infty(G)$ 相交，证毕。□

引理 7.6. 设 G 是一个约化基本极限群，且每个有限素理想都是孤立的。那么，存在一个无限子集 $Y \subseteq X$，使得$Y =$ 支撑(f) 对某个 $f \in G^+$ 成立，并且对每个 $g \in G^+$，支撑(g)与 $Y \setminus$支撑(g) 中至少有一个是有限的。

证明。由于 G 是约化的，且每个 P_x 都是孤立的，因此对于每个$x \in X$，都有 $e_x \in G$。令 P 为 G 的无穷远素理想，并取任意一个 $f \in G^+ \setminus P$：由引理 4.10，$Y := \text{supp}(f)$ 是无限的。取 $g \in G^+$，并假设 supp(g) 和 $Y \setminus \text{supp}(g)$ 都是无限的。令 $g' := f - (f \wedge g)$：则 $g' \geq 0$，且 supp(g') $= Y \setminus$supp(g)。由引理 7.5，存在无穷远素理想 P，P'，使得 $g \notin P$ 且 $g' \notin P'$。由于 G 是基本的，$P = P'$ 且 $0 = g \wedge g' \notin P$，矛盾。因此，supp(g) 和 $Y \setminus$supp(g) 中必有一个是有限的。□

引理 7.7。设

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

设其为阿贝尔群的一个正合列。若 A 是自由的，B 是无挠的，且 C 具有有界挠，则 B 是自由的。

证明。 取 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $nC = 0$。则映射 $n\colon\ B \longrightarrow B,\ b \mapsto nb$ 是一个单射群同态（因为 B 是无挠的），且其像 nB 包含于 A中。因此， $B \simeq nB$ 同构于自由群 A的一个子群，故为自由的。□

注 7.8。若 C 仅仅是一个挠群，则前一个引理不成立：例如取 $A = \mathbb{Z}$ 和 $B = \mathbb{Q}$。

定理 7.9。 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个一维基本极限群，且 P 是其无穷远素理想。假设：

- $\mathrm{Spec}^*(G)$ 是弗雷歇-乌雷松的；
- $P \notin \mathcal{D}^\infty(\mathrm{Spec}^*(G))$;
- $\mathrm{CB}(P)$ 是一个后继序数；
- κ_∞（G）有一个 $\mathbb{Q}$-基。

那么， G 是自由的。

证明。 根据命题 6.5，我们可以找到一个一维基本极限群 $G' \subseteq \mathcal{F}(X', \mathbb{Z})$，其中 X'可数，并存在一个满射 $\pi\colon G \longrightarrow G'$，使得 $\ker \pi$是自由的，且 $\pi(P)$ 是 G'的一个无限素理想，并且 $\mathrm{CB}(\pi(P)) = \mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G')) = 1$。因此，为了证明 G 是自由的，不妨假设 $X = \mathbb{N}$ 可数且所有有限素理想都是孤立的；特别地，对每个n，都有 $e_n \in G$ 。进一步限制到属于无穷远素理想的某个 $\mathrm{supp}(f)$，根据引理 7.6，我们还可以假设对于每个 $f \in G$，$\mathrm{supp}(f)$ 要么是有限的，要么是余有限的。

令 $\kappa_\infty(G) \subseteq \mathbb{R}$ 为 G 在无穷远处的剩余群。令 $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为 G 的一个 $\mathbb{Q}$-基。对于每个 $\lambda \in \Lambda$，令

$$G_\lambda := \pi_\infty^{-1}(b_\lambda\mathbb{Q} \cap \kappa_\infty(G)).$$

于是， G_λ 是 G 的一个子群，包含核 π_∞，因此特别包含 $\mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$。此外，它是一个基本极限群，其无穷远素理想等于 $P \cap G_\lambda$。因此，其无穷远处的剩余群恰为$b_\lambda\mathbb{Q} \cap \kappa_\infty(G) \subseteq b_\lambda\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$。根据命题 7.4，我们可以找到 G_λ 的一个阶梯基 $\{a_{\lambda,n}\}_{n=0}^\infty$ ，使得对于所有 $k \geq \mu(a_{\lambda,n})$，都有$(d_{\lambda,n}a_{\lambda,n} - a_{\lambda,0})(k) = 0$ ，其中$d_{\lambda,n} | n!$ 特别地，对于每个n, λ，都有$d_{\lambda,n}a_{\lambda,n} - a_{\lambda,0} \in \mathcal{F}_s(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$。

现在，我们递归地定义G 的两个子群序列 $\{A_r\}_{r=0}^\infty$ 和 $\{B_r\}_{r=0}^\infty$ ，如下所示：

- $A_0 = \langle e_0,\ a_{\lambda,\ 0} \mid \mu(a_{\lambda,\ 0}) = 0\rangle$;
- $B_0 = A_0$;
- 若 $r \geq 1$，则 $A_r = B_{r-1} + \langle e_r,\ a_{\lambda,\ 0} \mid \mu(a_{\lambda,\ 0}) = r\rangle$;
- $B_r = A_r + \langle a_{\lambda,\ k} \mid \mu(a_{\lambda,\ k}) = r\rangle$。

根据构造，我们有 $A_0 = B_0 \subseteq A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$; 特别地， $\{B_r\}_{r=0}^\infty$ 是 G的一个升链子群。 $\{a_{\lambda,n} \mid \lambda \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$ 在 $\kappa_\infty(G)$ 中的像生成 $\kappa_\infty(G)$（因为 $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\kappa_\infty(G)$ 的 $\mathbb{Q}$-基）；由于每个 e_k 以及每个 $a_{\lambda,\ k}$ 都属于 B_r 中的某个

r，根据推论 6.8，我们有 $\bigcup_r B_r = G$。我们想证明每个B_r 和每个商群 B_r/B_{r-1} 都是自由群，并通过归纳法进行证明。

我们首先证明 $A_0 = B_0$ 是自由的，方法是证明$\{e_0, a_{\lambda,0} \mid \mu(a_{\lambda,0}) = 0\}$ 是一个基。反设不然：那么存在一个线性相关关系

$$ne_0 + \sum_{i=1}^{k} n_i a_{\lambda_i,0} = 0.$$

将 π_∞ 应用于这个关系，我们得到 $\sum_{i=1}^{k} n_i \pi_\infty(a_{\lambda_i,0}) = 0$；然而，根据构造，集合 $\{\pi_\infty(a_{\lambda_i,0})\}$ 在 $\mathbb{Q}$上是线性无关的，因此对每个 i都有 $n_i = 0$ 。这一事实留下了 $ne_0 = 0$，这意味着 $n = 0$。因此 A_0 是自由的。

为了证明 B_r/B_{r-1} 是自由的，我们考虑正合列

$$0 \longrightarrow \frac{A_r}{B_{r-1}} \longrightarrow \frac{B_r}{B_{r-1}} \longrightarrow \frac{B_r}{A_r} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

我们首先证明 A_r/B_{r-1} 是自由的，并像上面一样，通过证明 $\{e_r, a_{\lambda,0} \mid \mu(a_{\lambda,0}) = r\}$ 的像是一个基来进行证明。若非如此，则存在一个线性相关关系

$$ne_r + \sum_{i=1}^{k} n_i a_{\lambda_i,0} \in B_{r-1}.$$

应用 π_∞，我们得到 $\sum_{i=1}^{k} n_i \pi_\infty(a_{\lambda_i,0}) \in \pi_\infty(B_{r-1})$；然而，$\pi_\infty(B_{r-1})$包含于由一组 $a_{\lambda,0}$ 生成的 $\mathbb{Q}$-线性空间中，其中 $\lambda \neq \lambda_i$。由于 $\{\pi_\infty(a_{\lambda,0}) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，因此对于所有 i，都有 $n_i = 0$，从而也有 $ne_r \in B_{r-1}$。因此，我们可以写成

$$ne_r = \sum_{i=0}^{r-1} m_i e_i + \sum_{i,j} n_{i,j} a_{\lambda_i,j}$$

对于某些 m_i，$n_{i,j} \in \mathbb{Z}$ 以及某些 $a_{\lambda_i,j}$，满足 $\mu(a_{\lambda_i,j}) < r$。根据构造，$r!a_{\lambda_i,j} = s_{i,j} a_{\lambda_i,0} + h_{i,j}$，其中 $s_{i,j} \in \mathbb{Z}$ 且对于所有 $k \geq \mu(a_{\lambda_i,j})$，都有 $h_{i,j}(k) = 0$（特别地，$h_{i,j} \in$ 核 π_∞）。因此，

$$r!ne_r = \sum_{i=0}^{r-1} m_i e_i + \sum_{i,j} h_{i,j} + \sum_{i,j} s_{i,j} a_{\lambda_i,0} \tag{3}$$

再次应用 π_∞，我们看到前一个等式中最右侧的和为 0；由 $\pi_\infty(a_{\lambda_i,0}) = b_{\lambda_i}$ 的线性无关性可知

$$\pi_\infty\left(\sum_j s_{i,j} a_{\lambda_i,0}\right) = 0$$

对每个 i 都成立，因此

$$\sum_j s_{i,j} = 0$$

对所有 i 均成立。因此，(3) 中最右边的和为 0，所以

$$r!ne_r = \sum_{i=0}^{r-1} m_i e_i + \sum_{i,j} h_{i,j}.$$

根据构造，对所有 $k \geq \mu$（$a_{\lambda_i,\ j}$），$h_{i,\ j}(k) = 0$，而后者至多为 $r-1$；特别地，对所有 r，$h_{i,\ j}(r) = 0$。在 r 处代入前一个等式，得到 $r!n = 0 + 0$。因此 $n = 0$。由此可知，A_r/B_{r-1} 是自由的。

现在我们证明 B_r/A_r 是一个有界挠群。事实上，其生成元是某个 λ 和某个 k 的 $a_{\lambda,\ k}$ 的像；根据构造，后者至少为 1，至多为 r。因此，

$$d_{\lambda,k}a_{\lambda,k} - a_{\lambda,0} \in \langle e_i \mid i = 0, \dots r\rangle \subseteq A_r$$

以及 $d_{\lambda,\ k}a_{\lambda,\ k} \in A_r$。由于 $d_{\lambda,\ k} | k!$ 且 $k \leq r$，我们也有 $r!B_r \subseteq A_r$，或等价地，$r!(B_r/A_r) = 0$。

利用这些性质和引理 7.7，正合列 (2) 蕴含 B_r/B_{r-1} 是一个自由群。由于 B_0 是自由的，自由群的投射性蕴含每个 B_r 都是自由的。因此，$\{B_r\}_{r=0}^{\infty}$ 是 G 的一个自由子群递增序列，且商群都是自由的；由此根据定理 2.1，它们的并是自由的。由于它们的并为 G，可知 G 是自由的。□

8. 极限序数情形

本节考虑无穷远素理想的康托尔–本迪克森秩为极限序数的基本极限群。根据该秩的共尾性，我们区分两种子情形。

定理 8.1。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个一维基本极限群，P 是其无穷远素理想。假设：

- $P \notin \mathcal{D}^{\infty}(\mathrm{Spec}^*(G))$；
- $\mathrm{CB}(P)$ 是具有可数共尾性的极限序数；
- $\kappa_\infty(G)$具有一个 $\mathbb{Q}$-基。

那么，G 是自由的。

证明。不妨设 G 是约化的（命题 4.9），且 P 是康托尔-本迪克松秩等于 $\mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G))$ 的唯一素理想（命题 6.5）。特别地，$\mathrm{Spec}^*(G)$ 是散布的。

对于每个 $x \in X$，令 q_x 为 x处的一个半基本元素；由于 $\mathrm{Spec}^*(G)$ 是散布的，这样的元素存在（引理 5.4(b)）。

选取一个可数的序数序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\alpha_0 > 0$，其极限为 $\mathrm{CB}(P)$。

令 $\kappa_\infty(G) \subseteq \mathbb{R}$ 为 G 在无穷远处的剩余群，并令 $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为 $\kappa_\infty(G)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-基。

任取 λ，并令 $H_\lambda := b_\lambda\mathbb{Q} \cap \kappa_\infty(G)$。由于 H_λ 同构于 $\mathbb{Q}$ 的一个~子群，我们可以找到一个序列 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对每个$n \in \mathbb{N}$,

- $\pi_\infty(\widetilde{f_{\lambda,0}}) = b_\lambda$；~
- $\{\pi_\infty(f_{\lambda,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 生成 H_λ；~
- $n!\pi_\infty(f_{\lambda,n}) \in b_\lambda\mathbb{Z}$。

~现在我们根据 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构造一个新的序列 $\{\widetilde{f_{\lambda,n}}\}$。

当 $n = 0$ 时，我们令 $f_{\lambda,0} := \widetilde{f_{\lambda,0}}$.

若 $n > 0$，则根据第三个项目符号，存在唯一的 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $n!\pi_\infty(f_{\lambda,n}) = t\pi_\infty(f_{\lambda,0})$；令 $g_{\lambda,n} := n!f_{\lambda,n} - tf_{\lambda,0}$。根据构造，$g_{\lambda,n} \in$ 核 π_∞；我们区分两种情形。

若 $g_{\lambda,n} = 0$ 或 $\mathrm{CB}(g_{\lambda,n}) < \alpha_n$，则任取满足 $\mathrm{CB}(x) >_\sim \alpha_n$ 的 $x \in X$，并令 $f_{\lambda,n} := f_{\lambda,n} + q_x$。

~若 $\mathrm{CB}(g_{\lambda,n}) > \alpha_n$，则令 $f_{\lambda,n} := f_{\lambda,n}$。

在这两种情形下，因此序列 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足与上述相同的性质，此外我们还有 $\alpha_n <\mathrm{CB}(n!f_{\lambda,n} - tf_{\lambda,0}) < \mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G))$。

现在我们递归地定义两个由 G的子群构成的良序序列 $\{A_\beta\}_\beta$ 和 $\{B_\beta\}_\beta$。

- $A_0 = \langle q_x, f_{\lambda_0} \mid \mathrm{CB}(x) = 0\rangle$；
- $B_0 = A_0$；
- 若 β 是极限序数，

$$A_\beta = B_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha;$$

- 若 $\beta = \gamma + 1$ 是后继序数，

$$A_\beta = B_\gamma + \langle q_x \mid \mathrm{CB}(x) = \beta\rangle,$$
$$B_\beta = A_\beta + \langle f_{\lambda,n} \mid \mathrm{CB}(n!f_{\lambda,n} - tf_{\lambda,0}) = \beta\rangle.$$

根据构造，$A_0 = B_0 \subseteq A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_\beta \subseteq B_\beta \subseteq \cdots$；特别地，$\{B_\beta\}_\beta$ 是 G的子群升链。与定理 7.9 的证明一样，$\bigcup_\beta B_\beta = G$，因为这个并包含所有 q_x，以及一个生成整个 $\kappa_\infty(G)$的族（因为 $\{b_\lambda\}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-基；推论 6.8）。我们要证明每个 B_β 和每个商群$B_{\beta+1}/B_\beta$ 都是自由群，并采用归纳法。

为证明 $A_0 = B_0$ 是自由的，我们证明 $\{q_x, f_{\lambda_0} \mid \mathrm{CB}(x) = 0\}$ 是线性无关的。若不然，则存在 x_i，使得 $\mathrm{CB}(x_i) = 0$、λ_j、n_i，$m_j \in\mathbb{Z}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{r} n_i q_{x_i} + \sum_{j=1}^{s} m_j f_{\lambda_j,0} = 0.$$

应用 π_∞，我们得到

$$\sum_{j=1}^{s} m_j b_{\lambda_j} = 0$$

这意味着对所有 j 都有 $m_j = 0$，因为这些 b_{λ_j} 是线性无关的。因此 $\sum_{i=1}^{r} n_i q_{x_i} = 0$; 由于当 CB($x$) $= 0$ 时，supp(q_x) $= \{x\}$，我们也有对所有 i均成立的 $n_i = 0$。所以 $A_0 = B_0$ 是自由的。

为证明 $B_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的，我们考虑正合列

$$0 \longrightarrow \frac{A_{\beta+1}}{B_\beta} \longrightarrow \frac{B_{\beta+1}}{B_\beta} \longrightarrow \frac{B_{\beta+1}}{A_{\beta+1}} \longrightarrow 0. \tag{4}$$

我们首先考虑 $B_{\beta+1}/A_{\beta+1}$。令 n 为满足 $\beta+1 \leq \alpha_n$的最小整数；根据序列 $\{\alpha_n\}$的选取，这样的 n 存在。取 $f_{\lambda,\, i} \in A_{\beta+1}$: 由构造可知 $i \leq n$，且对于某个 $t \in \mathbb{Z}$，CB($i!f_{\lambda,\, i} - tf_{\lambda,\, 0}$) $= \beta$；因此，

$$n! f_{\lambda,i} - t\frac{n!}{i!} f_{\lambda,0}$$

是 G 中属于 $A_{\beta+1}$的一个元素。因此 $n!f_{\lambda,\, i} \in A_{\beta+1}$。由于 n与 λ线性无关，我们有 $n!(B_{\beta+1}/A_{\beta+1}) = 0$，即， $B_{\beta+1}/A_{\beta+1}$ 是有界挠群。

现在我们证明 $A_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的，并像上文一样，通过证明 $\{q_x \mid \text{CB}(x) = \beta+1\}$ 的像是一个基来进行。若不然，则存在 $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$和 $x_1, \ldots, x_k \in X$，满足 CB(x_i) $= \beta+1$，使得$a_1 q_{x_1} + \cdots + a_k q_{x_k} \in B_\beta$。因此，我们可以写成

$$a_1 q_{x_1} + \cdots + a_k q_{x_k} = \sum_{i=1}^{t} c_i q_{y_i} + \sum_{j=1}^{s} d_j f_{\lambda_j, n_j} \tag{5}$$

对于某个满足 CB(y_i) $\leq \beta$ 的 y_i，以及某个 $c_i, d_j \in \mathbb{Z}$（注意，这些系数未必唯一），还有某个 $f_{\lambda_j,n_j} \in B_\beta$。令 n 为 n_i 中的最大值，并将前一个等式乘以 $n!$ 于是，每一项 $n!\ f_{\lambda_j,n_j}$ 都等于 $t_j f_{\lambda_j,0} + h_j$，其中 $\pi_\infty(h_j) = 0$ 且 CB(h) $\leq \beta$。根据引理 6.6， h_j 可以写成由满足 $q_{z_i} \in A_\beta \subseteq B_\beta$的元素 $c_i q_{z_i}$构成的和；因此，不失一般性，我们可以假设在 (5) 中所有 $n_j = 0$都成立。将 π_∞ 应用于等式两边，得到等式

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^{s} d_j b_{\lambda_j};$$

b_λ 的线性无关性现在意味着，对所有 j都有 $d_j = 0$。因此

$$a_1 q_{x_1} + \cdots + a_k q_{x_k} = \sum_{i=1}^{t} c_i q_{y_i}.$$

由于 $\{q_{x_1}, \ldots, q_{x_k}, q_{y_1}, \ldots, q_{y_t}\}$ 是 X 中不同点处的一族半基元素，根据引理 5.6，必有 $a_1 = \cdots = a_k = 0$，因此 $A_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的。

利用这些性质和引理 7.7，正合序列 (4) 表明 $B_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由群。由于 B_0 是自由的，根据自由群的投射性，每个 $B_{\beta+1}$ 都是自由的。因此，$\{B_\beta\}_{r=0}^{\infty}$ 是 G 的一个光滑递增自由子群序列，其商群均为自由群；由此根据定理 2.1，它们的并是自由群。根据推论 6.8，它们的并是 G；因此 G 是自由的。□

定理 8.2. 设 $G \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{Z})$ 是一个一维基本极限群，且令 P 为其无穷远素理想。假设：

- $P \notin \mathcal{D}^{\infty}(\mathrm{Spec}^*(G))$；
- $\mathrm{CB}(P)$ 是一个具有不可数共尾性的极限序数；
- $\kappa_\infty(G)$具有一个 $\mathbb{Q}$-基。

那么，G 是自由的。

证明。 证明与定理 8.1 的证明非常相似。

不失一般性，我们可以假设 G 是约化的（命题 4.9），且 P 是康托尔-本迪克松秩等于 $\mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G))$ 的唯一素理想（命题 6.5），因此特别地，$\mathrm{Spec}^*(G)$ 是散布的。

对于每个 $x \in X$，令 q_x 为 x 处的一个半基本元素；由引理 5.4(b)，这些元素确实存在。

令 $\kappa_\infty(G) \subseteq \mathbb{R}$ 为 G 的无穷远处的剩余群。令 $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\kappa_\infty(G)$ 的一个 $\mathbb{Q}$-基。

任取 λ，并令 $H_\lambda := b_\lambda\mathbb{Q} \cap \kappa_\infty(G)$。由于 H_λ 同构于 $\mathbb{Q}$ 的一个 $\sim$ 子群，我们可以找到一个序列 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，

- $\pi_\infty(\widetilde{f_{\lambda,0}}) = b_\lambda$；
- $\{\pi_\infty(f_{\lambda,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 生成 H_λ；
- $n!\pi_\infty(f_{\lambda,n}) \in b_\lambda\mathbb{Z}$。

现在我们根据 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 构造一个新的序列 $\{f_{n,\lambda}\}$。

当 $n = 0$ 时，我们令 $f_{\lambda,0} := \widetilde{f_{\lambda,0}}$.

若 $n > 0$，则根据第三个项目符号，存在唯一的 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\widetilde{f_{\lambda,n}}$ 满足 $n!\pi_\infty(f_{\lambda,n}) = t\pi_\infty(f_{\lambda,0})$；令 $g_{\lambda,n} := n!f_{\lambda,n} - tf_{\lambda,n}$。根据构造，$g_{\lambda,n} \in \ker\pi_\infty$。若 $g_{\lambda,n} \neq 0$，定义

$$\theta_{\lambda,n} := \mathrm{CB}(g_{\lambda,n});$$

于是，$\theta_{\lambda,n} < \mathrm{CB}(\mathrm{Spec}^*(G))$，因为 $\mathrm{CB}(g_{\lambda,n})$ 是一个后继序数。

由于 $\mathrm{CB}(P)$ 的共尾性不可数，而 $\{\theta_{\lambda,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是可数的，因此存在一个极限序数 θ'_λ，使得对于所有满足 $\theta_{\lambda,n}$ 有定义的 n，均有 $\theta_{\lambda,n} < \theta'_\lambda < \mathrm{CB}(P)$；取一个满足 $\mathrm{CB}(x) = \theta'_\lambda + n$ 的 $x \in X$，并令 $\widetilde{f_{\lambda,n}} := f_{\lambda,n} + q_x$。于是，$\pi_\infty(f_{\lambda,n}) = \pi_\infty(f_{\lambda,n})$，因此序列 $\{f_{\lambda,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足与上文相同的性质；此外，我们还有 $\mathrm{CB}(n!f_{\lambda,n} - tf_{\lambda,0})$ 总是等于一个极限序数加上 n。

现在，我们递归地定义 G 的两个良序子群序列 $\{A_\beta\}_\beta$ 和 $\{B_\beta\}_\beta$。

- $A_0 = \langle q_x,\ \ f_{\lambda_0} \mid \mathrm{CB}(x) = 0\rangle$;
- $B_0 = A_0$;
- 若 β 是极限序数,

$$A_\beta = B_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha;$$

- 若 $\beta = \gamma + 1$ 是后继序数,

$$A_\beta = B_\gamma + \langle q_x \mid \mathrm{CB}(x) = \beta\rangle,$$
$$B_\beta = A_\beta + \langle f_{\lambda,i} \mid \mathrm{CB}(n! f_{\lambda,n} - t f_{\lambda,0}) = \beta\rangle.$$

根据构造，$A_0 = B_0 \subseteq A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_\beta \subseteq B_\beta \subseteq \cdots$；特别地，$\{B_\beta\}_\beta$ 是 G的子群升链。与定理 7.9 的证明一样，$\bigcup_\beta B_\beta = G$，因为其并集包含所有 q_x，以及一个生成整个 κ_∞（G）的族（因为 $\{b_\lambda\}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-基；推论 6.8）。我们要证明每个 B_β 和每个商群$B_{\beta+1}/B_\beta$ 都是自由群，并通过归纳法进行证明。

$A_0 = B_0$ 是自由群这一事实，可由定理 8.1 的证明同理得出。

为证明 $B_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的，我们考虑正合列

$$0 \longrightarrow \frac{A_{\beta+1}}{B_\beta} \longrightarrow \frac{B_{\beta+1}}{B_\beta} \longrightarrow \frac{B_{\beta+1}}{A_{\beta+1}} \longrightarrow 0. \tag{6}$$

我们先考虑 $B_{\beta+1}/A_{\beta+1}$。如果在从 $A_{\beta+1}$ 到 $B_{\beta+1}$的过程中加入了 $f_{\lambda,n}$，那么可知，对于某个极限序数 θ，有 $\beta + 1 = \theta + n$；特别是，所有这类新元素都具有相同的 n。因此，对于某个 t（取决于 λ 和 n），有 $n! f_{\lambda,n} - t f_{\lambda,0} \in A_{\beta+1}$，从而 $n! f_{\lambda,n} \in A_{\beta+1}$。特别地，$n! B_{\beta+1} \subseteq A_{\beta+1}$，也就是说，$B_{\beta+1}/A_{\beta+1}$ 是一个有界挠群。

证明 $A_{\beta+1}/B_\beta$ 是自由的，完全等同于定理 8.1 证明中的相应部分。

利用这些性质和引理 7.7，正合列 (6) 蕴含 $B_{\beta+1}/B_\beta$ 是一个自由群。由于 B_0 是自由的，根据自由群的投射性，每个 $B_{\beta+1}$ 都是自由的。因此，$\{B_\beta\}_{r=0}^{\infty}$ 是 G 的一个由自由子群构成的光滑递增序列，且其商群均为自由群；由定理 2.1 可知，它们的并是自由的。根据推论 6.8，它们的并为 G；因此 G 是自由的。□

前面的定理可概括如下：

定理 8.3。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一个一维基本 ℓ-群，其无穷远素理想为 P。假设：

- 谱$^*(G)$是 *Fr´echet-Urysohn*；
- $P \notin \mathcal{D}^\infty(\mathrm{Spec}^*(G))$；并且
- $\kappa_\infty(G)$ 有一个 $\mathbb{Q}$-基，

那么，G 是自由的。

9. 回到环论

定理 8.3 可立即推广到整环情形，得到如下结果：

定理 9.1. 设 D 是一个一维 ***dd*-整环**。假设：

- $\mathrm{Max}(D)$ 是弗雷歇-乌雷松的；
- D_P 对于所有 $P \in \mathrm{Max}(D) \setminus \{Q\}$，都是离散赋值环；
- $Q \notin \mathcal{D}^\infty(\mathrm{Max}(D))$；
- D_Q 的值群有一个 $\mathbb{Q}$-基。

于是，$\mathrm{Inv}(D)$ 是自由的。

证明。 集合 $X := \mathrm{Max}(D) \setminus \{Q\}$ 是一个离散核，而 $\mathrm{Inv}(D)$ 是 G 的 $\mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 的子群。现在，假设蕴含 G 是一个一维基本极限群，并且满足定理 8.3 的假设。因此，$\mathrm{Inv}(D)$ 是自由的。□

现在，我们希望将前一个定理推广到多于一个局部化不是离散赋值环的情形。我们将使用以下记号：若 D 是一个 Pr¨ufer 整环 $A \subseteq \mathrm{Max}(D)$，则

$$\Theta(A) := \bigcap_{P \in A} D_P.$$

环 $\Theta(A)$ 总是一维 Pr¨ufer 整环；其极大理想是 D 中包含于 A闭包内的极大理想在该环中的扩张，其中闭包是相对于逆拓扑而言的。

我们还需要以下结果。

命题 9.2. [16, 定理4。11] 设 D 是一维 ***Prüfer*** 整环，且 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Max}(D)$ 的一个可数既开又闭子集集合；设 $A := \bigcup_n A_n$。若对每个 n, $\mathrm{Inv}(\Theta(A_n))$ 都是自由的，则扩张映射的核

$$\mathrm{Inv}(D) \longrightarrow \mathrm{Inv}(\Theta(\mathrm{Max}(D) \setminus A))$$

是自由的。

定理 9.3。设 D 是一维 ***dd*-整环**，且 $\mathcal{N} := \{P \in \mathrm{Max}(D) \mid P$ 不是离散赋值环$\}$。假设：

- $\mathcal{M} := \mathrm{Max}(D)$ 是 ***Fr´echet-Urysohn***；
- $\mathcal{N}$ 是可数的；
- $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}^\infty(\mathcal{M}) = \emptyset$；
- 对于每个 $P \in \mathcal{N}$， D_P 的值群都有一个 $\mathbb{Q}$-基。

那么，$\mathrm{Inv}(D)$ 是自由的。

证明。 令 $\mathcal{N} := \{M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots\}$。注意， $\mathcal{N}$是散布的，因为它与 $\mathcal{D}^\infty(\mathcal{M})$ 不相交。我们对 $\alpha = \max\{\beta \mid \mathcal{N} \cap \mathcal{D}^\beta(\mathcal{M}) \neq \emptyset\}$ 使用归纳法。注意，$\alpha \neq 0$，因为 $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$是稠密的，因此 $\mathcal{N}$ 中没有点在 $\mathcal{M}$中是孤立的。

若 $\alpha = 1$，则 $\mathcal{N}$ 的所有元素的康托尔-本迪克松秩均为 1；因此 $\mathcal{N}$ 是离散的。于是，对每个 n，都可以找到一个开闭子集 A_n，使得 $A_n \cap \mathcal{N} = \{M_n\}$。根据定理 9.1，每个 Inv(Θ($A_n$)) 都是自由的；根据命题 9.2，可知 Inv(D) $\longrightarrow$ Inv(Θ($\mathcal{M} \setminus A$)) 的核是自由的，其中 $A := \bigcup_n A_n$。环 Inv(Θ($\mathcal{M} \setminus A$)) 是几乎戴德金整环，因为对每个 $P \in \mathcal{M} \setminus X \subseteq \mathcal{M} \setminus A$，$D_P$ 都是离散赋值环；因此 Inv(Θ($\mathcal{M} \setminus A$)) 是自由的。由此可得，Inv(D) 是自由的。

假设对所有序数 $\beta < \alpha$，该断言都成立。若 α 是极限序数，则每个 $M \in \mathcal{N}$ 的康托尔-本迪克松秩都严格小于 α；由此可知，对每个 M_n，都存在 $\mathcal{M}$ 的一个开闭子集 A_n，使得 $A_n \cap \mathcal{N}$ 中康托尔-本迪克松秩等于 CB(M_n) 的唯一元素是 M_n。考虑 Θ(A_n)：那么，其满足 (A_n)$_P$ 不是离散赋值环的极大理想 P，都是 $\mathcal{N} \cap A_n$ 中极大理想的扩张。特别地，这些元素的康托尔-本迪克松秩为 $\leq$ CB(M_n) $< \alpha$，因此，根据归纳假设，Inv(Θ(A_n)) 是自由群。该断言现在可按 $\alpha = 0$ 的情形得到。

现在假设 α 是后继序数，并令 $Y_\alpha := \{P \in \mathcal{N} \mid$ CB(P) $= \alpha\}$。首先假设 Y_α 是单点集；不失一般性，设 $Y_\alpha = \{M_0\}$。由于 $\mathcal{M}$ 是 Fr´echet-Urysohn 空间，我们可以找到一个非空子集 $C \subseteq \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$，使得 $C \cap \mathcal{N} = \{M_0\}$。对每个 $n \geq 1$，取 $\mathcal{M}$ 的一个开闭子集 A_n，使得 $A_n \cap C = \emptyset$，且 $A_n \cap \mathcal{N}$ 中康托尔-本迪克松秩为 CB(M_n) 的唯一元素是 M_n。于是，如上所述，$\mathcal{N}_n := \{P \in$ Max(Θ(A_n)) $\mid D_P$ 中不是离散赋值环的元素 $\}$，其在 Max(Θ(A_n)) 中的康托尔-本迪克松秩至多为 CB(M_n) $< \alpha$；根据归纳假设，Inv(Θ(A_n)) 是自由群。令 $A := \bigcup_n A_n$：根据命题 9.2，扩张映射 Inv(D) $\longrightarrow$ Inv(Θ($\mathcal{M} \setminus A$)) 的核是自由群。在 Θ($\mathcal{M} \setminus A$) 中，存在唯一一个素理想 P，使得 Ω(A)$_P$ 不是离散赋值环，即 M_0Θ($\mathcal{M} \setminus A$)；此外，该素理想不是 $\mathcal{M}$ 中的孤立点，因为 $C \cap A = \emptyset$，且 M_0 属于 C 的闭包。根据定理 9.1，Inv(Θ($\mathcal{M} \setminus A$)) 是自由群；因此，Inv(D) 也是自由群。

假设 Y_α 是任意的。集合 Y_α 是离散的，因此是有限的，设为 $Y_\alpha = \{N_1, \ldots, N_k\}$；于是我们可以找到 $\mathcal{M}$ 的既开又闭子集 A_n，使得对每个 $1 \leq n \leq k$ 都有 $A_n \cap Y_\alpha = \{N_n\}$。证明现在可按 $\alpha = 0$ 的情形进行，利用 Y_α 为单点集的情形。□

我们将前一个定理转回 ℓ-群的领域。

定理 9.4。设 $G \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{Z})$ 是一维 ℓ-群，且 $\mathcal{N} := \{P \in \mathrm{Spec}^*(G) \mid G/P$ 与 $\mathbb{Z}\}$ 不同构。假设：

- $\mathrm{Spec}^*(G)$ 是弗雷歇－乌雷松的；
- $\mathcal{N}$ 可数；
- $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}^\infty$(Spec*($G$)) $= \emptyset$;
- 对于每个 $P \in \mathcal{N}$，剩余群 G/P 都有一个 $\mathbb{Q}$-基。

那么，G是自由的。

References

[1] Marlow Anderson 和 Todd Feil。《格序群》。Reidel 数学科学丛书。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1988年。导论。[2] Reinhold Baer。《没有有限阶元素的阿贝尔群》。《杜克数学杂志》，3(1):68–122，1937年。[3] James Brewer 和 Lee Klingler。《有限特征 Pr¨ufer 整环的可逆理想的有序群》。《代数通讯》，33(11):4197–4203，2005年。[4] Jean-Luc Chabert。《“多项式 `取整数`值”的环与 Fatou 环》。《法国数学会通报》，99:273–283，1971年。[5] Michael R. Darnel。《格序群理论》，纯粹与应用数学专著和教科书丛书第187卷。Marcel Dekker 公司，纽约，1995年。[6] Max Dickmann、Niels Schwartz 和 Marcus Tressl。《谱空间》，新数学专著丛书第35卷。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[7]David E. Dobbs、Richard Fedder 和 Marco Fontana。《整环的抽象黎曼曲面与谱空间》。《纯粹与应用数学年刊》(4)，148:101–115，1987年。[8] L´aszl´o Fuchs。《阿贝尔群》。Springer 数学专著丛书。Springer，查姆，2015年。[9]L´aszl´o Fuchs 和 Luigi Salce。《非诺特整环上的模》，数学调查与专著丛书第84卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年。[10] Robert Gilmer。《乘法理想理论》。Marcel Dekker 公司，纽约，1972年。纯粹与应用数学，第12号。[11] Melvin Henriksen。《整函数环的素理想》。《太平洋数学杂志》，3:711–720，1953年。[12] Olivier A. Heubo-Kwegna、Bruce Olberding 和 Andreas Reinhart。《完全整闭 Pr¨ufer 整环的群论与拓扑不变量》。《纯粹与应用代数杂志》，220(12):3927–3947，2016年。[13] Bruce Olberding。《根基理想的分解》。载于《交换环与幺半群的算术性质》，《纯粹与应用数学讲义》第241卷，第363–377页。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2005年。[14]Bruce Olberding。《赋值环的 Zariski–Riemann 空间中的仿射概形与拓扑闭包》。《纯粹与应用代数杂志》，219(5):1720–1741，2015年。[15] Ernst Specker。《整数序列的加法群》。《葡萄牙数学》，9:131–140，1950年。[16]Dario Spirito。《光滑链与上环算子》。已提交，arXiv:2511.15319。[17] Dario Spirito。《没有根式分解的几乎戴德金整环》。《数学论坛》，35(2):363–382，2023年。[18] Dario Spirito。《高维中的根式分解》。《纯粹与应用代数杂志》，229(11):108111，2025年。[19] Dario Spirito。《几乎戴德金整环中的有界性》。《代数与应用杂志》，即将刊出。

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Uni-versità di Udine, Udine, Italy电子邮件地址: dario.spirito@uniud.it