arXiv:2603.16324v1 [math.DG] 17 Mar 2026

闭流形上拉普拉斯特征值泛函的二阶变分公式

成澤一雅

Abstract. 对于一个维数为 n 的闭黎曼流形（M, g），设 $\lambda_1(g)$ 为拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ_g 的第一个正特征值，Vol(M, g) 为（M, g）的体积。将尺度不变量 $\lambda_k(g)\mathrm{Vol}(M, g)^{2/n}$ 视为固定共形类中所有度量上的泛函，我们推导出了该泛函的二阶变分公式。作为推论，我们证明：如果环面上的典范平坦度量满足 λ_1 的重数为二，那么该平坦度量并不是其共形类中该泛函的极大点。这是 Karpukhin 最新成果的高维推广。

关键词 拉普拉斯特征值 · 二阶变分 · 共形类 · 平坦环面 数学主题分类 58J50

1. Introduction

设 M 是一个维数为 n 的（连通）闭流形。给定 M上的黎曼度量 g，定义体积 $\mathrm{Vol}(M, g)$ 和拉普拉斯–贝尔特拉米算子 Δ_g。在不会引起混淆时，我们有时将 Δ_g 简写为 Δ。设 $0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) \le \lambda_2(g) \le \cdots \le \lambda_k(g) \le \cdots$为 Δ_g 的特征值。量 $\overline{\lambda_k}(M, g) := \lambda_k(g)\mathrm{Vol}(M, g)^{2/n}$ 在度量 g的缩放下保持不变。令

$$\Lambda_k(M, [g]) := \sup_{h\in[g]} \overline{\lambda_k}(M, h) \quad \text{and} \quad \Lambda_k(M) := \sup_g \overline{\lambda_k}(M, g),$$

其中，第二个量的上确界是在 M上所有黎曼度量中取的。当 M 固定时，我们将 $\overline{\lambda_k}$ 视为定义在 M上所有黎曼度量空间中的泛函。

当 M 为闭曲面时， $\Lambda_1(M)$ 由一个依赖于其亏格[15, 11]的常数所界。Hersch [9] 证明，在二维球面 S^2上， $\Lambda_1(S^2)$ 当且仅当度量为圆度量时取到。对于二维环面 T^2，其共形类集合由典范平坦度量$g_{a,\,b}$ 参数化，该度量由 $\mathbb{R}^2$ 关于格$\Gamma_{a,\,b}$的商诱导而来：$=\mathbb{Z}(1, 0)\oplus\mathbb{Z}(a, b)$ $(0 \le a \le 1/2, a^2+b^2 \ge 1)$。Nadirashvili [14] 证明， $\Lambda_1(T^2)$ 当且仅当度量为

日本鸟取县米子市，邮编 683-8502，米子工业高等专门学校，narita@yonago-k.ac.jp，ORCID iD：0009-0002-0833-5721。

平坦等边度量$g_{1/2,\ \sqrt{3}/2}$时取到。El Soufi 和 Ilias [5] 证明，每个平坦度量$g_{a,\ b}$都是泛函 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_{a,b}]}$的临界点。事实上，El Soufi、Ilias 和 Ros [7]证明， $\Lambda_1(T^2, [g_{a,b}])$ 当且仅当 $a^2+b^2=1$ 且度量为$g_{a,\ b}$时取到。特别地，若 $a^2+b^2>1$，则$g_{a,\ b}$ 是$\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_{a,b}]}$的临界点，但不是极大点。尽管它不是极大点，人们或许会预期它是 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_{a,b}]}$的（局部）极大点。与这一预期相反，Karpukhin [10]最近得到了闭曲面上限制于一个共形类的 $\overline{\lambda_1}$ 的二阶变分公式，并证明了以下结果：

定理 1.1（[10]）。若 $a^2+b^2>1$，则 $g_{a,\ b}$ 不是 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_{a,b}]}$ 的极大点。

本文将 Karpukhin 的工作推广到高维。对于任意维数为 $n\geq 3$ 的闭流形 M，存在一个单参数族（g_t）$_{t>0}$，使得 $\overline{\lambda_1}$（M， g_t）随着 t [3] 趋于无穷。因此，考虑 Λ_k（M）毫无意义。另一方面， Λ_1（M， $[g]$）总是有一个常数 [4, 13]作为上界。在对（M， $[g]$）作出额外假设时，对于任意 k [12, 8]， Λ_k（M， $[g]$）也有一个常数 C（n， k）作为上界。事实上，El Soufi 和 Ilias [4] 证明了，Λ_1（S^n， $[g_{\mathrm{can}}]$）恰由圆度量 g_{can} 实现。这可以视为对 Hersch 先前工作的高维推广。此外，他们在另一篇论文中证明了以下定理 [5]:

定理 1.2 ([5])。设 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个格，且 $c(\Gamma^*)$为 $\sum_{1\leq i\leq n}|w_i|^2$的下确界，其中 $\{w_i\}_{i=1}^n$ 遍历对偶格 Γ^*的所有基。令 $T^n_\Gamma=\mathbf{R^n}/\Gamma$，并设 g_Γ 是 T^n_Γ上的典范平坦度量。则有

$$\Lambda_1(T^n_\Gamma,[g_\Gamma])\leq\frac{4\pi^2}{n}c(\Gamma^*)$$

并且，等号成立当且仅当存在 Γ^* 的一个基 $\{w_i\}_{i=1}^n$，使得$|w_1|^2=\cdots|w_n|^2=c(\Gamma^*)/n$。

这可以看作是对 El Soufi、Ilias 和 Ros 先前工作的高维推广[7]，而定理 1.2 中的等号条件 $a^2+b^2=1$ 恰好就是二维情形下的条件。在本文中，我们将 Karpukhin 的二阶变分公式推广到高维（定理 2.3），并证明如下结果：

定理 1.3 (定理 2.5)。设 Γ 是 $\mathbf{R}^n$中的一个格。令 $T^n_\Gamma=\mathbf{R^n}/\Gamma$，并设$g_\Gamma$是 T^n_Γ上的典范平坦度量。假设存在 $w\in\Gamma^*\setminus\{0\}$ 使得不等式 $|w|<|v|$ 对任意 $v\in\Gamma^*\setminus\{0,\pm w\}$都成立。那么，典范平坦度量 g_Γ 不是 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_\Gamma]}$的极大点。

在二维情形中，上述定理中的假设恰好就是条件$a^2+b^2>1$，因此上述定理可视为 Karpukhin 定理 1.1 的高维推广。

2. Main Results

设 (M,g) 是一个维数为 $n(\geq 2)$ 的紧致黎曼流形，且 $d\mu_g$ 为其黎曼测度。令

$$C_0^\infty(M,g):=\left\{f\in C^\infty(M)\mid \int_M f d\mu_g=0\right\}.$$

固定一个正整数 k。在本节中，我们始终假设 $\lambda_{k-1}<\lambda_k=\lambda_{k+1}=\cdots=\lambda_{k+m-1}<\lambda_{k+m}$。令 $E_k=E_k(g)$ 为 λ_k-特征函数空间，即 $E_k:=\mathrm{Ker}(\Delta-\lambda_k I)$。令 Π_k 为 L^2-正交投影 $L^2(M,g)\to E_k$。在本节中，我们始终假设 $\varphi\in C_0^\infty(M,g)$ 满足

$$\int_M \varphi uv\, d\mu_g=0 \quad \text{and} \quad \int_M ug(\nabla\varphi,\nabla v)\, d\mu_g=0 \tag{2.1}$$

对任意 u, $v\in E_k$。由于（2.1）中的第二个方程可改写为

$$\int_M \varphi\,\mathrm{div}(u\nabla v)d\mu_g=0,$$

且这两个空间 $\{uv\mid u,v\in E_k\}$ 和 $\{\mathrm{div}(u\nabla v)\mid u,v\in E_k\}$ 均为有限维，因此保证存在满足（2.1）的 $\varphi\in C_0^\infty(M,g)$。本文中，我们始终考虑由 $g_t)_{t>0}$ 给出的变形 $g_t:=e^{\varphi t}g$。容易看出 Δ_{g_t} 可表示为

$$\Delta_{g_t}f=e^{-\varphi t}\left\{\Delta_g f-\frac{n-2}{2}tg(\nabla\varphi,\nabla f)\right\}, \tag{2.2}$$

其中，f 是 M上的任意光滑函数。根据 Bando 和 Urakawa 的结果 [1], ，存在一个实解析单参数族 $\{\Lambda_j(t)\ u_j(t)\}_{j=1}^m$满足以下条件:

(1) $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ 关于 $L^2(g_t)$-内积正交归一，对任意$t>0$均成立。(2) $\Lambda_j(0)=\lambda_k(g)$，对任意 $1\leq j\leq m$均成立。(3) $\Delta_{g_t}u_j(t)=\Lambda_j(t)u_j(t)$，对任意 $t>0$ 和 $1\leq j\leq m$均成立。

特别地，$\{u_j:=u_j(0)\}_{j=1}^m$ 是 E_k的一个 L^2-正交归一基。

下文中，我们采用上述假设和记号来研究$\overline{\lambda_k}(g_t)$ 的一阶和二阶变分：$=\lambda_k(g_t)\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/n}$。我们的策略与 Karpukhin 的 [10], 类似，但由于式（2.2）中的第二项在高维情形下不为零，因此我们的计算要复杂得多。

引理 2.1。在上述设定下，有

$$\frac{d}{dt}\overline{\lambda_k}(g_t)\Big|_{t=0} = 0.$$

证明。假设 $\varphi \in C_0^\infty(M,g)$，则

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(M,g_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_M e^{n\varphi t/2}\, d\mu_g\right)\Big|_{t=0} = \frac{n}{2}\int_M \varphi\, d\mu_g = 0. \tag{2.3}$$

接下来证明 $\dot\lambda_k := \frac{d}{dt}\lambda_k(g_t)\big|_{t=0} = 0$。设 $P_{k,\varphi}$ 是由 $P_{k,\varphi} := \Pi_k \circ \frac{d}{dt}\Delta_{g_t}\big|_{t=0}$ 定义的 E_k 的线性自同态。$P_{k,\varphi}$ 关于 L^2 内积是对称的。El Soufi 和 Ilias [6] 证明，对于每个 $1 \le j \le m$, $\dot\Lambda_j := \frac{d}{dt}\Lambda_j(t)\big|_{t=0}$ 都等于 $P_{k,\varphi}$ 的一个特征值。公式 (2.2) 表明，对于任意 $u, v \in E_k$，有

$$\begin{aligned}
&\langle u, P_{k,\varphi}(v)\rangle_{L^2(M,g)}\\
&= \int_M u\left(\frac{d}{dt}\Delta_{g_t} v\Big|_{t=0}\right) d\mu_g\\
&= \int_M \left[(-\varphi u\Delta_g v) - \frac{n-2}{2} u g(\nabla\varphi, \nabla v)\right] d\mu_g\\
&= -\lambda_k \int_M \varphi uv\, d\mu_g - \frac{n-2}{2}\int_M u g(\nabla\varphi,\nabla v)\, d\mu_g\\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中，最后一个等号用到了假设 (2.1)。因此我们已经证明 $P_{k,\varphi}$ 是零映射，所以

$$\dot\Lambda_j = 0 \tag{2.4}$$

对任意 $1 \le j \le m$。由于我们有 $\lambda_k(g_t)$ =最小值$\{\Lambda_j(t)\}_{j=1}^m$，可得 $\dot\lambda_k = 0$。因此，将此与式（2.3）结合起来，即可得出所述结论。□

在下面的引理中，我们将得到 $\ddot\lambda_k$。

引理 2.2。定义 $S_{k,\varphi}: E_k(g) \to L^2(M,g)$ 如下：

$$\begin{aligned}
&S_{k,\varphi}(u)\\
&:= \lambda_k\varphi^2 u - \sum_{i:\,\lambda_i\neq\lambda_k} \frac{2\lambda_i\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}\varphi\Pi_i(\varphi u) + (n-2)\varphi g(\nabla\varphi,\nabla u)\\
&- (n-2)\sum_{i:\,\lambda_i\neq\lambda_k}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k}\left\{\lambda_i\varphi\Pi_i\left(g\left(\nabla\varphi,\nabla u\right)\right) + \lambda_k g\left(\nabla\varphi,\nabla\left(\Pi_i(\varphi u)\right)\right)\right\}\\
&- \frac{(n-2)^2}{2}\sum_{i:\,\lambda_i\neq\lambda_k}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k} g\left(\nabla\varphi,\nabla\left(\Pi_i g\left(\nabla\varphi,\nabla u\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

于是 $T_{k,\ \varphi} := \Pi_k \circ S_{k,\ \varphi}$ 是 E_k 的对称线性自同态，其特征值为 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^m$，并且有

$$\ddot{\lambda}_k = \min\{\ddot{\Lambda}_j\}_{j=1}^m.$$

特别地，λ_k 等于 $T_{k,\varphi}$ 的最小特征值。

P上式。 结合公式 $\Delta_{g_t} u_j(t) = \Lambda_j(t) u_j(t)$ 与 (2.2), 可得

$$e^{-\varphi t}\left\{\Delta_g u_j(t) - \frac{n-2}{2} t g(\nabla\varphi, \nabla u_j(t))\right\} = \Lambda_j(t) u_j(t). \tag{2.5}$$

对其关于 t 求导，可得

$$\begin{aligned} & e^{-\varphi t}\left[-\varphi\Delta u_j(t) + \Delta u_j'(t) - \frac{n-2}{2}\left\{(1-\varphi t) g\left(\nabla\varphi, \nabla u_j(t)\right) + t g\left(\nabla\varphi, \nabla u_j'(t)\right)\right\}\right] \\ & = \Lambda_j'(t) u_j(t) + \Lambda_j(t) u_j'(t). \end{aligned}$$

因此，由该方程和 (2.4) 可知，(2.5) 在 $t = 0$ 处的导数为

$$-\lambda_k \varphi u_j + \Delta \dot{u}_j - \frac{n-2}{2} g\left(\nabla\varphi, \nabla u_j\right) = \lambda_k \dot{u}_j.$$

将 Π_i 应用于该方程，可得

$$-\lambda_k \Pi_i(\varphi u_j) + \lambda_i \Pi_i(\dot{u}_j) - \frac{n-2}{2} \Pi_i\left(\left(g\left(\nabla\varphi, \nabla u_j\right)\right) = \lambda_k \Pi_i(\dot{u}_j).\right.$$

因此可得

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= \Pi_k(\dot{u}_j) + \sum_{i:\ \lambda_i \neq \lambda_k} \Pi_i(\dot{u}_j) \\ &= \Pi_k(\dot{u}_j) + \sum_{i:\ \lambda_i \neq \lambda_k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}\left\{\lambda_k \Pi_i(\varphi u_j) + \frac{n-2}{2} \Pi_i\left(g(\nabla\varphi, \nabla u_j)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

因此可得

$$\Delta \dot{u}_j = \lambda_k \Pi_k(\dot{u}_j) + \sum_{i:\ \lambda_i \neq \lambda_k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}\left\{\lambda_k \Pi_i(\varphi u_j) + \frac{n-2}{2} \Pi_i\left(g(\nabla\varphi, \nabla u_j)\right)\right\}. \tag{2.7}$$

另一方面，式（2.5）在 $t = 0$ 处的二阶导数为

$$\lambda_k \varphi^2 u_j - 2\varphi\Delta \dot{u}_j + \Delta \ddot{u}_j + (n-2)\left\{\varphi g(\nabla\varphi, \nabla u_j) - g(\nabla\varphi, \nabla \dot{u}_j)\right\} = \ddot{\Lambda}_j u_j + \lambda_k \ddot{u}_j,$$

其中我们用到了（2.4）。将（2.7）代入该方程，得到

$$\begin{aligned} & \lambda_k \varphi^2 u_j - 2\lambda_k \varphi \Pi_k(\dot{u}_j) - \sum_{i:\lambda_i \neq \lambda_k} \frac{2\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}\left\{\lambda_k \varphi \Pi_i(\varphi u_j) + \frac{n-2}{2} \varphi \Pi_i(g(\nabla\varphi, \nabla u_j))\right\} \\ & + \Delta \ddot{u}_j + (n-2)\left\{\varphi g(\nabla\varphi, \nabla u_j) - g(\nabla\varphi, \nabla \dot{u}_j)\right\} \\ & = \ddot{\Lambda}_j u_j + \lambda_k \ddot{u}_j. \end{aligned}$$

对该方程应用 Π_k ，并利用 $\Pi_k(\varphi\Pi_k(\dot{u}_j)) = 0$这一事实（它可由（2.1）立即推出），得到

$$\lambda_k\Pi_k(\varphi^2 u_j) - \sum_{i:\lambda_i\neq\lambda_k}\frac{2\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_k}\left\{\lambda_k\Pi_k\left(\varphi\Pi_i(\varphi u_j)\right) + \frac{n-2}{2}\Pi_k\left(\varphi\Pi_i(g(\nabla\varphi,\nabla u_j))\right)\right\}$$
$$+ (n-2)\Pi_k\left(\varphi g(\nabla\varphi,\nabla u_j) - g(\nabla\varphi,\nabla\dot{u}_j)\right)$$
$$= \ddot{\Lambda}_j u_j$$

将（2.6）代入该方程，并利用由（2.1）可得的事实 $\Pi_k\left(g\left(\nabla\varphi,\nabla(\Pi_k(\dot{u}))\right)\right) = \ddot{0}$，可得 $T_{k,\varphi}(u_j) = \Lambda_j u_j$。由于 $\{u_j\}_{j=1}^m$ 是 L^2 的正交归一基，且 E_k, $T_{k,\varphi}$ 是 E_k 上具有 $\ddot{}$ 个特征值 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^m$ 的对称线性自同态。另一方面，由（2.4）可得泰勒级数

$$\Lambda_j(t) = \lambda_k + \frac{\ddot{\Lambda}_j}{2}t^2 + O(t^3) \quad (t\to 0).$$

由于 $\lambda_k(g_t) = \min\{\Lambda_j(t)\}_{j=1}^m$，可得

$$\ddot{\lambda}_k = \min\{\ddot{\Lambda}_j\}_{j=1}^m.$$

□

定理 2.3。设 $\mu_{k,\varphi}$ 为 $T_{k,\varphi}$ 的最小特征值。那么有

$$\overline{\lambda_k}(g_t) = \lambda_k + \frac{\alpha_{k,\varphi}}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t\to 0),$$

where $\alpha_{k,\varphi} = \left(\mu_{k,\varphi}\mathrm{Vol}(M,g) + \frac{n\lambda_k}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(M,g)}\right)(\mathrm{Vol}(M,g))^{(2-n)/n}$.

证明。我们有

$$\mathrm{Vol}(M,g_t) = \int_M e^{n\varphi t/2}d\mu_g$$

因此

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}(M,g_t)\Big|_{t=0} = \frac{n^2}{4}\int_M\varphi^2 d\mu_g = \frac{n^2}{4}\|\varphi\|^2_{L^2(M,g)}.$$

结合这一事实与（2。3），可得

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{Vol}(M,g_t)\right)^{2/n}\Big|_{t=0} = \frac{n}{2}\left(\mathrm{Vol}(M,g)\right)^{(2-n)/n}\|\varphi\|^2_{L^2(M,g)}.$$

因此，这一事实以及引理 2.1 和 2.2 表明

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{\lambda_k}(g_t)\Big|_{t=0} = \mu_{k,\varphi}\left(\mathrm{Vol}(M,g)\right)^{2/n} + \frac{n\lambda_k}{2}\left(\mathrm{Vol}(M,g)\right)^{(2-n)/n}\|\varphi\|^2_{L^2(M,g)}$$

□

注记 2.4。 我们说明 Karpukhin 的结果 [10]与我们的结果之间的关系。Karpukhin 仅研究了闭曲面的二阶变分公式。为了将其结果推广到高维流形，我们增加了一项额外假设

$$\int_M ug(\nabla\varphi, \nabla v)d\mu_g = 0 \quad \text{for any} \quad u, v \in E_k.$$

对于闭曲面（$n = 2$），上述$T_{k,\ \varphi}$ 关于 $L^2(g)$-内积是对称的；但对于高维流形，$T_{k,\ \varphi}$ 仅可对角化（引理2.2）。对于闭曲面，Karpukhin 定义了二次型 $Q_{k,\ \varphi}$ 在E_k 上，其定义为

$$Q_{k,\varphi} = \frac{1}{\lambda_k}\langle u, T_{k,\varphi}u\rangle_{L^2(g)}$$

并利用$Q_{k,\ \varphi}$的最小特征值表示 $\overline{\lambda_k}(g_t)$的泰勒级数。因此，Karpukhin 的结果与我们的结果之间似乎相差$1/\lambda_k$，但对于 $n = 2$，二者本质上相同。

接下来，我们将定理2.3 应用于某些平坦环面。设 Γ 是$\mathbf{R}^n$中的一个格。那么Γ 可表示为 $\Gamma = A\mathbf{Z}^n$，其中 A 是某个可逆矩阵，且对偶格Γ^*定义为

$$\Gamma^* = \{w \in \mathbf{R}^n \mid w \cdot x \in \mathbf{Z} \quad \text{for any} \quad x \in \Gamma\},$$

可表示为 $\Gamma^* = (A^T)^{-1}\mathbf{Z}^n$。令 $T^n_\Gamma := \mathbf{R}^n/\Gamma$，并令 g_Γ 为其上的典范平坦度量。于是有 Vol$(T^n_\Gamma,\ g_\Gamma) = |\det A|$。根据 El Soufi 和 Ilias 的结果，[5]，g_Γ 是 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_\Gamma]}$ 的临界点。

定理 2.5. 在上述设定下，假设存在 $w \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ 使得对任意 $v \in \Gamma^* \setminus \{0, \pm w\}$，不等式 $|w| < |v|$ 成立。那么典范平坦度量 g_Γ 不是 $\overline{\lambda_1}\restriction_{[g_\Gamma]}$的极大点。

证明. 根据假设，$\lambda_1(g_\Gamma) = 4\pi^2|w|^2$ 的重数为二。更明确地说，

$$u_1(x) := \frac{\sqrt{2}}{|\det A|^{1/2}}\sin(2\pi w \cdot x), \quad u_2(x) := \frac{\sqrt{2}}{|\det A|^{1/2}}\cos(2\pi w \cdot x)$$

构成 L^2-正交归一基 E_1。令 $\varphi = u_1$ 并考虑共形变形 $g_t := e^{\varphi t}g_\Gamma$。为了使用定理2.3，我们首先验证假设（2.1）成立。显然，有 $\varphi \in C^\infty_0(T^n_\Gamma, g_\Gamma)$。此外，有

$$\varphi u_1(x) = u_1^2(x) = \frac{2}{|\det A|}\sin^2(2\pi w \cdot x) = \frac{1}{|\det A|}\left(1 - \cos(4\pi w \cdot x)\right)$$

and

$$\varphi u_2(x) = u_1 u_2(x) = \frac{2}{|\det A|}\cos(2\pi w\cdot x)\sin(2\pi w\cdot x) = \frac{1}{|\det A|}\sin(4\pi w\cdot x).$$

$\cos(4\pi w\cdot x)$ 和 $\sin(4\pi w\cdot x)$ 都是 $4\lambda_1$-特征函数。因此，φu_1 和 φu_2 都与 E_1 正交。此外，有

$$g_\Gamma(\nabla\varphi,\nabla u_1) = \frac{2\lambda_1}{|\det A|}\cos^2(2\pi w\cdot x) = \frac{\lambda_1}{|\det A|}\left(1+\cos(4\pi w\cdot x)\right)$$

and

$$g_\Gamma(\nabla\varphi,\nabla u_2) = -\frac{2\lambda_1}{|\det A|}\cos(2\pi w\cdot x)\sin(2\pi w\cdot x) = -\frac{\lambda_1}{|\det A|}\sin(4\pi w\cdot x).$$

因此，$g_\Gamma(\nabla\varphi,\ \nabla u_1)$ 和 $g_\Gamma(\nabla\varphi,\ \nabla u_2)$ 与 E_1 正交，因此（2.1）成立。

接下来，我们计算 $T_{1,\ \varphi}$ 的特征值，它在引理 2.2 中定义。根据三倍角恒等式，我们有

$$\begin{aligned} u_1^3(x) &= \frac{2\sqrt{2}}{|\det A|^{3/2}}\sin^3(2\pi w\cdot x)\\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2|\det A|^{3/2}}\sin(2\pi w\cdot x) - \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{3/2}}\sin(6\pi w\cdot x)\\ &= \frac{3}{2|\det A|}u_1(x) - \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{3/2}}\sin(6\pi w\cdot x)\end{aligned}$$

此外，由积化和差公式可得

$$\begin{aligned} u_1(x)\cos(4\pi w\cdot x) &= \frac{\sqrt{2}}{|\det A|^{1/2}}\sin(2\pi w\cdot x)\cos(4\pi w\cdot x)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{1/2}}\left\{\sin(6\pi w\cdot x) - \sin(2\pi w\cdot x)\right\}\\ &= -\frac{1}{2}u_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{1/2}}\sin(6\pi w\cdot x)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g_\Gamma\left(\nabla u_1(x),\nabla(\cos(4\pi w\cdot x)\right) &= -\frac{8\sqrt{2}|w|^2\pi^2}{|\det A|^{1/2}}\sin(4\pi w\cdot x)\cos(2\pi w\cdot x)\\ &= -\frac{\sqrt{2}\lambda_1}{|\det A|^{1/2}}\left\{\sin(6\pi w\cdot x)+\sin(2\pi w\cdot x)\right\}\\ &= -\lambda_1 u_1(x) - \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{|\det A|^{1/2}}\sin(6\pi w\cdot x).\end{aligned}$$

结合这些公式，经过直接计算可得

$$S_{1,\varphi}(u_1)(x) = \frac{\lambda_1}{6|\det A|}\left\{1 + 5(n-2) + (n-2)^2\right\} u_1(x) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{6|\det A|^{3/2}}\left\{5 - 3(n-2) + (n-2)^2\right\} \sin(6\pi w \cdot x).$$

由于函数 $\sin(6\pi w \cdot x)$ 是一个 $9\lambda_1$-特征函数，我们得到

$$T_{1,\varphi}(u_1) = \frac{\lambda_1}{6|\det A|}(n^2 + n - 5)u_1.$$

类似地，可以得到

$$u_1^2 u_2(x) = \frac{1}{2|\det A|}u_2(x) - \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{3/2}}\cos(6\pi w \cdot x),$$

$$u_1(x)\sin(4\pi w \cdot x) = \frac{1}{2}u_2(x) - \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{1/2}}\cos(6\pi w \cdot x),$$

and

$$g_\Gamma\left(\nabla u_1(x), \nabla(\sin(4\pi w \cdot x)\right) = \lambda_1 u_2(x) + \frac{\sqrt{2}}{2|\det A|^{1/2}}\cos(6\pi w \cdot x).$$

这些方程意味着

$$S_{1,\varphi}(u_2)(x) = \frac{\lambda_1}{6|\det A|}\left\{-5 - (n-2) + (n-2)^2\right\} u_2(x) + \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{6|\det A|^{3/2}}\left\{5 - 3(n-2) + (n-2)^2\right\} \cos(6\pi w \cdot x).$$

因此

$$T_{1,\varphi}(u_2) = \frac{\lambda_1}{6|\det A|}(n^2 - 5n + 1)u_2.$$

因此可得

$$\mu_{1,\varphi} = \frac{\lambda_1}{6|\det A|}(n^2 - 5n + 1).$$

因此我们得出，$\alpha_{1,\ \varphi}$其在定理2.3中定义，表达式为

$$\alpha_{1,\varphi} = \frac{(n-1)^2\lambda_1}{6}|\det A|^{(2-n)/n} > 0.$$

因此，典范平坦度量 g_Γ 不是 $\overline{\lambda_1}$-共形极大的。 □

正如我们在引言中所指出的，这一结果是 Karpukhin 定理1.1 的高维推广 [10]。

致谢。我谨向 Shin Nayatani 教授致以谢意，感谢他一直以来的鼓励以及对本文提出的宝贵意见。

References

[1] S. Bando 和 H. Urakawa, 《紧黎曼流形上拉普拉斯算子特征值的一般性质》, 《东北数学杂志》35 (1983), 155–172。[2] M. Berger, 《关于黎曼流形的前几个特征值》, 《组合数学》26 (1973), 129–149。[3] B. Colbois 和 J. Dodziuk, 《具有较大 λ_1的黎曼度量》, 《美国数学会会刊》122 (1994), 905–906。[4] A. El Soufi 和 S. Ilias, 《极小浸入、拉普拉斯算子的第一特征值与共形体积》, 《数学年刊》275 (1986), 第2期, 257–267。[5] A. El Soufi 和 S. Ilias, 《共形类中拉普拉斯算子第一特征值的极值度量》, 《美国数学会会刊》131 (2003), 1611–1618。[6] A. El Soufi 和 S. Ilias, 《紧流形上的拉普拉斯特征值泛函与度量变形》, 《几何物理杂志》58 (2008), 89–104。[7] A. El Soufi、S. Ilias 和 A. Ros, 《关于环面的第一特征值》, 《谱理论与几何研讨会》15 (1996), 17–23。[8] A. Hassannezhad, 《拉普拉斯算子特征值与Steklov问题的共形上界》, 《函数分析杂志》261 (2011), 3419–3436。[9] J. Hersch, 《齐性球面膜的四个等周性质》, 《巴黎科学院报告》系列 A-B 270 (1970), A1645–A1648。[10]M. Karpukhin, 《曲面上特征值泛函的二阶变分公式》, arXiv:2508.10465, 预印本。[11] M. Karpukhin, 《不可定向曲面上拉普拉斯算子第一特征值的上界》, 《国际数学研究通知》20 (2016), 6200–6209。[12] N. Korevaar, 《共形度量特征值的上界》, 《微分几何杂志》37 (1993), 73–93。[13] P. Li 和 S. T. Yau, 《一个新的共形不变量及其在Willmore猜想和紧曲面第一特征值中的应用》, Invent.Math. 69 (1982), 269–291。[14] N. Nadirashvili, 《Berger等周问题与曲面的极小浸入》, 《几何与泛函分析》6 (1996), 877–897。[15] P. Yang 和 S. T. Yau, 《紧黎曼曲面及极小子流形的拉普拉斯算子特征值》, 《比萨高等师范学院科学类年刊》7 (1980), 第4期, 55–63。