arXiv:2603.16355v1 [math.RT] 17 Mar 2026

伴随表示的深度

ARINDAM JANA 和 AMIYA MONDAL

ABSTRACT. 设 F 是一个剩余特征为奇数 p的非阿基米德局部域。$\mathrm{GL}_n(F)$ 的光滑表示的深度是局部 Langlands 对应（LLC）中的一个不变量。LLC 的伽罗瓦侧有一个类似概念，称为局部伽罗瓦表示的斜率。对于不可约伽罗瓦表示，斜率与 Swan 导子密切相关；而对于可约伽罗瓦表示，其行为则较为微妙。本文给出了局部伽罗瓦群的 Carayol 表示的伴随表示之斜率的显式公式。

1. INTRODUCTION

设 F 是一个剩余特征为奇数 p的非阿基米德局部域。设 $\mathbf{G}$ 是定义在 F 上的连通约化群，其 F-有理点群为 $G := \mathbf{G}(F)$。（猜想中的）该群 G的局部 Langlands 对应（LLC）是一个有限对一映射

$$\mathrm{Irr}(G) \longrightarrow \Phi(G);\ \pi \mapsto \phi_\pi,$$

其中，$\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的所有不可约光滑表示的等价类集合，而 $\Phi(G)$ 表示 G 的所有 Langlands 参数的等价类集合。

p-进群的光滑表示理论的一个重要方面，是研究光滑表示的导子和深度。自然会问，LLC 是否保持导子和深度。

光滑表示的导子通过与局部函数方程相关联的 ε因子来定义。已知对于 $\mathrm{GL}_n(F)$，LLC 保持导子。伽罗瓦侧相应的导子称为阿廷导子。Swan 导子也是一个与阿廷导子密切相关的不变量。

因此，研究阿廷导子和 Swan 导子在函子性下的行为是很有意义的，而函子性是朗兰兹纲领的支柱之一。对于给定的不可约超尖点表示 π_i $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ 的 $i = 1, 2$，Rankin-Selberg 提升 $\pi_1 \times \pi_2$ 到群 $\mathrm{GL}_{n_1 n_2}(F)$ 在 LLC 下对应于张量积 $\phi_{\pi_1} \otimes \phi_{\pi_2}$。Bushnell-Henniart-Kutzko 的开创性工作研究了 Rankin-Selberg 提升的导子（见 [BHK98，定理 6.5，第 723]页）。利用这一结果，其他函子提升，即对称平方、外平方和 Asai 提升的导子，也在 [AM15、AM16] 中得到了研究。尽管在对应关系的伽罗瓦侧给出显式导子公式可能稍微复杂一些，但人们已经运用纯粹的伽罗瓦论方法研究了这些不变量的精确界（参见 [BH17a、Kil19、HO24] 以供参考）。

深度 $d(\pi)$ 的不可约光滑表示 π 定义在约化 p-进群G 上的深度由 Moy-Prasad [MP94、MP96]通过其抛物型子群的滤过定义。另一方面，在（猜想中的）局部 Langlands 对应（LLC）下，可以利用绝对伽罗瓦群的分歧滤过定义 Langlands 参数 $d(\phi_\pi)$ 的深度 ϕ_π 。 π 使用

日期：2026年3月18日。2020 数学主题分类。22E50, 11F80, 11S15。关键词和短语。深度，斜率，Swan 导子，Galois表示，Herbrand 函数。

伽罗瓦群 Gal(F$_s$/F) 的分歧滤过 F （参见 [ABPS16，第18]页）。深度是否在 LLC 下保持不变是一个活跃的研究领域。这意味着，人们希望了解是否

$$d(\pi) = d(\phi_\pi), \text{ for } \pi \in \Pi_\phi(G).$$

这一结论在许多情形下都已得到证明。特别是，对于群 GL$_n(F)$ [Oi23，定理 2.15，第 541] 页（原见 [Yu09，2.3。6]）以及 [ABPS16，命题 4。2]。

沿着同一思路，我们希望研究 GL$_n(F)$ 上函子提升下深度的行为。对于 $i = 1, 2$ 时 GL$_{n_i}(F)$ 的不可约超尖点表示 π_i，已知

$$d(\pi_1 \times \pi_2) \leq \max\{d(\pi_1), d(\pi_2)\}.$$

此外，若 $d(\pi_1) \neq d(\pi_2)$，则 $d(\pi_1 \times \pi_2) = \max\{d(\pi_1)\ d(\pi_2)\}$ （见 [Kil19，命题 3.4，第 21]页）。

本文关注伴随提升的深度。更准确地说，对于 Carayol 表示 π GL$_n(F)$ 上的表示，我们求出深度 $d(\pi \times \pi^\vee)$，其中 $\pi^\vee$ 表示 π的对偶表示或光滑对偶。伽罗瓦表示ρ的斜率 sl(ρ 在（[BH19，§(3.2.1)], [Kil19，定义 3.1，第 20]页）中定义。将此定义与 [ABPS16第 18]页中的深度定义相比较，可得

$$d(\phi_\pi) = \mathrm{sl}(\phi_\pi),$$

对于任意 GL$_n(F)$ 的 Langlands 参数 ϕ_π 。在这一理解下，我们的处理完全位于 LLC 的伽罗瓦侧。从现在起，我们用 sl(ρ) 表示伽罗瓦表示 ρ的深度。

Le$\widehat{\mathcal{W}_F}$表示与 $\widehat{\ }$韦伊群 $\mathcal{W}_F$ 相关的 F的光滑不可约复表示的等价类集合。表示 $\rho \in \mathcal{W}_F$ 若满足 **Carayol** 条件，即 (Sw(ρ)，维数 ρ) $= 1$ [Kil19，§7]，则称其为 Carayol 表示。表示 ρ 若特别满足 **极浅层** 条件，即 Sw(ρ) $= 1$，则称其为极浅层表示。

事实证明，所有 Carayol 表示都是温和不可约的（[Kil19，命题 7。2], [BH14]），即 ρ 在惯性群上的限制仍然不可约。然而，有时在文献中，例如 [BH19], ，Carayol 表示被定义在野不可约表示这一类上，即 ρ 在野惯性上的限制是不可约的。注意，每个野不可约表示都是温和不可约的。本文研究的是 [Kil19] 中的较大一类 Carayol 表示；它们是温和不可约的，但不一定是野不可约的。

设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$的 Carayol 表示。我们为伴随表示 Ad(ρ) := $\rho \otimes \rho^\vee$ 的斜率找到了一个显式公式。我们的方法使用韦伊群 $\mathcal{W}_F$ 的分歧滤过及其相关的 Herbrand 函数。本文的第一个主要定理如下。

定理 1.1. 设 F 是剩余特征为 $p \neq 2$ 的 p-进域。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个维数为 mp^r 的 ***Carayol*** 表示，其中$(p, m) = 1$。若 $m > 1$，则sl$(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho)$。

利用 LLC，由定理 1.1 可知， $d(\pi \times \pi^\vee) = d(\pi)$，对于一个 π 的 GL$_n(F)$ Carayol 表示，其中 $n = mp^r$ 满足 $m > 1$。另一方面，若 $m = 1$，则我们得到了 $d(\pi \times \pi^\vee)$ 的显式公式，它表明 $d(\pi \times \pi^\vee) < d(\pi)$。为了解释这一结果，我们转向 LLC 的伽罗瓦侧。

设 ρ 是一个维数为 p^r的 Carayol 伽罗瓦表示。在描述关于 sl($\rho \otimes \rho^\vee$) 的一般结果之前，我们先介绍以下定理。该定理描述了由一个特征野性诱导而来的 Carayol 表示的伴随表示的斜率（详见定理4.4）。这一结果是第二主定理（定理1.4）的核心

如下。为方便起见，从现在起，对于扩张K/F，我们将 $\mathrm{Ind}^{K/F}(\,) := \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_K}^{\mathcal{W}_F}(\,)$ 记作。

定理 1.2。 设 F 是一个剩余特征为 $p \neq 2$ 的 p-进域。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个维数为 p^r 的 *Carayol* 表示， $r > 1$。假设 $\rho =$ 诱导表示$^{K/F}\chi$ ，其中 K/F是一个全分歧伽罗瓦扩张，且$\mathrm{Gal}(K/F)$是循环群，并且 $\mathcal{W}_K$上有一个特征 χ。那么

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{i_0}{p^r},$$

其中， i_0 是$\mathrm{Gal}(K/F)$中的最小下跳跃。

定理 1.2 证明的核心思路，是明确理解与循环扩张相关联的 Herbrand 函数的下跳跃和上跳跃；这一工作已在第4.1节完成。运用这些针对循环扩张的技巧，我们进一步将定理1.2 推广到任意扩张。

定理 1.3。 设 F 是一个剩余特征为 $p \neq 2$ 的 p-进域。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个维数为 p^r 的 *Carayol* 表示， $r > 1$。假设 $\rho =$ 诱导表示$^{K/F}\chi$ ，其中 K/F 是一个全分歧伽罗瓦扩张，且 $\mathcal{W}_K$上有一个特征 χ 。那么

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{i_0}{p^r},$$

其中， i_0 是$\mathrm{Gal}(K/F)$中的最小下跳跃。

然而，一般而言，Carayol 表示未必是由特征诱导得到的，例如，维数为 p^r的极浅层表示。好在，任何 Carayol 表示都可以由某个扩张 χ 的特征 $\mathcal{W}_K$ 构造而成，其中扩张为 K/F，通过特定的诱导和限制实现（见第5节）。下面的定理描述了任意 Carayol 表示的伴随表示的斜率。

定理 1.4。 设 F 是一个剩余特征为 $p \neq 2$的 p-*adic* 域。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个维数为 p^r的 *Carayol* 表示。那么

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{\phi_{K/F}(i_0)}{\dim\,\rho},$$

其中， i_0 是有限伽罗瓦扩张K/F的$\mathrm{Gal}(K/F)$ 中的最小非零下跳跃。

由于极浅层表示构成 Carayol 表示的一个重要子类，我们将极浅层表示的伴随表示的斜率作为定理1.1和1.4的推论来表述。

推论 1.5。 令 F 为剩余特征为 $p \neq 2$的 p-*adic*域。令 ρ 为 $\mathcal{W}_F$的深层表示。

（1）若 $m > 1$，则$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \dfrac{1}{\text{维数 } \rho}$。（2）若 $m = 1$，则

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \frac{1 - \phi_{K/F}(i_0)}{\dim\,\rho},$$

其中 i_0 是有限伽罗瓦扩张 K/F 中 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 的最小非零下跳跃。

简要介绍一下本文的内容。在第 2 节中，我们定义伽罗瓦表示的斜率，并证明斜率的一些基本性质。在第3 节中，我们介绍 Herbrand 函数的一些一般性质。在第 4 节中，我们证明定理1.2 和1.3。最后，在第 5 节中，我们建立一般情形下的斜率公式（定理1.1 和1.4 的证明）。

2. Slope of a Galois representation

我们从韦伊表示斜率的定义开始。设 F 是剩余特征为 $p \neq 2$ 的 p-进域，并令 $\mathcal{W}_F$ 表示与之关联的韦伊群。令 $\{\mathcal{W}_F^r\}_{r\in\mathbb{R}_{\geq -1}}$ 表示 $\mathcal{W}_F$ 的上分歧滤过，其中 $\mathcal{W}_F^{-1} = \mathcal{W}_F$，并令 $\mathcal{W}_F^0 = \mathcal{I}_F$ 表示 $\mathcal{W}_F$ 的惯性子群。对于 $r \geq 0$，子群 $\mathcal{W}_F^r$ 在 $\mathcal{W}_F$ 中是 profinite、闭且正规的。令 $\mathcal{P}_F$ 表示 $\mathcal{W}_F$ 的野惯性。

设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的有限维光滑表示。存在 F 的有限伽罗瓦扩张 E，使得 $\rho|_{\mathcal{W}_E^0}$ 经由 G 的惯性子群 G^0 因子化：$= \mathrm{Gal}(E/F)$。令 $\{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq -1}}$ 和 $\{G^r\}_{r\in\mathbb{R}_{\geq -1}}$ 分别表示 G [Ser79, 第四章] 中的下分歧滤过和上分歧滤过。若 $G_l \neq G_{l+1}$，我们称 G 在 $l \geq -1$ 处有一个下跳跃。此外，若存在 $\epsilon > 0$，使得对所有 $\epsilon > 0$ 都有 $G^u \neq G^{u+\epsilon}$，则称 G 在 $u \geq -1$ 处有一个上跳跃。

定义 2.1. [BH19, (3.2.1)],[Kil19, 定义 3.1, p. 20] 设 ρ 是一个有限维光滑表示，表示对象为 $\mathcal{W}_F$。那么，ρ 的斜率定义为

$$\mathrm{sl}(\rho) := \inf\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid \rho\big|_{\mathcal{W}_F^r} = 1\}.$$

在此，我们回顾表示 ρ 的 Swan 导子的定义。

定义 2.2. 设 (ρ, V) 是 $\mathcal{W}_F$ 的有限维光滑表示。那么，ρ 的 *Swan* 导子定义为

$$\mathrm{Sw}(\rho) := \int_0^\infty \dim\left(V/V^u\right) du,$$

其中 V^u 表示 $\mathcal{W}_F^u$-不变向量组成的子空间。

对于任意表示 ρ（对象为 $\mathcal{W}_F$，有 $\mathrm{sl}(\rho) \geq \mathrm{Sw}(\rho)\,\dim\rho$。特别地，当 ρ 不可约时，可得 $\mathrm{Sw}(\rho) = \mathrm{sl}(\rho) \cdot \dim(\rho)$ [Hen80, 定理 3.5]。

我们回顾 Herbrand 函数的定义。

定义 2.3。 [Ser79，§IV.3]设 E 是 F 的有限扩张，分歧指数为$e(E/F$。与之对应的 Herbrand 函数 $\phi_{E/F}$：$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 定义为 E/F：

$$\phi_{E/F}(t) = 1/e(E/F) \int_0^t \mid G_x \mid dx.$$

现在我们定义共轭表示。设 E/F 是一个有限伽罗瓦扩张，且 τ 是 $\mathcal{W}_E$的一个表示。那么 W_E是 $\mathcal{W}_F$的正规子群，并且 $\mathcal{W}_F/\mathcal{W}_E \simeq \mathrm{Gal}(E/F)$。因此，每个 $\lambda \in \mathrm{Gal}(E/F)$ 在 $\mathcal{W}_F$中都有一个提升，我们仍将其记为 λ。固定这样一个λ后，我们将 $\mathcal{W}_E$ 的共轭表示 τ^λ 定义为

$$\tau^\lambda(x) = \tau(\lambda x \lambda^{-1})$$

对于 $x \in \mathcal{W}_E$。可以验证，伽罗瓦表示的斜率在伽罗瓦共轭和对偶运算下保持不变。因此，对于有限伽罗瓦扩张 E/F 以及 $\mathcal{W}_E$的不可约表示 τ，我们有

$$\mathrm{sl}(\tau) = \mathrm{sl}(\tau^\lambda) = \mathrm{sl}((\tau^\lambda)^\vee) = \mathrm{sl}(\tau^\vee)$$

对于 $\lambda \in \mathrm{Gal}(E/F)$。

下面的命题说明，诱导表示与诱导它的表示的斜率通过相应的 Herbrand 函数相联系。

命题 2.4。 [MP19，命题 2] 设 $F \subset E \subset K$ 是有限伽罗瓦扩张，且 $G(K/F) :=$ 伽罗瓦(K/F) 且 $G(K/E) :=$ 伽罗瓦(K/E)。设 τ是$G(K/E)$的一个表示。那么

$$\mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{G(K/E)}^{G(K/F)}\tau) = \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\tau)),$$

其中 $\phi_{E/F}$ 是与扩张 E/F相关联的 *Herbrand* 函数。

表示的斜率在驯分歧诱导和限制下的变化由下一个引理给出。

引理 2.5。 设 E/F 是有限全驯分歧伽罗瓦扩张，其分歧指数为 e。设 σ 和 τ 分别是 $\mathcal{W}_F$ 和 $\mathcal{W}_E$的有限维表示，那么

(1) $\mathrm{sl}(\sigma\mid_{\mathcal{W}_E}) = e \cdot \mathrm{sl}(\sigma)$，(2)
$\mathrm{sl}(\text{诱导表示}^{E/F}\tau) = \frac{1}{e} \cdot \mathrm{sl}(\tau)$。

证明。 记 $G = \mathcal{W}_F$和 $H = \mathcal{W}_E$。于是 $G/H \simeq$ 伽罗瓦群(E/F)，即E/F的伽罗瓦群。由于 E/F 是有限且温和分歧的，我们有 $G^u = H^{eu}$ 对所有 $u \in \mathbb{R}_{>0}$ (参见[BH17b，引理 1])。

我们先证明 (1)。设 $\mathrm{sl}(\sigma) = u$。则 $\sigma\mid_{H^{eu+e\epsilon}} = \sigma\mid_{G^{u+\epsilon}} = 1$对所有 $\epsilon > 0$成立。这表明 $\mathrm{sl}(\sigma\mid_H) \leq eu = e \cdot \mathrm{sl}(\sigma)$。反过来，设 $\mathrm{sl}(\sigma\mid_H) = u$。对于任意 $\epsilon > 0$，我们有 $\sigma\mid_{G^{u/e+\epsilon/e}} = \sigma\mid_{H^{u+\epsilon}} = 1$，由此得到 $\mathrm{sl}(\sigma) \leq u/e$，即 $e \cdot \mathrm{sl}(\sigma) \leq u = \mathrm{sl}(\sigma\mid_H)$。因此 (1) 得证。

（2）的证明由命题 2.4 得出，只需注意到 $\phi_{E/F}(x) = x/e$ 对于有限温和分歧扩张 E/F成立。 □

下面的引理描述了伴随表示在驯分歧限制下的斜率行为。

引理 2.6。 设 E/F 是一个有限温和分歧扩张，其分歧指数为e。设 τ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个表示。则 $\mathrm{sl}(\tau \otimes \tau^\vee) = 1/e \cdot \mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_E} \otimes (\tau\mid_{\mathcal{W}_E})^\vee)$。

证明。 证明由引理 2.5 得出。 □

引理 2.7。 设 E/F 是一个有限伽罗瓦扩张。设 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$ 是 $\mathcal{W}_F$ 的不可约表示，其中 χ 是 $\mathcal{W}_E$ 的一个特征。则$\mathrm{Gal}(E/F)$ 中的最大下跳跃不超过 $\mathrm{sl}(\chi)$。

证明。由于 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$，存在一个有限伽罗瓦扩张 K/F，使得 $\rho =$诱导表示$_H^G\chi$，其中 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ 和 $H = \mathrm{Gal}(K/E)$。于是我们有 $\mathrm{sl}(\rho) = \phi_{K/F}(m)$ 和 $\mathrm{sl}(\chi) = \phi_{K/E}(n)$，其中 m 和 n 分别是 G 和 H 中的最大下跳跃[HO24，第 2.1.2 节，第 156] 页。取 $\tau = \chi$ 为命题 2.4 中的参数，我们得到

$$\phi_{K/F}(m) = \mathrm{sl}(\rho) = \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\chi)) = \phi_{E/F}(\phi_{K/E}(n)) = \phi_{K/F}(n).$$

由此得到 $m = n$。根据 [Ser79，引理 5] 可得

$$\mathrm{Gal}(E/F)_{\phi_{K/E}(n)} = (G/H)_{\phi_{K/E}(n)} = G_nH/H.$$

对于任意的 $\epsilon > 0$，我们有

$$\mathrm{Gal}(E/F)_{\phi_{K/E}(n)+\epsilon} = \mathrm{Gal}(E/F)_{\phi_{K/E}(n+\delta)} = G_{n+\delta}H/H = G_{m+\delta}H/H = 1.$$

因此 $G(E/F)$ 的最大下跳跃必须小于或等于 $\phi_{K/E}(n) = \mathrm{sl}(\chi)$。 □

3. Herbrand functions

设 E/F 是有限可分扩张。假设 E/F 是伽罗瓦扩张，则函数$\psi_{E/F}$: $[0,\infty)$ $\to [0,\infty)$ 定义如下（参见 [Ser79，第四章，第 74]页）：

$$\psi_{E/F}(x) := \int_0^x [G^0 : G^t]\, dt.$$

若 E/F 不是伽罗瓦扩张，则取一个伽罗瓦扩张 E_1/F 使得 $E \subset E_1$，定义（参见 [BH19，(1.1.1)]）

$$\psi_{E/F} = \psi_{E_1/E}^{-1} \circ \psi_{E_1/F}.$$

则 $\psi_{E/F}$ 是良定义的。事实上，设 E_2/F 是另一个伽罗瓦扩张，满足 $E \subset E_2$。记 $\psi'_{E/F} = \psi_{E_2/E}^{-1} \circ \psi_{E_2/F}$。由于伽罗瓦扩张的合成仍是伽罗瓦扩张，且 $E_1E_2 \supset E$，因此有 $\psi''_{E/F} = \psi_{E_1E_2/E}^{-1} \circ \psi_{E_1E_2/F}$；利用$\psi_{E_1E_2/E} = \psi_{E_1E_2/E_1} \circ \psi_{E_1/E}$和 $\psi_{E_1E_2/F} = \psi_{E_1E_2/E_1} \circ \psi_{E_1/F}$ 这一事实，可得 $\psi_{E/F}$。再次利用$\psi_{E_1E_2/E} = \psi_{E_1E_2/E_2} \circ \psi_{E_2/E}$和 $\psi_{E_1E_2/F} = \psi_{E_1E_2/E_2} \circ \psi_{E_2/F}$，可得 $\psi''_{E/F} = \psi'_{E/F}$。因此有 $\psi_{E/F} = \psi''_{E/F} = \psi'_{E/F}$。

定义 3.1。 [BH19，定义，第 1968] 设 E/F 是一个有限可分扩张。我们称 $a \in \mathbb{R}_{>0}$ 是 $\psi_{E/F}$的一个跳跃，若导数 $\psi'_{E/F}$ 在 a处不连续。

根据 [BH19，第 1971], 对于任意 $x > 0$，我们定义

$$w_x(E/F) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi'_{E/F}(x+\epsilon)}{\psi'_{E/F}(x-\epsilon)}. \tag{3.1}$$

备注 1。 注意， $x \in \mathbb{R}_{>0}$ 是 $\psi_{E/F}$ 的一个跳跃，当且仅当 $w_x(E/F) > 1$。

尽管这一点理应已广为人知，在下面的引理中，我们将证明，阶为 p^r 的循环伽罗瓦群中的跳跃与相应 Herbrand 函数的跳跃一致。

引理 3.2。 设 E/F 是次数为 p^r 的循环伽罗瓦扩张，并设 $G :=$ 伽罗瓦(E/F)。$\psi_{E/F}$ 的跳跃集合与 G 中定义的上跳跃集合相同，见 §2。

证明。由于 $G = \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$，根据 [Ser79，第四章，第 76], 存在正整数i_0，……， i_{r-1} 使得

$$J = \{j_k = i_0 + \cdots + i_{k-1} \mid 1 \le k \le r\}$$

是 G 中满足 $|G^{j_k}| = p^{r-(k-1)}$ 且对应 $1 \le k \le r$的所有上跳跃的集合。对于 $j_k \le x \le j_{k+1}$，简单计算可得

$$\psi_{E/F}(x) = p^k x - \sum_{l=0}^{k-1} i_l(p^k - p^l).$$

于是由（3.1），可得

$$w_{j_k}(E/F) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi'_{E/F}(j_k+\epsilon)}{\psi'_{E/F}(j_k-\epsilon)} = p^k/p^{k-1} = p > 1,$$

由注释 1 可知 $\psi_{E/F}$ 在 j_k处有一个跳跃。另一方面，对于 $j_k < x < j_{k+1}$，由（3.1）可知 w_x（E/F） $= p^k/p^k = 1$，因此由注释 1 可得 $\psi_{E/F}$在 x处没有跳跃。因此， $\psi_{E/F}$ 的所有跳跃都发生在 j_k 对于 $1 \le k \le r$ 而言，而这些恰好是 G的跳跃。□

下一个命题表明，当 x 取较大值时，Herbrand 函数 $\psi_{E/F}(x)$ 更容易理解。

命题 3.3。 [BH19，命题，第1970]设 E/F 是一个可分且全野分歧的扩张，其次数为 p^r，最大上跳跃为 u。设$w_{E/F}$ 是 E/F的野指数。则当 $x \geq u$时，有

$$\psi_{E/F}(x) = p^r x - w_{E/F}.$$

命题 3.4. 设 E/F 为一个次数为 n的全野分歧扩张。设 $J = \{j_i \mid j_i < j_{i+1}, 1 \leq i \leq m-1\}$ 为 $\psi_{E/F}$的所有跳跃所成的集合。则存在唯一的域序列 $F = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = E$使得

$$\psi_{E/F}(x) = \begin{cases} x & if\ x \leq j_1, \\ \prod_{i=1}^{k} w_{j_i} x - w_{E_k/F} & if\ j_k \leq x \leq j_{k+1}, \end{cases}$$

其中 w_{j_i} 是扩张 E_i/E_{i-1} 的次数，而 $w_{E_k/F}$ 是 E_k/F的野指数 .

证明. 这可由 [BH19，推论 1]以及反复使用命题 3.3，再结合 [BH19，引理（2），第 1970]页证明。□

注 2. 设 E/F 为一个次数为 n的全野分歧扩张。令 $\phi_{E/F}$ 表示命题 $\psi_{E/F}$ *3.4*中 的逆函数。则有

$$\phi_{E/F}(x) = \begin{cases} x & if\ x \leq j_1, \\ \dfrac{x}{\prod_{i=1}^{k} w_{j_i}} + \dfrac{w_{E_k/F}}{\prod_{i=1}^{k} w_{j_i}} & if\ j_k \leq x \leq j_{k+1}. \end{cases}$$

推论 3.5. 设 E/F 是一个次数为 p^r 的全分歧循环扩张。那么存在正整数 $i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}$，满足 $j_k = i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1}$，对 $1 \leq k \leq r$ 有

$$\phi_{E/F}(x) = \begin{cases} x & if\ x \leq j_1, \\ \dfrac{x}{p^k} + \dfrac{w_{E_k/F}}{p^k} & if\ j_k \leq x \leq j_{k+1} \end{cases}.$$

证明。由于 E/F 是一个次数为 p^r 的全野循环伽罗瓦扩张，根据 [Ser79，第四章，第 76] 页及引理 3.2，$\psi_{E/F}$ 的跳跃出现在 r 个不同的正整数处，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$（记作）。根据 [BH19，推论 1],，存在唯一的域序列$F = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = E$，满足 $w_{j_i} = [E_i$：对 $1 \leq i \leq r-1$ 有 $E_{i-1}] = p$，使得$\psi_{E_i/E_{i-1}}$ 恰有一个跳跃 $\psi_{E_{i-1}/F}$（j_i）。现在对注 2 中的每个 i 取 $w_{j_i} = p$，即可得出结论。□

4. Proof of Theorems 1.2 and 1.3

本节计算由特征诱导且维数为 p^r 的 Carayol 表示的伴随表示的斜率。

4.1. 一些引理。

本小节包含若干证明这些定理所必需的引理。

引理 4.1。 设 E/F 是一个有限伽罗瓦扩张。我们有

$$\min_{\lambda \in \mathrm{Gal}(E/F)} v_E(\lambda) = i_0 + 1,$$

其中 i_0 是 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的最小下跳跃。

证明。记 $G := \mathrm{Gal}(E/F)$。由于 i_0 是 G 的最小下跳跃，因此对所有 $\lambda \in G$，都有$v_E(\lambda) \geq i_0 + 1$。这表明 $\min_{\lambda \in G} v_E(\lambda) \geq i_0 + 1$。该最小值在 $\lambda \in G_{i_0} \backslash G_{i_0+1}$ 处取得，因此引理得证。□

下一条引理的记号和证明受到 [Kil19].

引理 4.2。 设 E/F 是次数为 p^r 、伽罗瓦群为 $G =$伽罗瓦(E/F)的全分歧循环伽罗瓦扩张。设 $\rho =$诱导表示$_{E/F}\chi$是 $\mathcal{W}_F$的 *Carayol* 表示，其中χ 表示 W_E的一个特征。设 $\lambda \in G \setminus \{$恒等$\}$。设 $\varsigma = \mathrm{Sw}(\chi)$ 和 $\delta = v_E(\lambda) - 1$ 满足$\varsigma > \delta$。那么，我们有 $\varsigma \not\equiv \delta$ 模 p。

证明。令 $\varsigma > \delta$。我们证明 $\varsigma \not\equiv \delta$ 模 p。注意到 E/F 是一个次数为 p^r 的全野循环伽罗瓦扩张，因此根据 [Ser79，例，p. 76], 下跳跃l_1，l_2，$\ldots$，l_r模 p彼此同余。因此存在一个整数 n使得 $l_j \equiv n$ 模 p 对所有 j均成立。由 [BH19，引理（2），p. 1970], 可得

$$\mathrm{Sw}(\mathrm{Ind}_{E/F}\,\chi) = \mathrm{Sw}(\chi) + w_{E/F},$$

其中$w_{E/F}$ 表示 E/F的野指数。再利用 [Kil19，引理 1.2（iii）] 可得

$$\mathrm{Sw}(\mathrm{Ind}_{E/F}\,\chi) = \mathrm{Sw}(\chi) + \sum_{\lambda \in G\setminus\{\mathrm{id}\}} (v_E(\lambda) - 1).$$

但每个 $v_E(\lambda) - 1 = l_j$ 对某个 j 均成立，且对所有 $\lambda \in G \setminus \{$，$l_j \equiv n$ 模 p 成立。另请注意，$G \setminus \{\mathrm{id}\}$ 的基数为 $p^r - 1$。因此，对上述方程取模 p 后，得到

$$\mathrm{Sw}(\mathrm{Ind}_{E/F}\,\chi) \equiv \mathrm{Sw}(\chi) - n.$$

由于根据我们的假设，Ind$_{E/F}\chi$ 是 Carayol，因此 Sw$(\chi) \not\equiv n$ mod p。此外，对每个$\lambda \in G \setminus \{$ id$\}$，数值 $v_E(\lambda) - 1$ 是某个 l_j 的某个 j，故模p与 n 同余。因此我们得出，对所有 $\lambda \in G \setminus \{id\}$，Sw$(\chi) \not\equiv v_E(\lambda) - 1$ mod p。□

设 E/F 是次数为 p^r的循环伽罗瓦扩张。记 $G :=$ Gal(E/F)。回忆

$$\{j_m \mid j_m = \sum_{k=1}^{m} i_{k-1},\ 1 \le m \le r\} \ \&\ \{l_m \mid l_m = \sum_{k=1}^{m} i_{k-1}p^{k-1},\ 1 \le m \le r\}$$

分别表示 G 中的上跳跃和下跳跃，其中 i_m 是正整数（参见[Ser79，第 IV 章，第 76]页）。

采用这些记号，我们有以下重要引理：最大下跳跃与最小下跳跃之差大于最大上跳跃。

引理 4.3。 对于 $r \ge 2$ 和 $p \ne 2$，有 $l_r - l_1 \ge j_r$。

引理 *4.3* 的证明。 令 e_F为 E的绝对分歧指数，即 $v_F(p) = e_F$。我们分 $l_r - l_1 = l_r - i_0$ 两种不同情况进行分析。

情形 1： 假设 $l_{r-1} \ge p^{r-2}e_F/(p-1)$。根据 [FV02，练习 5.(f)，第 95],页，我们有 $l_r = l_{r-1} + p^{r-1}e_F$。由于 $l_r = l_{r-1} + i_{r-1}p^{r-1}$，我们有 $i_{r-1} = e_F$。此外，我们注意到 $j_1 = i_0 \le \dfrac{pe_F}{p-1}$(参见 [Wym69，第 140 页，第 -4]行)。我们有

$$l_r - i_0 = \sum_{k=2}^{r} i_{k-1}p^{k-1}.$$

因此，

$$\begin{aligned}(l_r - i_0) - j_r &= \sum_{k=2}^{r} i_{k-1}p^{k-1} - \sum_{k=1}^{r} i_{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{r-1} i_{k-1}(p^{k-1}-1) + i_{r-1}(p^{r-1}-1) - i_0 \\ &\geq e_F(p^{r-1}-1) - \frac{pe_F}{p-1} \\ &= e_F(p^{r-1} - 1 - \frac{p}{p-1}) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

对于 $r \geq 2$ 和 $p \neq 2$。

情形 2：设 $l_{r-1} \leq p^{r-2}e_F/(p-1)$。那么根据 [FV02，练习 5.(f)，第 95], 页，我们有

$$(1 + p(p-1))l_{r-1} \leq l_r \leq p^r e_F/(p-1) - (p-1)l_{r-1}. \tag{4.1}$$

注意，$l_r - i_0 = \sum_{k=2}^{r} i_{k-1}p^{k-1}$ 和 $j_r = i_0 + i_1 + \cdots + i_{r-1}$。因此

$$\begin{aligned} l_r - i_0 &\geq j_r \\ \iff i_1 p + i_2 p^2 + \cdots + i_{r-1}p^{r-1} &\geq i_0 + i_1 + \cdots + i_{r-1} \\ \iff (l_2 - l_1) + (l_3 - l_2) + \cdots + (l_r - l_{r-1}) &\geq l_1 + (l_2 - l_1)/p + \cdots + (l_r - l_{r-1})/p^{r-1}\end{aligned}$$

当且仅当以下条件成立时，该式成立

$$(l_2 - l_1)(1 - 1/p) + (l_3 - l_2)(1 - 1/p^2) + \cdots + (l_r - l_{r-1})(1 - 1/p^{r-1}) \geq l_1 \tag{4.2}$$

现在我们分析上述不等式的左端。注意，根据（4.1）中的左侧不等式，我们有 $l_r - l_{r-1} \geq p(p-1)l_{r-1}$。利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}&(l_2 - l_1)(1 - 1/p) + \cdots + (l_r - l_{r-1})(1 - 1/p^{r-1}) \geq \\ &(l_2 - l_1)(1 - 1/p) + \cdots + (l_{r-1} - l_{r-2})(1 - 1/p^{r-2}) + p(p-1)l_{r-1}(1 - 1/p^{r-1}).\end{aligned} \tag{4.3}$$

注意到 l_{r-1} 在（4.3）中的系数为

$$1-1/p^{r-2}+p^2-p-1/p^{r-3}+1/p^{r-2} = 1-1/p^{r-3}+p^2(1-1/p) = (1-1/p)(1+1/p+\cdots+1/p^{r-4}+p^2).$$

从不等式（$1 - 1/p$）右边提出因子（4.3），得

$$\begin{aligned}&(l_2 - l_1) + (l_3 - l_2)(1 + 1/p) + (l_4 - l_3)(1 + 1/p + 1/p^2) + \ldots \\ &+ (l_{r-2} - l_{r-3})(1 + 1/p + \cdots + 1/p^{r-4}) - l_{r-2}(1 + 1/p + \cdots + 1/p^{r-3}) \\ &+ l_{r-1}(1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2),\end{aligned} \tag{4.4}$$

将 $l_{r-1} = l_{r-2} + i_{r-2}p^{r-2}$ 代入后，等于

$$\begin{aligned}
&- l_1 - l_2/p - \cdots - l_{r-3}/p^{r-4} - l_{r-2}/p^{r-3} \\
&+ (l_{r-2} + i_{r-2}p^{r-2})(1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2) \\
&= -l_1 - l_2/p - \cdots - l_{r-4}/p^{r-5} - l_{r-3}/p^{r-4} \\
&+ l_{r-2}(-1/p^{r-3} + 1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2) \\
&+ i_{r-2}p^{r-2}(1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2).
\end{aligned}$$

C继续这一过程，经过有限步后，最后一个表达式等于 s

$$\begin{aligned}
&l_1(p^2 - 1/p^{r-3}) + i_1 p(-1/p^{r-3} + 1 + p^2) \\
&+ i_2 p^2(-1/p^{r-3} + 1 + 1/p + p^2) \\
&+ i_3 p^3(-1/p^{r-3} + 1 + 1/p + 1/p^2 + p^2) \\
&+ i_4 p^4(-1/p^{r-3} + 1 + 1/p + 1/p^2 + 1/p^3 + p^2) \\
&+ \cdots \\
&+ i_{r-3}p^{r-3}(-1/p^{r-3} + 1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2) \\
&+ i_{r-2}p^{r-2}(1 + 1/p + 1/p^2 + \cdots + 1/p^{r-4} + p^2) \\
&= l_1(p^2 - 1/p^{r-3}) + (*), \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 是一个正数。

由此，利用（4.3）、（4.4）和（4.5），可得

$$(l_2 - l_1)(1 - 1/p) + + \cdots + (l_r - l_{r-1})(1 - 1/p^{r-1}) \geq l_1(1 - 1/p)(p^2 - 1/p^{r-3}) + (*) \geq l_1,$$

这就是（4.2）。 □

4.2. **定理1.2的证明**。 现在我们可以证明定理1.2了。为方便起见，我们在下面重述该定理。

定理 4.4。 设 ρ 是一个维数为 p^r 且满足 $r > 1$ 的 $\mathcal{W}_F$ 的 *Carayol* 表示。假设 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$，其中扩张 E/F 是一个次数为 p^r 的全分歧伽罗瓦扩张，且 伽罗瓦群(E/F) 是循环群；另设 $\mathcal{W}_E$ 的一个特征为 χ。令 i_0 表示 伽罗瓦群(E/F) 的最小下跳跃。那么

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{i_0}{p^r}.$$

在继续证明之前，先作一些说明。

说明 3。 根据 *Carayol* 表示的定义， 的任何一维表示，只要其 *Swan* 导子为正，就是 *Carayol* 表示。在定理 4.4中，特征 χ是 *Carayol* 表示（参见 [Kil19，命题 7.2（ii）]），因此，$\mathrm{Sw}(\chi) > 0$。

说明 4。 在定理 4.4中，扩张 E/F 是全分歧且野分歧的。因此，记 $G :=$ 伽罗瓦群(E/F)，则有 $G = G_0 = G_1$，从而 $i_0 > 0$。于是 $\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) < \mathrm{sl}(\rho)$，这与 [Kil19，命题 3.4（2）]一致。

注 5. 我们来验证

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) \geq \mathrm{Sw}(\rho \otimes \rho^\vee)/\dim(\rho \otimes \rho^\vee),$$

这表明定理 4.4 与 [Kil19中的命题 3.4（iv）一致] .

注记 5的证明。 由于 dim $\rho = p^r$，只需证明 $p^{2r}\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) \geq \mathrm{Sw}(\rho\otimes\rho^\vee)$。根据定理 4.4 以及 [Kil19中的定理 7。3],我们有

$$\begin{aligned} p^{2r}\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) - \mathrm{Sw}(\rho\otimes\rho^\vee) &= p^{2r}\left(\mathrm{sl}(\rho) - \frac{i_0}{p^r}\right) - (p^r-1)\mathrm{Sw}(\rho) \\ &= p^r\left(\mathrm{sl}(\rho) - i_0\right) \\ &= p^r(\phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\chi)) - i_0) \\ &\geq p^r(\phi_{E/F}(l_r) - i_0) \\ &= p^r(j_r - i_0) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

第四个不等式由引理2.7得出。最后，由于 E/F 是循环伽罗瓦的，且 l_r 是 G的最大下跳跃，经过简单计算可得 $\phi_{E/F}(l_r) = j_r = i_0 + i_1 + \cdots + i_{r-1}$， G的最大上跳跃，其中 i_j 是正整数 [Ser79，例，p. 76]。因此，最后一个等式得证。□

证明 定理 4.4的证明。 记 $G := $ 伽罗瓦(E/F)。由 Mackey 分解可得

$$\rho\otimes\rho^\vee = \mathrm{Ind}_{E/F}\chi\otimes\mathrm{Ind}_{E/F}\chi^{-1} = \mathrm{Ind}_{E/F}\bigoplus_{\lambda\in G}\chi^{\lambda-1} = \bigoplus_{\lambda\in G}\mathrm{Ind}_{E/F}\,\chi^{\lambda-1}.$$

这里，根据局部类域论，我们假设 χ 是 $E^\times$ 的一个特征，并且 $\chi^{\lambda-1}: E^\times \to \mathbb{C}^\times$ 由 $\chi^{\lambda-1}(x) = \chi(\lambda(x)\,x)$定义。因此 $\chi^{\lambda-1} = \chi^\lambda\chi^{-1}$。

现在，根据 [Kil19，命题 3.4，p. 21]，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) &= \max_{\lambda\in G}\mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{E/F}\,\chi^{\lambda-1}) \\ &= \max_{\lambda\in G}\phi_{E/F}\left(\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1})\right) \\ &= \phi_{E/F}\left(\max_{\lambda\in G}\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1})\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

上面的第二个等式由 [AP22，引理 4.3]得出。由于 $\phi_{E/F}$ 是一个递增函数，第三个等式成立。

现在我们来求

$$\max_{\lambda\in G}\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1}).$$

对于 $\lambda\in G$，记 $\delta = v_E(\lambda) - 1$ 和 $\varsigma = \mathrm{sl}(\chi)$。由 [Kil19，引理 4.5]，若 $\varsigma\leq\delta$，则有 $\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1}) = \mathrm{Sw}(\chi^{\lambda-1}) = 0$。由于我们关注的是 $\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1})$ 的最大值，因此只需考虑满足 $\varsigma > \delta$ 的那些 $\lambda\in G$。由于 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$ 是 Carayol 的，对于所有满足 $\varsigma > \delta$ 的 $\lambda\in G$，由引理 4.2 和 [Kil19，引理 4.5]，我们有

$$\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1}) = \varsigma - \delta = \mathrm{sl}(\chi) - (v_E(\lambda) - 1).$$

因此由引理 4.1，我们有

$$\max_{\lambda\in G}\mathrm{sl}(\chi^{\lambda-1}) = \mathrm{sl}(\chi) - i_0, \tag{4.7}$$

其中 i_0 是 G中的最小下跳跃。因此由（4.6）和4.7，我们有

$$\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) = \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\chi) - i_0). \tag{4.8}$$

注意，根据引理 4.3，结合引理 2.7，我们有 $\mathrm{sl}(\chi) - i_0 \geq j_r$ 对于 $r\geq 2$。因此，根据推论 3.5，我们有

$$\phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\chi) - i_0) = \frac{1}{p^r}\left(\mathrm{sl}(\chi) - i_0 + w\right), \tag{4.9}$$

其中 w 表示 E/F的野指数。

由于 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$ 是维数为 p^r 的不可约表示，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(\rho) &= \mathrm{Sw}(\rho)/\dim\rho \\ &= 1/p^r(\mathrm{Sw}(\chi)+w_{E/F}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

上面的第一个等式由 [HO24、§2.1。2] 得出，第二个等式则由 [BH19，引理（2），第 1970]页得到。

最后，将由（4.10）得到的 sl(χ) 的值代入（4.9），并利用（4.8），我们得到

$$\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - i_0/p^r.$$

证明至此完成。 □

4.3. **定理1.3的证明**。 现在，我们将定理4.4推广到任意全野分歧扩张。

定理 4.5。 设 ρ 是一个维数为 p^r 且具有 $r > 1$的 *Carayol* 表示。假设 $\rho =$ 诱导表示$^{E/F}\chi$ 来自某个次数为 p^r 的全分歧伽罗瓦扩张 E/F 以及该扩张的一个特征 χ 。令 i_0 表示 伽罗瓦群(E/F) 的最小下跳跃。那么

$$\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{i_0}{p^r}.$$

定理 *4.5*的证明。 注意，伽罗瓦群(E/F)的阶为 p^r，因此它是超可解的。所以存在一列伽罗瓦扩张，使得 $E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_{s-1} \supseteq F = E_s$其中 Gal($E/F$) $\trianglelefteq$ Gal(E/E_{s-1}) $\trianglelefteq \cdots \trianglelefteq$ Gal(E/E_i) $\trianglelefteq \cdots \trianglelefteq$ Gal(E/E_1) $\trianglelefteq \{e\}$ 且 Gal(E/E_i)/Gal(E/E_{i-1}) $\simeq$ Gal(E_{i-1}/E_i) 对所有 $i = 1, 2, \ldots\ldots, s$ 都是阶为 p^{t_i} 的循环群。令 ϕ_i 表示 Gal(E_{i-1}/E_i) 的 Herbrand 函数，并令 l_i 和 l'_i 表示对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, s$ 所对应的最大和最小下跳跃。令 ϕ_0 表示 Gal(E/F) 的 Herbrand 函数，并令 l_0 和 l'_0 表示相应的最大和最小下跳跃。我们有

$$\phi_0 = \phi_s\circ\phi_{s-1}\cdots\phi_i\circ\phi_{i-1}\cdots\phi_2\circ\phi_1. \tag{4.11}$$

我们证明

$$\phi'_i(l_0 - l'_0) \geq l_i - l'_i \tag{4.12}$$

对于 $\phi'_i = \phi_{i-1}\circ\phi_{i-2}\circ\cdots\circ\phi_2\circ\phi_1$和 $i = 1$、……、 s。对于 $i = 1$，我们约定ϕ'_1 表示恒等映射。

注意， ϕ'_i 是 Gal(E/E_{i-1}) 的 Herbrand 函数。我们分别用 $l'_{E/E_{i-1}}$ 和 $l_{E/E_{i-1}}$ 表示其对应的最小和最大下跳跃。我们还分别用 l'_{E/E_i} 和 l_{E/E_i} 表示 Gal(E/E_i) 的最小和最大下跳跃。

由于 Gal(E/E_{i-1}) $\subseteq$ Gal(E/F)，根据引理 5.5 可得

$$l'_0 \leq l'_{E/E_{i-1}}. \tag{4.13}$$

考虑伽罗瓦扩张 $E \supseteq E_{i-1} \supseteq E_i$，我们有

$$\phi_{E/E_i} = \phi_{E_{i-1}/E_i}\circ\phi_{E/E_{i-1}} = \phi_i\circ\phi'_i.$$

根据引理 5.5 我们有 $\phi'_i(l'_{E/E_{i-1}}) \leq l'_i$，由（4.13）可得

$$\phi'_i(l'_0) \leq \phi'_i(l'_{E/E_{i-1}}) \leq l'_i. \tag{4.14}$$

我们注意到

$$l_i \leq \phi'_i(l_{E/E_i}). \tag{4.15}$$

事实上，对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(E_{i-1}/E_i)_{\phi_i'(l_{E/E_i})+\epsilon} &= (\mathrm{Gal}(E/E_i)/\mathrm{Gal}(E/E_{i-1}))_{\phi_i'(l_{E/E_i})+\epsilon} \\ &= (\mathrm{Gal}(E/E_i)/\mathrm{Gal}(E/E_{i-1}))_{\phi_i'(l_{E/E_i}+\delta)} \\ &= \left(\mathrm{Gal}(E/E_i)_{l_{E/E_i}+\delta}\mathrm{Gal}(E/E_{i-1})\right)/\mathrm{Gal}(E/E_{i-1}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

倒数第二个等式由 [Ser79，引理 5] 得出。由于 $\mathrm{Gal}(E/E_i) \subseteq \mathrm{Gal}(E/F)$，我们有 $l_{E/E_i} \leq l_0$。由 (4.15) 可得

$$l_i \leq \phi_i'(l_{E/E_i}) \leq \phi_i'(l_0). \tag{4.16}$$

由 (4.14) 和 (4.16)，我们有

$$\phi_i'(l_0') \leq \phi_i'(l'_{E/E_{i-1}}) \leq l_i' \leq l_i \leq \phi_i'(l_{E/E_i}) \leq \phi_i'(l_0).$$

由此可得

$$l_i - l_i' \leq \phi_i'(l_0) - \phi_i'(l_0') \leq \phi_i'(l_0) - l_0' \leq l_0 - l_0'.$$

因此我们有

$$\phi_{E/E_i}(l_i - l_i') \leq \phi_{E/E_i}(l_0 - l_0').$$

由于 $\phi_{E/E_i} = \phi_i \circ \phi_i'$ 和 $\phi_i \leq \phi_{E/E_i} \leq \phi_i'$，这意味着

$$\Longrightarrow \phi_i(l_i - l_i') \leq (\phi_i \circ \phi_i')(l_i - l_i') \leq (\phi_i \circ \phi_i')(l_0 - l_0'),$$

这最终给出（4.12）

$$l_i - l_i' \leq \phi_i'(l_0 - l_0').$$

由引理 2.7 可得 $\mathrm{sl}(\chi) \geq l_0$。因此，$\mathrm{sl}(\chi) - l_0' \geq l_0 - l_0'$，进而 $\phi_i'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') \geq \phi_i'(l_0 - l_0')$，由上述不等式可得

$$l_i - l_i' \leq \phi_i'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0'), \tag{4.17}$$

对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, s$。

进一步利用引理 4.3 和推论 3.5 可得

$$\phi_i\left(\phi_i'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')\right) = \frac{\phi_i'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')}{p^{t_i}} + \frac{w_i}{p^{t_i}}, \tag{4.18}$$

其中 w_i 表示 E_{i-1}/E_i 对所有 $i = 1, \ldots\ldots, s$ 的野指数。

按照定理4.4的证明过程，我们有

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\chi) - l_0'),$$

其中 l_0' 是 Gal(E/F) 的最小下跳跃。回顾一下，我们记 $\phi_0 = \phi_{E/F}$。因此由（4.11）可得 $\phi_0(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')$ 等于

$$\begin{aligned}
\phi_0(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') &= \phi_s \circ \phi_{s-1} \cdots \phi_i \circ \phi_{i-1} \cdots \phi_2 \circ \phi_1(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') \\
&= (\phi_s \circ \phi_s')(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')) \\
&= \phi_s\left(\phi_s'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')\right) \\
&= \frac{\phi_s'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') + w_s}{p^{t_s}} \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{1}{p^{t_s}}\phi_{s-1}\left(\phi_{s-1}'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')\right) \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{1}{p^{t_s}}\left(\frac{\phi_{s-1}'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') + w_{s-1}}{p^{t_{s-1}}}\right) \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{w_{s-1}}{p^{t_s+t_{s-1}}} + \frac{1}{p^{t_s+t_{s-1}}}\phi_{s-2}\left(\phi_{s-2}'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')\right) \\
&\vdots \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{w_{s-1}}{p^{t_s+t_{s-1}}} + \cdots + \frac{w_3}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_3}} + \frac{1}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_3}}\phi_2\left(\phi_2'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0')\right) \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{w_{s-1}}{p^{t_s+t_{s-1}}} + \cdots + \frac{w_2}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_2}} + \frac{1}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_2}}\phi_2'(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{w_{s-1}}{p^{t_s+t_{s-1}}} + \cdots + \frac{w_2}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_2}} + \frac{1}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_2}}\phi_1(\mathrm{sl}(\chi) - l_0') \\
&= \frac{w_s}{p^{t_s}} + \frac{w_{s-1}}{p^{t_s+t_{s-1}}} + \cdots + \frac{w_1}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_1}} + \frac{\mathrm{sl}(\chi) - l_0'}{p^{t_s+t_{s-1}+\cdots+t_1}} \\
&= \frac{1}{p^{\sum_{i=1}^{s} t_i}}\left(p^{\sum_{i=1}^{s-1} t_i} w_s + p^{\sum_{i=1}^{s-2} t_i} w_{s-1} + \cdots + p^{t_1} w_2 + w_1 + \mathrm{sl}(\chi) - l_0'\right) \\
&= \frac{w + \mathrm{sl}(\chi) - l_0'}{p^r} \\
&= \frac{p^r \mathrm{sl}(\rho) - l_0'}{p^r} \\
&= \mathrm{sl}(\rho) - \frac{l_0'}{p^r}.
\end{aligned}$$

注意，l_0' 记作 i_0，在定理的表述中。倒数第三个等式由 [BH19，引理] (1) 得出，其中将 w 记为 E/F的野指数。倒数第二个等式由BH19，引理] (2) 得出。□

5. Proof of Theorems 1.1 and 1.4

本节计算任意 Carayol 表示的伴随表示的斜率（参见引言中的定理1.1 和1.4 ）。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 上的一个维数为 mp^r 的 Carayol 表示（$m,\ p) = 1$。

5.1. **一些引理。** 本节列出了一系列用于证明定理1.1 和1.4所需的引理。

如果表示 $\mathcal{W}_F$ 无法通过**真子群的诱导得到，则称其为** $\mathcal{W}_F$ [BH14, §3]。例如，次数为 p^r 的每个极浅层表示都是本原的（参见 [BH14, §3 Proposition]。下面陈述关于本原表示的一个重要引理。

引理 5.1. [Kil19, p. 37l. -4, -2] 设 σ 是 $\mathcal{W}_F$的一个次数为 p^r的 *Carayol* 原始表示。则

(1) 存在一个温和分歧扩张 T/F，使得 $\sigma|_{\mathcal{W}_T}$ 不可约。(2) 存在一个全野分歧有限伽罗瓦扩张 K/T 和一个 $\mathcal{W}_K$ 的特征χ，使得$\sigma|_{\mathcal{W}_T}=$诱导表示$^{K/T}\chi$。

下一个引理指出，$\mathcal{W}_F$ 的任意维数为 p^r 的不可约表示 ρ，要么是本原表示，要么由本原表示诱导而来。

引理 5.2。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个维数为 p^r 的不可约表示。那么，ρ 要么是本原表示，要么 $\rho=$诱导表示$^{E/F}\tau$，其中 τ 是 $\mathcal{W}_E$ 的一个本原表示，且 E/F 是一个有限全野扩张。

引理 5.3。设 $E/T/F$ 是域的一个伽罗瓦扩张，其中 E/T 是次数为 p^r 的全野扩张，且 T/F 是温和分歧扩张。那么，$G(E/T)$和 $G(E/F)$ 中最小的非零下跳跃相同。

证明。设 $G=G(E/F)$ 和 $H=G(E/T)$。设 i_0 是 H 中最小的非零下跳跃。那么 $H_{i_0}\neq H_{i_0+1}$，即 $G_{i_0}\cap H\neq G_{i_0+1}\cap H$，这表明 $G_{i_0}\neq G_{i_0+1}$。因此 i_0 是 G 中的一个下跳跃。剩下要证明 i_0 是 G 中最小的非零下跳跃。反设不然。存在 $0\neq j<i_0$ 使得 $G_j\neq G_{j+1}$。由于 T/F 是温和的，我们有 $(G/H)_1=(G(T/F))_1=1$。由于 E/T 是全野的，我们有 $i_0\geq 1$，因此 $\phi_{E/T}(1)=1$。所以我们有（参见 [Ser79，引理 5]）

$$1=(G/H)_1=(G/H)_{\phi_{E/T}(1)}=G_1H/H,$$

这给出 $G_1\subset H$。现在

$$H_k=H\cap G_k=H\cap(G_1\cap G_k)=(H\cap G_1)\cap G_k=G_k$$

对所有 $k\neq 0$。因此，$G_j\neq G_{j+1}$ 推出 $H_j\neq H_{j+1}$，这与 $j<i_0$矛盾 . □

引理 5.4. 设 $K/T/E/F$ 是域的伽罗瓦扩张，其中 K/T 和 E/F 是全野分歧的，而 T/E是驯分歧扩张。设 χ 是 $\mathcal{W}_K$的一个特征。那么

$$\max_{\lambda\in G(E/F),\mu\in G(K/T)}\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu})=\max_{\epsilon\in G(K/F)_1}\mathrm{sl}(\chi^{1-\epsilon}).$$

证明。注意到 $G(K/F)/G(K/E)\simeq G(E/F)$，我们有 $G(K/F)=\sqcup_i\lambda_iG(K/E)$，其中 $\lambda_i\in G(K/F)$是 $G(E/F)$中对应元素的一个提升。类似地，将 $G(T/E)$中的元素在 $G(K/E)$中的提升记为 ς_j，我们有 $G(K/E)=\sqcup_j\varsigma_jG(K/T)$。因此

$$G(K/F)=\sqcup_{i,j}\lambda_i\varsigma_jG(K/T).$$

由于 T/E 是驯分歧扩张，ς_j 中的每个元素的赋值都为 1，因此，形如 $\lambda_i\varsigma_j\mu$的每个元素也都如此，其中 $\mu\in G(K/T)$。因此，在上述分解中取 $\varsigma_j=\mathrm{id}$，可得到 $G(K/F)$中赋值严格大于一的元素。因此

$$\{\lambda\mu\mid\lambda\in G(E/F),\mu\in G(K/T)\}=\{\epsilon\in G(K/F)\mid v_K(\epsilon)\geq 2\}=G(K/F)_1.$$

因此，引理得证。 □

引理 5.5. 设 $K/E/F$ 是域的有限伽罗瓦扩张。设 $H=G(K/E)$ 且$G=G(K/F)$。设 i、i'和 i''分别为 G、H和 G/H的最小非零下跳跃。则有

$$i'\geq i\ and\ i''\geq\phi_{K/E}(i).$$

证明。我们证明 $i' \geq i$。有 $H_s = G_s \cap H$ 对所有 $s > 0$成立。由于 i 是 G中的最小非零下跳跃，因此对于 $0 < s,t \leq i$，必有 $G_s = G_t$。所以对于 $0 < s,t \leq i$，有 $H_s = H_t$，从而 H 中的最小非零下跳跃必定至少为 i。

接下来我们证明 $i'' \geq \phi_{K/E}(i)$。回想一下，对于任意实数 k，$(G/H)_{\phi_{K/E}(k)} = G_kH/H$（参见 Ser79，引理 5]）。令 $0 < s,t \leq \phi_{K/E}(i)$。写作 $s = \phi_{K/E}(j)$ $t = \phi_{K/E}(l)$，并利用 $\psi_{K/E}$ 是递增函数这一事实，我们有 $0 < j,l \leq i$。我们有

$$(G/H)_s = (G/H)_{\phi_{K/E}(j)} = G_jH/H = G_lH/H = (G/H)_{\phi_{K/E}(l)} = (G/H)_t.$$

因此，对于 $0 < s,\ t \leq \phi_{K/E}(i)$，我们有$(G/H)_s = (G/H)_t$，从而得到 $i'' \geq \phi_{K/E}(i)$。 □

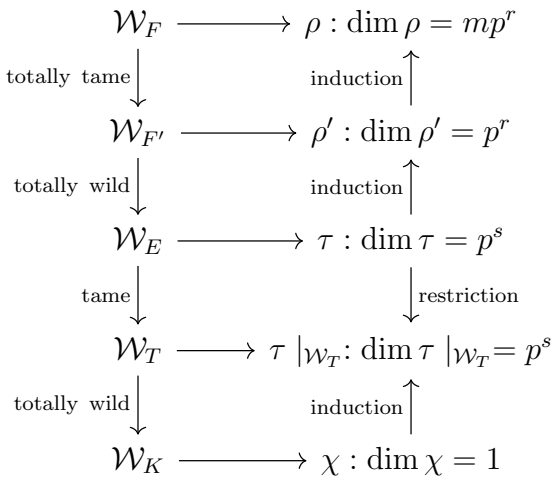
引理 5.6。 ([Kil19]) 设 E/F 是一个全分歧有限伽罗瓦扩张。设 χ 是 $\mathcal{W}_E$的一个特征。设 $G = G(E/F)$ 且 $\lambda \in G_0 \setminus G_1$。则

$$\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda}) = \mathrm{sl}(\chi)。$$

证明。令 E^λ 表示循环子群 $\langle\lambda\rangle \subset G$的不动域。于是 E/E^λ 是一个循环温和分歧扩张。注意，$1-\lambda$对所有 $U_E^l \to U_E^l$都诱导一个映射$l \geq 1$ ([Kil19，引理 4.2 (ii)]）。这里 U_E^l 表示 E^*的单位子群。根据类域论，将 χ 视为 E^*上的特征，结论即得。 □

注 6。 由于分歧子群对任意有限可分扩张（不一定是伽罗瓦扩张）都有定义，参照 [Kil19，§1.1，第 10], 页，注意到引理 *5.6* 对任意全分歧有限扩张都成立。

如引言中所述，任意 $\mathcal{W}_F$ 的 Carayol 表示都可以由某个扩张 K/F 中的特征 χ 构造得到。我们简要回顾这一构造，它将有助于证明定理 1.1 和 1.4。设 ρ 是 $\mathcal{W}_F$ 的一个 Carayol 表示，其维数为 mp^r，且 $(p,m) = 1$。存在一个次数为 m 的全分歧且温和分歧扩张 F'/F，以及一个次数为 p^r 的 $\mathcal{W}_{F'}$ 的 Carayol 表示 ρ'，使得 $\rho = \mathrm{Ind}_{F'/F}\rho'$。$\mathcal{W}_{F'}$ 的表示 ρ' 要么诱导自 $\mathcal{W}_{F'}$ 的一个子群的 Carayol 表示，要么是本原的（即不诱导自任何真子群）。如果表示 ρ' 进一步是诱导表示，则存在一个全野分歧扩张 E/F' 和一个 $\mathcal{W}_E$ 的 Carayol 表示 τ，使得 $\rho' = \mathrm{Ind}^{E/F'}\tau$。在这种情况下，$\tau$ 是本原的。如果 ρ' 是本原的，我们取 $E = F'$。表示 τ 是本原的，这意味着存在一个温和分歧扩张 T/E，使得 $\tau|_{\mathcal{W}_T}$ 不可约。最后，存在一个 T 的全野分歧有限伽罗瓦扩张 K 和一个 $\mathcal{W}_K$ 的特征 χ，使得 $\tau|_{\mathcal{W}_T} = \mathrm{Ind}^{K/T}\chi$。下图或许会有所帮助:



5.2. **定理的证明 1.1**。 以下命题是定理 1.1 证明的核心。

命题 5.7。 设 E/F 是一个全分歧有限伽罗瓦扩张。设 σ 是 $\mathcal{W}_E$的一个 *Carayol* 表示。设 $G =$ 伽罗瓦(E/F) 且 $\lambda \in G_0 \setminus G_1$。那么

$$\mathrm{sl}(\sigma \otimes (\sigma^\vee)^\lambda) = \mathrm{sl}(\sigma).$$

命题 5.7 的证明。 设维数 $\sigma = mp^r$ 满足 $(p, m) = 1$。根据 [BH03，引理 8.4，第358] 页，以及 [Kil19，引理 7.5，第 20], 页，存在一个次数为 K/E 的温和分歧伽罗瓦扩张m ，使得 σ =诱导表示$_{K/E}\tau$ ，其中 τ 是一个维数为 p^r 的野分歧表示。由 Mackey 分解可得

$$\begin{aligned} \sigma \otimes (\sigma^\vee)^\lambda &= \mathrm{Ind}_{K/E}\tau \otimes \mathrm{Ind}_{K/E}(\tau^\vee)^\lambda \\ &= \oplus_{\mu \in G(K/E)} \mathrm{Ind}_{K/E}(\tau \otimes (\tau^\vee)^{\lambda\mu}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

由于 K/E 是温和分歧的，根据引理 2.5可得

$$\mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{K/E}(\tau \otimes (\tau^\vee)^{\lambda\mu})) = 1/m \cdot \mathrm{sl}(\tau \otimes (\tau^\vee)^{\lambda\mu}). \tag{5.2}$$

注意， τ要么是本原的，要么是 $\tau =$诱导表示$_{L'/K}\tau'$，其中 L'/K是一个有限伽罗瓦扩张，而 τ' 是本原的（参见引理 5.2 和注记 6）。

假设 τ 是本原的。存在一个驯分歧扩张 T/K ，使得 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}$ 不可约，且 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}=$诱导表示$_{L/T}\chi$，其中 L/T是全野伽罗瓦扩张，而 χ是 $\mathcal{W}_L$ 的一个特征（参见引理5.1）。于是

$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(\tau \otimes (\tau^\vee)^{\lambda\mu}) &= 1/e(T/K) \cdot \mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T} \otimes (\tau\mid^\vee_{\mathcal{W}_T})^{\lambda\mu}) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{L/T}\chi \otimes \mathrm{Ind}_{L/T}\chi^{-\lambda\mu}) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \mathrm{sl}(\oplus_{\epsilon \in G(L/T)} \mathrm{Ind}_{L/T}\chi^{1-\lambda\mu\epsilon}) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \max_{\epsilon \in G(L/T)} \phi_{L/T}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu\epsilon})) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \phi_{L/T}(\mathrm{sl}(\chi)) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{L/T}\chi) \\ &= 1/e(T/K) \cdot \mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T}) \\ &= \mathrm{sl}(\tau). \end{aligned} \tag{5.3}$$

由于 $\lambda \in G_0 \setminus G_1$，它在 $G(L/F)$ 中沿用注记 6 的思路所得的提升，其赋值为 1。因此， $\lambda\mu\epsilon$在 $G(L/F)$ 中的提升赋值为 1，即 $\lambda\mu\epsilon \in G(L/F)_0 \setminus G(L/F)_1$。因此由引理5.6，第五个等式成立。

因此由（5.2）和（5.3）， （5.1）中的每个直和项
斜率为 $1/m \cdot \mathrm{sl}(\tau)$，因此

$$\mathrm{sl}(\sigma \otimes (\sigma^\vee)^\lambda) = 1/m \cdot \mathrm{sl}(\tau) = \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{K/E}\tau) = \mathrm{sl}(\sigma).$$

现在假设 τ不是本原的，因此对于某个 L'，有 $\tau = $诱导表示$_{L'/K}\tau'$。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(\tau \otimes (\tau^\vee)^{\lambda\mu}) &= \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{L'/K}\tau' \otimes \mathrm{Ind}_{L'/K}(\tau'^\vee)^{\lambda\mu}) \\ &= \mathrm{sl}(\oplus_{\epsilon\in G(L'/K)}\mathrm{Ind}_{L'/K}(\tau' \otimes (\tau'^\vee)^{\lambda\mu\epsilon})) \\ &= \max_{\epsilon\in G(L'/K)} \phi_{L'/K}(\mathrm{sl}(\tau' \otimes (\tau'^\vee)^{\lambda\mu\epsilon})) \\ &= \phi_{L'/K}(\mathrm{sl}(\tau')) \\ &= \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{L'/K}(\tau')) \\ &= \mathrm{sl}(\tau).\end{aligned}$$

第四个等式由前一种情形得出，因为 τ' 是本原的。仿照前一种情形进行，我们有 $\mathrm{sl}(\sigma \otimes (\sigma^\vee)^\lambda) = \mathrm{sl}(\sigma)$。□

定理 *1.1* **的证明。** 设 $m > 1$。那么 $\rho = $诱导表示$_{F'/F}\rho'$，其中某个全驯分歧扩张 F'/F的次数为 m，且 ρ'是 $\mathcal{W}_{F'}$的维数为 p^r (见 [BH03，引理 8.4，第 358] 页)。按照 [Kil19，引理 7.5]，中的驯约化，不失一般性，我们可以假设 F'/F 是伽罗瓦的。

Now

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) &= \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{F'/F}\rho' \otimes \mathrm{Ind}_{F'/F}\rho'^\vee) \\ &= \mathrm{sl}(\oplus_{\lambda\in G(F'/F)}\mathrm{Ind}_{F'/F}(\rho' \otimes (\rho'^\vee)^\lambda)) \\ &= \max_{\lambda\in G(F'/F)} \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{F'/F}(\rho' \otimes (\rho'^\vee)^\lambda)) \\ &= \max_{\lambda\in G(F'/F)} 1/e(F'/F)\cdot \mathrm{sl}(\rho' \otimes (\rho'^\vee)^\lambda). \qquad (5.4)\end{aligned}$$

由于 F'/F是温和的，对于 $\mathrm{Id} \neq \lambda \in G(F'/F)$，由命题 5.7可得

$$\mathrm{sl}(\rho' \otimes (\rho'^\vee)^\lambda) = \mathrm{sl}(\rho'). \qquad (5.5)$$

另一方面，对于 $\lambda = \mathrm{Id} \in G(F'/F)$，我们有（参见 [Kil19，命题 3.4]）

$$\mathrm{sl}(\rho' \otimes \rho'^\vee) \leq \mathrm{sl}(\rho'). \qquad (5.6)$$

最后，由（5.4）、（5.5）和（5.6），我们得到

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = 1/e(F'/F)\cdot \mathrm{sl}(\rho') = \mathrm{sl}(\rho).$$

这就完成了该定理的证明。 □

5.3. **定理 1.4 的证明。** 为方便起见，我们重述第二主定理。

定理 5.8. 设 ρ 是一个维数为 p^r的 $\mathcal{W}_F$ 的 *Carayol* 表示。那么

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = \mathrm{sl}(\rho) - \frac{\phi_{K/F}(i_0)}{\dim\ \rho}$$

对于有限伽罗瓦扩张 K/F，其中 i_0 是$G(K/F)$中最小的非零下跳跃。

*Pro*定理 *5.8* 的。我们通过分析以下两种情形来证明该定理 s.

情形 1： 设 ρ 是本原的。根据引理 5.1，存在一个驯分歧扩张 T/F使得 $\rho\mid_{\mathcal{W}_T}$是不可约的，且 $\rho\mid_{\mathcal{W}_T} =$诱导表示$^{K/T}\chi$ 其中 K/T是一个全野伽罗瓦扩张，而 χ 是 $\mathcal{W}_K$的一个特征。根据引理 2.6 可得

$$\mathrm{sl}(\rho \otimes \rho^\vee) = 1/e(T/F)\cdot \mathrm{sl}(\rho\mid_{\mathcal{W}_T} \otimes \rho\mid^\vee_{\mathcal{W}_T}),$$

根据定理 4.5 ，这等于

$$1/e(T/F)\cdot(\mathrm{sl}(\rho\mid_{\mathcal{W}_T})-\frac{i_0(K/T)}{\dim\ \rho\mid_{\mathcal{W}_T}}),$$

其中， $i_0(K/T)$ 是 $G(K/T)$ 中最小的非零下跳跃。由此进一步得到

$$1/e(T/F)\cdot\mathrm{sl}(\rho\mid_{\mathcal{W}_T})-\frac{i_0(K/F)}{e(T/F)\cdot p^r}=\mathrm{sl}(\rho)-\frac{\phi_{K/F}(i_0(K/F))}{\dim\ \rho}.$$

最后一个等式成立，是因为根据引理5.3 我们有

$$\phi_{K/F}(i_0(K/F))=\phi_{T/F}(\phi_{K/T}(i_0(K/T)))=\phi_{T/F}(i_0(K/T))=\frac{i_0(K/T)}{e(T/F)}.$$

现在我们分析 ρ 不是本原表示的情形。

情形 2： 根据引理5.2，我们有 $\rho=$ 诱导表示$^{E/F}\tau$ 其中 τ 是$\mathcal{W}_E$的本原表示。

如果 dim $\tau=1$，那么根据定理4.5 命题即得证。

现在假设维数 $\tau=p^s>1$。由于 τ是本原的，存在一个驯分歧扩张 T/E使得 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}$不可约，且 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}=$诱导表示$^{K/T}\chi$，其中 K/T是一个全野伽罗瓦扩张，而 χ 是 $\mathcal{W}_K$ 的一个特征（参见引理 5.1）。

注意，由 Mackey 分解可得

$$\rho\otimes\rho^\vee=\mathrm{Ind}_{E/F}\tau\otimes\mathrm{Ind}_{E/F}\tau^\vee=\oplus_{\lambda\in G(E/F)}\mathrm{Ind}_{E/F}(\tau\otimes(\tau^\vee)^\lambda).$$

由命题 2.4，根据上述分解可得

$$\begin{aligned}\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^\vee) &= \max_{\lambda\in G(E/F)}\phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\tau\otimes(\tau^\vee)^\lambda))\\ &= \max_{\lambda\in G(E/F)}\phi_{E/F}(1/e(T/E)\cdot\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T}\otimes((\tau\mid_{\mathcal{W}_T})^\vee)^\lambda)).\end{aligned}\tag{5.7}$$

由于 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}=$诱导表示$^{K/T}\chi$，可得

$$\begin{aligned}\tau\mid_{\mathcal{W}_T}\otimes((\tau\mid_{\mathcal{W}_T})^\vee)^\lambda &= \mathrm{Ind}_{K/T}\chi\otimes\mathrm{Ind}_{K/T}\chi^{-\lambda}\\ &= \oplus_{\mu\in G(K/T)}\mathrm{Ind}_{K/T}\chi^{1-\lambda\mu}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

利用（5.8）以及命题 2.4，可得

$$\begin{aligned}1/e(T/E)\cdot\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T}\otimes((\tau\mid_{\mathcal{W}_T})^\vee)^\lambda) &= 1/e(T/E)\cdot\max_{\mu\in G(K/T)}\phi_{K/T}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu}))\\ &= \max_{\mu\in G(K/T)}1/e(T/E)\cdot\phi_{K/T}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu}))\\ &= \max_{\mu\in G(K/T)}\phi_{T/E}(\phi_{K/T}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu}))\\ &= \max_{\mu\in G(K/T)}(\phi_{K/E}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu})).\end{aligned}\tag{5.9}$$

S由于 T/E 是驯分歧扩张，上面的第三个等式由引理 2.5 .

现在，由（5.7）和（5.9）可得

$$\begin{aligned} \mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^{\vee}) &= \max_{\lambda\in G(E/F),\ \mu\in G(K/T)} \phi_{E/F}(\phi_{K/E}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu})) \\ &= \max_{\lambda\in G(E/F),\ \mu\in G(K/T)} \phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\lambda\mu})) \\ &= \max_{\epsilon\in G(K/F)_1} \phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi^{1-\epsilon})) \\ &= \phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0) \end{aligned} \tag{5.10}$$

其中 i_0 是 $G(K/F)$ 中最小的非零下跳跃（参见引理 5.4）。

为完成证明，我们需要计算 $\phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0)$。令 i_0'为 $G(K/T)$ 的第一个非零下跳跃。由于 $G(K/T)\subset G(K/F)$，我们必有 $i_0'\geq i_0$ （见引理 5.5(1)），因此 $\mathrm{sl}(\chi)-i_0\geq \mathrm{sl}(\chi)-i_0'$。由于 K/T是次数为 p^s 的全野伽罗瓦扩张，按照定理 4.5 的证明（计算 $\phi_0(\mathrm{sl}(\chi)-l_0')$），我们有

$$\phi_{K/T}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0)=\mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{K/T}(\chi))-i_0/p^s=\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T})-i_0/p^s.$$

上面的最后一个等式是将 $\tau\mid_{\mathcal{W}_T}=\mathrm{Ind}^{K/T}\chi$ 代入后得到的。

因此我们得到

$$\begin{aligned} \phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0) &= \phi_{T/F}(\phi_{K/T}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0)) \\ &= \phi_{T/F}(\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T})-i_0/p^s) \\ &= \phi_{E/F}(\phi_{T/E}(\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T})-i_0/p^s)) \\ &= \phi_{E/F}(1/e(T/E)\cdot(\mathrm{sl}(\tau\mid_{\mathcal{W}_T})-i_0/p^s)) \\ &= \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\tau)-i_0/e(T/E)\cdot p^s). \end{aligned} \tag{5.11}$$

由于 $\rho=$诱导表示$^{E/F}(\tau)$，其中 E/F是次数为 p^{r-s} 的全野伽罗瓦扩张，按照定理 4.5 的证明，我们有

$$\begin{aligned} \phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\tau)-t) &= \mathrm{sl}(\mathrm{Ind}_{E/F}(\tau))-t/p^{r-s} \\ &= \mathrm{sl}(\rho)-t/p^{r-s}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 t小于或等于 $G(E/F)(\simeq G(K/F)/G(K/E))$ 的最小非零下跳跃，而根据引理5.5 ，该值至少为 $\phi_{K/E}(i_0)$。因此我们有

$$\phi_{K/F}(i_0)=\phi_{E/F}(\phi_{K/E}(i_0))=\phi_{K/E}(i_0),$$

这进一步等于

$$\phi_{T/E}(\phi_{K/T}(i_0))=\phi_{T/E}(i_0)=i_0/e(T/E).$$

最后一个等式成立，是因为 T/E 是一个驯分歧扩张。

因此，由（5.11）和（5.12），我们有

$$\phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0)=\phi_{E/F}(\mathrm{sl}(\tau)-i_0/e(T/E)\cdot p^s)=\mathrm{sl}(\rho)-i_0/e(T/E)\cdot p^s\cdot p^{r-s}.$$

这表明

$$\phi_{K/F}(\mathrm{sl}(\chi)-i_0)=\mathrm{sl}(\rho)-\phi_{K/F}(i_0)/p^r. \tag{5.13}$$

因此，由（5.10）和（5.13），我们有

$$\mathrm{sl}(\rho\otimes\rho^{\vee})=\mathrm{sl}(\rho)-\phi_{K/F}(i_0)/\dim\,\rho.$$

证明至此完成。 □

注 7. 既然我们已知函子提升的显式导子公式，例如对的导子、对称平方提升、外平方提升、*Asai* 提升等，我们希望今后能够得到这些函子提升的斜率的显式公式。

致谢：作者谨向 Masao Oi 致谢，感谢他对本文初稿提出的详细意见，这些意见显著改进了本文。作者还感谢 U. K. Anandavardhanan 和 Dipendra Prasad 提出的宝贵建议。第一作者感谢国家高等数学委员会（NBHM）提供经费支持，并感谢印度的 IISER Berhampur 在开展研究期间提供必要的设施。第二作者谨对与普林斯顿大学的 Gopal Prasad 进行的讨论表示诚挚谢意。

References

[ABPS16]Anne-Marie Aubert、Paul Baum、Roger Plymen 和 Maarten Solleveld，《深度与局部 Langlands 对应》，Arbeitstagung Bonn 2013，Progr. Math.，第 319 卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2016 年，第 17–41 页。MR 3618046[AM15] U. K. Anandavardhanan 和 Amiya Kumar Mondal，《某些局部 L-函数的次数》，《太平洋数学杂志》276（2015），第 1 期，1–17。MR 3366025[AM16] ，《某些局部 L-函数的导子》，J. Ramanujan Math. Soc. 31（2016），第 2 期，137–156。MR 3518179[AP22] Anne-Marie Aubert 和 Roger Plymen，《Weil 限制群的局部 Langlands 对应两侧深度的比较》，J. Number Theory 233（2022），24–58，附录由 Jessica Fintzen 撰写。MR 4356843[BH03] Colin J. Bushnell 和 Guy Henniart，《GL(n) 的局部驯提升。I V. 简单特征标与基变换》，Proc. London Math. Soc. (3) 87（2003），第 2 期，337–362。MR 1990931[BH14] ，《GL$_n$的深层表示的 Langlands 参数》，Math. Ann. 358（2014），第 1–2 期，433–463。MR 3158004[BH17a] C. J. Bushnell 和 G. Henniart，《局部 Rankin-Selberg 卷积的强指数界》，Bull. Iranian Math. Soc. 43（2017），第 4 期，143–167。MR 3711826[BH17b] Colin J. Bushnell 和 Guy Henniart，《高阶分歧与局部 Langlands 对应》，Ann. of Math. (2) 185（2017），第 3 期，919–955。MR 3664814[BH19] ，《Carayol 表示的局部 Langlands 对应与分歧》，Compos. Math. 155（2019），第 10 期，1959–2038。MR 4010430[BHK98] Colin J. Bushnell、Guy M. Henniart 和 Philip C. Kutzko，《GL$_n$的局部 Rankin-Selberg 卷积：显式导子公式》，J. Amer. Math. Soc. 11（1998），第 3 期，703–730。MR 1606410[FV02] I. B. Fesenko 和 S. V. Vostokov，《局部域及其扩张》，第 2 版，数学专著译丛，第 121 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002 年，序言由 I. R. Shafarevich 撰写。MR 1915966[Hen80] Guy Henniart，《局部域 Weil 群的表示》，Enseign. Math. (2) 26（1980），第 1–2 期，155–172。MR 590513[HO24] Guy Henniart 和 Masao Oi，《对称平方与外平方伽罗瓦表示的 Swan 指数》，Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. 28(558)（2024），151–184。MR 4699724[Kil19] Ammar Yasir Kili¸c，《Swan 导子的不等式》，学位论文，巴黎萨克雷大学（CO- mUE），2019 年 9 月。[MP94] Allen Moy 和 Gopal Prasad，《p 进群的未精细极小类型》，Invent. Math. 116（1994），第 1–3 期，393–408。MR 1253198[MP96] ，《Jacquet 函子与未精细极小类型》，Comment. Math. Helv. 71（1996），第 1 期，98–121。MR 1371680[MP19] Manish Mishra 和 Basudev Pattanayak，《关于深度保持的一则短注》，J. Ramanujan Math. Soc. 34（2019），第 4 期，393–400。MR 4041880[Oi23] Masao Oi，《大剩余特征下拟分裂经典群的局部 Langlands 对应的深度保持性质》，Manuscripta Math. 171（2023），第 3–4 期，529–562。MR 4597706[Ser79] Jean-Pierre Serre，《局部域》，Graduate Texts in Mathematics，第 67 卷，Springer-Verlag，纽约—柏林，1979 年，由 Marvin Jay Greenberg 从法文译出。MR 554237

[Wym69] Bostwick F. Wyman, 《狂分歧伽马扩张》, 《美国数学杂志》**91** （1969）, 135–152。MR 241386[Yu09] Jiu-Kang Yu, 《Bruhat-Tits理论与建筑》, 《约化群容许表示渥太华讲座》, Fields研究所专著，第 26 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009 年，第 53–77 页。MR 2508720

Indian Institute of Science Education and Research Berhampur, Odisha 760003, India.电子邮箱地址: arindamj@iiserbpr.ac.in, arindamjana076@gmail.com电子邮箱地址: amiya@iiserbpr.ac.in