arXiv:2603.16369v1 [math.CV] 17 Mar 2026

复Banach空间中某些积分算子与变换的 Bohr现象

VASUDEVARAO ALLU、RAJU BISWAS、RAJIB MANDAL 和 HIROSHI YANAGIHARA

Abstract. 本文研究与Ces´aro算子、Bernardi积分算子、 β-Ces´aro算子以及离散傅里叶变换相关的若干玻尔半径。这些算子和变换均定义在从复Banach空间的单位球映射到单位多圆盘闭包内的全纯映射集合上 $\mathbb{D}^n$ ，其中该空间为 $\mathbb{C}^n$。

1. Introduction and Preliminaries

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$上的全纯映射。经典的 Bohr 定理指出，若 $|f(z)| \leq 1$ 属于 $\mathbb{D}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq 1 \quad \text{for all} \quad |z| = r \leq 1/3. \tag{1.1}$$

数值 $1/3$ 无法进一步改进，称为 Bohr半径（见 [13]）。不等式 (1.1) 称为经典玻尔不等式。事实上，Bohr 对不等式 (1.1) 的 [13] 原始证明仅适用于 r 不大于 $1/6$的情形。随后，Wiener、Schur 和 Riesz（见 [42, 43]）分别证明，不等式 (1.1) 对 $r \leq 1/3$成立。Bohr 和 Wiener 的证明可见于 [13]。

近年来，在各种抽象框架下研究玻尔型定理的工作显著增多，包括对其进行细化、分支拓展和推广。关于单复变量中的 Bohr 半径的详细研究，可参见 [2–10, 12, 14, 22, 23, 26, 28, 33, 35, 38, 40] 及其中的参考文献。由此自然产生一个问题：“能否为定义在不同函数空间上的某些复积分算子和积分变换证明 Bohr 型不等式？”这一想法最初是在单位圆盘 $\mathbb{D}$上针对经典 Ces´aro 算子于 [25–27]提出的，也针对 Bernardi 积分算子于 [30]提出。Ces´aro 算子在 [21] 中进行了研究，其定义如下：

$$\mathcal{C}f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{1-tz}\, dt \tag{1.2}$$

在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的全纯函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。显然，

$$|\mathcal{C}f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n \right| \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \quad \text{for each} \quad |z| = r < 1.$$

对于 Ces´aro 算子，Kayumov等人 [25]证明了以下 Bohr 型不等式。

2020年数学主题分类：32A05、32A10、32K05、32M15。关键词和短语：Bohr半径、全纯函数、齐次多项式展开、Ces´aro 算子、Bernardi 积分算子、离散傅里叶变换、 β-Ces´aro 算子。

定理 A。 *[25,* 定理 *1*，第 *616]* 页。设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{D}$中全纯，且 $|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{D}$中，则

$$\mathcal{C}_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) r^n \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \quad for \quad |z| = r \leq R_1,$$

其中 $R_1 (\approx 0.5335)$ 是方程 $2x = 3(1-x)\log(1/(1-x))$的正根。数值 R_1 无法改进。

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$内的全纯函数 $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$，Bernardi 积分算子（参见 [36,第 11] 页）定义如下:

$$\mathcal{L}_\beta f(z) := \frac{1+\beta}{z^\beta} \int_0^z f(\eta) \eta^{\beta-1} d\eta = (1+\beta) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{\beta+n} z^n, \tag{1.3}$$

其中 $\beta > -m$ 和 $m \geq 0$ 是整数。2021 年，Kumar 和 Sahoo [30] 研究了 Bernardi 积分算子的如下 Bohr 型不等式。

定理 B. *[30]* 设 $\beta > -m$。如果 $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{D}$ 中全纯，且$|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{D}$ 中，则

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{|a_n|}{\beta+n} r^n \leq \frac{r^m}{m+\beta} \quad for \quad |z| = r \leq R_2(\beta),$$

其中 $R_2(\beta)$ 是方程的正根

$$\frac{x^m}{m+\beta} - 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\beta} = 0.$$

该数 R_2（β）无法进一步改进。

设 $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ 为一个复数序列。离散傅里叶变换（见 [11, 第 6]章）定义为

$$\mathcal{F}(x_n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k/N}.$$

对于全纯函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，其中 $\mathbb{D}$满足 $|f(z)| \leq 1$属于 $\mathbb{D}$，我们对从 $k=0$ 到 n 的系数 a_k 进行离散傅里叶变换，得到

$$\mathcal{F}[f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-2\pi i n k/(n+1)} \right) z^n.$$

为得到 Bohr 型不等式，我们将 $\mathcal{F}[f](z)$ 的主控级数记为

$$\mathcal{F}_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) r^n, \quad \text{where} \quad |z| = r < 1. \tag{1.4}$$

对于离散傅里叶变换，Ong 和 Ng [39] 建立了以下 Bohr 型不等式。

Theo备注 C. *[39]*若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$在 $\mathbb{D}$中全纯，且 $|f(z)| \leq 1$在 $\mathbb{D}$中，n

$$\mathcal{F}_f(r) \leq \frac{1}{1-r} \quad for \quad r \leq \frac{1}{3}.$$

常数 $1/3$ 无法改进。

受定理 A 启发，Kumar 和 Sahoo [30] 研究了 β-Ces´aro 算子（$\beta > 0$），其定义为

$$\mathcal{C}_\beta^f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)} a_k \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{(1-tz)^\beta} dt = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f(t)}{(1-t)^\beta} dt \tag{1.5}$$

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的全纯函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。事实上，Kumar 和 Sahoo [30] 已为 β-Ces´aro 算子建立了如下 Bohr 型不等式。

定理 D. *[30]* 设 $0 < \beta(\neq 1)$。若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{D}$ 中全纯，且$|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{D}$ 中，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)} |a_k| \right) r^n \leq \frac{1}{r} \left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta} \right)$$

对于 $|z| = r \leq R_3(\beta)$，其中 $R_3(\beta)$ 是方程的正根

$$\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta} - \frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta} = 0.$$

数值 $R_3(\beta)$ 无法进一步改进。

特别地，若在 (1.5) 中分别取 $f(t) \equiv 1$、$f(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 和 $f(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} t^n$，则得到以下关系：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} \right) z^n = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{(1-t)^\beta} dt, \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)} \right) z^n = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{t}{(1-t)^{\beta+1}} dt \tag{1.7}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)} \right) z^n = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{1}{(1-t)^{\beta+1}} dt. \tag{1.8}$$

由 (1.6) 和 (1.8)，我们得到以下恒等式

$$\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)} \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}. \tag{1.9}$$

在继续讨论之前，必须先介绍所需的记号。对于 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$，令 $\|z\|_\infty = \max_{j=1,2,\cdots,n} |z_j|$ 表示最大范数。$\mathbb{C}^n$ 中的一个多圆盘是若干圆盘的乘积。以$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$为中心、以 $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$为多重半径的开多圆盘记作 $\mathbb{D}^n(\alpha; r)$，并定义为

$$\mathbb{D}^n(\alpha; r) = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - \alpha_j| < r_j \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

令 $\alpha = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$ 和 $r = 1 = (1, 1, \ldots, 1)$。那么，$\mathbb{D}^n(0; 1) \equiv \mathbb{D}^n$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的单位多圆盘。集合

$$\partial_0 \mathbb{D}^n(\alpha; r) := \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - \alpha_j| = r_j \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, n\}$$

包含在 $\mathbb{D}^n(\alpha; r)$ 的边界 $\partial\mathbb{D}^n(\alpha; r)$ 内，并称为 $\partial\mathbb{D}^n(\alpha; r)$ 的特征边界。

关于利用齐次多项式展开研究取值于高维复Banach空间的全纯或多重调和映射的 Bohr现象的全面综述，参见 [1,17–20,29,34]。Kayumov 和 Ponnusamy [24]求得了单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上具有稀疏级数的全纯函数的 Bohr半径。在他们的研究中，Liu 和 Liu [32]通过将 Kayumov 和 Ponnusamy [24] 的结果推广至从单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 到 $\mathbb{D}^n$ 、以及从复Banach空间的单位球 B 到 B 的具有稀疏级数的全纯映射f ，为该领域作出了重要贡献。Lin 等人 [31] 研究了其他类型的 Bohr不等式，针对的是从单位多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 到 $\mathbb{D}^n$ 的具有稀疏级数的全纯映射 f 。

设 X 和 Y 是复Banach空间。若映射 $P: X \to Y$ 满足存在一个 k-线性映射 $u: X^k \to Y$，使得对每个 $x \in X$都有 $P(x) = u(x, x, \ldots\ldots, x)$，则称其为次数为 $k \in \mathbb{N}$ 的齐次多项式。注意，若 P是次数为 k的齐次多项式，则对所有 $x \in X$和 $\mu \in \mathbb{C}$，都有 $P(\mu x) = \mu^k P(x)$。

本文用下标表示齐次多项式的次数。注意，若 P_k 是从 X 到 Y的 k-齐次多项式，则存在唯一的对称 k-线性映射 u，使得 $P_k(x) = u(x, \ldots\ldots, x)$（参见 [37, 第1章和2]）。对于区域 $\mathcal{D} \subset X$，设 F是从 $\mathcal{D}$ 到 Y的全纯映射。对 $z \in \mathcal{D}$，令 $D^k F(z)$表示 F 在 z处的第 k 阶 Fr´echet 导数。若 $\mathcal{D}$ 包含原点，则任意全纯映射 $F: \mathcal{D} \to Y$都可展开为级数

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k F(0)(z^k), \tag{1.10}$$

对于原点某个邻域内的所有 z （参见 [16, 第 6 章，第197]页）。由于 $(1/k!)D^k F(0)(z^k)$ 是一个 k 次齐次多项式，本文始终采用记号$P_k(z) = (1/k!)D^k F(0)(z^k)$。注意，如果 $\mathcal{D}$ 是复Banach空间 X 中的有界平衡区域，且 $F(\mathcal{D})$ 有界，那么对于每个 $r \in (0,1)$，(1.10) 在 $r\mathcal{D}$ 上一致收敛。

令 $L(X, \mathbb{C})$ 表示从 X 到 $\mathbb{C}$的连续线性算子集合。对于每个$x \in X \setminus \{0\}$，令

$$T(x) = \{l_x \in L(X, \mathbb{C}) : l_x(x) = \|x\|,\ \|l_x\| = 1\},$$

其中 $\|l_x\| = \sup\{|l_x(w)| : \|w\| = 1\}$。根据Hahn-Banach定理， $T(x)$ 非空。由此自然产生以下问题:

问题 1.1。 令 B_X 为复*Banach*空间 X的单位球。能否为定义在一组全纯映射 $F: B_X \to \mathbb{D}^n$上的 ***Ces´aro*** 算子、***Bernardi*** 积分算子、 β-***Ces´aro*** 算子 $(\beta \neq 1)$以及离散傅里叶变换建立 ***Bohr***型不等式?—

本文主要对问题 1.1 给出了肯定的回答。

2. Main results

以下是本文的关键引理，将用于证明主要结果。

引理2.1。 *[15]*若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯，且 $|f(z)| \leq 1$ 在 $\mathbb{D}$中，则有

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{(1-|z|)^{n-1}(1-|z|^2)} \quad \textit{and} \quad |a_n| \leq 1 - |a_0|^2 \quad \textit{for} \quad n \geq 1,\ |z| < 1.$$

在继续讨论主要结果之前，有必要为全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 建立与 Ces´aro 算子相对应的主控级数，其中

$$F(z) = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z), \quad z \in B_X,$$

其中 $P_s(z) = (1/s!)D^s F(0)(z^s)$ 且 $F(z) = (F_1(z)\ F_2(z) \ldots, F_n(z))$ 。我们考虑由下式定义的映射 $F_j : B_X \to \mathbb{D}$

$$F_j(z) = a_j + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z), \quad \text{where} \quad z \in B_X \quad \text{and} \quad j \in \{1, 2 \ldots, n\}.$$

鉴于关系式 (1.2)，我们考虑以下取值于 $\mathbb{D}$ 的全纯映射 F_j 的积分:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{F_j(tz)}{1-tz}\, dt &= \int_0^1 \frac{a_j}{1-tz}\, dt + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z) \int_0^1 \frac{t^s}{1-tz}\, dt \\
&= a_j \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots\right) + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z) \int_0^1 t^s \left(1 + tz + t^2 z^2 + \cdots\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_j z^n}{n+1} + (P_1)_j(z) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right) + (P_2)_j(z) \left(\frac{1}{3} + \frac{z}{4}\right. \\
&\quad \left. + \frac{z^2}{5} + \cdots\right) + (P_3)_j(z) \left(\frac{1}{4} + \frac{z}{5} + \frac{z^2}{6} + \cdots\right) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_j z^n}{n+1} + \frac{1}{2}(P_1)_j(z) + \frac{1}{3}\left((P_2)_j(z) + z(P_1)_j(z)\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left((P_3)_j(z) + z^2(P_2)_j(z) + z^3(P_1)_j(z)\right) + \cdots .
\end{aligned}$$

因此，与全纯映射 F_j 对应的Ces´aro算子的主控级数如下:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_j| \|z\|^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \|z\|^{k-1} \left| \left(P_{n-k+1}\right)_j (z) \right| \right).$$

由于 $\|P_s(z)\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |(P_s)_j(z)|$，因此，与全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 对应的Ces´aro算子的主控级数为

$$\mathcal{C}_F(\|z\|) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|_\infty \|z\|^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \|z\|^{k-1} \left\| \left(P_{n-k+1}\right)(z) \right\|_\infty \right).$$

在以下结果中，我们为定义在一族全纯映射 $F : B_X \to \mathbb{D}^n$ 上的Ces´aro算子建立Bohr 型不等式。

定理2.1。 设 B_X 为复*Banach*空间 X 的单位球。设 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{D}^n$，并设 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 是一个全纯映射，且

$$F(z) = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z), \quad z \in B_X,$$

其中 $P_s(z) = (1/s!)D^sF(0)(z^s)$。假设对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 都有 $|a_j| = \|a\|_\infty$。那么，我们有

$$\mathcal{C}_F(\|z\|) \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \quad for \quad \|z\| = r \leq R, \tag{2.1}$$

其中 $R \in (0,1)$ 是该方程的正根

$$3(1-r) \log \frac{1}{1-r} - 2r = 0.$$

该数 R 无法进一步改进。

证明。设 $z_0 \in \partial B_X$ 固定。由于 $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$，我们考虑 $f_j(t) = F_j(tz_0)$，其中 $t \in \mathbb{D}$。于是， $f_j \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$，并且

$$f_j(t) = a_j + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z_0) t^s, \quad t \in \mathbb{D}.$$

根据引理2.1，我们有

$$|(P_s)_j(z_0)| \leq 1 - |a_j|^2 = 1 - \|a\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq 1$$

对每个固定的 $j (j = 1, 2, \cdots)$。由于 $\|P_s(z_0)\|_\infty = \max_j |(P_s)_j(z_0)|$，因此我们有

$$\|P_s(z_0)\|_\infty \leq 1 - \|a\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq 1. \tag{2.2}$$

令 $x = \|a\|_\infty \in [0, 1]$。显然，若 $x = 1$，则对 $s \geq 1$，有 $P_s(z_0) = 0$。因此，不等式 (2.1) 对 $z = rz_0$ 和 $r \in [0, 1)$ 成立。于是，我们可以假设 $x \in [0, 1)$。利用 (2.2)，当 $r \in (0, 1)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n+1} \|rz_0\|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \|rz_0\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty \right) \\
\leq\ & x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left((1-x^2) \sum_{k=1}^{n} r^n \right) \\
=\ & \frac{x}{r} \log \frac{1}{1-r} + (1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{n+1} \\
=\ & \frac{x}{r} \log \frac{1}{1-r} + (1-x^2) \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \right) := G(x, r).
\end{aligned}$$

对 $G(x, r)$ 关于 x 求二阶偏导，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, r) = \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} - 2x \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \right)$$

$$\text{and} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, r) = -2 \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r} \right) \leq 0,$$

这表明 $\frac{\partial}{\partial x} G(x, r)$ 是 $x \in [0, 1)$ 的单调递减函数，因此可得

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, r) \geq \lim_{x \to 1^-} \frac{\partial}{\partial x} G(x, r) = \frac{1}{r(1-r)} \left(-2r + 3(1-r) \log \frac{1}{1-r} \right) \geq 0$$

对于 $r \le R$，其中 $R(\approx 0.533589) \in (0,\ 1)$ 是该方程的唯一正根

$$G_1(r) := -2r + 3(1-r)\log\frac{1}{1-r}.$$

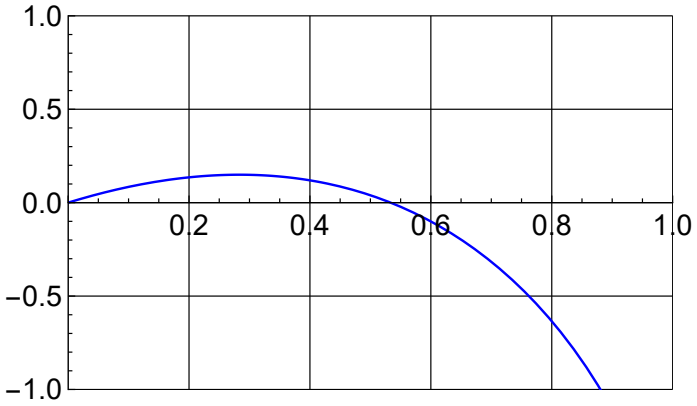

FIGURE 1. $(0, 1)$ 中 $G_1(r)$ 的图像

因此，对于 $r \le R$，$G(x,r)$ 是关于 $x \in [0,1)$ 的单调递增函数，由此可得

$$G(x,r) \le \lim_{x\to 1^-} G(x,r) = \frac{1}{r}\log\frac{1}{1-r} \quad \text{for all} \quad r \le R.$$

为证明常数 R 的锐性，我们考虑函数

$$F_1(z) = f(l_{z_0}(z))u, \quad z \in B_X,$$

其中 $z_0 \in \partial B_X$, $l_{z_0} \in T(z_0)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \partial\mathbb{D}^n$ 其中 $|u_1| = |u_2| = \cdots = |u_n| = 1$, 并且

$$f(t) = \frac{\lambda - t}{1-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{D},\ \lambda \in (0,1).$$

那么，我们有

$$F_1(rz_0) = f\left(l_{z_0}(rz_0)\right)u = f\left(r\ l_{z_0}(z_0)\right)u = f(r)u = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(rz_0),$$

其中 $a = \lambda u$ 和 $P_s(z_0) = \lambda^{s-1}(\lambda^2 - 1)u$ 对于 $s \ge 1$。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|\lambda u\|_\infty}{n+1}\|rz_0\|^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\|rz_0\|^{k-1}\|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty\right)\\
=\ &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda r^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} r^n\lambda^{n-k}(1-\lambda^2)\right)\\
=\ &\frac{\lambda}{r}\log\frac{1}{1-r} + (1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\right)\\
=\ &\frac{\lambda}{r}\log\frac{1}{1-r} + (1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{n+1}\cdot\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{r}\log\frac{1}{1-r} + (1+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{n+1} - \frac{(\lambda r)^n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{r}\log\frac{1}{1-r} + \frac{2\lambda}{r}\log\frac{1}{1-r} - \frac{1+\lambda}{\lambda r}\log\frac{1}{1-\lambda r} \\ &= \frac{1}{r}\log\frac{1}{1-r} + (1-\lambda)\frac{3(1-r)\log(1-r)+2r}{r(1-r)} + D_\lambda(r), \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} D_\lambda(r) &= \frac{3-\lambda}{r}\log\frac{1}{1-r} - \frac{2(1-\lambda)}{1-r} - \frac{1+\lambda}{\lambda r}\log\frac{1}{1-\lambda r} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3-\lambda}{n} - 2(1-\lambda) - \frac{(1+\lambda)\lambda^{n-1}}{n}\right)r^{n-1} \\ &= O\left((1-\lambda)^2\right) \quad \text{as} \quad \lambda \to 1^-. \end{aligned} \tag{2.4}$$

此外，显然对于 $r > R$，下列不等式成立

$$\frac{3(1-r)\log(1-r)+2r}{r(1-r)} > 0. \tag{2.5}$$

由 (2.3)、(2.4) 和 (2.5)，我们得出 R 无法改进。证明至此完成。□

在继续讨论下一个结果之前，有必要建立与全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 对应的 Bernardi 算子的主控级数，其中$F(z) = \sum_{s=m}^{\infty} P_s(z)$，且 $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$、 $z \in B_X$、 $P_s(z) = (1/s!)\overline{D^s}F(0)(z^s)$，并且$F(z) = (F_1(z)\ F_2(z)\ldots, F_n(z))$. 我们考虑由下式定义的映射 $F_j\colon B_X \to \mathbb{D}$

$$F_j(z) = \sum_{s=m}^{\infty}(P_s)_j(z), \quad \text{where} \quad z \in B_X \quad \text{and} \quad j \in \{1, 2\ldots, n\}.$$

鉴于关系式 (1.3)，我们考虑全纯映射 $F_j\colon B_X \to \mathbb{D}$的下列积分:

$$(1+\beta)\int_0^1 F_j(tz)t^{\beta-1}\,dt = (1+\beta)\sum_{s=m}^{\infty}(P_s)_j(z)\int_0^1 t^{s+\beta-1}\,dt = (1+\beta)\sum_{s=m}^{\infty}\frac{(P_s)_j(z)}{s+\beta}.$$

显然，全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 对应的 Bernardi 算子的主控级数为

$$(1+\beta)\sum_{s=m}^{\infty}\frac{\|P_s(z)\|_\infty}{s+\beta}.$$

在下述结果中，我们为定义在一组全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 上的 Bernardi 算子建立 Bohr 型不等式。

定理 2.2. 设 B_X 是复*Banach*空间 X 的单位球， $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $\beta > -m$。设 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 是全纯映射，满足

$$F(z) = P_m(z) + \sum_{s=m+1}^{\infty} P_s(z), \quad z \in B_X,$$

其中 $P_s(z) = (1/s!)D^sF(0)(z^s)$。假设 $\|P_m(z)\|_\infty$ 在 ∂B_X 上为常数，并且对于所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 和 $z_0 \in \partial B_X$，$|(P_m)_j(z_0)| = \|P_m(z_0)\|_\infty$。那么，我们有

$$\sum_{s=m}^{\infty} \frac{\|P_s(z)\|_\infty}{\beta + s} \leq \frac{r^m}{m + \beta} \tag{2.6}$$

对于 $\|z\| = r \leq R(\beta)$，其中 $R(\beta) \in (0,1)$ 是方程的唯一根

$$\frac{1}{\beta + m} - 2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^{s-m} = 0.$$

数值 $R(\beta)$ 无法进一步改进。

证明。设 $z_0 \in \partial B_X$ 固定。由于 $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$，令 $f_j(t) = F_j(tz_0)$，其中 $t \in \mathbb{D}$。于是，$f_j \in H(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{D})$ 且

$$f_j(t) = t^m \left((P_m)_j(z_0) + \sum_{s=m+1}^{\infty} (P_s)_j(z_0) t^{s-m} \right), \quad t \in \mathbb{D}.$$

令 $g_j(t) = (P_m)_j(z_0) + \sum_{s=m+1}^{\infty} (P_s)_j(z_0) t^{s-m}$，其中 $t \in \mathbb{D}$。于是，$g_j(t) \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$。根据引理2.1，对于每个固定的 $j (j = 1, 2, \cdots, n)$，我们有

$$|(P_s)_j(z_0)| \leq 1 - |(P_m)_j(z_0)|^2 = 1 - \|P_m(z_0)\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq m + 1.$$

因此，我们有

$$\|P_s(z_0)\|_\infty \leq 1 - \|P_m(z_0)\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq m + 1. \tag{2.7}$$

设 $x = \|P_m(z_0)\|_\infty \in [0, 1]$。若 $x = 1$，则对所有 $s \geq m + 1$，$P_s(z_0) = 0$。因此，不等式 (2.6) 对 $z = rz_0$ 和 $r \in [0, 1)$ 成立。我们假设 $x \in [0, 1)$。对于$r \in (0,1)$，利用 (2.7)，可得

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{\|P_s(rz_0)\|_\infty}{\beta + s} &\leq \frac{\|P_m(z_0)\|_\infty}{\beta + m} r^m + (1 - \|P_m(z_0)\|_\infty^2) \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^s \\ &= \frac{x}{\beta + m} r^m + (1 - x^2) \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^s := G_2(x, r). \end{aligned}$$

对 $G_2(x, r)$ 关于 x 求两次偏导，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} G_2(x, r) = \frac{1}{\beta + m} r^m - 2x \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^s$$

$$\text{and} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_2(x, r) = -2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^s \leq 0.$$

因此，$\frac{\partial}{\partial x} G_2(x, r)$ 是关于 $x \in [0, 1$ 的单调递减函数，因此可知 t

$$\frac{\partial}{\partial x} G_2(x, r) \geq \lim_{x \to 1^-} \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, r) = \frac{1}{\beta + m} r^m - 2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^s \geq 0$$

对于 $r \leq R(\beta)$，其中 $R(\beta) \in (0,1)$ 是该方程的唯一正根

$$G_3(r) := \frac{1}{\beta + m} - 2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta + s} r^{s-m} = 0.$$

显然， $G_3(r)$ 是 $r \in (0,1)$ 的单调递减函数，且 $\lim_{r\to 0^+} G_3(r) = 1/(\beta+m) > 0$。因此，对于 $r \le R(\beta)$， $G_2(x,r)$ 是 x 的单调递增函数，由此可得

$$\sum_{s=m}^{\infty} \frac{\|P_s(rz_0)\|_\infty}{\beta+s} \le G_2(x,r) \le \lim_{x\to 1^-} G_2(x,r) = \frac{1}{m+\beta} r^m \quad \text{for} \quad r \le R(\beta).$$

为证明常数 $R(\beta)$ 的锐性，我们考虑函数

$$F_2(z) = f(l_{z_0}(z))u, \quad z \in B_X,$$

其中 $z_0 \in \partial B_X$, $l_{z_0} \in T(z_0)$， $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \partial\mathbb{D}^n$ 满足 $|u_1| = |u_2| = \cdots = |u_n| = 1$, 且

$$f(t) = t^m \frac{\lambda - t}{1-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{D},\ \lambda \in (0,1).$$

因此，我们有

$$F_2(rz_0) = f(l_{z_0}(rz_0))u = \sum_{s=m}^{\infty} P_s(rz_0),$$

其中 $P_m(rz_0) = \lambda r^m u$ 且 $P_s(rz_0) = \lambda^{s-1}(\lambda^2-1)r^s u$ 对 $s \ge m+1$。因此

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{\|P_s(rz_0)\|_\infty}{\beta+s} &= \frac{\lambda}{\beta+m} r^m + (1-\lambda^2) \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^{s-1}}{\beta+s} r^s \qquad (2.8) \\ &= \frac{1}{\beta+m} r^m - (1-\lambda) r^m \left(\frac{1}{\beta+m} - 2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta+s} r^{s-m} \right) + H_\lambda(r), \end{aligned}$$

其中

$$H_\lambda(r) = 2(\lambda-1) \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta+s} r^s + (1-\lambda^2) \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^{s-1}}{\beta+s} r^s.$$

令 $\lambda \to 1^-$，得到

$$H_\lambda(r) = \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{2(\lambda-1) + (1-\lambda^2)\lambda^{s-1}}{\beta+s} r^s = O((1-\lambda)^2). \qquad (2.9)$$

此外，对于 $r > R(\beta)$，有如下不等式

$$\frac{1}{\beta+m} - 2 \sum_{s=m+1}^{\infty} \frac{1}{\beta+s} r^{s-m} < 0. \qquad (2.10)$$

由 (2.8)、(2.9) 和 (2.10)，我们得出 $R(\beta)$ 无法改进。证明至此完成。□

鉴于 (1.4)，我们考虑全纯映射 F 的离散傅里叶变换所对应的主控级数： $B_X \to \mathbb{D}^n$，其中 $F(z) = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z)$， $z \in B_X$ 且 $P_s(z) = \overline{(1/s!)} D^s F(0)(z^s)$，如下所示：

$$\mathcal{F}_F(\|z\|) := \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|_\infty \|z\|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|z\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(z)\|_\infty \right).$$

在下面的结果中，我们针对定义在一组全纯映射 F: $B_X \to \mathbb{D}^n$ 上的离散傅里叶变换建立 Bohr 型不等式。

定理2.3。 设 B_X 是复*Banach*空间 X的单位球。令 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{D}^n$，并设 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 是一个全纯映射，满足

$$F(z) = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z), \quad z \in B_X,$$

其中 $P_s(z) = (1/s!)D^s F(0)(z^s)$。假设对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $|a_j| = \|a\|_\infty$ 均成立。那么，我们有

$$\mathcal{F}_F(\|z\|) \leq \frac{1}{1-r} \quad for \quad \|z\| = r \leq 1/3. \tag{2.11}$$

数值 $1/3$ 无法改进。

证明。 固定 $z_0 \in \partial B_X$。由于 $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$，我们对 $t \in \mathbb{D}$ 考虑 $f_j(t) = F_j(tz_0)$。于是， $f_j \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ 并且

$$f_j(t) = a_j + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z_0) t^s, \quad t \in \mathbb{D}.$$

采用与定理2.1的证明类似的论证，可得

$$\|P_s(z_0)\|_\infty \leq 1 - \|a\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq 1. \tag{2.12}$$

设 $x = \|a\|_\infty \in [0, 1]$。显然，若 $x = 1$，则对所有 $s \geq 1$, $P_s(z_0) = 0$。因此，不等式 (2.11) 对 $z = rz_0$ 和 $r \in [0, 1)$ 成立。于是，我们可以假设 $x \in [0, 1)$。利用 (2.12)，对于 $r \in (0, 1)$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} x\|rz_0\|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|rz_0\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty \right) \\
\leq\ & x \sum_{n=0}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left((1-x^2) \sum_{k=1}^{n} r^n \right) \\
=\ & \frac{x}{1-r} + (1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \\
=\ & \frac{x}{1-r} + (1-x^2) \frac{r}{(1-r)^2} := G_4(x, r).
\end{aligned}$$

对 $G_4(x, r)$ 关于 x 求二阶偏导，得到

$$\frac{\partial}{\partial x} G_4(x, r) = \frac{1}{1-r} - 2x \frac{r}{(1-r)^2} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_4(x, r) = -2 \frac{r}{(1-r)^2} \leq 0,$$

这表明 $\frac{\partial}{\partial x} G(x, r)$ 是关于 $x \in [0, 1)$ 的单调递减函数，因此可得

$$\frac{\partial}{\partial x} G_4(x, r) \geq \lim_{x \to 1^-} \frac{\partial}{\partial x} G_4(x, r) = \frac{1-3r}{(1-r)^2} \geq 0$$

对于 $r \leq 1/3$。因此， $G_4(x, r)$ 是关于 $x \in [0, 1)$ 的单调递增函数，对于$r \leq 1/3$，因此可得

$$G_4(x, r) \leq \lim_{x \to 1^-} G_4(x, r) = \frac{1}{1-r} \quad \text{for} \quad r \leq \frac{1}{3}.$$

为证明常数 $1/3$ 的锐性，我们考虑函数

$$F_3(z) = f(l_{z_0}(z))u, \quad z \in B_X,$$

其中 $z_0 \in \partial B_X$, $l_{z_0} \in T(z_0)$、 $u = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) \in \partial\mathbb{D}^n$ 满足 $|u_1| = |u_2| = \cdots = |u_n| = 1$, 并且

$$f(t) = \frac{\lambda - t}{1 - \lambda t}, \quad t \in \mathbb{D},\ \lambda \in (0, 1).$$

因此，我们有

$$F_3(rz_0) = f(l_{z_0}(rz_0))u = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(rz_0),$$

其中 $a = \lambda u$ 且 $P_s(z_0) = \lambda^{s-1}(\lambda^2 - 1)u$ 对于 $s \geq 1$。因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda u\|_\infty \|rz_0\|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \|rz_0\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty \right) \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} \lambda r^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} r^n \lambda^{n-k} (1 - \lambda^2) \right) \\
= &\frac{\lambda}{1-r} + (1 - \lambda^2) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \right) \\
= &\frac{\lambda}{1-r} + (1 - \lambda^2) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \\
= &\frac{\lambda}{1-r} + (1 + \lambda) \left(\frac{r}{1-r} - \frac{\lambda r}{1 - \lambda r} \right) \\
= &\frac{1}{1-r} - (1 - \lambda) \frac{1 - 3r}{1 - r} + G_5(\lambda, r), \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
G_5(\lambda, r) &= \frac{(1+\lambda)}{(1-r)} \left(r - \frac{\lambda r(1-r)}{1 - \lambda r} \right) + (1 - \lambda) \frac{1 - 3r}{1 - r} - \frac{1 - \lambda}{1 - r} \\
&= \frac{(1+\lambda)}{(1-r)} \left(\frac{r(1-\lambda)}{1 - \lambda r} \right) - (1 - \lambda) \frac{3r}{1 - r} \\
&= (1 - \lambda) \frac{r}{1 - r} \left(\frac{\lambda + 3\lambda r - 2}{1 - \lambda r} \right) \text{ which tends to 0 as } \lambda \to 1^-.
\end{aligned}$$

此外，对于 $r > 1/3$，我们有 $(1-\lambda)(1-3r)/(1-r) < 0$。由 (2.13) 可得， $1/3$ 无法改进。证明至此完成。□

采用与建立对应于全纯映射 $F\colon B_X \to D^n$ 的 Ces´aro 算子的主控级数时类似的论证，并结合 (1.5)，我们得到

$$\int_0^1 \frac{F_j(tz)}{(1 - tz)^\beta} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_j \Gamma(n + \beta)}{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta)} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k - 1 + \beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)} z^{k-1} (P_{n-k+1})_j(z) \right),$$

其中 $F_j\colon B_X \to \mathbb{D}$ 是一个全纯映射，使得 $F_j(z) = a_j + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z)$, $z \in B_X$ 且 $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$。显然，与该映射对应的主控级数

β-Ces´aro 算子对应于全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$，其形式为

$$\mathcal{C}_\beta^F(\|z\|) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a\|_\infty \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+2)\Gamma(\beta)} \|z\|^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)} \|z\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(z)\|_\infty \right).$$

在下面的结果中，我们为定义在一类全纯映射 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 上的 β-Ces´aro 算子建立 Bohr 型不等式。

定理2.4。设 B_X 是复*Banach*空间 X 的单位球，且 $0 < \beta(\neq 1)$。设 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{D}^n$，并设 $F\colon B_X \to \mathbb{D}^n$ 是全纯映射，满足

$$F(z) = a + \sum_{s=1}^{\infty} P_s(z), \quad z \in B_X,$$

其中 $P_s(z) = (1/s!)D^s F(0)(z^s)$。假设对所有 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，均有 $|a_j| = \|a\|_\infty$。那么，我们有

$$\mathcal{C}_\beta^F(\|z\|) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{1 - (1-r)^{1-\beta}}{1-\beta} \right) \quad for \quad \|z\| = r \leq R_\beta, \tag{2.14}$$

其中 $R_\beta \in (0,1)$ 是方程的正根

$$\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta} - \frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta} = 0.$$

数值 R_β 无法改进。

证明。设 $z_0 \in \partial B_X$ 固定。由于 $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$，我们考虑函数 $f_j(t) = F_j(tz_0)$，其中 $t \in \mathbb{D}$。于是，$f_j \in H(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 且

$$f_j(t) = a_j + \sum_{s=1}^{\infty} (P_s)_j(z_0) t^s, \quad t \in \mathbb{D}.$$

采用与定理2.1的证明类似的论证，我们得到

$$\|P_s(z_0)\|_\infty \leq 1 - \|a\|_\infty^2 \quad \text{for} \quad s \geq 1. \tag{2.15}$$

令 $x = \|a\|_\infty \in [0,1]$。显然，若 $x = 1$，则对所有 $s \geq 1$，$P_s(z_0) = 0$。因此，不等式 (2.14) 对 $z = rz_0$ 和 $r \in [0,1)$ 成立。令 $x \in [0,1)$。利用 (1.6)、(1.7) 和 (2.15)，当 $r \in (0,1)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
& x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} \|rz_0\|^n \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)} \|rz_0\|^{k-1} \|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty \right) \\
\leq\ & x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} r^n + (1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)} \right) \\
=\ & x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)} r^n + (1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)} \right) \\
=\ & \frac{x}{r} \int_0^r \frac{1}{(1-t)^\beta} dt + \frac{1-x^2}{r} \int_0^r \frac{t}{(1-t)^{\beta+1}} dt \\
=\ & \frac{x^2+x-1}{r} \int_0^r \frac{1}{(1-t)^\beta} dt + \frac{1-x^2}{r} \int_0^r \frac{1}{(1-t)^{\beta+1}} dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{(x^2+x-1)\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}+\frac{(1-x^2)\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right) := G_6(x,r).$$

对 $G_6(x,r)$ 关于 x 作两次偏微分，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}G_6(x,r)=\frac{1}{r}\left(\frac{(2x+1)\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2x\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right)$$

$$\text{and}\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}G_6(x,r)=\frac{1}{r}\left(\frac{2\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right)\le 0,$$

这表明 $\frac{\partial}{\partial x}G_6(x,\ r)$ 是 $x\in[0,1)$ 的单调递减函数，因此

$$\frac{\partial}{\partial x}G_6(x,r)\ge\lim_{x\to1^-}\frac{\partial}{\partial x}G(x,r)=\frac{1}{r}\left(\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right)\ge 0$$

对于 $r\le R_\beta$，其中 $R_\beta\in(0,\ 1)$ 是方程的正根

$$\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}=0.$$

因此，对于 $r\le R_\beta$，$G_6(x,\ r)$ 是 $x\in[0,1)$ 的单调递增函数，并且由此可得

$$G_6(x,r)\le\lim_{x\to1^-}G_6(x,r)=\frac{1}{r}\left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta}\right)\quad\text{for}\quad r\le R_\beta.$$

为了证明常数 R_β 的锐性，我们考虑函数

$$F_4(z)=f(l_{z_0}(z))u,\quad z\in B_X,$$

其中 $z_0\in\partial B_X$、$l_{z_0}\in T(z_0)$、$u=(u_1,\ u_2$、.....、$u_n)\in\partial\mathbb{D}^n$，且 $|u_1|=|u_2|=\cdots=|u_n|=1$，并且

$$f(t)=\frac{\lambda-t}{1-\lambda t},\quad t\in\mathbb{D},\ \lambda\in(0,1).$$

于是，我们有 $F_4(rz_0)=f(l_{z_0}(rz_0))u=a+\sum_{s=1}^{\infty}P_s(rz_0)$，其中 $a=\lambda u$ and $P_s(z_0)=\lambda^{s-1}(\lambda^2-1)u$ for $s\ge1$。利用 (1.6) 和 (1.7)，可得

$$\begin{aligned}
&\|\lambda u\|_\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}\|rz_0\|^n\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)}\|rz_0\|^{k-1}\|P_{n-k+1}(rz_0)\|_\infty\right)\\
=\ &\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)}r^n\lambda^{n-k}(1-\lambda^2)\right)\\
=\ &\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}r^n+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k-1+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(\beta)}\lambda^{n-k}\right)\\
=\ &\frac{\lambda}{r}\int_0^r\frac{1}{(1-t)^\beta}dt+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{r}\left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta}\right)+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k-1}\right)\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta}\right)-\frac{1-\lambda}{r}\left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta}\right)\\
&\quad+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k-1}\right)\\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{1-(1-r)^{1-\beta}}{1-\beta}\right)-\frac{1-\lambda}{r}\left(\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right)\\
&\quad+G_7(\lambda,r), \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
G_7(\lambda,r) &= \frac{1-\lambda}{r}\left(\frac{2\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}\right)\\
&\quad+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k-1}\right)\\
&= 2(1-\lambda)\left(\frac{1}{r}\int_0^r\frac{1}{(1-t)^{\beta}}dt-\frac{1}{r}\int_0^r\frac{1}{(1-t)^{\beta+1}}dt\right)\\
&\quad+(1-\lambda^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k-1}\right)\\
&= 2(1-\lambda)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}r^n\right.\\
&\quad\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\right)r^n\right)\\
&\quad+\frac{(1-\lambda^2)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k}-\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(-\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}-2(1-\lambda)\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{(1-\lambda^2)}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n-k+\beta)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(\beta)}\lambda^{k}\right)r^n.
\end{aligned}
$$

利用恒等式 **(1.9)**，令 $\lambda\to 1^-$，我们得到

$$G_7(\lambda,r)=O\left((1-\lambda)^2\right). \qquad (2.17)$$

此外，显然对于 $r>R_\beta$，下列不等式成立

$$\frac{3\left(1-(1-r)^{1-\beta}\right)}{1-\beta}-\frac{2\left((1-r)^{-\beta}-1\right)}{\beta}<0. \qquad (2.18)$$

由 (2.16)、(2.17) 和 (2.18)，我们得出 R_β 无法改进。证明至此完成。□

Declarations

作者贡献： 所有作者对完成手稿的贡献相同。他们均已阅读并批准最终手稿。**利益冲突：** 作者声明，他们不存在利益冲突。**数据和材料的可用性：** 不适用。**致谢：** 第二作者获得大学拨款委员会（印度）研究员奖学金资助（编号：F. 44 - 1/2018 (SA - III)）。

References

[1] L. Aizenberg, *Proc. Amer. Math.* 幂级 *Soc.* **128** 4 2000 1147 1155 数 Bohr 定理的多维类比，（）（），–。[2] S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 关于具有固定零系数的 Bohr 不等式， *Proc. Am. Math. Soc.* **147**(12) (2019), 5263–5274。[3] M. B. Ahamed, V. Allu 和 H. Halder，平移圆盘上解析函数的 Bohr现象， *Ann. Fenn. Math.* **47** (2022), 103–120。[4] V. Allu 和 V. Arora *J.*，凹 *Math. Anal. Appl.* **520** 2023 126845 单叶函数的 Bohr-Rogosinski 型不等式，（），。[5] V. Allu, R. Biswas 和 R. Mandal，关于某些 K-拟共形调和映射的 Bohr现象，https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.04094。[6] V. Allu, R. Biswas 和 R. Mandal，涉及多个 Schwarz 函数的 Bohr现象， *J. Math. Anal. Appl.* (2025)，即将出版。[7] V. Allu 和 H. Halder，某些星形与凸单叶函数类的 Bohr半径， *J. Math. Anal. Appl.* **493**(1) (2021), 124519。[8] V. Allu 和 H. Halder *Bull.*，某 *Sci. Math.* **173** 2021 103053 些调和映射子类的 Bohr现象，（），。[9] V. Allu 和 H. Halder，某些近凸解析函数的 Bohr现象， *Comput. put. Methods Funct. Theory* **22** 2022 491 517 (), -。

[10] V. Allu 和 H. Halder，某些调和映射的 Bohr 不等式， *Indag. Math.* **33**(3) (2022), 581-597。[11] G. Bachman 和 L. Narici，傅里叶与小波分析， *Springer-Verlag*, 586, Springer, 柏林, 2000。[12] R. Biswas 和 R. Mandal，K-拟共形调和映射类的 Bohr现象， *Acta Math. Sci. Ser. B* (2025)，即将出版。[13] H. Bohr，关于幂级数的一个定理， *Proc. London Math. Soc.* **13**(2) (1914), 1–5。[14] E. Bombieri and J. Bourgain，关于 Bohr 不等式的一点注记， *Int. Math. Res. Not.* **80** (2004), 4307–4330。[15] S. Y. Dai 和 Y. F. Pan，关于有界解析函数及具有正实部的解析函数的 Schwarz-Pick 估计的注记， *Proc. Am. Math. Soc.* **136** (2008), 635–640。[16] I. Graham 和 G. Kohr，一维与高维几何函数论，《纯粹与应用数学专著和教材》第255卷，Marcel Dekker Inc.，纽约, 2003。[17] H. Hamada和 T. Honda，可分复希尔伯特空间中多重调和映射的 Bohr半径， *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **47** (2024), 47。[18] H. Hamada 和 T. Honda，取值于多复变数空间的全纯映射的 Bohr现象， *Results Math.* **79** (2024), 239。[19] H. Hamada, T. Honda 和 G. Kohr，取值于齐性球的全纯映射的 Bohr 定理， *Israel J. Math.* **173** (2009), 177–187。[20] H. Hamada, T. Honda 和 M. Kohr，取值于高维复巴拿赫空间的全纯映射的 Bohr-Rogosinski 半径， *Anal. Math. Phys.* **15** (2025), 64。[21] G. H. Hardy 和 J. E. Littlewood，分数阶积分的一些性质。II， *Math. Z.* **34** (1932), 403–439。[22] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy *Comput. Methods*，奇 *Funct. Theory* **17** 2017 679 688 解析函数的 Bohr 不等式，（），–。

[23] I. R. Kayumov 和
S. Ponnusamy *C. R. Math. Acad.*, Bohr
Sci. Paris **356** 3 2018 272 277
不等式的改进版本, ( ) ( ), –。[24] I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 稀疏级数解析函数与调和函数的 Bohr 不等式, *J. Math. Anal. Appl.* **465** (2018), 857–871。[25] I. R. Kayumov, D. M. Khammatova 和 S. Ponnusamy, 关于 Ces´aro 算子的 Bohr 不等式, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **358**(5) (2020), 615–620。[26] I. R. Kayumov, D. M. Khammatova 和 S. Ponnusamy, 解析函数与 Ces´aro 算子的 Bohr-Rogosinski现象, *J. Math. Anal. Appl.* **496** (2021), 124824。[27] I. R. Kayumov,
D. M. Khammatova 和 S. Ponnusamy, 广义 Ces´aro 平均算子的 Bohr 不等式, *Mediterr. J. Math.* **19** (2022), 19。[28] S. Kumar,
Complex Var. Elliptic Bohr 不
Equ. **68** 6 2022 963 973
等式及其应用的推广, , ( ) ( ), –。[29] S. Kumar, S. Ponnusamy 和 G. B. Williams, 复巴拿赫空间中具有稀疏级数的全纯函数的 Bohr型不等式, *New York J. Math.* **31** (2025), 259–281。[30] S. Kumar 和 S. K. Sahoo *Mediterr. J. Math.*, 某些
18 2021 268
积分算子的 Bohr 不等式, ( ), 。[31] R. Lin, M. Liu 和 S. Ponnusamy, 多复变数中具有稀疏级数的全纯映射的 Bohr型不等式, *Acta Math. Sci. Ser. B* **43**(1) (2023), 63–79。[32] X. -S. Liu 和 T. -S. Liu, 多复变数中具有稀疏级数的全纯映射的 Bohr 不等式, *J. Math. Anal. Appl.* **485** (2020), 123844。[33] G. Liu 和 S. Ponnusamy, 调和映射的 Bohr 不等式改进, *Math. Nachr.* **296** (2023), 716–731。[34] T. Liu 和 J. Wang, 全纯映射齐次展开的绝对估计, *Pac. J. Math.* **231** (2007), 155–166。[35] R. Mandal,
R. Biswas 和 S. K. Guin, 某些规范化调和映射的几何研究与 Bohr半径,
Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **47** (2024), 131。[36] S. S. Miller 和 P. T. Mocanu, 《微分从属：理论与应用》, 《纯粹与应用数学专著和教材》第225卷, *Marcel Dekker Inc.*, 纽约, 2000。[37] J. Mujica, 《巴拿赫空间中的复分析：有限维与无限维中的全纯函数及全纯性区域》, 《北荷兰数学研究》120, Notas de Matem´atica, 107, *North-Holland Publishing Co.*, 阿姆斯特丹, 1986。[38] S. Ponnusamy,
R. Vijayakumar 和 K. -J. Wirths, 模为一的有界函数系数的新不等式, *Results Math.* **75** (2020), 107。[39] M. W. L. Ong 和
Z.C. Ng *Iran J Sci.*, 关于某
48 2024 735 739
些积分变换的 Bohr 不等式, ( ), –。[40] S. Ponnusamy 和 K. -J. Wirths, 原点处有多重零点的函数的 Bohr 型不等式, *Comput. Methods Funct. Theory* **20** (2020), 559–570。[41] W. Rogosinski, ¨关于幂级数及其部分和的模估计, *Math. Z.* **17** (1923), 260–276。[42] S. Sidon, ¨关于 Bohr 先生的一个定理,
Math. Zeit. **26**(1) (1927), 731–732。[43] M. Tomić, 关于 H. Bohr 的一个定理, *Math. Scand.* **11** (
1962), 103–106。

Vasudevarao Allu, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bhubaneswar, School of Basic Science, Bhubaneswar-752050, Odisha, India.
Email address: avrao@iitbbs.ac.in

Raju Biswas Department of Mathematics Raiganj University Raiganj West Bengal- , , „ , 733134 India.
Email address: rajubiswasjanu02@gmail.com

Rajib Mandal Department of Mathematics Raiganj University Raiganj West Bengal- , , „ , 733134 India.
Email address: rajibmathresearch@gmail.com

Hiroshi Yanagihara, Department of Applied Science, Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Tokiwadai, Ube, 755-8611, Japan*Email address*: hiroshi@yamaguchi-u.ac.jp