arXiv:2603.16380v1 [math-ph] 17 Mar 2026

BC Toda链 I：反射算子与特征函数

N. Belousov[†]、S. Derkachov[◇†]、S. Khoroshkin[*○†]

[†]北京数学科学与应用研究院，中国北京怀柔区，*101408*[◇]斯捷克洛夫数学研究所，*Fontanka 27*，俄罗斯圣彼得堡，*191023*

[*]数学系，以色列理工学院，以色列海法

[○]俄罗斯国家研究型高等经济大学，*Myasnitskaya 20*，俄罗斯莫斯科，*101000*

摘要

我们得到具有 BC 型边界相互作用的量子 Toda 链特征函数的高斯–吉文塔尔积分表示。为此，我们引入满足与 DST 链 Lax 矩阵相应的反射方程的反射算子。此外，我们为 BC Toda 链定义巴克斯特算子，证明它们与哈密顿量可交换，并推导出相应的巴克斯特方程。

目录

1 引言 2 1.1 GL Toda链.4 1.1.1 对易哈密顿量.4 1.1.2 特征函数.5 1.1.3 巴克斯特算子.7 1.2 BC Toda链.9 1.2.1 对易哈密顿量.9 1.2.2 特征函数.10 1.2.3 巴克斯特算子.12 1.2.4 界与函数空间.13 1.2.5 与XXX自旋链的关系.14 1.2.6 后续结果.14 2 反射算子 15 3 特征函数的构造 20 4 巴克斯特算子与哈密顿量的可交换性 22 5 巴克斯特方程 23 6 $\mathbb{D}(u)$对升算子的作用 26 7 界 28 7.1 引理.28 7.2 特征函数的界.34 7.2.1 单粒子.34 7.2.2 多粒子.35 7.3 交织关系.39

7.4 单值矩阵与算子 .437.5 巴克斯特算子 .45

A 巴克斯特算子的可交换性 49
A.1 GL Toda链 .49A.2 BC Toda链 .50

B 与 XXX 自旋链的关系 51
B.1 杨–巴克斯特方程 .52B.1.1 杨代数 .52B.1.2 约化到 DST M-算子 .54B.1.3 约化到 Toda L-算子 .55B.2 R-算子和 RLL-关系 .56B.3 乘积的交织算子 $L^{\pm}$-算子 .57B.3.1 约化到 DST 交织算子 .59B.3.2 约化到 Toda 交织算子 .62B.4 反射方程 .64

1 引言

本文研究具有 BC 型单侧边界相互作用的量子 Toda 链。这是一个由 n 个粒子组成的系统，其坐标为 $x_j \in \mathbb{R}$，由以下哈密顿量支配

$$\mathbb{H}_{BC} = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j - x_{j+1}} + 2\alpha\, e^{-x_1} + \beta^2 e^{-2x_1}, \tag{1.1}$$

其中 α，β 为参数。如 [Skl2，I], 所示，该模型是可积的：上述哈密顿量属于一族彼此对易的微分算子 $\mathbb{H}_s$，其形式为

$$\mathbb{H}_s = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n} \partial_{x_{j_1}}^2 \cdots \partial_{x_{j_s}}^2 + \text{ lower order terms} \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

也就是说，$\mathbb{H}_1 = -\mathbb{H}_{BC}$，详见第 1.2.1 节。

对于 $\alpha\beta = 0$，该模型与以下类型的经典李代数有关：GL_n ($\alpha = \beta = 0$)、B_n ($\alpha \neq 0$、$\beta = 0$) 和 C_n ($\alpha = 0$、$\beta \neq 0$) [Kost]。在这些特殊情形下，可以利用相应李群的表示论构造哈密顿量的联合特征函数。本文提出一种替代方法，基于杨–巴克斯特方程和反射方程的某些解，并且也适用于一般情形 $\alpha\beta \neq 0$。

以下我们对边界参数施加限制条件

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} > 0, \qquad \beta > 0. \tag{1.3}$$

原因在于，即使在最简单的单粒子情形下，这些条件也能确保哈密顿量（1.1）没有离散谱[1], 参见 [DL，定理 4。3]。取极限 B 即可得到 Toda链的情形 $\beta \to 0$。

[1]事实上，若 $\alpha/\beta = -1/2$，结论同样成立，但为简化讨论，我们排除这种情况。

注 1。若在哈密顿量中恢复普朗克常数 $\hbar$，第一个条件（1.3）变为 $\alpha > -\hbar\beta/2$。

单粒子的谱问题

$$\left(-\partial_x^2 + 2\alpha\, e^{-x} + \beta^2 e^{-2x}\right) \Psi_\lambda(x) = \lambda^2\, \Psi_\lambda(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

有一个唯一的解，其衰减方式为 $x \to -\infty$，该解由 Whittaker 函数给出

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\, W_{-\frac{\alpha}{\beta},-\mathrm{i}\lambda}(2\beta e^{-x}), \tag{1.5}$$

参见 [DLMF，第 13]章。后者具有如下积分表示 [DLMF，(13.16.5)]

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\, \frac{2^{2\mathrm{i}\lambda}\,(2\beta e^{-x})^{-\mathrm{i}\lambda+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}-\mathrm{i}\lambda\right)} \int_1^\infty dt\; e^{-\beta e^{-x} t}\,(t+1)^{-\mathrm{i}\lambda-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}}\,(t-1)^{-\mathrm{i}\lambda-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}. \tag{1.6}$$

等价地，记

$$g = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} > 0 \tag{1.7}$$

并作积分变量替换 $t = e^z/\beta$，则有

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)} \int_{\ln\beta}^\infty dz\; e^{\mathrm{i}\lambda(x-2z)-e^{z-x}}\,(1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}. \tag{1.8}$$

本文的主要结果是将积分表示（1.8）推广到 n 个粒子的情形。记由 n 个变量构成的元组及其分量之和

$$\boldsymbol{x}_n = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \underline{\boldsymbol{x}}_n = x_1 + \ldots + x_n. \tag{1.9}$$

此外，用 $\theta(x)$ 表示赫维赛德阶跃函数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

定理 1. 对易哈密顿量的联合特征函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ (1.2)

$$\mathbb{H}_s\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = (-1)^s \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_s\leq n} \lambda_{j_1}^2 \cdots \lambda_{j_s}^2\;\; \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{1.11}$$

具有递归积分表示

$$\begin{aligned} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda_n}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda_n)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\; \exp\Bigg(\mathrm{i}\lambda_n\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1} - 2\underline{\boldsymbol{z}}_n\big) \\ - \sum_{j=1}^{n-1}\left(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}}\right) - e^{z_n-x_n}\Bigg) \\ \times\,(1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n-g}\,(1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n+g-1}\;\theta(z_1-\ln\beta)\;\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{y}_{n-1}), \end{aligned} \tag{1.12}$$

递归从单粒子公式开始 (1.8)。

按照惯例，这称为高斯–吉文塔尔表示。对积分变量作变换$z_1 = \ln(\beta \operatorname{ch} z_1')$，我们得到 [GLO3中猜想 1 所猜测的表示。2]。正如文中所论证的，在特殊情形 $\beta \to 0$ 或 $\alpha = 0$ 下，后者与 B 或 C 型模型的公式一致；这些公式是 [GLO2] 利用李群表示论得到的。特别地，在极限 $\beta \to 0$ 下，(1.12) 的最后一行化简为

$$(1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n - g}\,(1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n + g - 1}\,\theta(z_1 - \ln\beta) \to e^{-2\alpha\, e^{-z_1}}. \tag{1.13}$$

例1. 对于两个粒子的情形

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda_1,\lambda_2}(x_1,x_2) = {} & \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}(\lambda_1+\lambda_2)}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda_1)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda_2)} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\ln\beta}^{\infty} dz_1 \int_{\mathbb{R}} dz_2 \int_{\ln\beta}^{\infty} dw \\ & \times e^{\mathrm{i}\lambda_2(x_1+x_2+y-2z_1-2z_2)+\mathrm{i}\lambda_1(y-2w) - e^{z_1-x_1} - e^{x_1-z_2} - e^{z_2-x_2} - e^{z_1-y} - e^{y-z_2} - e^{w-y}} \\ & \times (1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_2 - g}\,(1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda_2 + g - 1}\,(1+\beta e^{-w})^{-\mathrm{i}\lambda_1 - g}\,(1-\beta e^{-w})^{-\mathrm{i}\lambda_1 + g - 1}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

在本节1 的其余部分，我们将引入必要的对象，并概述上述定理的证明。除了特征函数之外，我们还研究所谓的巴克斯特算子。正如我们将在后续论文 [BDK], 中所展示的，这些算子在导出“对偶”的梅林–巴恩斯积分表示时发挥着重要作用。

我们用于构造 BC Toda 特征函数的大多数思路，在 GL Toda链（$\alpha = \beta = 0$）的情形下更容易阐述。此外，我们引入的许多对象在两种模型中都会出现。因此，下面我们先考察 GLToda链。

1.1 GLToda链

1.1.1 对易哈密顿量

定义 GL Toda链的哈密顿量为

$$\mathrm{H}_{GL} = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j - x_{j+1}}. \tag{1.15}$$

回顾与其对易的高阶哈密顿量的构造 [F，Gaud，Skl1]。引入与 j个粒子相关联的 Toda Lax 矩阵

$$L_j(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_{x_j} & e^{-x_j} \\ -e^{x_j} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

以及 Yang 的 R-矩阵

$$R(u) = \begin{pmatrix} u+\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u+\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

它们共同满足杨–巴克斯特方程

$$R(u-v)\,\big(L_j(u)\otimes \mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L_j(v)\big) = \big(\mathbf{1}\otimes L_j(v)\big)\,\big(L_j(u)\otimes \mathbf{1}\big)\,R(u-v), \tag{1.18}$$

其中**1** 是 2×2 单位矩阵，验证过程很直接。接下来定义单值矩阵

$$T_n(u)=L_n(u)\cdots L_1(u)=\begin{pmatrix}A_n(u) & B_n(u)\\ C_n(u) & D_n(u)\end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

其元素是作用于所有坐标的微分算子 $x_1,\dots,x_n$。根据标准论证 [Sl，命题 3。1],由方程 (1.18) 可得

$$R(u-v)\,\big(T_n(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes T_n(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes T_n(v)\big)\,\big(T_n(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v). \tag{1.20}$$

该矩阵关系中 (1,1) 元素的等式蕴含了可交换性

$$\big[A_n(u),A_n(v)\big]=0. \tag{1.21}$$

因此，算子 $A_n(u)$ 的系数彼此可交换

$$A_n(u)=u^n+\sum_{s=1}^{n}u^{n-s}\mathrm{H}_s,\qquad [\mathrm{H}_s,\mathrm{H}_r]=0. \tag{1.22}$$

前两个为

$$\mathrm{H}_1=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{i}\partial_{x_j},\qquad \mathrm{H}_2=\frac{1}{2}\big(\mathrm{H}_1^2-\mathrm{H}_{GL}\big). \tag{1.23}$$

因此，算子 H_s 也与二次哈密顿量 (1.15) 可交换。

1.1.2 特征函数

现在来构造哈密顿量的联合特征函数

$$A_n(u)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\prod_{j=1}^{n}(u-\lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{1.24}$$

其参数由 $A_n(u)$ 特征值的零点给出。为此引入 DST（双聚体自俘获）链的 Lax 矩阵 [KSS]

$$M_a(u)=\begin{pmatrix}u+\mathrm{i}\partial_{x_a} & e^{-x_a}\\ -e^{x_a}\partial_{x_a} & \mathrm{i}\end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

它与 Toda Lax 矩阵一样，满足杨–巴克斯特方程（1.18），

$$R(u-v)\,\big(M_a(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes M_a(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes M_a(v)\big)\,\big(M_a(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v). \tag{1.26}$$

构造特征函数的关键对象是一个 $\mathcal{R}$-算子，它连接 Toda 与 DSTLax 矩阵

$$\mathcal{R}_{12}(v)\,L_1(u)\,M_2(u-v)=M_2(u-v)\,L_1(u)\,\mathcal{R}_{12}(v). \tag{1.27}$$

它是一个积分算子，作用于两个变量 $\varphi(x_1,\ x_2)$ 的函数，其公式为

$$\big[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}}dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}\big)\,\varphi(y,x_1) \tag{1.28}$$

在 [Skl3第 3 节中推导。4]该算子的矩阵关系 (1.27) 包含关于该算子核的四个微分方程，可以直接验证。在第 7.3 节中，我们将描述该算子定义良好的函数空间，以及关系式 (1.27) 成立的条件。

仿照单值矩阵 (1.19)，我们定义单值化算子

$$U_{na}(v)=\mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v) \tag{1.29}$$

它作用于 $n+1$ 个变量 $(x_1,\dots,x_n,x_a)$。同样，利用标准论证可知，由 (1.27) 可得，它将单值矩阵与 DST 拉克斯矩阵交织起来

$$U_{na}(v)\,T_n(u)\,M_a(u-v)=M_a(u-v)\,T_n(u)\,U_{na}(v), \tag{1.30}$$

详细证明见第5 节的命题7.4。

为构造 $A_n(u)$ 的特征函数，我们在最后一个关系式中替换 $n\to n-1,\ a\to n$，并考察 (1,1) 矩阵元的等式

$$\begin{aligned}&U_{n-1,n}(v)\big(A_{n-1}(u)\,(u-v+\mathrm{i}\partial_{x_n})-B_{n-1}(u)\,e^{x_n}\partial_{x_n}\big)\\&\quad=\big((u-v+\mathrm{i}\partial_{x_n})\,A_{n-1}(u)+e^{-x_n}\,C_{n-1}(u)\big)\,U_{n-1,n}(v).\end{aligned} \tag{1.31}$$

若将其作用于 $n-1$ 个变量 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$ 的函数，第一行可简化为

$$\begin{aligned}&(u-v)\,U_{n-1,n}(v)\,A_{n-1}(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})\\&\quad=\big((u-v+\mathrm{i}\partial_{x_n})\,A_{n-1}(u)+e^{-x_n}\,C_{n-1}(u)\big)\,U_{n-1,n}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}).\end{aligned} \tag{1.32}$$

此外，归纳公式 (1.19) 推出等式

$$\begin{aligned}&\big((u-v+\mathrm{i}\partial_{x_n})\,A_{n-1}(u)+e^{-x_n}\,C_{n-1}(u)\big)e^{-\mathrm{i}vx_n}\\&\qquad=e^{-\mathrm{i}vx_n}\,\big((u+\mathrm{i}\partial_{x_n})\,A_{n-1}(u)+e^{-x_n}\,C_{n-1}(u)\big)=e^{-\mathrm{i}vx_n}\,A_n(u),\end{aligned} \tag{1.33}$$

我们可以用它来简化 (1.31) 的第二行。

定义作用于 $n-1$ 变量函数的升算子 $\Lambda_n(\lambda)$

$$\Lambda_n(\lambda)=e^{\mathrm{i}\lambda x_n}\,U_{n-1,n}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})}=e^{\mathrm{i}\lambda x_n}\,\mathcal{R}_{n-1,n}(\lambda)\cdots\mathcal{R}_{1n}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})}. \tag{1.34}$$

由于 (1.32) 和 (1.33)，它将以 n 和 $n-1$ 变量表示的哈密顿量相互交织

$$A_n(u)\,\Lambda_n(\lambda)=(u-\lambda)\,\Lambda_n(\lambda)\,A_{n-1}(u), \tag{1.35}$$

其中 $n=1$ 表示 $A_0(u)=1$。因此，满足（1.24）的特征函数可以递归地构造

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\Lambda_n(\lambda_n)\,\Lambda_{n-1}(\lambda_{n-1})\cdots\Lambda_1(\lambda_1)\cdot 1. \tag{1.36}$$

根据 $\mathcal{R}$ 算子的显式公式（1.28）和定义（1.34），我们有

$$\big[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\, \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}\big)\Big)\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}). \quad (1.37)$$

这给出了众所周知的高斯–吉文塔尔表示 GL Toda 本征函数，该表示由不同方法得出，见文献 [Giv、GKLO、Sil]。上述推导似乎是新的，但与自旋链中已知的构造非常相似 [ADV1]。

例 2. 对于一个和两个粒子的情形

$$\Phi_{\lambda_1}(x_1) = e^{\mathrm{i}\lambda_1 x_1}, \qquad \Phi_{\lambda_1,\lambda_2}(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} dy\; e^{\mathrm{i}\lambda_2(x_1+x_2-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, e^{\mathrm{i}\lambda_1 y}. \quad (1.38)$$

可以证明，升算子满足交换关系

$$\Lambda_n(\lambda)\,\Lambda_{n-1}(\rho) = \Lambda_n(\rho)\,\Lambda_{n-1}(\lambda), \quad (1.39)$$

因此，特征函数关于谱参数是对称的

$$\Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Phi_{\lambda_{\sigma(1)},\dots,\lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \sigma\in S_n, \quad (1.40)$$

s不加证明地指出，根据恒等式（1.30）还可以导出以下关系 .

不加证明地指出，根据恒等式（1.30）还可以导出以下关系

$$B_n(\lambda)\,\Lambda_n(\lambda) = \mathrm{i}^{n-1}\,\Lambda_n(\lambda+\mathrm{i}), \quad (1.41)$$

$$C_n(\lambda)\,\Lambda_n(\lambda) = \mathrm{i}^{-n-1}\,\Lambda_n(\lambda-\mathrm{i}). \quad (1.42)$$

将它们与谱参数的对称性（1.40）结合起来，可以推导出单值化矩阵的非对角元素对特征函数的作用

$$\begin{aligned} B(\lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) &= \mathrm{i}^{n-1}\,\Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_j+\mathrm{i},\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n),\\ C(\lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) &= \mathrm{i}^{-n-1}\,\Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_j-\mathrm{i},\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n). \end{aligned} \quad (1.43)$$

最后一个公式与 [KL 中的公式（3.1b）]一致。这些公式展示了移位算子 $e^{\pm\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}}$（作用于谱参数空间）如何在坐标空间中表示。在 1.2.6 节中，我们将给出 BC Toda 链的类似结论。

1.1.3 巴克斯特算子

还有一种更　　有用的单值化算子的约化，称为巴克斯特算子

$$Q_n(\lambda) = \lim_{x_{n+1}\to\infty} U_{n,n+1}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)} = \lim_{x_{n+1}\to\infty} \mathcal{R}_{n,n+1}(\lambda)\cdots\mathcal{R}_{1,n+1}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)}. \quad (1.44)$$

它通过以下显式公式作用于 n 坐标 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$ 的函数

$$\big[Q_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_n\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}\big) - e^{x_n-y_n}\Big)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n). \quad (1.45)$$

利用恒等式 (1.30) 可以推导出它与哈密顿量对易

$$A_n(u)\,Q_n(\lambda) = Q_n(\lambda)\,A_n(u). \tag{1.46}$$

此外，正如 [GLO1中定理 2 所示，3],它满足以下关系

$$Q_n(\lambda)\,Q_n(\rho) = Q_n(\rho)\,Q_n(\lambda), \tag{1.47}$$

$$Q_n(\lambda)\,\Lambda_n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda - \mathrm{i}\rho)\,\Lambda_n(\rho)\,Q_{n-1}(\lambda), \tag{1.48}$$

$$A_n(\lambda)\,Q_n(\lambda) = (-\mathrm{i})^n\,Q_n(\lambda - \mathrm{i}), \tag{1.49}$$

其中最后一个称为*Baxter* 方程。第二个恒等式以及特征函数的递归构造（1.36）表明，哈密顿量的特征函数是巴克斯特算子的本征函数

$$Q_n(\lambda)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n}\Gamma(\mathrm{i}\lambda - \mathrm{i}\lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{1.50}$$

这正是可交换性（1.46）所预期的。

巴克斯特算子是研究特征函数性质的有用工具，例如，它可以将高斯–吉文塔尔表示（1.36）与所谓的 Mellin–Barnes 表示联系起来 [GLO1，第 3]节。关于巴克斯特算子的背景知识，参见 [KS，Skl3]。

最后，让我们解释定义（1.44）背后的启发式思想，该定义可以改写为升算子（1.34）的形式

$$Q_n(\lambda) = \lim_{x_{n+1}\to\infty} U_{n,n+1}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)} = \lim_{x_{n+1}\to\infty} e^{-\mathrm{i}\lambda x_{n+1}}\,\Lambda_{n+1}(\lambda). \tag{1.51}$$

根据定义（1.19），哈密顿算子的生成函数满足递推关系

$$A_{n+1}(u) = (u + \mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})\,A_n(u) + e^{-x_{n+1}}\,C_n(u). \tag{1.52}$$

因此，在极限 $x_{n+1}\to\infty$ 下我们有

$$A_{n+1}(u) \simeq (u + \mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})\,A_n(u). \tag{1.53}$$

右端由函数 $e^{\mathrm{i}\lambda_{n+1}x_{n+1}}\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 对角化，而左端由

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_{n+1}}(\boldsymbol{x}_{n+1}) = \Lambda_{n+1}(\lambda_{n+1})\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\mathrm{i}\lambda_{n+1}x_{n+1}}\left[e^{-\mathrm{i}\lambda_{n+1}x_{n+1}}\,\Lambda_{n+1}(\lambda_{n+1})\right]\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{1.54}$$

且两边对应的特征值相同。因此，我们可以预期，在极限$x_{n+1}\to\infty$ 下，这些特征函数除归一化因子 $c(\boldsymbol{\lambda}_{n+1})$ 外彼此相同；该因子可能来自方括号中算子的作用

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty}\left[e^{-\mathrm{i}\lambda_{n+1}x_{n+1}}\,\Lambda_{n+1}(\lambda_{n+1})\right]\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = c(\boldsymbol{\lambda}_{n+1})\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{1.55}$$

根据定义（1.51），最后一个等式正是巴克斯特算子的对角化性质（1.50）。

1.2 BC Toda链

1.2.1 对易哈密顿量

回顾 BC Toda链（1.2）的哈密顿量构造，该构造由 [Skl2], 提出，另见 [IS，第 4]节。定义边界 K 矩阵

$$K(u)=\begin{pmatrix}-\alpha & u-\frac{\mathrm{i}}{2}\\ -\beta^2\big(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\big) & -\alpha\end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

与杨的 R-矩阵 (1.17) 一起，它满足反射方程

$$\begin{aligned}&R(u-v)\,\big(K(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u+v-\mathrm{i})\,\big(\mathbf{1}\otimes K(v)\big)\\&\qquad=\big(\mathbf{1}\otimes K(v)\big)\,R(u+v-\mathrm{i})\,\big(K(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v).\end{aligned} \tag{1.57}$$

接下来，为 BC 模型引入单值矩阵

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_n(u)&=L_n(u)\cdots L_1(u)\,K(u)\,\sigma_2\,L_1^t(-u)\cdots L_n^t(-u)\,\sigma_2\\&=T_n(u)\,K(u)\,\sigma_2\,T_n^t(-u)\,\sigma_2=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_n(u) & \mathbb{B}_n(u)\\ \mathbb{C}_n(u) & \mathbb{D}_n(u)\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{1.58}$$

其中

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2^2=\mathbf{1}. \tag{1.59}$$

注意，矩阵 $\sigma_2\,L_j^t(-u)\,\sigma_2$ 满足相同的杨–巴克斯特关系 (1.18)，正如 $L_j(u)$。这一事实与 (1.57) 一起表明，单值矩阵也满足反射方程

$$\begin{aligned}&R(u-v)\,\big(\mathbb{T}_n(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u+v-\mathrm{i})\,\big(\mathbf{1}\otimes\mathbb{T}_n(v)\big)\\&\qquad=\big(\mathbf{1}\otimes\mathbb{T}_n(v)\big)\,R(u+v-\mathrm{i})\,\big(\mathbb{T}_n(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v),\end{aligned} \tag{1.60}$$

参见 [Skl2，命题 2]。后者等价于单值矩阵各元素之间的对易关系。特别地，(1，4) 元素之间的等式给出了可交换性

$$\big[\mathbb{B}_n(u),\mathbb{B}_n(v)\big]=0. \tag{1.61}$$

$\mathbb{B}_n(u)$ 的系数彼此对易

$$\mathbb{B}_n(u)=(-1)^n\Big(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\Big(u^{2n}+\sum_{s=1}^{n}u^{2(n-s)}\,\mathbb{H}_s\Big),\qquad[\mathbb{H}_s,\mathbb{H}_r]=0. \tag{1.62}$$

不难验证 $\mathbb{H}_1=-\mathbb{H}_{BC}$ 和 $\mathbb{H}_s$ 具有形式 (1.2)，因此它们是 BC Toda链的哈密顿量。

注 2. 事实 $B(u)/(u-\mathrm{i}/2)$ 是关于 u 的偶多项式，这可由单值矩阵 $T_n(u$的矩阵元对易关系推出，例如参见 [ADV2，第 14–15]。

1.2.2 特征函数

现在我们描述构造联合本征函数的主要步骤 s

$$\mathbb{B}_n(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=(-1)^n\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}(u^2-\lambda_j^2)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{1.63}$$

由 $\mathbb{B}_n(u)$ 特征值的非平凡零点参数化。与 GLToda链的情形一样，这需要使用积分算子。关于这些算子在哪些函数空间上定义良好的讨论，我们留到第1.2.4节。

简言之，构造特征函数只需要两个对象： $\mathcal{R}$-算子（1.28）和 反射算子 $\mathcal{K}_a(v)$ 。后者作用于单变量函数 $\varphi(x_a)$，并满足与 DST Lax 矩阵（1.25）相关的方程

$$\mathcal{K}_a(v)\,M_a^t(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M_a(u-v)\sigma_2=M_a(u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M_a^t(-u-v)\sigma_2\,\mathcal{K}_a(v). \tag{1.64}$$

我们将在第 2节证明，它由以下公式给出：

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{K}_a(v)\,\varphi\big](x_a)=\frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}}{\Gamma(g-\mathrm{i}v)}\int_{\ln\beta}^{\infty}dy\,\exp\big(-2\mathrm{i}vy-e^{y-x_a}\big)\,\big(1+\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-g}\\ \times\big(1-\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v+g-1}\,\varphi(-y),\end{aligned} \tag{1.65}$$

与之前一样， $g=1/2+\alpha/\beta$。注意，用这个算子表示，单粒子本征函数公式（1.8）可以改写为

$$\Psi_{\lambda_1}(x_1)=e^{\mathrm{i}\lambda_1 x_1}\,\mathcal{K}_1(\lambda_1)\cdot 1. \tag{1.66}$$

我们还引入反射后的 $\mathcal{R}$-算子

$$\mathcal{R}_{12}^{*}(v)=r_1\,\mathcal{R}_{12}(v)\,r_1,\qquad r_1\colon\ \varphi(x_1)\mapsto\varphi(-x_1), \tag{1.67}$$

它将 Toda Lax 矩阵与转置的 DST 矩阵联系起来

$$\mathcal{R}_{12}^{*}(v)\,M_2^t(-u-v)\,L_1(u)=L_1(u)\,M_2^t(-u-v)\,\mathcal{R}_{12}^{*}(v), \tag{1.68}$$

a这是关系式（1.27）的直接推论。具体而言，它可写为

$$\big[\mathcal{R}_{12}^{*}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}}dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(y-x_1)-e^{y-x_1}-e^{-y-x_2}\big)\,\varphi(y,-x_1). \tag{1.69}$$

接下来，仿照单值矩阵（1.58），定义该 BC模型的单值化算子

$$\mathbb{U}_{na}(v)=\mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\,\mathcal{K}_a(v)\,\mathcal{R}_{1a}^{*}(v)\cdots\mathcal{R}_{na}^{*}(v). \tag{1.70}$$

按照 Sklyanin [Skly2], 在第 7.4 节中的方法，我们证明“局部”关系（1.27）、（1.64）和（1.68）蕴含了单值化算子的“整体”关系

$$\begin{aligned}&\mathbb{U}_{na}(v)\,M_a^t(-u-v)\,\mathbb{T}_n(u)\,\sigma_2 M_a(u-v)\sigma_2\\ &\qquad=M_a(u-v)\,\mathbb{T}_n(u)\,\sigma_2 M_a^t(-u-v)\sigma_2\,\mathbb{U}_{na}(v),\end{aligned} \tag{1.71}$$

参见命题 6。需要强调的是，这是一个关键公式，我们多次利用它来推导单值矩阵元素与不同积分算子之间的关系。

最后，定义作用于 $n-1$ 坐标函数上的升算子$_n(\lambda)$

$$\begin{aligned} {}_n(\lambda) &= e^{\mathrm{i}\lambda x_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})} \\ &= e^{\mathrm{i}\lambda x_n}\,\mathcal{R}_{n-1,n}(\lambda)\cdots\mathcal{R}_{1n}(\lambda)\,\mathcal{K}_n(\lambda)\,\mathcal{R}^*_{1n}(\lambda)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

具体而言，它由积分算子给出

$$\big[\ {}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\quad {}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}) \tag{1.73}$$

其核为

$$\begin{aligned} {}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\ \exp\Big(&\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n+\underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}-2\underline{\boldsymbol{z}}_n\big) \\ &-\sum_{j=1}^{n-1}(e^{z_j-x_j}+e^{z_j-y_j}+e^{x_j-z_{j+1}}+e^{y_j-z_{j+1}})-e^{z_n-x_n}\Big) \\ &\times(1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta). \end{aligned} \tag{1.74}$$

在第3 节中，我们由恒等式 (1.71) 推导出，它将具有 n 和$n-1$ 变量的哈密顿量相互交织

$$\mathbb{B}_n(u)\quad {}_n(\lambda) = (\lambda^2-u^2)\quad {}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_{n-1}(u). \tag{1.75}$$

注意，根据定义 (1.58)，我们有 $\mathbb{B}_0=(u-\mathrm{i}/2)$。因此，满足 (1.63) 的特征函数可递归地构造

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \quad {}_n(\lambda_n)\cdots\quad {}_1(\lambda_1)\cdot 1 = \quad {}_n(\lambda_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}), \tag{1.76}$$

这等价于前面给出的公式 (1.12)。

例 3. 在最简单的情形下，$\mathbb{U}_{0a}(v)=\mathcal{K}_a(v)$，并且

$$\Psi_{\lambda_1}(x_1) = \quad {}_1(\lambda_1)\cdot 1 = e^{\mathrm{i}\lambda_1 x_1}\mathcal{K}_1(\lambda_1)\cdot 1. \tag{1.77}$$

此外，在第 6 节中，由关系式（1.71）可推出等式

$$\mathbb{D}_n(\lambda)\quad {}_n(\lambda) = -\beta(g+\mathrm{i}\lambda)\quad {}_n(\lambda-\mathrm{i}). \tag{1.78}$$

这与 1.42）中的公式类似，适用于 GL 模型。

注 3. 矩阵 $M_a^t(-u)$ 和 $\sigma_2 M_a^t(-u)\sigma_2$满足相同的杨–巴克斯特方程（1.26），因为 $M_a(u)$。因此，乘积

$$M_a^t(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M_a(u-v)\sigma_2, \qquad M_a(u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M_a^t(-u-v)\sigma_2 \tag{1.79}$$

满足相同的反射方程，与单值矩阵（1.60）一样。换言之，这些矩阵的系数给出了由反射方程定义的同一代数的两个表示。因此，根据公式（1.64），反射算子 $\mathcal{K}_a(v)$ 交织了这两个表示。

1.2.3 巴克斯特算子

与 GL 模型的情形一样，单值化算子还有一种有用的约化。为 BC Toda链定义巴克斯特算子

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) = \lim_{x_{n+1}\to\infty} \mathbb{U}_{n,n+1}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)} = \lim_{x_{n+1}\to\infty} e^{-\mathrm{i}\lambda x_{n+1}} \quad {}_{n+1}(\lambda). \tag{1.80}$$

具体而言，它由积分算子给出

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n) \tag{1.81}$$

其核为

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{z}_{n+1}\; \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{y}}_n - 2\underline{\boldsymbol{z}}_{n+1}\big) \\ - \sum_{j=1}^{n}\big(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}}\big)\Big) \\ \times \big(1+\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\big(1-\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta),\end{aligned} \tag{1.82}$$

当满足假设 $\mathrm{Im}\,\lambda \in (-g,\ 0)$ 时，该积分收敛。该区间的下界用于对 z_1 的积分，而上界用于对 z_{n+1} 的积分。核的显式表达式可由公式（1.74）得到。对于合适的函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_n$，极限与积分的交换是合理的，见第5节中的推论7.5。

定义（1.80）背后的启发式想法与 GL 模型相同。哈密顿算子的生成函数满足递推关系 (1.58)

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{n+1}(u) = \big((u+\mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})\mathbb{B}_n(u) + e^{-x_{n+1}}\mathbb{D}_n(u)\big)(-u+\mathrm{i}\partial_{x_{n+1}}) \\ - \big((u+\mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})\mathbb{A}_n(u) + e^{-x_{n+1}}\mathbb{C}_n(u)\big)e^{-x_{n+1}},\end{aligned} \tag{1.83}$$

在极限 $x_{n+1}\to\infty$ 下化简为

$$\mathbb{B}_{n+1}(u) \simeq (u+\mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})(-u+\mathrm{i}\partial_{x_{n+1}})\,\mathbb{B}_n(u). \tag{1.84}$$

至于 GL 模型，对两侧特征函数的比较表明，巴克斯特算子（1.80）可由 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 对角化。

在第4 节中，我们进一步提供了相关证据：利用关系式（1.71），我们证明巴克斯特算子与哈密顿量对易

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_n(u) = \mathbb{B}_n(u)\,\mathbb{Q}_n(\lambda). \tag{1.85}$$

Mor此外，利用第5节中与（1.71）相近的关系式，我们推导出巴克斯特方程 n

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_n(\lambda) = -\frac{\beta(g+\mathrm{i}\lambda)}{2\lambda}\,\mathbb{Q}_n(\lambda-\mathrm{i}), \tag{1.86}$$

这意味着巴克斯特算子的特征值满足差分方程。

在附录 A 中，我们简要说明如何证明巴克斯特算子构成一个可交换的族。论证基于算子（而非矩阵）的杨–巴克斯特方程和反射方程。在后续工作 [BDK] 中，我们采用另一种方法给出可交换性的完整详细证明。

1.2.4 界与函数空间

众所周知，当 GLToda 本征函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$的谱参数为实数时，它们在经典禁阻区 $x_{j+1} \ll x_j$中 [BC命题 4.13]。在第 7.2 节中，我们证明，由积分（ BC Toda 本征函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$（1.76）定义的）在$\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ 上光滑，并满足类似的界（当 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$）

$$\begin{aligned} \left|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| \le \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda_j)|}\, P(|x_1|, \dots, |x_n|) \\ \times \exp\left(-\beta e^{-x_1}\, \theta(\ln\beta - x_1) - \sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}}\, \theta(x_j - x_{j+1}) \right), \end{aligned} \tag{1.87}$$

其中 P 是某个多项式。这与已知的单粒子情形下 Whittaker 函数的渐近行为（1.5）类似。

此外，在第7.3–7.5 节中，我们研究函数空间，在这些空间上，前文讨论的所有算子都有定义，且相关关系均成立。

将 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 记为由光滑函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 构成的空间，这些函数及其所有导数都按指数界增长；也就是说，对每个 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$，都存在常数 $a, b \ge 0$，使得

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n} \varphi(\boldsymbol{x}_n)\right| \le a\, e^{b(|x_1| + \ldots + |x_n|)}. \tag{1.88}$$

再将 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 记为 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 的子空间，其中的函数在 $x_n \to \infty$ 时至多按多项式增长（其所有导数也如此）；也就是说，对每个 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$，都存在常数 $a, b \ge 0$ 以及多项式 $P(x_n)$，满足

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n} \varphi(\boldsymbol{x}_n)\right| \le a\, e^{b(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|)} \times \begin{cases} P(x_n), & x_n \ge 0, \\ e^{b|x_n|}, & x_n < 0. \end{cases} \tag{1.89}$$

显然，Lax 矩阵和单值矩阵的矩阵元素在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$上不变作用。也容易看出，算子 $\mathbb{B}_n(u)$在 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 上不变作用（见推论6）。在第7.3–7.5 节中，我们将证明积分算子具有类似性质。以下定理由命题2、推论5 和注7组合得出。

定理 2。设 $u \in \mathbb{C}$、$\mathrm{Im}\, v > -g$ 以及 j、$k \in \{1, \dots, n+1\}$。则算子 $\mathcal{R}_{jk}(u)$、$\mathcal{K}_j(v)$、$\mathbb{U}_n$、$_{n+1}(v)$、$_n(v)$ 在空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上保持不变。此外，当 $\mathrm{Im}\, v \in (-g, 0)$ 时，算子 $\mathbb{Q}_n(v)$ 将 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$。

结合一些附加论证，这就证明了对算子的所有操作都是正当的，见命题 3–6 以及第 3–6 节的结语。将它们结合起来，可得出以下陈述。

推论 1。 第*1.2.2* 和*1.2.3* 节中涉及算子的所有关系，分别在空间$\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 和 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 上成立（假定对参数施加适当的限制条件，如定理 *2* 中所述）。

注 4。 指数温和函数空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 在考虑单值矩阵元素的作用时是自然的（其中包含 $e^{\pm x_j}$）。它比 Wallach 所考虑的 Whittaker Schwartz 空间更大 [W]，；后者适用于 Toda 哈密顿量的作用，而不是单值矩阵的作用。

1.2.5 与 XXX 自旋链的关系

上述所有陈述都与最近针对开放自旋链所得到的结果相平行 [ADV2]。这可以由以下事实解释：DST 链和 Toda链都在某个极限下源自 XXX 自旋链。在附录 B 中，我们详细说明了这一极限对于不同对象和方程是如何实现的。

首先，我们回顾 XXX 自旋链（自旋为 s）的 Lax 矩阵的约化

$$\mathsf{L}(u) = \begin{pmatrix} u+S & S_- \\ S_+ & u-S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+z\partial_z+s & -\partial_z \\ z^2\partial_z+2sz & u-z\partial_z-s \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

为 DST 和 Toda 链的 Lax 矩阵，如 [Skl3]中所述。

其次，我们考察自旋链 R 算子的约化

$$\big[\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2)\,\Phi\big](z_1,z_2) = \frac{1}{\Gamma(v_1-u_1)}\int_0^1 d\alpha\;\alpha^{v_1-u_1-1}\,(1-\alpha)^{u_1-v_2} \times \Phi(z_1,(1-\alpha)z_2+\alpha z_1) \tag{1.91}$$

以及它所满足的杨–巴克斯特方程向 Toda 链算子 $\mathcal{R}_{12}(v)$ 及相应方程（1.27），以及向附录 $\mathcal{R}$A中出现的 DST 链算子。

最后，我们证明自旋链 K 算子

$$\big[\mathsf{K}(v,s)\,\Phi\big](z) = \frac{(2\mathrm{i}\beta)^{-2v}}{\Gamma(-2v)}\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v-s} \times \int_0^1 dt\;(1-t)^{-2v-1}\,t^{g+v+s-1}\,\big(t(z-\mathrm{i}\beta)+2\mathrm{i}\beta\big)^{v+s-g}\,\Phi(t(z-\mathrm{i}\beta)+\mathrm{i}\beta) \tag{1.92}$$

以及它所满足的反射方程可以化约为此前所考虑的算子 $\mathcal{K}(v)$ 以及相应的方程（1.64）。

这些限 制过程提供了另一种检验前文所讨论公式的方法 e.

1.2.6 进一步结果

在本系列的第二篇论文 [BDK], 中，我们建立了此处引入的升算子和巴克斯特算子的若干性质，这些性质类似于 GL 模型的相应性质。首先，我们建立了反射对称性和交换关系

$$_n(\lambda) = \ _n(-\lambda), \qquad _n(\lambda)\ \ _{n-1}(\rho) = \ _n(\rho)\ \ _{n-1}(\lambda). \tag{1.93}$$

由于特征函数由公式定义

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \ _n(\lambda_n)\cdots\ _1(\lambda_1)\cdot 1, \tag{1.94}$$

上述 p 这些性质蕴含谱参数在带符号置换下的对称性 s

$$\Psi_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Psi_{\varepsilon_1\lambda_{\sigma(1)},\dots,\varepsilon_n\lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \varepsilon_j\in\{1,-1\}, \quad \sigma\in S_n. \tag{1.95}$$

因此，哈密顿量的谱（1.63）是非简并的。此外，这种对称性与（1.78）共同导出公式

$$D(\pm\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = -\beta(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\lambda_1,\dots,\lambda_j\mp\mathrm{i},\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{1.96}$$

这些公式是 1.43 的 GL模型的类比公式。

此外，我们证明了巴克斯特算子的可交换性，以及巴克斯特算子与升算子之间的局部关系

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho) = \mathbb{Q}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_n(\lambda), \tag{1.97}$$

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) \quad {}_n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda - \mathrm{i}\rho)\,\Gamma(\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}\rho) \quad {}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_{n-1}(\lambda), \tag{1.98}$$

其中，对于 $n=1$，我们记

$$\mathbb{Q}_0(\lambda) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}. \tag{1.99}$$

由第二个关系和定义 1.94，我们推导出哈密顿算子的特征函数也将巴克斯特算子对角化

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\mathrm{i}\lambda - \mathrm{i}\lambda_j)\,\Gamma(\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{1.100}$$

该公式与巴克斯特方程（1.86）一致。

随后可以利用巴克斯特算子的对角化性质，推导出所谓的 ***Mellin–Barnes*** 表示，用于表示 BC Toda 本征函数；该表示推广了著名的单粒子公式 [DLMF, （13.16.12）]

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\,W_{\frac{1}{2}-g,-\mathrm{i}\lambda}(2\beta e^{-x}) = e^{\beta e^{-x}}\int_{\mathbb{R}-\mathrm{i}0}\frac{d\gamma}{2\pi}\,\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\gamma}\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma-\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma+\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\gamma)}\,e^{\mathrm{i}\gamma x}. \tag{1.101}$$

对于 GL Toda链的 Gauss–Givental 表示与 Mellin–Barnes 表示相结合，使我们能够证明特征函数的正交性和完备性 [Sil、K、DKM],，而在后续论文 [BDK] 中，我们证明了同样的结论也适用于 BC 模型。

最后需要指出的是，单粒子情形（1.5）中出现的 Whittaker 函数也有级数表示 [DLMF, (13.14.33)，(13.14.6)]。论文 [DE]研究了它向任意粒子数情形的推广。在 [BDK] 中，我们对这类级数作出了精确描述。

2 反射算子

在本节中，我们将展示如何从下式推导出反射算子的公式

$$\big[\mathcal{K}(v)\,\varphi\big](x) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}}{\Gamma\big(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}-\mathrm{i}v\big)}\int_{\ln\beta}^{\infty}dy\,\exp\big(-2\mathrm{i}vy - e^{y-x}\big)\,\big(1+\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$\times\,\big(1-\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}\,\varphi(-y) \tag{2.1}$$

该式源自含有 DST Lax 矩阵的反射方程

$$\mathcal{K}(v)\, M^t(-u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M(u-v)\sigma_2 = M(u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2\, \mathcal{K}(v). \tag{2.2}$$

具体而言，该方程写作

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}(v) \begin{pmatrix} -u-v+\mathrm{i}\partial & -e^x\partial \\ e^{-x} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & u-\frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\beta^2\big(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\big) & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & e^x\partial \\ -e^{-x} & u-v+\mathrm{i}\partial \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u-v+\mathrm{i}\partial & e^{-x} \\ -e^x\partial & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & u-\frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\beta^2\big(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\big) & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -e^{-x} \\ e^x\partial & -u-v+\mathrm{i}\partial \end{pmatrix} \mathcal{K}(v),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

为简洁起见，我们记 $\partial \equiv \partial_x$。推导分为两步：首先，将上面的矩阵方程化简为三个关系式，其中两个关系式足以确定反射算子

$$\mathcal{K}(v)\, e^{-x} = e^x \partial\, \mathcal{K}(v), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{K}(v)\, \big[(\mathrm{i}v+\partial)\, e^{-x} - \beta^2\, e^x\partial\big] = \big[(-\mathrm{i}v-\partial)\, e^x\partial + 2\alpha + \beta^2\, e^{-x}\big]\, \mathcal{K}(v). \tag{2.5}$$

第二步是将 $\mathcal{K}(v)$ 表示为积分算子，将这些关系式改写为关于其核的微分方程，并求解。推导完成后，我们验证该解也满足由 (2.9) 给出的附加第三个关系式。

注5。 (2.1) 中积分前的特定常数是为简化反射算子相关的各种恒等式而选取的。此外，分母中的伽马函数适用于反射算子的解析延拓，参见本节末尾。

化简矩阵方程。 方程 (2.3) 左侧的矩阵乘积可表示为以下形式

$$\begin{aligned}
&M^t(-u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M(u-v)\sigma_2 = \mathrm{i}\alpha\,(v-u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\,(2u-\mathrm{i}) \begin{pmatrix} \mathrm{i} & e^x\partial \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \begin{pmatrix} (u+v-\mathrm{i}\partial)\, e^{-x} & -u^2+(v-\mathrm{i}\partial)^2 \\ -e^{-2x} & e^{-x}(u-v+\mathrm{i}\partial) \end{pmatrix} + \beta^2 \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \begin{pmatrix} \mathrm{i}e^x\partial & (e^x\partial)^2 \\ 1 & -\mathrm{i}e^x\partial \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

右端矩阵乘积的情形也类似

$$\begin{aligned}
&M(u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2 = \mathrm{i}\alpha\,(v-u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha\,(2u-\mathrm{i}) \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&+ \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \begin{pmatrix} (u-v+\mathrm{i}\partial)\, e^x\partial & -u^2+(v-\mathrm{i}\partial)^2 \\ -(e^x\partial)^2 & e^x\partial\,(u+v-\mathrm{i}\partial) \end{pmatrix} + \beta^2 \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \begin{pmatrix} -\mathrm{i}e^{-x} & e^{-2x} \\ 1 & \mathrm{i}e^{-x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

可以看出，含有因子 $(v-u)$ 的首项相互抵消，而其余各项都含有因子 $(u-\mathrm{i}/2)$，我们将其从等式两边约去。经过这些变换后，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}(v)\left[2\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{i} & e^{x}\partial\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(u+v-\mathrm{i}\partial)\,e^{-x} & -u^{2}+(v-\mathrm{i}\partial)^{2}\\ -e^{-2x} & e^{-x}(u-v+\mathrm{i}\partial)\end{pmatrix}+\beta^{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{x}\partial & (e^{x}\partial)^{2}\\ 1 & -\mathrm{i}e^{x}\partial\end{pmatrix}\right]\\&=\left[2\alpha\begin{pmatrix}0 & e^{-x}\\ 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(u-v+\mathrm{i}\partial)\,e^{x}\partial & -u^{2}+(v-\mathrm{i}\partial)^{2}\\ -(e^{x}\partial)^{2} & e^{x}\partial\,(u+v-\mathrm{i}\partial)\end{pmatrix}+\beta^{2}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{-x} & e^{-2x}\\ 1 & \mathrm{i}e^{-x}\end{pmatrix}\right]\mathcal{K}(v).\end{aligned}\tag{2.6}$$

算子 $\mathcal{K}(v)$ 不依赖于 u，因此，等式两边与 u 不同次幂对应的系数应当相等。 u^2 后面的系数相等显然成立，而对于 u^1，可得到关系式 (2.4)

$$\mathcal{K}(v)\,e^{-x}=e^{x}\partial\,\mathcal{K}(v).\tag{2.7}$$

接下来只需考虑 2.6 处的矩阵关系 ($u=0$

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}(v)\left[2\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{i} & e^{x}\partial\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(v-\mathrm{i}\partial)\,e^{-x} & (v-\mathrm{i}\partial)^{2}\\ -e^{-2x} & e^{-x}(-v+\mathrm{i}\partial)\end{pmatrix}+\beta^{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{x}\partial & (e^{x}\partial)^{2}\\ 1 & -\mathrm{i}e^{x}\partial\end{pmatrix}\right]\\&=\left[2\alpha\begin{pmatrix}0 & e^{-x}\\ 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-v+\mathrm{i}\partial)\,e^{x}\partial & (v-\mathrm{i}\partial)^{2}\\ -(e^{x}\partial)^{2} & e^{x}\partial\,(v-\mathrm{i}\partial)\end{pmatrix}+\beta^{2}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{-x} & e^{-2x}\\ 1 & \mathrm{i}e^{-x}\end{pmatrix}\right]\mathcal{K}(v).\end{aligned}\tag{2.8}$$

(2，1) 矩阵元之间的等式

$$\mathcal{K}(v)\,e^{-2x}=(e^{x}\partial)^{2}\,\mathcal{K}(v)$$

是 (2.7) 的显然推论。其余对应于 (1， 1)、(2，2) 和 (1， 2) 矩阵元的关系如下

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}(v)\left[(v-\mathrm{i}\partial)\,e^{-x}+2\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\beta^{2}\,e^{x}\partial\right]=\left[(-v+\mathrm{i}\partial)\,e^{x}\partial-\mathrm{i}\beta^{2}\,e^{-x}\right]\mathcal{K}(v),\\&\mathcal{K}(v)\left[e^{-x}\,(-v+\mathrm{i}\partial)-\mathrm{i}\beta^{2}\,e^{x}\partial\right]=\left[e^{x}\partial\,(v-\mathrm{i}\partial)+2\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\beta^{2}\,e^{-x}\right]\mathcal{K}(v),\\&\mathcal{K}(v)\left[(v-\mathrm{i}\partial)^{2}+2\alpha\,e^{x}\partial+\beta^{2}\,(e^{x}\partial)^{2}\right]=\left[(v-\mathrm{i}\partial)^{2}+2\alpha\,e^{-x}+\beta^{2}\,e^{-2x}\right]\mathcal{K}(v).\end{aligned}\tag{2.9}$$

注意，第一个方程与前述关系式 (2.5) 一致。根据 (2.7)，第二个方程与第一个等价：只需重写两边的首项即可

$$e^{-x}\,(-v+\mathrm{i}\partial)=(-v+\mathrm{i}\partial)\,e^{-x}+\mathrm{i}e^{-x},\qquad e^{x}\partial\,(v-\mathrm{i}\partial)=(v-\mathrm{i}\partial)\,e^{x}\partial+\mathrm{i}e^{x}\partial.\tag{2.10}$$

因此，我们将初始矩阵方程化简为三个关系式。其中两个足以确定反射算子的显式形式，而第三个（2.9）可以最后再验证。

求解关键关系式。求解两个关系式

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}(v)\,e^{-x} = e^{x}\partial\,\mathcal{K}(v),\\ &\mathcal{K}(v)\left[(\mathrm{i}v+\partial)\,e^{-x} - \beta^2\,e^{x}\partial\right] = \left[(-\mathrm{i}v-\partial)\,e^{x}\partial + 2\alpha + \beta^2\,e^{-x}\right]\mathcal{K}(v)\end{aligned} \tag{2.11}$$

我们通过以下公式将 $\mathcal{K}(v)$ 实现为作用于函数 $\varphi(x)$ 的积分算子 a

$$\big[\mathcal{K}(v)\,\varphi\big](x) = \int_{\mathcal{C}} dy\,K(x,y)\,\varphi(-y). \tag{2.12}$$

此外，我们假设积分路径 $\mathcal{C}$ 和函数 $\varphi(x)$ 满足以下条件：分部积分产生的边界项消失

$$\big[\mathcal{K}(v)\,\partial\,\varphi\big](x) = -\int_{\mathcal{C}} dy\,K(x,y)\,\partial_y\varphi(-y) = \int_{\mathcal{C}} dy\,\big(\partial_y K(x,y)\big)\,\varphi(-y). \tag{2.13}$$

那么，关系式（2.11）可以改写为关于核的方程

$$\partial_x K(x,y) = e^{y-x}\,K(x,y), \tag{2.14}$$

$$\partial_y K(x,y) = \left(1 - e^{y-x} + \frac{2\alpha\,e^{-y} - 1 - 2\mathrm{i}v}{1-\beta^2\,e^{-2y}}\right)K(x,y). \tag{2.15}$$

这些微分方程的解具有以下形式

$$K(x,y) = A\exp\!\big(-2\mathrm{i}vy - e^{y-x}\big)\,\big(1+\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}}\,\big(1-\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}} \tag{2.16}$$

其中， A 是任意常数。这与给出的表达式（2.1 ）.

同理，通过分部积分，可将第三个关系式（2.9改写为关于核的方程

$$\Big((v-\mathrm{i}\partial_y)^2 - (v-\mathrm{i}\partial_x)^2 + 2\alpha\big[\partial_y e^{-y} - e^{-x}\big] + \beta^2\big[(\partial_y e^{-y})^2 - e^{-2x}\big]\Big)K(x,y) = 0. \tag{2.17}$$

这是 很容易验证，解（2.16）也满足该方程 l.

现在来讨论（2.12）中积分路径和函数空间的选择。核 $K(x,y)$ 随 $y\to\infty$ 快速衰减，对任意 $v\in\mathbb{C}$ 均成立。此外，在$y=\ln\beta$ 附近它是可积的，条件是

$$\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}v - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta}\right) > -1 \qquad\Leftrightarrow\qquad \mathrm{Im}\,v > -\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta}. \tag{2.18}$$

因此，在此条件下，沿实数轴 $\mathcal{C}=(\ln\,\beta,\infty)$ 积分的反射算子（2.12）作用于连续函数 $\varphi(x)$ 是良定义的，只要这些函数关于 $x\to-\infty$ 不增长得过快。

然而，若要在分部积分后使边界项消失（2.13），则需要对 $\varphi(x)$施加额外约束，并作出更强的假设

$$\mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}v - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta}\right) > 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \mathrm{Im}\,v > \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.19}$$

这保证了

$$\lim_{y\to\ln\beta^+}(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}=0. \tag{2.20}$$

此外，对于第三个关系式（2.9），我们需要分部积分两次，因此对 v 的必要假设更强：$\mathrm{Im}\, v>3/2-\alpha/\beta$。

关键在于，分析 Toda 本征函数时，我们需要在所有假设中最弱的条件 $\mathrm{Im}\, v>-1/2-\alpha/\beta$ 下的反射方程。因此，我们采用以下策略：

(1) 找到足够好的函数空间 $\varphi(x)$，使得 $[\mathcal{K}(v)\,\varphi](x)$ 及其关于 x 的导数在假设 $\mathrm{Im}\, v>-1/2-\alpha/\beta$ 下关于 v 解析；

(2) 在更强的假设 $\mathrm{Im}\, v>3/2-\alpha/\beta$ 下，利用分部积分证明关系式（2.9）、（2.11）（从而也证明反射方程（2.2）；

(3) 解析延拓这些关系式至 $\mathrm{Im}\, v>-1/2-\alpha/\beta$ 这一域，最后 d.

详细内容见第 7.3 节，此处我们仅陈述结果。适当的空间记为 $\mathcal{E}$，由 指数温和增长的光滑函数 $\varphi(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ 构成，即对于任意 $k\in\mathbb{N}_0$，存在 $a,b\geq 0$ 使得

$$\left|\varphi^{(k)}(x)\right|\leq a\,e^{b|x|}. \tag{2.21}$$

在这样的空间上，反射算子 $\mathcal{K}(v)$ 定义良好，并且在假设 $\mathrm{Im}\, v>-1/2-\alpha/\beta$ 下，反射方程（2.1）成立。至此，公式（2.1）的证明完成。

解析延拓。值得一提的是，反射算子 $\mathcal{K}(v)$的作用可以解析延拓到整个复平面 $v\in\mathbb{C}$，只要我们考虑函数 $\varphi(x)$，它们在某个靠近实数轴的带状区域内是解析的，且增长不过快。

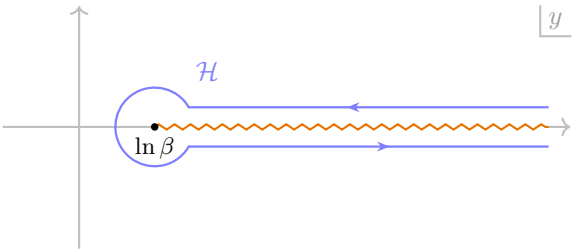

图1：汉克尔围道与支割线

核 $K(x,y)$ (2.16) 的支割线位于区间 $[\ln\beta,\infty)$。因此，在反射算子（2.12）的实现中，我们也可以选择汉克尔围道 $\mathcal{C}=\mathcal{H}$，见图 1。如果积分前的常数也选取不同的值，即

$$\left[\mathcal{K}_{\mathrm{an}}(v)\,\varphi\right](x)=-\frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}+\mathrm{i}v\right)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}}dy\;\exp\left(-2\mathrm{i}vy-e^{y-x}\right)\left(1+\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$\times\left(1-\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}\varphi(-y), \tag{2.22}$$

那么相应的表达式表示反射算子（2.1）第一个公式的解析延拓。事实上，假设 $\operatorname{Im} v > -1/2 - \alpha/\beta$，我们可以按照常规方式将积分路径从汉克尔围道变形为支割线

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} dy\, K(x,y)\,\varphi(-y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\,\big(K(x,y-\mathrm{i}\varepsilon)-K(x,y+\mathrm{i}\varepsilon)\big)\,\varphi(-y)\\ &= 2\mathrm{i}\sin\left[\pi\left(-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\,K(x,y)\,\varphi(-y).\end{aligned} \tag{2.23}$$

由此，利用众所周知的公式

$$\sin\left[\pi\left(-\mathrm{i}v-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] = -\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}-\mathrm{i}v\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\beta}+\mathrm{i}v\right)} \tag{2.24}$$

我们推得 $\mathcal{K}_{\mathrm{an}}(v) = \mathcal{K}(v)$。

3 特征函数的构造

根据命题6 （证明见第7.4节），单值化算子

$$\mathbb{U}_{n0}(v) = \mathcal{R}_{n0}(v)\cdots\mathcal{R}_{10}(v)\,\mathcal{K}_0(v)\,\mathcal{R}^*_{10}(v)\cdots\mathcal{R}^*_{n0}(v) \tag{3.1}$$

满足反射方程

$$\mathbb{U}_{n0}(v)\,M_0^t(-u-v)\,\mathbb{T}_n(u)\,\sigma_2 M_0(u-v)\sigma_2 = M_0(u-v)\,\mathbb{T}_n(u)\,\sigma_2 M_0^t(-u-v)\sigma_2\,\mathbb{U}_{n0}(v) \tag{3.2}$$

在最简单的情形下， $n=0$ 我们有

$$\mathbb{U}_{00}(v) = \mathcal{K}_0(v), \qquad \mathbb{T}_0(u) = K(u). \tag{3.3}$$

具体而言，作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n,\ x_0)$ 时，单值化算子由公式给出

$$\big[\mathbb{U}_{n0}(v)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\,\mathbb{U}_v(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n,-x_n) \tag{3.4}$$

其核为

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_v(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}}{\Gamma(g-\mathrm{i}v)}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{z}_{n+1}\,\exp\Bigg(&\mathrm{i}v\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n+\underline{\boldsymbol{y}}_n-2\underline{\boldsymbol{z}}_{n+1}\big)\\ &-\sum_{j=1}^{n}(e^{z_j-x_j}+e^{z_j-y_j}+e^{x_j-z_{j+1}}+e^{y_j-z_{j+1}})-e^{z_{n+1}-x_0}\Bigg)\\ &\times\big(1+\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}v-g}\big(1-\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}v+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta).\end{aligned} \tag{3.5}$$

升算子 $_n(\lambda)$ 将 $n-1$ 坐标 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$ 的函数映射为 n 坐标的函数。它定义为单值化算子的限制条件

$$_n(\lambda) = e^{\mathrm{i}\lambda x_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})}. \tag{3.6}$$

本节将证明 BC Toda 链的特征函数

$$\mathbb{B}_n(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j^2-u^2)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.7}$$

可以利用升算子构造

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\quad{}_n(\lambda_n)\cdots\quad{}_1(\lambda_1)\cdot 1. \tag{3.8}$$

为此，我们证明升算子与 $\mathbb{B}$-算子满足以下关系

$$\mathbb{B}_n(u)\quad{}_n(\lambda)=(\lambda^2-u^2)\quad{}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_{n-1}(u). \tag{3.9}$$

注意，根据定义 $\mathbb{B}_0=(u-\mathrm{i}/2)$。因此，将后一个关系应用于函数 (3.8) 可得公式 (3.7)。

为证明 (3.9，我们将关系 (3.2) 中的 DST矩阵显式写出

$$\begin{aligned}&\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\begin{pmatrix}-u-v+\mathrm{i}\partial_n & -e^{x_n}\partial_n\\ e^{-x_n} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}\mathrm{i} & e^{x_n}\partial_n\\ -e^{-x_n} & u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}u-v+\mathrm{i}\partial_n & e^{-x_n}\\ -e^{x_n}\partial_n & \mathrm{i}\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -e^{-x_n}\\ e^{x_n}\partial_n & -u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}\mathbb{U}_{n-1,n}(v).\end{aligned} \tag{3.10}$$

首先，提取 (1,2) 矩阵元所对应的等式。也就是说，取最左侧矩阵的第一行和最右侧矩阵的第二列

$$\begin{aligned}&\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\begin{pmatrix}-u-v+\mathrm{i}\partial_n & -e^{x_n}\partial_n\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}e^{x_n}\partial_n\\ u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}u-v+\mathrm{i}\partial_n & e^{-x_n}\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}-e^{-x_n}\\ -u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}\mathbb{U}_{n-1,n}(v).\end{aligned} \tag{3.11}$$

接下来变换右端的行和列

$$\begin{pmatrix}u-v+\mathrm{i}\partial_n & e^{-x_n}\end{pmatrix}=e^{-\mathrm{i}vx_n}\begin{pmatrix}u+\mathrm{i}\partial_n & e^{-x_n}\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}vx_n}, \tag{3.12}$$

$$\begin{pmatrix}-e^{-x_n}\\ -u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}=e^{-\mathrm{i}vx_n}\begin{pmatrix}-e^{-x_n}\\ -u+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}vx_n}. \tag{3.13}$$

注意，变换后的行与矩阵 $L_n(u)$ 的第一行重合，而变换后的列与矩阵 $\sigma_2\,L_n^t(-u)\,\sigma_2$ 的第二列重合

$$L_n(u)=\begin{pmatrix}u+\mathrm{i}\partial_n & e^{-x_n}\\ -e^{x_n} & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2\,L_n^t(-u)\,\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -e^{-x_n}\\ e^{x_n} & -u+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

此外，回想一下，根据定义

$$\mathbb{T}_n(u)=L_n(u)\,\mathbb{T}_{n-1}(u)\,\sigma_2\,L_n^t(-u)\,\sigma_2=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_n(u) & \mathbb{B}_n(u)\\ \mathbb{C}_n(u) & \mathbb{D}_n(u)\end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

因此，对公式右端进行变换3.11) 后，我们得到算子 $\mathbb{B}_n(u)$

$$\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\begin{pmatrix}-u-v+\mathrm{i}\partial_n & -e^{x_n}\partial_n\end{pmatrix}\,\mathbb{T}_{n-1}(u)\,\begin{pmatrix}e^{x_n}\partial_n\\ u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}$$
$$= e^{-\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{B}_n(u)\,e^{\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v). \quad (3.16)$$

如果我们将此算子恒等式作用于一个不依赖于 x_n 的函数，则左侧的导数 ∂_n 消失

$$\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\begin{pmatrix}-u-v & 0\end{pmatrix}\,\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{n-1}(u) & \mathbb{B}_{n-1}(u)\\ \mathbb{C}_{n-1}(u) & \mathbb{D}_{n-1}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ u-v\end{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$$
$$= e^{-\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{B}_n(u)\,e^{\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}). \quad (3.17)$$

化简左侧后，我们得到公式

$$(v^2-u^2)\,e^{\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\mathbb{B}_{n-1}(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \mathbb{B}_n(u)\,e^{\mathrm{i}vx_n}\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}), \quad (3.18)$$

这与所述关系（3.9）一致。

最后，我们指出，初始矩阵关系（3.10）在指数渐近光滑函数空间上成立 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$，参见命题 6。因此，交织关系（3.9）同样成立。在第7.2 节中，我们证明积分表示（3.8）绝对收敛，并对其给出估计（命题 1）。特别地，这一估计意味着特征函数属于空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$（推论 7），从而证明了上述构造的合理性。

4 巴克斯特算子与哈密顿量的可交换性

巴克斯特算子通过限制条件和极限与单值化算子（3.1）相关

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) = \lim_{x_0\to\infty}\mathbb{U}_{n0}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)}. \quad (4.1)$$

具体而言，它由积分算子给出

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\,\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n) \quad (4.2)$$

其核

$$\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{z}_{n+1}\,\exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n+\underline{\boldsymbol{y}}_n-2\underline{\boldsymbol{z}}_{n+1}\big)$$
$$-\sum_{j=1}^{n}(e^{z_j-x_j}+e^{z_j-y_j}+e^{x_j-z_{j+1}}+e^{y_j-z_{j+1}})\Big) \quad (4.3)$$
$$\times\big(1+\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\big(1-\beta e^{-z_1}\big)^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta),$$

在假设 $\operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0)$ 下收敛。核的显式表达式由公式 (3.5) 得出。对于适当的函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$，极限与积分的交换是合理的，参见第 5 条推论，见第 7.5 节。

本节证明巴克斯特算子与哈密顿量对易

$$\mathbb{B}_n(u)\,\mathbb{Q}_n(\lambda) = \mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_n(u). \tag{4.4}$$

首先，回顾单值化算子的交织关系（3.2）

$$\begin{aligned}
&\mathbb{U}_{n0}(v) \begin{pmatrix} -u-v+\mathrm{i}\partial_0 & -e^{x_0}\partial_0 \\ e^{-x_0} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathbb{T}_n(u) \begin{pmatrix} \mathrm{i} & e^{x_0}\partial_0 \\ -e^{-x_0} & u-v+\mathrm{i}\partial_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u-v+\mathrm{i}\partial_0 & e^{-x_0} \\ -e^{x_0}\partial_0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \mathbb{T}_n(u) \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -e^{-x_0} \\ e^{x_0}\partial_0 & -u-v+\mathrm{i}\partial_0 \end{pmatrix} \mathbb{U}_{n0}(v).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

考虑（1，2）中元素的等式，并从两侧作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$，使左侧的导数 ∂_0 消失

$$\begin{aligned}
&(-u-v)(u-v)\,\mathbb{U}_{n0}(v)\,\mathbb{B}_n(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n) \\
&\qquad = \begin{pmatrix} u-v+\mathrm{i}\partial_0 & e^{-x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_n(u) & \mathbb{B}_n(u) \\ \mathbb{C}_n(u) & \mathbb{D}_n(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-x_0} \\ -u-v+\mathrm{i}\partial_0 \end{pmatrix} \mathbb{U}_{n0}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

接下来取极限 $x_0 \to \infty$。右侧的指数函数 e^{-x_0} 消失。此外，单值化算子核的显式公式（3.5）表明等式

$$\lim_{x_0\to\infty} \partial_0\,\mathbb{U}_{n0}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n) = 0. \tag{4.7}$$

在第 7.5 节中，针对适当的函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$，已证明了这一点，见推论5。因此，在极限 $x_0 \to \infty$ 下，可以从（ e^{-x_0} 和 ∂_0 ）的右端移去，从而将该关系化为所需形式4.6

$$\lim_{x_0\to\infty} \mathbb{U}_{n0}(v)\,\mathbb{B}_n(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n) = \mathbb{B}_n(u) \lim_{x_0\to\infty} \mathbb{U}_{n0}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n). \tag{4.8}$$

关于上述所有关系成立所依赖的函数空间的技术细节见第 7.5 节。具体而言，根据推论 5 ，巴克斯特算子在增长至多为多项式的指数温和光滑函数空间上定义良好，其形式为 $x_n \to \infty$，我们将其记为 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$。此外，巴克斯特算子将该空间映射到 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$，而算子 $\mathbb{B}_n(u)$在该空间上保持不变，见推论6。

5 Baxter 方程

本节我们推导 Baxter 方程

$$\mathbb{Q}_n(u)\,\mathbb{B}_n(u) = -\frac{\beta(g+\mathrm{i}u)}{2u}\,\mathbb{Q}_n(u-\mathrm{i}). \tag{5.1}$$

推导分为两部分。首先，我们将一些已知的含有 $\mathcal{R}$-和$\mathcal{K}$-算子的局部关系改写成合适的形式。其次，我们利用这些关系，对涉及单值化算子和单值矩阵的某个整体关系进行约化。

改写局部关系。 首先，我们改写交织关系（1.27）

$$\mathcal{R}_{12}(v)\, L_1(u)\, M_2(u-v) = M_2(u-v)\, L_1(u)\, \mathcal{R}_{12}(v) \tag{5.2}$$

以等价形式

$$U_2^{-1}\, \mathcal{R}_{12}(v)\, L_1(u)\, U_2 = V_2(u-v)\, L_1(u)\, \mathcal{R}_{12}(v)\, V_2^{-1}(u-v) \tag{5.3}$$

使用矩阵 $M(\lambda)$ 的因式分解表达式

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^{x}\partial_x & \mathrm{i} \end{pmatrix} = U\, V(\lambda), \tag{5.4}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}e^{-x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -e^{x}\partial_x & \mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

接下来，利用算子的显式表达式 $\mathcal{R}_{12}(v)$ (1.28)，我们将关系式 (5.3) 改写如下

$$U_2^{-1}\, \mathcal{R}_{12}(v)\, L_1(u)\, U_2 = \begin{pmatrix} (u-v)\mathcal{R}_{12}(v) - \mathrm{i}\mathcal{R}_{12}(v-\mathrm{i}) & -\mathrm{i}(u-v)\, e^{-x_1}\, \mathcal{R}_{12}(v) \\ -e^{x_1}\, \mathcal{R}_{12}(v+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{21}}\partial_2 \mathcal{R}_{12}(v) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

因此，在点 $v = u$ 处可得

$$U_2^{-1}\, \mathcal{R}_{12}(u)\, L_1(u)\, U_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\mathcal{R}_{12}(u-\mathrm{i}) & 0 \\ -e^{x_1}\, \mathcal{R}_{12}(u+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{21}}\partial_2 \mathcal{R}_{12}(u) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

这里，简写为 vity 我们记作 $x_{21} \equiv x_2 - x_1$。类似地，对于算子 $\mathcal{R}^*_{12}(u)$（1.69），我们有 e

$$\widetilde{U}_2^{-1}\, \mathcal{R}^*_{12}(u)\, \widetilde{L}_1(u)\, \widetilde{U}_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}e^{x_2+x_1}\partial_2 \mathcal{R}^*_{12}(u) & -e^{-x_1}\, \mathcal{R}^*_{12}(u+\mathrm{i}) \\ 0 & \mathrm{i}\mathcal{R}^*_{12}(u-\mathrm{i}) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

其中

$$\widetilde{U} = \sigma_2 U \sigma_2, \qquad \widetilde{L}(u) = \sigma_2 L^t(-u)\sigma_2. \tag{5.9}$$

同样的分解（5.4）可用于将反射方程（2.2）

$$\mathcal{K}(v)\, M^t(-u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M(u-v)\sigma_2 = M(u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2\, \mathcal{K}(v) \tag{5.10}$$

化为如下形式

$$U^{-1}\, \mathcal{K}(v)\, M^t(-u-v)\, K(u)\, \widetilde{U} = V(u-v)\, K(u)\, \sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2\, \mathcal{K}(v)\, \sigma_2 V^{-1}(u-v)\sigma_2. \tag{5.11}$$

注意，右端在 $v = u$ 处有奇点

$$\sigma_2 V^{-1}(u-v)\sigma_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & \frac{\mathrm{i}}{u-v}e^{x}\partial_x \\ 0 & \frac{1}{u-v} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

最后一个关系式可以改写为

$$
\begin{aligned}
&U^{-1}\,\mathcal{K}(v)\,M^{t}(-u-v)\,K(u)\,\widetilde{U}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{e^{x}\partial_x}{u-v} & \frac{\mathrm{i}}{u-v}\end{pmatrix} K(u)\begin{pmatrix}(u-v)\mathcal{K}(v) & -\mathcal{K}(v)\,e^{x}\partial_x-e^{-x}\,\mathcal{K}(v)\\ -\mathrm{i}(u-v)e^{x}\partial_x\mathcal{K}(v) & \mathrm{i}\big(\partial_x\mathcal{K}(v)+\mathcal{K}(v)\partial_x\big)-(u+v)\mathcal{K}(v)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

只考虑这个矩阵等式的第一行，并令 $v=u$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} U^{-1}\,\mathcal{K}(u)\,M^{t}(-2u)\,K(u)\,\widetilde{U}\\
&\qquad=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} K(u)\begin{pmatrix}0 & -\mathcal{K}(u)\,e^{x}\partial_x-e^{-x}\,\mathcal{K}(u)\\ 0 & \mathrm{i}\big(\partial_x\mathcal{K}(u)+\mathcal{K}(u)\partial_x\big)-2u\,\mathcal{K}(u)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

然后利用反射算子的显式公式（2.1），我们可以将右端改写成更简单的形式

$$
\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} U^{-1}\,\mathcal{K}(u)\,M^{t}(-2u)\,K(u)\,\widetilde{U}=\beta(g+\mathrm{i}u)\,\mathcal{K}(u-\mathrm{i})\,\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}.
\tag{5.15}
$$

Baxter 方程的推导基于所得的局部关系（5.7）、（5.8）和（5.15）。

化简整体关系。 回顾单值化算子和矩阵的定义

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{n0}(v)&=\mathcal{R}_{n0}(v)\cdots\mathcal{R}_{10}(v)\,\mathcal{K}_0(v)\,\mathcal{R}^{*}_{10}(v)\cdots\mathcal{R}^{*}_{n0}(v),\\
\mathbb{T}_{n}(u)&=L_n(u)\cdots L_1(u)\,K(u)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\widetilde{L}_n(u).
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

将它们与对易关系（1.68）结合起来

$$
\mathcal{R}^{*}_{12}(v)\,M^{t}_{2}(-u-v)\,L_1(u)=L_1(u)\,M^{t}_{2}(-u-v)\,\mathcal{R}^{*}_{12}(v)
\tag{5.17}
$$

我们得到以下整体关系

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{n0}(v)\,M^{t}_{0}(-u-v)\,\mathbb{T}_{n}(u)&=\mathcal{R}_{n0}(v)\,L_n(u)\cdots\mathcal{R}_{10}(v)\,L_1(u)\\
&\quad\times\mathcal{K}_0(v)\,M^{t}_{0}(-u-v)\,K(u)\,\mathcal{R}^{*}_{10}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\,\cdots\,\mathcal{R}^{*}_{n0}(v)\,\widetilde{L}_n(u).
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

现在从左侧考虑矩阵的 (1,2) 元素，代入 $v=u$ 并进行相应的约化，以得到巴克斯特算子 (4.1)

$$
\lim_{x_0\to\infty}\mathbb{U}_{n0}(u)\begin{pmatrix}-2u+\mathrm{i}\partial_{x_0} & -e^{x_0}\partial_{x_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{B}_n(u)\\ \mathbb{D}_n(u)\end{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x}_n)=-2u\,\mathbb{Q}_n(u)\,\mathbb{B}_n(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n).
\tag{5.19}
$$

最后一个乘积正是巴克斯特方程 (5.1) 中所需的形式

下一步是从右端提取相同的矩阵元（5.18），但在此之前，我们先将其分成三部分

$$
\begin{aligned}
&\Big[\mathcal{R}_{n0}(v)\,L_n(u)\cdots\mathcal{R}_{10}(v)\,L_1(u)\,U_0\Big]\\
&\qquad\times\Big[U_0^{-1}\mathcal{K}_0(v)\,M^{t}_{0}(-u-v)\,K(u)\,\widetilde{U}_0\Big]\,\Big[\widetilde{U}_0^{-1}\,\mathcal{R}^{*}_{10}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\,\cdots\,\mathcal{R}^{*}_{n0}(v)\,\widetilde{L}_n(u)\Big],
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

并利用已知的局部关系分别变换这些部分。

首先，利用局部关系（5.7），我们改写方括号中的第一个乘积 ts

$$U_0\,U_0^{-1}\,\mathcal{R}_{n0}(u)\,L_n(u)\cdots\mathcal{R}_{10}(u)\,L_1(u)\,U_0=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}e^{-x_0}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\mathcal{R}_{n0}(u-\mathrm{i}) & 0\\ -e^{x_n}\,\mathcal{R}_{n0}(u+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{0n}}\partial_0\mathcal{R}_{n0}(u)\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\mathcal{R}_{10}(u-\mathrm{i}) & 0\\ -e^{x_1}\,\mathcal{R}_{10}(u+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{01}}\partial_0\mathcal{R}_{10}(u)\end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

在极限下 $x_0\to\infty$ 指数 e^{-x_0} 消失，因此得到下面的第一行 w

$$\lim_{x_0\to\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\mathcal{R}_{n0}(u)\,L_n(u)\cdots\mathcal{R}_{10}(u)\,L_1(u)\,U_0$$
$$=\lim_{x_0\to\infty}(-\mathrm{i})^n\,\mathcal{R}_{n0}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}_{10}(u-\mathrm{i})\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

由于结果与向量（1 0）成正比，因此在方括号中的第二个乘积（5.20）中，我们也只需提取第一行。这使我们可以使用局部关系（5.15）

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}U_0^{-1}\,\mathcal{K}_0(u)\,M_0^t(-2u)\,K(u)\,\widetilde{U}_0=\beta(g+\mathrm{i}u)\,\mathcal{K}_0(u-\mathrm{i})\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

同样，由于结果与向量（0 1）成正比，因此在方括号中的最后一个乘积（5.20）中，我们只需取（2，2）项。利用局部关系（5.8），得到

$$\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{U}_0^{-1}\,\mathcal{R}^*_{10}(u)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n0}(u)\,\widetilde{L}_n(u)\,\widetilde{U}_0\,\widetilde{U}_0^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\mathrm{i}^n\,\mathcal{R}^*_{10}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}^*_{n0}(u-\mathrm{i}). \quad (5.24)$$

将所有结果汇总起来，我们得到以下关系

$$-2u\,\mathbb{Q}_n(u)\,\mathbb{B}_n(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_n)$$
$$=\beta(g+\mathrm{i}u)\lim_{x_0\to\infty}\mathcal{R}_{n0}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}_{10}(u-\mathrm{i})\,\mathcal{K}_0(u-\mathrm{i})\,\mathcal{R}^*_{10}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}^*_{n0}(u-\mathrm{i})\,\varphi(\boldsymbol{x}_n), \quad (5.25)$$

这等价于所述的巴克斯特方程（5.1）。

与上一节完全类似，这里使用的所有关系都在空间 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 上成立。唯一微妙之处在于，巴克斯特算子 $\mathbb{Q}_n(u)$ 的谱参数应满足 Im $u\in(-g,0)$，见推论 5。因此，右侧出现 $\mathbb{Q}_n(u-\mathrm{i})$ 要求更强的条件 Im $u\in(1-g,0)$，而只有在 $g>1$ 时该条件才非空。

6 $\mathbb{D}(u)$ 对升算子的作用

稍作修改上一节的推导后，我们可以计算 $\mathbb{D}_n(u)$ 对升算子的作用

$$\mathbb{D}_n(u)\quad{}_n(u)=-\beta(g+\mathrm{i}u)\quad{}_n(u-\mathrm{i}). \quad (6.1)$$

我们从等式（3.2）开始

$$M_n(u-v)\,\mathbb{T}_{n-1}(u)\,\sigma_2 M_n^t(-u-v)\sigma_2\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v)$$
$$=\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,M_n^t(-u-v)\,\mathbb{T}_{n-1}(u)\,\sigma_2 M_n(u-v)\sigma_2. \quad (6.2)$$

接下来，我们从右侧代入单值化算子和单值化矩阵的定义（5.16），并利用交织关系（5.17）得到

$$
\begin{aligned}
&M_n(u-v)\,\mathbb{T}_{n-1}(u)\,\sigma_2 M_n^t(-u-v)\sigma_2\,\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\\
&\qquad=\mathcal{R}_{n-1,n}(v)\,L_{n-1}(u)\cdots\mathcal{R}_{1n}(v)\,L_1(u)\,\mathcal{K}_n(v)\,M_n^t(-u-v)\,K(u)\\
&\qquad\qquad\times\mathcal{R}^*_{1n}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(v)\,\widetilde{L}_{n-1}(u)\,\sigma_2 M_n(u-v)\sigma_2. \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

两边乘以向量

$$
e^{\mathrm{i}vx_n}\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}M_n^{-1}(u-v)=\frac{e^{\mathrm{i}vx_n}}{\mathrm{i}(u-v)}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{x_n} & 1\end{pmatrix} \qquad (6.4)
$$

我们得到等式

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\,e^{\mathrm{i}vx_n}\,\sigma_2 M_n^t(-u-v)\sigma_2\,e^{-\mathrm{i}vx_n}\,e^{\mathrm{i}vx_n}\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\\
&=e^{\mathrm{i}vx_n}\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}M_n^{-1}(u-v)\,\mathcal{R}_{n-1,n}(v)\,L_{n-1}(u)\cdots\mathcal{R}_{1n}(v)\,L_1(u)\,\mathcal{K}_n(v)\,M_n^t(-u-v)\,K(u)\\
&\qquad\qquad\times\mathcal{R}^*_{1n}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(v)\,\widetilde{L}_{n-1}(u)\,\sigma_2 M_n(u-v)\sigma_2, \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

或者将所有矩阵显式写出

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}\mathrm{i} & -e^{-x_n}\\ e^{x_n}(\partial_n-\mathrm{i}v) & -u+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}vx_n}\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\\
&\quad=\frac{e^{\mathrm{i}vx_n}}{\mathrm{i}(u-v)}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{x_n} & 1\end{pmatrix}\mathcal{R}_{n-1,n}(v)\,L_{n-1}(u)\cdots\mathcal{R}_{1n}(v)\,L_1(u)\,\mathcal{K}_n(v)\,M_n^t(-u-v)\,K(u)\\
&\qquad\qquad\times\mathcal{R}^*_{1n}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(v)\,\widetilde{L}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}\mathrm{i} & e^{x_n}\partial_n\\ -e^{x_n} & u-v+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}. \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

现在我们在两边的右侧乘以向量 $(0\ 1)^t$，并作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$，这样右侧的导数 ∂_n 就消失了

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}-e^{-x_n}\\ -u+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}vx_n}\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})\\
&\quad=-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}vx_n}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{x_n} & 1\end{pmatrix}\mathcal{R}_{n-1,n}(v)\,L_{n-1}(u)\cdots\mathcal{R}_{1n}(v)\,L_1(u)\,\mathcal{K}_n(v)\,M_n^t(-u-v)\,K(u)\\
&\qquad\qquad\times\mathcal{R}^*_{1n}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(v)\,\widetilde{L}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}). \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

根据定义，

$$
\mathbb{D}_n(u)=\begin{pmatrix}-e^{x_n} & 0\end{pmatrix}\mathbb{T}_{n-1}(u)\begin{pmatrix}-e^{-x_n}\\ -u+\mathrm{i}\partial_n\end{pmatrix},\qquad {}_n(v)=e^{\mathrm{i}vx_n}\mathbb{U}_{n-1,n}(v)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})}, \qquad (6.8)
$$

因此，最后一个表达式的左端在点 $v=u$ 处正如所需（6.1）。此外，右端同样适用推导 Baxter 方程时所用的方法。首先，由于（ $v=u$ 5.7），代入

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{x_n} & 1\end{pmatrix}\mathcal{R}_{n-1,n}(u)\,L_{n-1}(u)\cdots\mathcal{R}_{1n}(u)\,L_1(u)\,U_n &= \begin{pmatrix}-\mathrm{i}e^{x_n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}e^{-x_n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \times\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\mathcal{R}_{n-1,n}(u-\mathrm{i}) & 0\\ -e^{x_{n-1}}\,\mathcal{R}_{n-1,n}(u+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{n-1\,n}}\partial_0\mathcal{R}_{n-1,n}(u)\end{pmatrix}&\cdots\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\mathcal{R}_{1n}(u-\mathrm{i}) & 0\\ -e^{x_1}\,\mathcal{R}_{1n}(u+\mathrm{i}) & \mathrm{i}e^{x_{n1}}\partial_n\mathcal{R}_{1n}(u)\end{pmatrix}\\ &= (-\mathrm{i})^n\,e^{x_n}\,\mathcal{R}_{n-1,n}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}_{1n}(u-\mathrm{i})\,\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

这就使我们选取下一个乘积中包含反射算子的第一行，从而可以将 $v=u$ 置于此处，并使用关系（5.15）

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}U_n^{-1}\,\mathcal{K}_n(u)\,M_n^t(-2u)\,K(u)\,\widetilde{U}_n = \beta(g+\mathrm{i}u)\,\mathcal{K}_n(u-\mathrm{i})\,\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}.\tag{6.10}$$

因此，对于最后一行中含有 $\mathcal{R}^*$-算子的乘积（6.7），我们只需要（2,2）元素。由（5.8）可知，它等于

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{U}_n^{-1}\,\mathcal{R}^*_{1n}(u)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(u)\,\widetilde{L}_{n-1}(u)\,\widetilde{U}_{n-1}\,\widetilde{U}_{n-1}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}&\\ = \mathrm{i}^{n-1}\,\mathcal{R}^*_{1n}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(u-\mathrm{i}).&\end{aligned}\tag{6.11}$$

将所有内容汇总后，我们得到以下关系

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_n(u)\quad{}_n(u)\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}) = -\beta(g+\mathrm{i}u)\,e^{\mathrm{i}(u-\mathrm{i})x_n}\,\mathcal{R}_{n-1,n}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}_{1n}(u-\mathrm{i})\,\mathcal{K}_n(u-\mathrm{i})&\\ \times\,\mathcal{R}^*_{1n}(u-\mathrm{i})\cdots\mathcal{R}^*_{n-1,n}(u-\mathrm{i})\,\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1}),&\end{aligned}\tag{6.12}$$

这与所需的公式（6.1）一致。

最后需要指出，初始等式及所有用到的交织关系在空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 上成立，假设 $\operatorname{Im}u>1-g$，参见第 7.3–7.4节。

7 界

在本节中，我们将推导特征函数的界，并研究函数空间，在这些空间上，本文讨论的算子均有定义，且它们之间的关系成立。

7.1 引理

以下两个引理（借鉴自 [BC，第4.1节。1]）背后的想法是，双指数函数 e^{-e^y} 是阶跃函数的光滑版本 $\theta(-y)$，见图2。

引理 1。设 $s>0$、 $\kappa\in\mathbb{R}$ 和 $x\geq 0$。则

$$\int_0^\infty dy\;y^{s-1}\,e^{\kappa y-e^{y+x}}\leq C(s,\kappa)\,e^{-e^x},\tag{7.1}$$

并且该积分关于 $x\geq 0$ 一致收敛。

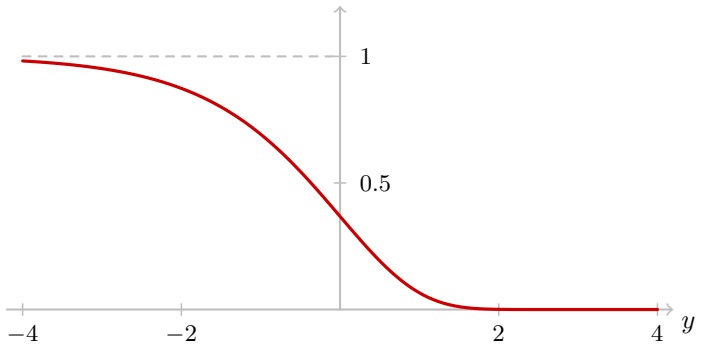

图 2： e^{-e^y}的图像

证明。 该界也可以等价地写为

$$\int_0^\infty dy\; y^{s-1}\, e^{\kappa y - e^x(e^y-1)} \le C(s,\kappa). \tag{7.2}$$

由于 $e^x \ge 1$ 且 $e^y - 1 \ge y^2/2$ 对于 $y \ge 0$，我们有

$$\int_0^\infty dy\; y^{s-1}\, e^{\kappa y - e^x(e^y-1)} \le \int_0^\infty dy\; y^{s-1}\, e^{\kappa y - \frac{1}{2}y^2}. \tag{7.3}$$

根据假设 $s > 0$，最后一个积分是收敛的。此外，根据不等式 $e^{-e^{y+x}} \le e^{-e^y}$，初始积分关于 x 一致收敛。 □

引理 2. 设 $m \in \mathbb{N}_0$、 $\kappa \ge 0$ 且 x_1、 $x_2 \in \mathbb{R}$。则

$$\int_{\mathbb{R}} dy\; |y|^m\, \exp\big(\kappa(x_1 - y) - e^{x_1 - y} - e^{y - x_2}\big) \\ \le P(|x_1|, |x_2|)\; \exp\left(\left[\kappa\, \frac{x_1 - x_2}{2} - e^{\frac{x_1 - x_2}{2}}\right] \theta(x_1 - x_2)\right), \tag{7.4}$$

其中 $P(|x_1|, |x_2|) \equiv P(|x_1|, |x_2|; m, \kappa)$ 是关于 $|x_j|$的多项式。该积分关于来自 $\mathbb{R}$紧子集的 x_1、 x_2 一致收敛。

证明。 首先，考虑 $x_1 \le x_2$的情形。我们需要证明该积分有多项式界

$$\int_{\mathbb{R}} dy\; |y|^m\, e^{\kappa(x_1 - y) - e^{x_1 - y} - e^{y - x_2}} \le P(|x_1|, |x_2|). \tag{7.5}$$

我们将其分为三部分

$$\int_{\mathbb{R}} dy = \int_{-\infty}^{x_1} dy + \int_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_2}^{\infty} dy, \tag{7.6}$$

并分别对它们进行估计。对于第一项，使用不等式 $e^{-e^{y-x_2}} \le 1$，并将积分变量替换为 $z = x_1 - y$

$$\int_{-\infty}^{x_1} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \le \int_{-\infty}^{x_1} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}}$$
$$= \int_0^{\infty} dz\ |x_1-z|^m\, e^{\kappa z-e^z} \le \int_0^{\infty} dz\ (|x_1|+z)^m\, e^{\kappa z-e^z}. \quad (7.7)$$

最后一个积分是关于 $|x_1|$的多项式，因为展开括号后，我们得到如下类型的积分

$$\int_0^{\infty} dz\ z^\ell\, e^{\kappa z-e^z} < \infty. \quad (7.8)$$

B此外，其收敛显然在 x_1，x_2 上一致，其中 $\mathbb{R}$ 取遍紧子集。

（7.6）中的第三个积分可类似地用 $|x_2|$ 的多项式界定（注意$e^{\kappa(x_1-y)} \le e^{\kappa(x_1-x_2)} \le 1$ 当 $y \ge x_2$）时，并且它也在 x_1，x_2 上一致收敛。最后，（7.6）中的第二个积分可作如下估计

$$\int_{x_1}^{x_2} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \le \int_{x_1}^{x_2} dy\ |y|^m \le (x_2-x_1)|x_2|^m, \quad (7.9)$$

由此完成不等式（7.5）的证明。

接下来，考虑 $x_1 \ge x_2$。在这种情况下，我们需要证明

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \le P(|x_1|,|x_2|)\, e^{\kappa\frac{x_1-x_2}{2}-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}}. \quad (7.10)$$

为此，将积分拆分为两部分

$$\int_{\mathbb{R}} dy = \int_{-\infty}^{\frac{x_1+x_2}{2}} dy + \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{\infty} dy. \quad (7.11)$$

在第一个中，我们 利用不等式 $e^{-e^{y-x_2}} \le 1$并将积分变量换为 $z = (x_1+x_2)/2 - y$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x_1+x_2}{2}} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \le \int_{-\infty}^{\frac{x_1+x_2}{2}} dy\ |y|^m\, e^{\kappa(x_1-y)-e^{x_1-y}}$$
$$= e^{\kappa\frac{x_1-x_2}{2}} \int_0^{\infty} dz \left|\frac{x_1+x_2}{2}-z\right|^m e^{\kappa z-e^{z+\frac{x_1-x_2}{2}}}. \quad (7.12)$$

由于 $x_1 \ge x_2$，我们可以使用引理 1 来估计这类积分

$$\int_0^{\infty} dz\ z^\ell\, e^{\kappa z-e^{z+\frac{x_1-x_2}{2}}} \le C(\ell,\kappa)\, e^{-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}}, \quad (7.13)$$

这些项是在展开 (7.12) 中的括号后出现的。因此，我们按所需方式估计了 (7.11) 中的第一项，同样的论证也可用于第二项。最后，对于 x_1，x_2取自 $\mathbb{R}$ 的紧子集时，我们有 $|x_1 \pm x_2| \le C_\pm$，这使得上述积分关于 x_1的收敛是一致的，x_2。

□

推论 2。 设 $m \in \mathbb{N}_0$、 κ_1、 $\kappa_2 \geq 0$ 和 x_1、 $x_2 \in \mathbb{R}$。则

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\ \exp\bigl(\kappa_1(x_1-y)+\kappa_2(y-x_2)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}\bigr) \\ \leq P(|x_1|,|x_2|)\ \exp\left(\left[(\kappa_1+\kappa_2)\,\frac{x_1-x_2}{2}-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}\right]\theta(x_1-x_2)\right), \quad (7.14)$$

其中 $P(|x_1|,|x_2|) \equiv P(|x_1|,|x_2|;\, m,\kappa_1,\kappa_2)$ 是关于 $|x_j|$ 的多项式，且该积分的收敛对于取自 $\mathbb{R}$ 紧子集的 x_1, x_2 一致。

证明。 首先，考虑 $\kappa_1 \geq \kappa_2$ 的情形。于是

$$\begin{aligned} e^{\kappa_1(x_1-y)+\kappa_2(y-x_2)} &= e^{\kappa_2(x_1-x_2)+(\kappa_1-\kappa_2)(x_1-y)} \\ &\leq e^{\kappa_2(x_1-x_2)\,\theta(x_1-x_2)+(\kappa_1-\kappa_2)(x_1-y)}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

最后一个不等式由假设 $\kappa_2 \geq 0$ 得出。将其应用于所讨论的积分，可得

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\, e^{\kappa_1(x_1-y)+\kappa_2(y-x_2)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \\ \leq e^{\kappa_2(x_1-x_2)\,\theta(x_1-x_2)} \int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\, e^{(\kappa_1-\kappa_2)(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}. \quad (7.16)$$

The 最后一个积分可利用引理2来估计，从而得到所述估计。

$\kappa_1 \leq \kappa_2$ 的情形经过变量替换 $y = x_1+x_2-z$ 和对其中的括号展开后，可归结为前一种情形

$$|y|^m = |x_1+x_2-z|^m \leq (|x_1|+|x_2|+|z|)^m. \quad (7.17)$$

推论的证明至此完成。 □

回顾 GL Toda 升算子

$$\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\ \exp\left(\mathrm{i}\lambda\bigl(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}\bigr) - \sum_{j=1}^{n-1}\bigl(e^{x_j-y_j}+e^{y_j-x_{j+1}}\bigr)\right)\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}). \quad (7.18)$$

注意，其核由我们在前面的论述中遇到过的函数组成。我们引入连续多项式有界函数空间

$$\mathcal{P}_n = \bigl\{\varphi(\boldsymbol{x}_n) \in C(\mathbb{R}^n)\colon \quad |\varphi(\boldsymbol{x}_n)| \leq P(|x_1|,\dots,|x_n|), \quad P \text{ — polynomial}\bigr\}. \quad (7.19)$$

下面的推论说明，升算子在变量个数增加的意义下，对这个空间具有“保持不变”的作用。该结论是 [BC，命题 4.1 的弱化版本。3]。

推论 3。 令 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in \mathcal{P}_{n-1}$。则 $\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{P}_n$。

证明。 由定义（7.18）以及对 $\varphi \in \mathcal{P}_{n-1}$ 的界，我们得到

$$\Bigl|\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n)\Bigr| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\ \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\bigl(e^{x_j-y_j}+e^{y_j-x_{j+1}}\bigr)\right) P(|y_1|,\dots,|y_{n-1}|). \quad (7.20)$$

将多项式写成单项式 $|y_1|^{m_1}\cdots|y_{n-1}|^{m_{n-1}}$ 的形式，我们得到因式分解积分之和

$$\prod_{j=1}^{n-1}\int_{\mathbb{R}} dy_j\,|y_j|^{m_j}\,\exp\bigl(-e^{x_j-y_j}-e^{y_j-x_{j+1}}\bigr). \tag{7.21}$$

根据引理 2，它们有多项式界，由此得到所需的估计

$$\Bigl|\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n)\Bigr| \le \widetilde{P}(|x_1|,\dots,|x_n|). \tag{7.22}$$

此外，根据同一引理，上述积分关于 x_j 在 $\mathbb{R}$的紧子集上均匀收敛，因此函数 $\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n)$ 关于 $\boldsymbol{x}_n$连续。 □

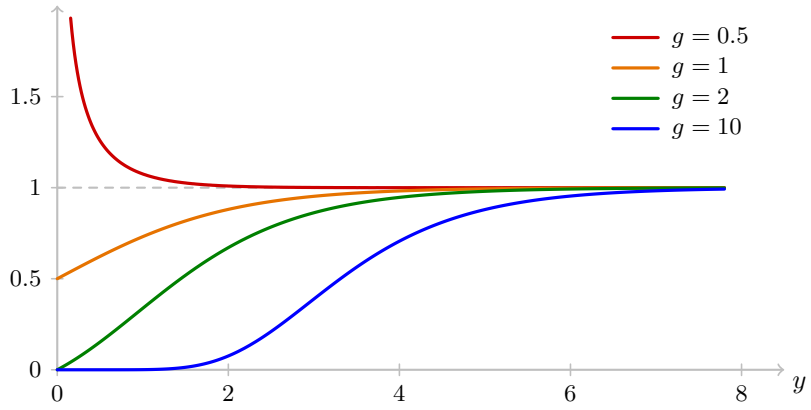

图 3：$(1+e^{-y})^{-g}\,(1-e^{-y})^{g-1}$ 的图像

在 BC Toda链中，我们还会遇到函数 $(1+e^{-y})^{-g}\,(1-e^{-y})^{g-1}$，其中 $y, g>0$，其图像如图 3 所示。如果 $g\ge 1$，那么它也表示阶跃函数的光滑版本；而在 $0<g<1$ 的情形下，我们应考虑到它在 $1/y^{1-g}$ 较小时按 y增长。

引理 3. 设 $m\in\mathbb{N}_0$, $g>0$, $\kappa\ge 0$ 和 $x\in\mathbb{R}$。则

$$\int_0^\infty dy\,y^m\,(1+e^{-y})^{-g}\,(1-e^{-y})^{g-1}\,\exp\bigl(\kappa(y+x)-e^{y+x}\bigr) \le P(|x|)\,\exp\bigl(\bigl[\kappa x-e^x\bigr]\,\theta(x)\bigr), \tag{7.23}$$

其中 $P(|x|)\equiv P(|x|;\ m、\ g、\ \kappa)$ 是关于 $|x|$ 的多项式。该积分关于 x 在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛。

证明。 $g\ge 1$ 的情形很简单，因为我们可以使用不等式

$$(1+e^{-y})^{-g}\,(1-e^{-y})^{g-1}\le 1 \tag{7.24}$$

写出这个界

$$\int_0^\infty dy\,y^m\,(1+e^{-y})^{-g}\,(1-e^{-y})^{g-1}\,e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \le \int_0^\infty dy\,y^m\,e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}}. \tag{7.25}$$

接下来，如果 $x \geq 0$，那么结论（7.23）由引理 1 得出。如果 $x \leq 0$，那么我们将上述积分分成两部分

$$\int_0^\infty dy = \int_0^{-x} dy \; + \int_{-x}^\infty dy. \tag{7.26}$$

这些部分由关于 $|x|$ 的多项式界定

$$\begin{aligned} \int_0^{-x} dy \; y^m \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} &\leq \int_0^{-x} dy \; y^m = \frac{|x|^{m+1}}{m+1}, \\ \int_{-x}^\infty dy \; y^m \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} &= \int_0^\infty dz \; (z-x)^m \, e^{\kappa z - e^z} \leq P(|x|), \end{aligned} \tag{7.27}$$

其中，最后一个不等式可通过展开括号得到。

还需分析 $0 < g < 1$ 的情形。我们仍有 $(1+e^{-y})^{-g} \leq 1$，因此

$$\int_0^\infty dy \; y^m \, (1+e^{-y})^{-g} \, (1-e^{-y})^{g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq \int_0^\infty dy \; y^m \, (1-e^{-y})^{g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}}, \tag{7.28}$$

但需要注意 $y = 0$ 处可能出现的奇点。由于

$$y \in [0,1]: \qquad 1 - e^{-y} \geq y - \frac{y^2}{2} \geq \frac{y}{2}, \tag{7.29}$$

$$y \in [1,\infty): \qquad 1 - e^{-y} \geq 1 - e^{-1}, \tag{7.30}$$

我们可以将 右侧的积分（7.28）分成两部分，分别进行估计

$$\int_0^1 dy \; y^m \, (1-e^{-y})^{g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq 2^{1-g} \int_0^1 dy \; y^{m+g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}}, \tag{7.31}$$

$$\int_1^\infty dy \; y^m \, (1-e^{-y})^{g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq (1-e^{-1})^{g-1} \int_1^\infty dy \; y^m \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}}. \tag{7.32}$$

首先，假设 $x \geq 0$。那么，对于上述两个积分，我们都可以使用引理 1。事实上，考虑第一个积分

$$\int_0^1 dy \; y^{m+g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq \int_0^\infty dy \; y^{m+g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq C \, e^{\kappa x - e^x}. \tag{7.33}$$

第二个积分也同理。由此，在 $x \geq 0$ 的情形下，我们得到所需的界（7.23）。

在剩下的情形 $x \leq 0$ 下，对于第一个积分，我们只需写成

$$\int_0^1 dy \; y^{m+g-1} \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq e^\kappa \int_0^1 dy \; y^{m+g-1} = \frac{e^\kappa}{m+g}, \tag{7.34}$$

而对于第二个积分，我们再次利用不等式（7.27），将其界定为关于 $|x|$的多项式

$$\int_1^\infty dy \; y^m \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq \int_0^\infty dy \; y^m \, e^{\kappa(y+x)-e^{y+x}} \leq P(|x|). \tag{7.35}$$

最后，很容易检查出上述估计意味着在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上一致收敛于 x 。这就完成了引理的证明。 □

7.2 特征函数的界

7.2.1 单粒子

在 $n=1$ 的情况下，特征函数由公式给出

$$\Psi_\lambda(x)=\frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\ln\beta}^{\infty}dy\;e^{\mathrm{i}\lambda(x-2y)-e^{y-x}}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1},\tag{7.36}$$

其中 $\beta>0$ 和 $g=1/2+\alpha/\beta>0$。为简单起见，以下假设 $\lambda\in\mathbb{R}$。显然，在这种情况下，积分是绝对收敛的，但对于 $n\geq 2$ 的情形，我们需要对其给出一些界。

回顾一下，特征函数满足方程

$$\big(-\partial_x^2+2\alpha\,e^{-x}+\beta^2\,e^{-2x}\big)\Psi_\lambda(x)=\lambda^2\,\Psi_\lambda(x).\tag{7.37}$$

因此，w 我们预计它按 $x\to-\infty$ 衰减。以下界符合这一预期 .

引理 4. 设 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 λ、 $x\in\mathbb{R}$。则 $\Psi_\lambda(x)$ 关于 x 光滑，且满足以下界

$$\big|\partial_x^k\,\Psi_\lambda(x)\big|\leq\frac{P(|x|,|\lambda|)}{|\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)|}\,e^{[k(\ln\beta-x)-\beta e^{-x}]\,\theta(\ln\beta-x)},\tag{7.38}$$

其中 P是多项式，其系数取决于 k、 β、 g。特别地，当 $k=0$ 时，它不依赖于 λ

$$\big|\Psi_\lambda(x)\big|\leq\frac{P(|x|)}{|\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)|}\,e^{-\beta e^{-x}\,\theta(\ln\beta-x)}.\tag{7.39}$$

证明。 将 (7.36) 中的被积函数记为

$$F(x,y)=e^{\mathrm{i}\lambda(x-2y)-e^{y-x}}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}.\tag{7.40}$$

其 k阶导数为以下各项之和

$$\partial_x^k\,F(x,y)=\sum_i p_i(\lambda)\,e^{\ell_i(y-x)}\,F(x,y)\tag{7.41}$$

其中 p_i 为多项式， $0\leq\ell_i\leq k$为整数。由于 $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{\ln\beta}^{\infty}dy\,\big|\partial_x^k\,F(x,y)\big|&\leq\sum_i|p_i|\int_{\ln\beta}^{\infty}dy\;e^{\ell_i(y-x)-e^{y-x}}\,(1+\beta e^{-y})^{-g}\,(1-\beta e^{-y})^{g-1}\\&=\sum_i|p_i|\int_0^{\infty}dz\;e^{\ell_i(z+\ln\beta-x)-e^{z+\ln\beta-x}}\,(1+e^{-z})^{-g}\,(1-e^{-z})^{g-1},\end{aligned}\tag{7.42}$$

其中，在过渡到最后一行时，我们更换了积分变量 $y=z+\ln\beta$。由引理 3，最后一个求和中的积分关于 x一致收敛，且有界如下:

$$\int_0^{\infty}dz\;e^{\ell_i(z+\ln\beta-x)-e^{z+\ln\beta-x}}\,(1+e^{-z})^{-g}\,(1-e^{-z})^{g-1}\leq P(|x|)\,e^{[\ell_i(\ln\beta-x)-\beta e^{-x}]\,\theta(\ln\beta-x)},\tag{7.43}$$

其中 P 是多项式。此外，由于 $0 \le \ell_i \le k$

$$e^{\ell_i(\ln\beta - x)\,\theta(\ln\beta - x)} \le e^{k(\ln\beta - x)\,\theta(\ln\beta - x)}. \tag{7.44}$$

因此，我们得到以下估计

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\, \left|\partial_x^k F(x,y)\right| \le P(|x|,|\lambda|)\, e^{[k(\ln\beta - x) - \beta e^{-x}]\,\theta(\ln\beta - x)}. \tag{7.45}$$

由于对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$，函数 $\partial_x^k F(x,\ y)$ 关于 $x,\ y$ 连续，并且上述积分在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上关于 x 一致收敛，因此我们可以交换导数与积分

$$\partial_x^k \Psi_\lambda(x) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda)}\, \partial_x^k \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\, F(x,y) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda)} \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\, \partial_x^k F(x,y). \tag{7.46}$$

因此，估计式（7.45）对 $\left|\partial_x^k \Psi_\lambda(x)\right|$ 也成立。

最后请注意，在 $k = 0$ 的情况下，我们只需

$$\left|\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda)\, \Psi_\lambda(x)\right| \le \Gamma(g)\, \Psi_0(x). \tag{7.47}$$

这就得到了界（7.39），其中多项式不依赖于 λ。 □

7.2.2 多粒子

任意 n的特征函数可表示为

$$\begin{aligned}\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda_n}}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda_n)} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\ \exp\Bigg(\mathrm{i}\lambda_n\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{z}}_{n-1} - 2\underline{\boldsymbol{y}}_n\big) \\ - \sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{y_j - x_j} + e^{x_j - y_{j+1}} + e^{y_j - z_j} + e^{z_j - y_{j+1}}\big) - e^{y_n - x_n}\Bigg) \\ \times\, (1 + \beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n - g}\, (1 - \beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n + g - 1}\, \theta(y_1 - \ln\beta)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1}).\end{aligned} \tag{7.48}$$

由于它满足方程

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j - x_{j+1}} + 2\alpha e^{-x_1} + \beta^2 e^{-2x_1}\right) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\right) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{7.49}$$

我们预期，当 $x_1 \to -\infty$ 或 $x_j - x_{j+1} \to \infty$ 对某个 j成立时，它会衰减。命题1 符合这一预期。下文对于 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$ 我们使用标准记号

$$\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} = \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}. \tag{7.50}$$

此外，为简洁起见，我们记

$$C(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda_j)|}. \tag{7.51}$$

命题 1. 设 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$ 和 $\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。则 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 在 $\boldsymbol{x}_n$ 上光滑，且满足以下界

$$\left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, P(|x_1|,\dots,|x_n|,|\lambda_n|)\, \exp\Bigg(\left[k_1(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}\right] \theta(\ln\beta - x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[(k_j + k_{j+1}) \frac{x_j - x_{j+1}}{2} - e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}} \right] \theta(x_j - x_{j+1}) \Bigg), \quad (7.52)$$

其中 P是多项式，其系数取决于 $\boldsymbol{k}_n$、β、g。特别地，对于 $\boldsymbol{k}_n = (0、\dots\dots、0)$，它不依赖于 λ_n

$$\left|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, P(|x_1|,\dots,|x_n|) \times \exp\Bigg(-\beta e^{-x_1}\, \theta(\ln\beta - x_1) - \sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}}\, \theta(x_j - x_{j+1}) \Bigg). \quad (7.53)$$

证明。 情形 $n = 1$ 与引理 4一致。下面进行归纳，假设我们已经证明了命题对 $n-1$ 个粒子成立。那么在递归公式（7.48）中，特别有

$$\left|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1})\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_{n-1})\, P(|z_1|,\dots,|z_{n-1}|). \quad (7.54)$$

现在考虑对 $\boldsymbol{z}_{n-1}$ 在（7.48）中的积分结果

$$G(\boldsymbol{y}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\ \exp\Bigg(\mathrm{i}\lambda_n (\underline{\boldsymbol{z}}_{n-1} - \underline{\boldsymbol{y}}_n) - \sum_{j=1}^{n-1} (e^{y_j - z_j} + e^{z_j - y_{j+1}}) \Bigg) \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1}). \quad (7.55)$$

这个积分等同于 GL Toda 升算子（7.18）的作用

$$G(\boldsymbol{y}_n) = \left[\Lambda_n(-\lambda_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}\right](\boldsymbol{y}_n). \quad (7.56)$$

根据归纳假设，函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1})$ 是连续的，并且具有多项式界（7.54），因此根据推论 3， $G(\boldsymbol{y}_n)$ 也具有相同性质，即

$$\left|G(\boldsymbol{y}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_{n-1})\, P(|y_1|,\dots,|y_n|). \quad (7.57)$$

Next 我们分析完整的 BC 特征函数（7.48）。公式（7.48中的被积函数 ）

$$F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda_n}}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda_n)}\ \exp\Bigg(\mathrm{i}\lambda_n (\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_n) - \sum_{j=1}^{n-1} (e^{y_j - x_j} + e^{x_j - y_{j+1}}) - e^{y_n - x_n} \Bigg) \times (1 + \beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n - g}\, (1 - \beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda_n + g - 1}\, \theta(y_1 - \ln\beta)\, G(\boldsymbol{y}_n) \quad (7.58)$$

在 $\boldsymbol{x}_n$ 上光滑，并且（根据上述论证）在 $\boldsymbol{y}_n$ 上连续（定义域为 $y_1 > \ln\beta$）。由（7.57），我们还得到

$$\left|F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \exp\Bigg(-\sum_{j=1}^{n-1} (e^{y_j - x_j} + e^{x_j - y_{j+1}}) - e^{y_n - x_n} \Bigg) \times (1 + \beta e^{-y_1})^{-g}\, (1 - \beta e^{-y_1})^{g-1}\, \theta(y_1 - \ln\beta)\, P(|y_1|,\dots,|y_n|). \quad (7.59)$$

利用这个估计，我们来证明，对于任意 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n \left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, P(|x_1|, \dots, |x_n|, |\lambda_n|)\, \exp\Bigg(\left[k_1(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}\right] \theta(\ln\beta - x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[(k_j + k_{j+1}) \frac{x_j - x_{j+1}}{2} - e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}} \right] \theta(x_j - x_{j+1}) \Bigg), \quad (7.60)$$

且该积分关于 $\boldsymbol{x}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上一致收敛。因此，一致收敛意味着我们可以交换求导与积分的次序

$$\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, \partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n), \quad (7.61)$$

这给出了所述的界（7.52），我们还可由一致收敛推知 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 的光滑性。

为证 明界（7.60），计算 F (7.58）的导数。一阶导数为

$$\partial_{x_j} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) = (\mathrm{i}\lambda_n + e^{y_j - x_j} - e^{x_j - y_{j+1}}) F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n), \quad (7.62)$$

其中，对 $j = n$，我们令 $y_{n+1} = \infty$。一般而言，对于 $k \in \mathbb{N}$

$$\partial_{x_j}^k F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) = \sum_i p_i(\lambda_n)\, e^{\ell_i(y_j - x_j) + m_i(x_j - y_{j+1})}\, F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n) \quad (7.63)$$

其中多项式 p_i 和整数 $0 \le \ell_i,\ m_i \le k$ （事实上，$\ell_i + m_i \le k$）。由于 F 具有分解形式（7.58），我们可以写成

$$\left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right| \le \sum_i \tilde{p}_i(|\lambda_n|)\, e^{\ell_{i,1}(y_1 - x_1)} \prod_{j=2}^{n} e^{\ell_{i,j}(y_j - x_j) + m_{i,j-1}(x_{j-1} - y_j)} \left|F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right|, \quad (7.64)$$

其中，$\tilde{p}_i$ 再次表示多项式，而 $0 \le \ell_{i,\ j},\ m_{i,\ j} \le k_j$。将最后一个不等式与 (7.59) 结合并重新整理若干因子后，我们得到

$$\begin{aligned} \left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right| \le{}& C(\boldsymbol{\lambda}_n) \sum_i \tilde{p}_i(|\lambda_n|)\, P(|y_1|, \dots, |y_n|) \\ & \times e^{\ell_{i,1}(y_1 - x_1) - e^{y_1 - x_1}} (1 + \beta e^{-y_1})^{-g} (1 - \beta e^{-y_1})^{g-1}\, \theta(y_1 - \ln\beta) \\ & \times \prod_{j=2}^{n} e^{\ell_{i,j}(y_j - x_j) + m_{i,j-1}(x_{j-1} - y_j) - e^{y_j - x_j} - e^{x_{j-1} - y_j}}. \end{aligned} \quad (7.65)$$

将多项式 P按单项式 $|y_1|^{s_1} \cdots |y_n|^{s_n}$展开后，我们对所讨论的积分进行估计

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n \left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} F(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_n)\right| \quad (7.66)$$

其估计值不超过以下类型积分之和

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\ |y_1|^{s_1}\, e^{\ell_1(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{g-1}$$

$$\times\prod_{j=2}^{n}\int_{\mathbb{R}} dy_j\ |y_j|^{s_j}\, e^{\ell_j(y_j-x_j)+m_{j-1}(x_{j-1}-y_j)-e^{y_j-x_j}-e^{x_{j-1}-y_j}}, \quad (7.67)$$

其中 s_j，ℓ_j，$m_j\in\mathbb{N}_0$ 且 ℓ_j，$m_j\le k_j$。最后一个重积分可以因式分解，因此只需分别求出各因子的界。

考虑式（7.67）中的第一个一维积分。将积分变量平移 $y_1=\tilde{y}_1+\ln\beta$ 后，可利用引理3进行估计

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\ |y_1|^{s_1}\, e^{\ell_1(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{g-1}$$

$$\le P(|x_1|)\, e^{[\ell_1(\ln\beta-x_1)-\beta e^{-x_1}]\,\theta(\ln\beta-x_1)}, \quad (7.68)$$

其中 P 是多项式。此外，由于 $0\le\ell_1\le k_1$

$$e^{\ell_1(\ln\beta-x_1)\,\theta(\ln\beta-x_1)}\le e^{k_1(\ln\beta-x_1)\,\theta(\ln\beta-x_1)}. \quad (7.69)$$

接下来，由推论2，式（7.67）第二行中的积分有如下界

$$\int_{\mathbb{R}} dy_j\ |y_j|^{s_j}\, e^{\ell_j(y_j-x_j)+m_{j-1}(x_{j-1}-y_j)-e^{y_j-x_j}-e^{x_{j-1}-y_j}}$$

$$\le P(|x_{j-1}|,|x_j|)\, e^{\left[(m_{j-1}+\ell_j)\frac{x_{j-1}-x_j}{2}-e^{\frac{x_{j-1}-x_j}{2}}\right]\theta(x_{j-1}-x_j)}, \quad (7.70)$$

其中 P 仍为多项式。由于 $0\le\ell_j$，$m_j\le k_j$，我们还有

$$(m_{j-1}+\ell_j)\,\frac{x_{j-1}-x_j}{2}\,\theta(x_{j-1}-x_j)\le(k_{j-1}+k_j)\,\frac{x_{j-1}-x_j}{2}\,\theta(x_{j-1}-x_j). \quad (7.71)$$

上述不等式给出了积分（7.67）的界

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\ |y_1|^{s_1}\, e^{\ell_1(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{g-1}$$

$$\times\prod_{j=2}^{n}\int_{\mathbb{R}} dy_j\ |y_j|^{s_j}\, e^{\ell_j(y_j-x_j)+m_{j-1}(x_{j-1}-y_j)-e^{y_j-x_j}-e^{x_{j-1}-y_j}}$$

$$\le P(|x_1|,\dots,|x_n|)\,\exp\Bigg(\left[k_1(\ln\beta-x_1)-\beta e^{-x_1}\right]\theta(\ln\beta-x_1)$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\left[(k_{j-1}+k_j)\,\frac{x_{j-1}-x_j}{2}-e^{\frac{x_{j-1}-x_j}{2}}\right]\theta(x_{j-1}-x_j)\Bigg). \quad (7.72)$$

结合（7.65），即可得到所需的估计（7.60）。还要注意，引理 3和推论 2 均保证所有积分在x_j 的紧子集上关于 $\mathbb{R}$一致收敛。

最后，在 $\boldsymbol{k}_n=(0,\dots,0)$的情形下，由递归公式（7.48）可得

$$\left|C^{-1}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right|\le C^{-1}(0,\dots,0)\,\Psi_{0,\dots,0}(\boldsymbol{x}_n). \quad (7.73)$$

这证明界中的多项式（7.53）不依赖于 λ_n。 □

7.3 交织关系

回顾 Toda 和 DST Lax 矩阵的定义

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^{x} & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^{x}\partial_x & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{7.74}$$

以及积分 $\mathcal{K}$-和 $\mathcal{R}$-算子

$$\begin{aligned} \big[\mathcal{K}(v)\,\varphi\big](x) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}}{\Gamma(g-\mathrm{i}v)} \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\, \exp\big(-2\mathrm{i}vy - e^{y-x}\big)\,\big(1+\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v-g} \\ \times \big(1-\beta e^{-y}\big)^{-\mathrm{i}v+g-1}\,\varphi(-y), \end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\big[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y) - e^{x_1-y} - e^{y-x_2}\big)\,\varphi(y,x_1). \tag{7.76}$$

本节中，我们研究一个自然的函数空间，在该空间上所有这些对象都保持不变，并且它们之间的交织关系成立。

记 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 为光滑函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的空间，这些函数及其所有导数均具有指数界，即对每个 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$，存在常数 a，$b \geq 0$ 使得

$$\big|\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}\varphi(\boldsymbol{x}_n)\big| \leq a\, e^{b(|x_1|+\ldots+|x_n|)}. \tag{7.77}$$

另外，为简便起见，记作 $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\mathbb{R})$。

命题 2。 空间 $\mathcal{E}$ 具有以下性质：

(1) 它是一个线性空间；

(2) 它在指数函数乘法和微分下保持不变

$$\varphi \in \mathcal{E}, \quad v \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}: \qquad e^{vx}\,\varphi \in \mathcal{E}, \qquad \varphi^{(k)} \in \mathcal{E}, \tag{7.78}$$

并且，特别是，*Lax* 矩阵元素的作用 (7.74)

$$\varphi \in \mathcal{E}, \quad u \in \mathbb{C}: \qquad \big(L(u)\big)_{rs}\,\varphi \in \mathcal{E}, \qquad \big(M(u)\big)_{rs}\,\varphi \in \mathcal{E}; \tag{7.79}$$

(3) 它在 $\mathcal{K}$算子的作用下保持不变 (7.75)

$$\varphi \in \mathcal{E}, \quad \operatorname{Im} v > -g: \qquad \mathcal{K}(v)\,\varphi \in \mathcal{E}, \tag{7.80}$$

相应的积分 $[\mathcal{K}(v)\,\varphi](x)$ 从 $\mathbb{R}$ 的紧子集出发，在 x 中一致绝对收敛；此外，对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$，函数 $\partial_x^k\,[\mathcal{K}(v)\,\varphi](x)$ 在域 $\operatorname{Im} v > -g$ 中关于 v 解析。

此外，空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathcal{R}$算子的作用下保持不变 (7.76)

$$\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2), \quad v \in \mathbb{C}: \qquad \mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2), \tag{7.81}$$

且相应的积分 $[\mathcal{R}_{12}(v)\ \varphi](x_1,x_2)$ 关于来自 $\mathbb{R}$ 的紧子集的 x_1, x_2 一致绝对收敛。

证明。 关于 $\mathcal{E}$ 的前两个性质很容易验证，而最后一个性质由引理3推出。具体而言，对于 $\varphi \in \mathcal{E}$， $[\mathcal{K}(v)\,\varphi](x)$ 的被积函数（见（7.75））关于 x， y 是光滑的，并且关于 v是解析的。此外，对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$，其导数满足以下估计：

$$\begin{aligned}&\left|\partial_x^k\, e^{-2\mathrm{i}vy-e^{y-x}}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v-g}\left(1-\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v+g-1}\varphi(-y)\right| \\ &\qquad\qquad \le C\, e^{a(y-\ln\beta)+b|x|+2\operatorname{Im}v\,y-e^{y-x}}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{\operatorname{Im}v-g}\left(1-\beta e^{-y}\right)^{\operatorname{Im}v+g-1}, \quad (7.82)\end{aligned}$$

其中 C， a， $b \ge 0$ 不依赖于 v。取复平面中任意紧子集内的 v，使得

$$-g < V_1 \le \operatorname{Im} v \le V_2. \quad (7.83)$$

那么，对于 $y \in (\ln\,\beta,\ \infty)$，我们有不等式

$$\left(1-\beta e^{-y}\right)^{\operatorname{Im}v+g-1} \le \left(1-\beta e^{-y}\right)^{V_1+g-1}, \quad (7.84)$$

$$\left(1+\beta e^{-y}\right)^{\operatorname{Im}v-g} \le \left(1+\beta e^{-y}\right)^{\operatorname{Im}v-V_1}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{V_1-g} \le 2^{V_2-V_1}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{V_1-g}. \quad (7.85)$$

利用它们，我们可以用函数对 v 中（7.82）的右端进行一致估计

$$C'\, e^{a'(y-\ln\beta)+b|x|-e^{y-x}}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{-V_1-g}\left(1-\beta e^{-y}\right)^{V_1+g-1}. \quad (7.86)$$

因此，由引理 3 可知，左端（7.82）的积分具有指数界

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\left|\partial_x^k\, e^{-2\mathrm{i}vy-e^{y-x}}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v-g}\left(1-\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v+g-1}\varphi(-y)\right| \le C''\, e^{b'|x|}. \quad (7.87)$$

此外，引理 3 指出，左侧的积分关于 x一致收敛。因此，我们可以交换求导与积分的次序

$$\partial_x^k\left[\mathcal{K}(v)\,\varphi\right](x) = \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\;\partial_x^k\, e^{-2\mathrm{i}vy-e^{y-x}}\left(1+\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v-g}\left(1-\beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v+g-1}\varphi(-y). \quad (7.88)$$

结合界（7.87），可知 $[\mathcal{K}(v)\,\varphi](x)$ 属于空间 $\mathcal{E}$，并且关于 x一致收敛。此外，由于界（7.86）关于 v一致，函数 $\partial_x^k\left[\mathcal{K}(v)\,\varphi\right](x)$ 在 v 中解析（定义域 $\operatorname{Im} v > -g$）。

关于 $\mathcal{R}$-算子的陈述，其证明与此类似，只需使用推论 2 而非引理 3。

□

上述性质以及 $\mathcal{K}$-和 $\mathcal{R}$-算子的显式公式，使我们能够证明以下交织关系。

命题 3。 矩阵关系

$$\mathcal{K}(v)\,M^t(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M(u-v)\sigma_2 = M(u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2\,\mathcal{K}(v). \quad (7.89)$$

在 $\mathcal{E}$ 上成立，对所有满足限制条件 虚部$v > -g$ 的 u、 $v \in \mathbb{C}$ 均成立。

命题 4。 矩阵关系

$$\mathcal{R}_{12}(v)\, L_1(u)\, M_2(u-v) = M_2(u-v)\, L_1(u)\, \mathcal{R}_{12}(v) \tag{7.90}$$

在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ 上对所有 u、$v \in \mathbb{C}$ 均成立。

注 6. B y ""矩阵关系"是指对应于四个矩阵元素的四个恒等式。

命题3的证明。在第2 节中，我们证明反射方程（7.89）等价于以下三个关系

$$\mathcal{K}(v)\, e^{-x} = e^{x} \partial_x\, \mathcal{K}(v), \tag{7.91}$$

$$\mathcal{K}(v)\, \left[(\mathrm{i}v + \partial_x)\, e^{-x} - \beta^2\, e^{x} \partial_x\right] = \left[(-\mathrm{i}v - \partial_x)\, e^{x} \partial_x + 2\alpha + \beta^2\, e^{-x}\right] \mathcal{K}(v), \tag{7.92}$$

$$\mathcal{K}(v)\, \left[(v - \mathrm{i}\partial_x)^2 + 2\alpha\, e^{x} \partial_x + \beta^2\, (e^{x} \partial_x)^2\right] = \left[(v - \mathrm{i}\partial_x)^2 + 2\alpha\, e^{-x} + \beta^2\, e^{-2x}\right] \mathcal{K}(v), \tag{7.93}$$

由于反射算子的核的显式公式（7.75），这些关系在形式上成立

$$K(x,y) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}v}}{\Gamma(g - \mathrm{i}v)}\, e^{-2\mathrm{i}vy - e^{y-x}} \left(1 + \beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v - g} \left(1 - \beta e^{-y}\right)^{-\mathrm{i}v + g - 1}, \tag{7.94}$$

其中 $g = 1/2 + \alpha/\beta$。尚需说明以下几步的合理性：

(1) 过程中涉及的所有积分都收敛；

(2) 导数 ∂_x, ∂_x^2 可以与关于 y 的积分互换；

(3) 分部积分产生的边界项消失。

首先，注意到根据命题 2 上述所有关系在 $\mathcal{E}$ 上都有定义。为证明第一个关系（7.91），我们需要将导数 ∂_x 与关于 y 的积分次序互换

$$\partial_x \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\; K(x,y)\, \varphi(-y) = \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\; \partial_x\, K(x,y)\, \varphi(-y) = e^{-x} \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\; K(x,y)\, e^{y}\, \varphi(-y), \tag{7.95}$$

其中 $\varphi \in \mathcal{E}$。根据命题 2，函数 $\tilde{\varphi}(y) = e^{-y}\varphi(y)$ 属于 $\mathcal{E}$。因此，根据同一命题，积分 $\left[\mathcal{K}(v)\, \tilde{\varphi}\right](x)$ 在 x 上一致收敛，这使我们可以交换求导与积分的次序。对其余两个关系（7.92）、（7.93）的右端也可采用相同的论证。

最后，为了使左侧分部积分（最多两次）后的边界项消失，我们假设 $\mathrm{Im}\, v > 2 - g$，从而

$$\lim_{y \to \ln\beta +} K(x,y) = \lim_{y \to \ln\beta +} \partial_y K(x,y) = 0, \tag{7.96}$$

见（7.94）。这证明了关系（7.92）、（7.93）。为放宽对 v 的假设，回顾命题2 指出，对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$，函数$\partial_x^k \left[\mathcal{K}(v)\, \varphi\right](x)$在 v 满足限制条件 $\mathrm{Im}\ v > -g$时是解析的。因此，一旦证明了上述关系在假设 $\mathrm{Im}\, v > 2 - g$的条件下成立，就可以进行解析延拓。

□

命题4的证明。所讨论的矩阵关系等价于以下关系

$$e^{\pm x_1}\,\mathcal{R}_{12}(v) = \mathcal{R}_{12}(v)\,e^{\pm x_2}, \tag{7.97}$$

$$\partial_{x_1}\,\mathcal{R}_{12}(v) = \mathcal{R}_{12}(v)\,(\mathrm{i}v - e^{x_2-x_1} + \partial_{x_2}), \tag{7.98}$$

$$\partial_{x_2}\,\mathcal{R}_{12}(v) = e^{-x_2}\,\mathcal{R}_{12}(v)\,e^{x_1}, \tag{7.99}$$

$$\mathcal{R}_{12}(v)\,\partial_{x_1} = \mathcal{R}_{12}(v)\,(\mathrm{i}v - e^{x_2-x_1}) + e^{-x_2}\,\mathcal{R}_{12}(v)\,e^{x_1}, \tag{7.100}$$

由于 $\mathcal{R}$-算子核的显式公式，形式上仍成立（7.76）。证明的其余部分使用命题 2 ，与前一个证明完全类似。 □

在 BC Toda 链中，我们还会遇到修正后的 Lax 矩阵

$$\widetilde{L}(u) = \sigma_2\,L^t(-u)\,\sigma_2, \qquad \widetilde{M}(u) = \sigma_2\,M^t(-u)\,\sigma_2 \tag{7.101}$$

以及带有反射坐标的 $\mathcal{R}$-算子

$$\mathcal{R}^*_{12}(v) = r_1\,\mathcal{R}_{12}(v)\,r_1, \qquad [r_1\varphi](x_1,x_2) = \varphi(-x_1,x_2). \tag{7.102}$$

利用转置、反射，并乘以 σ_2 ，可以轻松从（7.90）得到以下关系。

推论 4. 矩阵关系

$$\mathcal{R}_{12}(v)\,\widetilde{M}_2(u+v)\,\widetilde{L}_1(u) = \widetilde{L}_1(u)\,\widetilde{M}_2(u+v)\,\mathcal{R}_{12}(v), \tag{7.103}$$

$$\mathcal{R}^*_{12}(v)\,M^t_2(-u-v)\,L_1(u) = L_1(u)\,M^t_2(-u-v)\,\mathcal{R}^*_{12}(v), \tag{7.104}$$

$$\mathcal{R}^*_{12}(v)\,\widetilde{L}_1(u)\,\widetilde{M}^t_2(v-u) = \widetilde{M}^t_2(v-u)\,\widetilde{L}_1(u)\,\mathcal{R}^*_{12}(v) \tag{7.105}$$

对所有 $u, v \in \mathbb{C}$，在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ 上成立。

注 7。 由于界（7.77）在 x_j 中是因式分解的，因此很容易证明，在上述所有陈述中，都可以将 $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\mathbb{R})$ 或 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ 替换为 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$， $k \geq 2$，假设 $\mathcal{K}$-算子和$\mathcal{R}$-算子在额外变量上作为恒等算子作用。例如，对于任意 $j \in \{1,...,k\}$，算子 $\mathcal{K}_j(v)$ 在函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_k) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ 上保持不变（其中反射算子的下标表示其在哪个变量上非平凡地作用）。

命题 2 和最后一个注释意味着具有不同下标的算子具有可交换性。

引理 5。 算子 $L_1(u_1)$ 、 $M_2(u_2)$ 、 $\mathcal{K}_3(u_3)$ 和 $\mathcal{R}_{45}(u_4)$ 在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^5)$ 上两两可交换，对于所有满足限制条件 $\operatorname{Im} u_3 > -g$的 $u_j \in \mathbb{C}$ 均成立。

证明。 L_1 和 M_2 的矩阵元由指数函数 $e^{\pm x_1}$、$e^{\pm x_2}$ 以及导数 ∂_{x_1}、∂_{x_2}组成。它们彼此可交换，因为来自 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^5)$ 的函数是光滑的。

$\mathcal{K}$算子和 $\mathcal{R}$算子与 Lax 矩阵的可交换性源于它们与导数的可交换性 ∂_{x_1}， ∂_{x_2}而这由空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^5)$ 在微分运算下的不变性所保证。此外，由于相应积分的绝对收敛，算子 $\mathcal{K}_3$ 和 $\mathcal{R}_{45}$ 的作用也是可交换的。 □

7.4 单值矩阵与算子

GL 系统的单值矩阵和单值化算子定义为

$$T_n(u) = L_n(u)\cdots L_1(u), \qquad U_{na}(v) = \mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v). \tag{7.106}$$

由命题 2 和注记 7 可知，函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_n,\ x_a) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 在单值矩阵和单值化算子的作用下保持不变。反复应用命题 4和引理 5可得以下结论。

命题 5. 矩阵关系

$$U_{na}(v)\,T_n(u)\,M_a(u-v) = M_a(u-v)\,T_n(u)\,U_{na}(v) \tag{7.107}$$

对所有 $u, v \in \mathbb{C}$，在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上成立。

证明. 证明采用对 n 进行归纳的方法。情形 $n = 1$ 与命题4相同。考虑归纳步骤 $n-1 \to n$，并假设我们已证明恒等式

$$U_{n-1,a}(v)\,T_{n-1}(u)\,M_a(u-v) = M_a(u-v)\,T_{n-1}(u)\,U_{n-1,a}(v). \tag{7.108}$$

根据定义，

$$U_{na}(v) = \mathcal{R}_{na}(v)\,U_{n-1,a}(v), \qquad T_n(u) = L_n(u)\,T_{n-1}(u), \tag{7.109}$$

因此，将（7.108）乘以 $\mathcal{R}_{na}(v)\,L_n(u)$。乘积在$\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$上定义良好，因为该空间在所有算子的作用下保持不变。

根据引理5 ，算子 L_n 和 $U_{n-1,\ a}$ 在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$上可交换，因此从左侧得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{na}(v)\,L_n(u)\,U_{n-1,a}(v)\,T_{n-1}(u)\,M_a(u-v)\\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\,U_{n-1,a}(v)\,L_n(u)\,T_{n-1}(u)\,M_a(u-v) = U_{na}(v)\,T_n(u)\,M_a(u-v),\end{aligned} \tag{7.110}$$

如所需（7.107）。从右侧可以使用命题4

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{na}(v)\,L_n(u)\,M_a(u-v)\,T_{n-1}(u)\,U_{n-1,a}(v)\\ &= M_a(u-v)\,L_n(u)\,\mathcal{R}_{na}(v)\,T_{n-1}(u)\,U_{n-1,a}(v),\end{aligned} \tag{7.111}$$

因为对任意 $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$，函数 $\big(T_{n-1}(u)\big)_{rs}\,U_{n-1,\ a}(v)\,\varphi$ 也属于 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$。接下来只需再次应用引理5 来交换算子 $\mathcal{R}_{na}$ 和 T_{n-1}

$$\begin{aligned}&M_a(u-v)\,L_n(u)\,\mathcal{R}_{na}(v)\,T_{n-1}(u)\,U_{n-1,a}(v)\\ &= M_a(u-v)\,L_n(u)\,T_{n-1}(u)\,\mathcal{R}_{na}(v)\,U_{n-1,a}(v) = M_a(u-v)\,T_n(u)\,U_{na}(v),\end{aligned} \tag{7.112}$$

whe关于最后一个表达式，它与命题右端（1.30 ）. □

现在回顾单值矩阵和单值化算子的定义，适用于 BC 系统

$$\mathbb{T}_n(u) = L_n(u)\cdots L_1(u)\,K(u)\,\widetilde{L}_1(u)\cdots\widetilde{L}_n(u), \tag{7.113}$$

$$\mathbb{U}_{na}(v) = \mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\,\mathcal{K}_a(v)\,\mathcal{R}^*_{1a}(v)\cdots\mathcal{R}^*_{na}(v). \tag{7.114}$$

根据命题 2 这些算子在函数空间 $\varphi(\boldsymbol{x}_n,\ x_a) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上不变地作用。此外，命题 3、4，连同推论4 和引理5，推出以下关系。

命题 6。 矩阵关系

$$\mathbb{U}_{na}(v)\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u) = M_a(u-v)\, \mathbb{T}_n(u)\, \widetilde{M}_a(u+v)\, \mathbb{U}_{na}(v) \tag{7.115}$$

在限制条件 $\operatorname{Im} v > -g$下，对所有 $u, v \in \mathbb{C}$，等式在 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上成立。

证明。对 n 进行归纳证明。基础情形 $n = 0$ 与命题 3 一致。考虑归纳步骤 $n-1 \to n$。根据定义，

$$\mathbb{U}_{na}(v) = \mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, \mathcal{R}^*_{na}(v), \qquad \mathbb{T}_n(u) = L_n(u)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{L}_n(u). \tag{7.116}$$

将其代入（7.115）的左侧，得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{U}_{na}(v)\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u) \\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v) \Big[\mathcal{R}^*_{na}(v)\, M_a^t(-u-v)\, L_n(u)\Big]\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u). \end{aligned} \tag{7.117}$$

方括号强调了这样一部分：在此处可以使用与 $\mathcal{R}^*$-算子（7.104）的关系。也就是说，

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v) \Big[\mathcal{R}^*_{na}(v)\, M_a^t(-u-v)\, L_n(u)\Big]\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u) \\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v) \Big[L_n(u)\, M_a^t(-u-v)\, \mathcal{R}^*_{na}(v)\Big]\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u) \\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, L_n(u)\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u) \Big[\mathcal{R}^*_{na}(v)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u)\Big], \end{aligned} \tag{7.118}$$

在推导到最后一行时，我们使用了这样的事实： $\mathcal{R}^*$-算子与 $\mathbb{T}_{n-1}(u)$ 中的所有矩阵都可交换（引理 5）。同样，在最后一行的方括号内，可以使用与$\mathcal{R}^*$-算子的关系（7.105）。此外，注意算子 $\mathbb{U}_{n-1,a}(v)$ 与 $L_n(u)$ 可交换。因此，

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{na}(v) \Big[\mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, L_n(u)\Big]\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u) \Big[\mathcal{R}^*_{na}(v)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u)\Big] \\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\, L_n(u) \Big[\mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u)\Big]\, \widetilde{L}_n(u)\, \mathcal{R}^*_{na}(v). \end{aligned} \tag{7.119}$$

在最后一个表达式中，方括号内的乘积类似于归纳前一步中所要证明关系（7.115）的左侧。利用归纳假设，得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{na}(v)\, L_n(u) \Big[\mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, M_a^t(-u-v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{M}_a^t(v-u)\Big]\, \widetilde{L}_n(u)\, \mathcal{R}^*_{na}(v) \\ &= \mathcal{R}_{na}(v)\, L_n(u) \Big[M_a(u-v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{M}_a(u+v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\Big]\, \widetilde{L}_n(u)\, \mathcal{R}^*_{na}(v). \end{aligned} \tag{7.120}$$

现在只需借助关系式（ $\mathcal{R}$-算子穿过所有矩阵，并使用关系式（7.90）、（7.103）和引理5。具体而言，

$$\begin{aligned} &\Big[\mathcal{R}_{na}(v)\, L_n(u)\, M_a(u-v)\Big]\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{M}_a(u+v) \Big[\mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, \widetilde{L}_n(u)\Big]\, \mathcal{R}^*_{na}(v) \\ &= M_a(u-v)\, L_n(u) \Big[\mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\Big]\, \widetilde{M}_a(u+v)\, \widetilde{L}_n(u)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, \mathcal{R}^*_{na}(v) \\ &= M_a(u-v)\, L_n(u)\, \mathbb{T}_{n-1}(u) \Big[\mathcal{R}_{na}(v)\, \widetilde{M}_a(u+v)\, \widetilde{L}_n(u)\Big]\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, \mathcal{R}^*_{na}(v) \\ &= M_a(u-v)\, L_n(u)\, \mathbb{T}_{n-1}(u)\, \widetilde{L}_n(u)\, \widetilde{M}_a(u+v)\, \mathcal{R}_{na}(v)\, \mathbb{U}_{n-1,a}(v)\, \mathcal{R}^*_{na}(v). \end{aligned} \tag{7.121}$$

该 第一项与所述关系的右端相同（7.115） . □

7.5 巴克斯特算子

GL和 BC Toda 系统的巴克斯特算子定义如下

$$\begin{aligned} Q_n(v) &= \lim_{x_a\to\infty} \mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)}, \\ \mathbb{Q}_n(v) &= \lim_{x_a\to\infty} \mathcal{R}_{na}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\,\mathcal{K}_a(v)\,\mathcal{R}^*_{1a}(v)\cdots\mathcal{R}^*_{na}(v)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)}, \end{aligned} \tag{7.122}$$

其中，算子乘积的作用仅限于变量 $\boldsymbol{x}_n$ 的函数。这些算子在我们前几节研究过的整个指数温和函数空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 上并未良好定义。不过，可以选取一个合适的子空间。

固定 $j\in\{1,\dots,n\}$。记 $\mathcal{E}_j(\mathbb{R}^n)$ 为光滑函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 所构成的空间，使得对每个 $\boldsymbol{k}_n\in\mathbb{N}_0^n$，都存在常数 a，$b\geq 0$ 和多项式 $P(x_j)$，满足

$$\big|\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}\varphi(\boldsymbol{x}_n)\big| \leq a e^{b(|x_1|+\ldots+|x_{j-1}|+|x_{j+1}|+\ldots+|x_n|)} \times \begin{cases} P(x_j), & x_j\geq 0, \\ e^{b|x_j|}, & x_j\leq 0. \end{cases} \tag{7.123}$$

显然，它是指数温和函数 $\mathcal{E}_j(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 的一个子空间 .

根据巴克斯特算子的定义（7.122），自然可以引入算子 $\mathcal{R}'_{12}(v)$，它按照公式作用于函数 $\varphi(x_1,\ x_2)$

$$\big[\mathcal{R}'_{12}(v)\,\varphi\big](x_1) = \int_{\mathbb{R}} dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}\big)\,\varphi(y,x_1). \tag{7.124}$$

显然，它表示先前研究过的 $\mathcal{R}$-算子的极限

$$\big[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}\big)\,\varphi(y,x_1) \tag{7.125}$$

与 $x_2\to\infty$ 一样，但一如既往，需要确保极限与积分可以交换。此外，不难看出，在 $\operatorname{Im}v<0$ 的假设下，$\mathcal{R}'$-算子在 $\mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$ 上定义良好。与 $\mathcal{R}$-算子相反，它在更大的空间 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ 上并未定义良好。

命题 7。

(1) 空间 $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$ 是线性的，在微分和指数函数乘法下保持不变

$$\varphi\in\mathcal{E}_1(\mathbb{R}),\quad \operatorname{Re}v\leq 0\colon\qquad e^{vx}\varphi\in\mathcal{E}_1(\mathbb{R}). \tag{7.126}$$

(2) 设 $\operatorname{Im}v<0$ 且 $\varphi\in\mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$。则 $\big[\mathcal{R}'_{12}(v)\ \varphi\big](x_1)\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$，相应的积分在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上关于 x_1 一致绝对收敛，并且以下极限成立

$$\lim_{x_2\to\infty}\big[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2) = \big[\mathcal{R}'_{12}(v)\,\varphi\big](x_1), \tag{7.127}$$

$$\lim_{x_2\to\infty}\partial_{x_2}\big[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2) = 0. \tag{7.128}$$

(3) 设 $\operatorname{Im}v<0$ 且 $\varphi(x_1)\in\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$。那么 $\big[\mathcal{R}^*_{12}(v)\ \varphi\big](x_1,x_2)\in\mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$，相应的积分在 x_1,x_2 取自 $\mathbb{R}$ 的紧子集时一致绝对收敛。

证明。 第一项很容易验证，因此考虑第二项。对于 $\varphi \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$，被积函数的导数（7.124）有如下界

$$\left|\partial_{x_1}^k \, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}} \, \varphi(y,x_1)\right| \leq \sum_j a_j \, e^{b_j|x_1|+c_j(x_1-y)-e^{x_1-y}} \times \begin{cases} P(y), & y \geq 0, \\ e^{d|y|}, & y \leq 0, \end{cases} \tag{7.129}$$

其中 P是多项式，a_j， b_j， $d \geq 0$ 以及 $c_j > 0$ （因为 $\operatorname{Im} v < 0$）。由此我们证明

$$\int_{\mathbb{R}} dy \, \left|\partial_{x_1}^k \, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}} \, \varphi(y,x_1)\right| \leq A \, e^{B|x_1|} \tag{7.130}$$

对某个 A， $B \geq 0$ ，且上述积分关于 x_1 在 $\mathbb{R}$的紧子集中是一致收敛的。一致性允许我们在该表达式中交换导数与积分的次序

$$\partial_{x_1}^k \left[\mathcal{R}'_{12}(v) \, \varphi\right](x_1) = \partial_{x_1}^k \int_{\mathbb{R}} dy \, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}} \, \varphi(y,x_1), \tag{7.131}$$

这反过来又意味着 $\left[\mathcal{R}'_{12}(v) \ \varphi\right](x_1)$ 的光滑性，而具体的界（7.130）表明$\mathcal{R}'_{12}(v) \ \varphi \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R})$。

将（7.130）中的积分分成两部分

$$\int_{\mathbb{R}} dy = \int_{-\infty}^0 dy + \int_0^\infty dy \tag{7.132}$$

并考察第一部分。根据（7.129），只需证明以下估计

$$\int_{-\infty}^0 dy \, e^{-(c+d)y-e^{x_1-y}} \leq A \, e^{B|x_1|}. \tag{7.133}$$

利用这一事实 令 $e^{x_1-y} \geq e^{-|x_1|-y}$ 并作积分变量代换 $z = -|x_1| - y$， 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dy \, e^{-(c+d)y-e^{x_1-y}} &\leq e^{(c+d)|x_1|} \int_{-|x_1|}^\infty dz \, e^{(c+d)z-e^z} \\ &\leq e^{(c+d)|x_1|} \int_{-|x_1|}^0 dz \, e^{(c+d)z} + e^{(c+d)|x_1|} \int_0^\infty e^{(c+d)z-e^z}. \end{aligned} \tag{7.134}$$

最后的积分和显然满足所需的界。

现在考虑（7.132）中的第二个积分。由（7.129），只需证明以下估计

$$\int_0^\infty dy \, P(y) \, e^{-cy-e^{x_1-y}} \leq A \tag{7.135}$$

其中 $c > 0$。后者显然成立，因为 $e^{-e^{x_1-y}} \leq 1$。这就证明了不等式（7.130）。上述所有被积函数的估计显然在 x_1 取自紧集时是一致的。

接下来证明等式（7.127），该等式表明

$$\lim_{x_2 \to \infty} \int_{\mathbb{R}} dy \, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}} \, \varphi(y,x_1) = \int_{\mathbb{R}} dy \, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}} \, \varphi(y,x_1) \tag{7.136}$$

假设 $\varphi \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$ 且 $\operatorname{Im} v < 0$。为交换极限与积分，我们使用控制收敛定理。具体来说，请注意

$$\left| e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right| \le \left| e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}}\, \varphi(y,x_1) \right|. \tag{7.137}$$

函数 from the right is integrable, since it 表示 ts the int 积分 d of $[\mathcal{R}'_{12}(v)\varphi](x_1)$. 最后，我们来证明等式（7.128）。具体来说，它写作

$$\lim_{x_2\to\infty} \partial_{x_2} \int_{\mathbb{R}} dy\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) = 0. \tag{7.138}$$

再次将该积分分成两部分，分别在 $y \le 0$ 和 $y \ge 0$ 上积分。对于 $y \le 0$，被积函数的导数有界如下：

$$\left| \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right| \le a\, e^{-x_2+b|x_1|+c|y|-e^{x_1-y}} \tag{7.139}$$

其中 a、b、c 为某些常数。右端关于 $x_2 \ge 0$ 一致有界，因此可以交换导数与积分的次序

$$\partial_{x_2} \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) = \int_{-\infty}^{0} dy\, \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1). \tag{7.140}$$

此外，由于界（7.139）

$$\left| \partial_{x_2} \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right| \le a\, e^{-x_2+b|x_1|} \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{c|y|-e^{x_1-y}} \to 0 \tag{7.141}$$

由于 $x_2 \to \infty$（因为最后一个积分收敛）。这就证明了 $y \le 0$ 等式（7.138）的部分。在剩余的 $y \ge 0$ 部分中，我们有如下界：

$$\left| \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right| \le P(y)\, e^{b|x_1|+(\operatorname{Im} v+1)y-x_2-e^{y-x_2}}, \tag{7.142}$$

其中 P 是多项式。右端关于 $x_2 \ge 0$ 一致有界，因此再次有

$$\partial_{x_2} \int_{0}^{\infty} dy\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) = \int_{0}^{\infty} dy\, \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1). \tag{7.143}$$

接下来将最后一个积分分成两部分

$$\int_0^\infty dy = \int_0^{x_2} dy + \int_{x_2}^\infty dy, \tag{7.144}$$

其中我们可以假设 $x_2 > 0$，因为我们关注的是极限 $x_2 \to \infty$。利用（7.142）很容易证明第一部分趋于零。即，

$$\left| \int_0^{x_2} dy\, \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right|$$

$$\le e^{b|x_1|-x_2} \int_0^{x_2} dy\, P(y)\, e^{(\operatorname{Im} v+1)y} \le e^{b|x_1|-x_2}\, P(x_2)\, \frac{e^{(\operatorname{Im} v+1)x_2}-1}{\operatorname{Im} v+1} \to 0 \tag{7.145}$$

当 $x_2 \to \infty$ 时，因为 $\operatorname{Im} v < 0$。在第二部分中，我们再次使用（7.142），并改变积分变量 $z = y - x_2$，从而

$$\left| \int_{x_2}^{\infty} dy\, \partial_{x_2}\, e^{\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}-e^{y-x_2}}\, \varphi(y,x_1) \right| \le e^{b|x_1|+\operatorname{Im} v\, x_2} \int_0^{\infty} dz\; P(z+x_2)\, e^{(\operatorname{Im} v+1)z-e^z}. \tag{7.146}$$

将多项式 P 表示为单项式 $z^{\ell_j} x_2^{m_j}$ 后，我们再次看到，最后一个表达式趋于零，当 $x_2 \to \infty$时。由此完成了等式（7.138）以及本命题第二项的证明。

本命题第三项的证明完全类似。 □

根据命题 2、7 和注记 7 巴克斯特算子（7.122）在空间$\mathcal{E}_n$（$\mathbb{R}^n$）上定义良好。下面的推论将在第 4节中使用。

推论 5。 令 $\operatorname{Im} v \in$ （$-g$、0） 以及 φ（$\boldsymbol{x}_n$） $\in \mathcal{E}_n$（$\mathbb{R}^n$）。则

$$\mathbb{Q}_n(v)\,\varphi = \mathcal{R}'_{na}(v)\,\mathcal{R}_{n-1,a}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\,\mathcal{K}_a(v)\,\mathcal{R}^*_{1a}(v)\cdots\mathcal{R}^*_{na}(v)\,\varphi \tag{7.147}$$

以及 $\mathbb{Q}_n$（v） $\varphi \in \mathcal{E}$（$\mathbb{R}^n$）。此外，我们有

$$\lim_{x_a\to\infty} \partial_{x_a}\big[\mathbb{U}_{na}(v)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n, x_a) = 0. \tag{7.148}$$

注记 8。 GLToda 系统的巴克斯特算子也可以用类似的方式重写

$$Q_n(v)\,\varphi = \mathcal{R}'_{na}(v)\,\mathcal{R}_{n-1,a}(v)\cdots\mathcal{R}_{1a}(v)\,\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \tag{7.149}$$

作用于 $\varphi(\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$，并假设 $\operatorname{Im} v < 0$。

根据定义， BC Toda 哈密顿量的生成函数等于

$$\mathbb{B}_n(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_{x_n} & e^{-x_n} \end{pmatrix} \mathbb{T}_{n-1}(u) \begin{pmatrix} -e^{-x_n} \\ -u + \mathrm{i}\partial_{x_n} \end{pmatrix}, \tag{7.150}$$

这意味着它不包含指数函数 e^{x_n} （与 $\mathbb{T}_n$（u）中的其他元素不同）。于是，根据命题 2，7 我们得到以下结论，这一结论也用于第 4 节。

推论 6. 算子 $\mathbb{B}_n$（u）在空间 $\mathcal{E}_n$（$\mathbb{R}^n$）上作用不变。

最后，我们指出，单值化算子和巴克斯特算子对 BC Toda 本征函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}$（$\boldsymbol{x}_n$）的作用是良定义的，这归因于命题 1 以及上述结论。具体而言，由于函数

$$\exp\big([kx - e^x]\,\theta(x)\big) \le C(k) \tag{7.151}$$

is 关于 一致有界，由命题1 可推出以下推论 .

推论 7。设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。则

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n). \tag{7.152}$$

注 9。 利用推论 2 可以证明 Toda 本征函数也满足相同的结论，即 GL Toda 本征函数，即 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$，其中 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。

致谢

我们感谢 春季数学与物理学校(2020) 的组织者和参与者。正是这次活动激发了我们对 Toda链 的兴趣。我们也感谢 PDMI 上 Toda链 研讨会的参与者，尤其是 M. Minin 和 I. Burenev；本文及后续论文 [BDK] 中的许多想法最初都在这些研讨会上萌生。我们还要感谢 S. Kharchev、P. Antonenko 和 P. Valinevich 的宝贵讨论。S. Derkachov 和 S. Khoroshkin 感谢 BIMSA 的热情款待。他们在 BIMSA 访问期间完成了本工作的很大一部分。S. Derkachov 的工作（第 2、3 节）得到 RNF 项目资助 23-11-00311 的支持。S. Khoroshkin 的工作（第 5、6 节）部分由高等经济大学基础研究计划资助。

A 巴克斯特算子的可交换性

In t本工作的第二部分 [BDK] 我们证明了巴克斯特算子的可交换性 s

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho) = \mathbb{Q}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_n(\lambda) \tag{A.1}$$

采用图解技术。不过，另一种基于杨–巴克斯特方程和反射方程的方法，已用于近期有关自旋链的研究 [ADV1，ADV2]。下面我们简要说明（省略细节）这种方法如何适用于 GL 和 BC Toda链。

A.1 GLToda链

根据定义 tion(1.44），巴克斯特算子是单值化算子的退化形式 r

$$Q_n(\lambda) = \lim_{x_a\to\infty} U_{na}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)}, \qquad U_{na}(\lambda) = \mathcal{R}_{na}(\lambda)\cdots\mathcal{R}_{1a}(\lambda). \tag{A.2}$$

后者由交织 Toda 和 DST Lax 矩阵的积分算子 $\mathcal{R}_{12}(v)$ 构造而成

$$\mathcal{R}_{12}(v)\,L_1(u)\,M_2(u-v) = M_2(u-v)\,L_1(u)\,\mathcal{R}_{12}(v). \tag{A.3}$$

如图所示出的 [KSS],还存在一个将两个 DST Lax 矩阵交织起来的算子

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v)\,M_1(u)\,M_2(u-v) = M_2(u-v)\,M_1(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v). \tag{A.4}$$

具体而言，其作用于函数 $\varphi(x_1,\ x_2)$ 的结果为

$$\big[\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} dy\ \exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y) - e^{x_1-y} + e^{x_1-x_2}\big)\,\big(1-e^{y-x_2}\big)^{\mathrm{i}v-1}\,\varphi(y,x_1) \tag{A.5}$$

其中，$y = x_2$ 处的奇点在 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}v)\ > 0$ 时是可积的。

现在考虑 Lax 矩阵的置换

$$L_1(w)\,M_2(w-v)\,M_3(w-u) \quad\longrightarrow\quad M_3(w-u)\,M_2(w-v)\,L_1(w). \tag{A.6}$$

它可以通过上述 $\mathcal{R}$-算子以两种不同方式实现，这提示它们之间存在如下杨–巴克斯特关系

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{23}(u-v)\,\mathcal{R}_{13}(u)\,\mathcal{R}_{12}(v) = \mathcal{R}_{12}(v)\,\mathcal{R}_{13}(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{23}(u-v). \tag{A.7}$$

其证明很直接，归结为星三角恒等式，见我们后续的论文 [BDK]。通过标准论证，将最后一个公式反复迭代多次，我们便得到与单值算子的关系

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{ab}(u-v)\,U_{nb}(u)\,U_{na}(v)=U_{na}(v)\,U_{nb}(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{ab}(u-v). \tag{A.8}$$

最后，从两侧作用于与 x_a, x_b 无关的函数，并取极限$x_a, x_b \to \infty$，我们得到 GL 巴克斯特算子的可交换性

$$Q_n(u)\,Q_n(v)=Q_n(v)\,Q_n(u). \tag{A.9}$$

A.2 BC Toda 链

根据定义（4.1）中，巴克斯特算子是单值化算子的退化形式

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)=\lim_{x_a\to\infty}\mathbb{U}_{na}(\lambda)\big|_{\varphi(\boldsymbol{x}_n)},\qquad \mathbb{U}_{na}(\lambda)=\mathcal{R}_{na}(\lambda)\cdots\mathcal{R}_{1a}(\lambda)\,\mathcal{K}_a(\lambda)\,\mathcal{R}^*_{1a}(\lambda)\cdots\mathcal{R}^*_{na}(\lambda). \tag{A.10}$$

后者由积分算子组成 $\mathcal{R}_{12}(v)$，它们交织 Toda 与 DST Lax 矩阵（A.3）；其反射版本 $\mathcal{R}^*_{12}(v)$则交织 Toda 与转置 DST Lax 矩阵

$$\mathcal{R}^*_{12}(v)\,M^t_2(-u-v)\,L_1(u)=L_1(u)\,M^t_2(-u-v)\,\mathcal{R}^*_{12}(v), \tag{A.11}$$

以及满足反射方程的算子 $\mathcal{K}_a(v)$

$$\mathcal{K}_a(v)\,M^t_a(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M_a(u-v)\sigma_2=M_a(u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M^t_a(-u-v)\sigma_2\,\mathcal{K}_a(v). \tag{A.12}$$

为了证明 Baxter 算子的可交换性，我们需要建立两个单值化算子之间的某种关系，类似于（A.8）。

为此，我们考虑将 DST Lax 矩阵与转置 DST Lax 矩阵相互交织的算子

$$\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\,M^t_2(-u)\,M_1(u-v)=M_1(u-v)\,M^t_2(-u)\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v). \tag{A.13}$$

这个方程可以类似于 $\mathcal{K}$-算子的方程求解（参见第 2节），最终可得

$$\big[\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}}dy_2\int_{y_2}^{\infty}dy_1\,\exp\big(\mathrm{i}v(y_2-y_1)-e^{-x_1-y_2}-e^{y_1-x_2}\big)\\ \times(1-e^{y_2-y_1})^{-\mathrm{i}v-1}\,\varphi(-y_1,y_2). \tag{A.14}$$

现在考虑矩阵置换

$$M^t_2(-w-u)\,M^t_1(-w-v)\,K(w)\,\sigma_2 M_1(w-v)\,M_2(w-u)\sigma_2\\ \longrightarrow\quad M_2(w-u)\,M_1(w-v)\,K(w)\,\sigma_2 M^t_1(-w-v)\,M^t_2(-w-u)\sigma_2. \tag{A.15}$$

可以利用两个 DST 交织算子（A.4）、（A.13）以及反射算子（A.12）通过两种不同的方式完成，这表明它们之间存在如下反射方程

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(u-v)\,\mathcal{K}_2(u)\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(u+v)\,\mathcal{K}_1(v)=\mathcal{K}_1(v)\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(u+v)\,\mathcal{K}_2(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(u-v). \tag{A.16}$$

其证明直接明了，并归结为一个积分恒等式；我们将在后续论文 *BDK*中将其称为 [翻转关系]。

此外，利用 $\mathcal{R}$-算子的显式公式，可以证明另一个杨–巴克斯特型方程

$$\mathcal{R}^{*}_{13}(u)\,\widehat{\mathcal{R}}_{23}(u+v)\,\mathcal{R}_{12}(v)=\mathcal{R}_{12}(v)\,\widehat{\mathcal{R}}_{23}(u+v)\,\mathcal{R}^{*}_{13}(u). \tag{A.17}$$

这一恒等式也可以从 Toda 和 DST Lax 矩阵的置换中猜出。

因此，按照标准方法， [Skl2] 可以结合关系式（A.7）、（A.16）和（A.17）推导出单值化算子的反射方程（A.10）

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{ab}(u-v)\,\mathbb{U}_{nb}(u)\,\widehat{\mathcal{R}}_{ab}(u+v)\,\mathbb{U}_{na}(v)=\mathbb{U}_{na}(v)\,\widehat{\mathcal{R}}_{ab}(u+v)\,\mathbb{U}_{nb}(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{ab}(u-v). \tag{A.18}$$

最后，对与 x_a 无关的函数进行作用， x_b 并取极限 x_a， $x_b\to\infty$ 经过对积分进行一些处理后，可以得到巴克斯特算子的可交换性（A.10）。

B XXX 自旋链的关系

本节系统地列举杨–巴克斯特方程和反射方程的各种 $s\ell_2$-不变解。

杨–巴克斯特方程最简单的解是杨的 R-矩阵。在下一个层次上，我们得到一个更复杂的解——L-算子，它与 XXX 自旋链相关。这个层次上的杨–巴克斯特方程就是杨代数关系，其中涉及杨的R-矩阵和L-算子。通过对L-算子进行各种约化，我们得到 $L^{\pm}$-算子，它们是杨代数关系的其他解，其中涉及杨的 R-矩阵。接着我们证明， M-算子（1.25）本质上与采用另一种表示写出的 L^{+}-算子相同。最后，通过对 M-算子进行适当的约化，我们得到 Toda L-算子（1.16），并证明它是同一杨代数关系的一个解，其中涉及杨的 R-矩阵。因此，我们证明，涉及杨的 R-矩阵的杨代数关系的各种解，都可以由L-算子得到。

在下一层，我们得到涉及 L 算子和一般R算子的杨–巴克斯特关系，该关系出现在 XXX 自旋链的研究中。R 算子可实现为一个作用于两个变量函数的积分算子。然后，完全类比前一层，我们证明，上一节中的算子 $\mathcal{R}$, $\widehat{\mathcal{R}}$ （证明 Q算子的可交换性所需），以及构造特征函数所需的算子 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{*}$，都可以通过对 R 算子作适当约化而得到。

接下来我们讨论反射方程。反射方程的 $s\ell_2$不变的一般解——XXX 自旋链的积分K算子——由 [FGK、ABDK]得到。通过适当的约化，我们从积分K算子推导出反射算子 $\mathcal{K}$的表示式（1.65）。这提供了第二种独立推导，也对表示式（1.65）作了额外的交叉验证。

有趣的是，看看所考虑的反射算子能否由某种通用的 K-算子得到，参见 [AV] 及其中的参考文献。

注10。 与前几节不同，本部分中的许多论证都建立在物理层面的严谨性之上。严格分析最一般的 实数集- 和 K-算子（与 XXX 自旋链相关）仍是一个公开问题，参见 [N] 以了解这一方向上的一些最新进展。

B.1 杨–巴克斯特方程

The R-算子 i　　是具有对称代数 $s\ell_2$的杨–巴克斯特方程的一般解

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)\,\mathsf{R}_{13}(u)\,\mathsf{R}_{23}(v)=\mathsf{R}_{23}(v)\,\mathsf{R}_{13}(u)\,\mathsf{R}_{12}(u-v)\,. \tag{B.1}$$

在（B.1）中，我们得到三个表示的张量积中的算子关系 $V_1\otimes V_2\otimes V_3$，每个算子 R^{ij} 在空间 V_i 和 V_j 中非平凡作用，并在第三个空间中作为恒等算子作用。

在最简单的二维表示情形下，$V_1=V_2=\mathbb{C}^2$ 算子 $\mathsf{R}_{12}(u)$ 退化为杨–巴克斯特方程的有限维解——杨的 R-矩阵，它作用于张量积 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$

$$\mathsf{R}_{12}(u)=u+P\,,\qquad P\,a\otimes b=b\otimes a\,.$$

B.1.1 杨代数

杨–巴克斯特关系（B.1）的更复杂解——L-算子，用于 XXX 自旋链——出现在 $V_1=V_2=\mathbb{C}^2$ 和 V_3 是代数 $s\ell_2$ 的任意表示空间，且其生成元为 S^+，S^- 和 S的情形下。在这种情况下，$\mathsf{R}_{12}(u-v)$由杨的R-矩阵给出，而一般的 R-算子 $\mathsf{R}_{13}(u)$ 和$\mathsf{R}_{23}(v)$ 经谱参数平移后可化为L-算子

$$(u-v+P)\,\big(\mathsf{L}(u+\tfrac12)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v+\tfrac12)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v+\tfrac12)\big)\,\big(\mathsf{L}(u+\tfrac12)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+P)$$

其中，L 算子的显式表达式为

$$\mathsf{L}(u)=u\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S&S_-\\S_+&-S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+S&S_-\\S_+&u-S\end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

L 算子对谱参数 u 呈线性依赖，且 u前的系数是单位矩阵。注意，经过平移 $u\to u-\frac12$ 和 $v\to v-\frac12$ 后，可得到标准形式下的前一个关系

$$(u-v+P)\,\big(\mathsf{L}(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v)\big)\,\big(\mathsf{L}(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+P)\,. \tag{B.3}$$

这些 $s\ell_2$ 李代数生成元出现在杨代数的求值表示中，而杨代数由 L 算子的矩阵元生成，其基本关系（B.3）即为代数关系 $[S_+\,,S_-]=2S$，$[S\,,S_\pm]=\pm S_\pm$。除上述标准表示外，还有其他杨代数表示，由满足（ $L^\pm$-算子描述，它们满足（B.3），但不同于（B.2）。这些 $L^\pm$-算子可在适当极限下由普通 L 算子得到。这些 $L^\pm$-算子对谱参数 u 呈线性依赖，但 u 前面的系数是一维投影算子。

我们给出补全这一图景所需的计算。算子 $L^\pm$ 出现在二聚体自陷（DST）链模型 [KSS、Skl3]。我们将 $s\ell_2$ 生成元按标准方式实现

$$S=z\partial_z+s\,,\qquad S_-=-\partial_z\,,\qquad S_+=z^2\partial_z+2sz\,. \tag{B.4}$$

在这一表示中，L 算子可以用两种方式因式分解

$$\mathsf{L}(u)=\mathsf{L}(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} u+s+z\partial & -\partial \\ z^2\partial+2sz & u-s-z\partial \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & u_2 \end{pmatrix} L^+(u_1)=L^-(u_2)\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(B.5)}$$

其中 $u_1=u+s-1$，$u_2=u-s$ 和

$$L^+(u)=u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \partial z & -\partial \\ -z & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u+\partial z & -\partial \\ -z & 1 \end{pmatrix}\ ; \quad \text{(B.6)}$$

$$L^-(u)=u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -\partial \\ z & -z\partial \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\partial \\ z & u-z\partial \end{pmatrix}. \quad \text{(B.7)}$$

注意关系式

$$L^+(u)L^-(v)=\begin{pmatrix} u+\partial z & -\partial \\ -z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\partial \\ z & v-z\partial \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & -(u+v)\partial \\ 0 & v \end{pmatrix} \quad \text{(B.8)}$$

并因此

$$L^+(u)L^-(-u)=u\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{(B.9)}$$

利用因式分解，很容易推导出双参数 L 算子的主导渐近式，其中一个参数固定而另一个趋于无穷大时：

$$\mathsf{L}(u_1,u_2)\xrightarrow{u_1\to\infty} L^-(u_2)\,\Lambda_-(u_1) \quad ; \quad \mathsf{L}(u_1,u_2)\xrightarrow{u_2\to\infty}\Lambda_+(u_2)\,L^+(u_1), \quad \text{(B.10)}$$

其中

$$\Lambda_-(u)=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Lambda_+(u)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}. \quad \text{(B.11)}$$

为证明算子 $L^{\pm}(u)$ 满足杨代数关系（B.3），我们利用移位 $u\to u+s$ 重写前面的公式，其中 L^-，而 $u\to u-s$ 则对应于 L^+

$$\mathsf{L}(u+s)\xrightarrow{s\to\infty} L^-(u)\,\Lambda_-(2s) \quad ; \quad \mathsf{L}(u-s)\xrightarrow{s\to\infty}\Lambda_+(2s)\,\sigma_3\,L^+(u-1). \quad \text{(B.12)}$$

使用平移量 $u\to u+s$ 和 $v\to v+s$ 代入杨代数关系（B.3）可得

$$(u-v+P)\,\big(\mathsf{L}(u+s)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v+s)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes\mathsf{L}(v+s)\big)\,\big(\mathsf{L}(u+s)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+P)\,.$$

取渐近行为 $s\to\infty$ 可得

$$(u-v+P)\,\big(L^-(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L^-(v)\big)\,\Lambda_-(2s)\otimes\Lambda_-(2s)=$$
$$\big(\mathbf{1}\otimes L^-(v)\big)\,\big(L^-(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\Lambda_-(2s)\otimes\Lambda_-(2s)\,(u-v+P)\,.$$

此外，利用杨氏 R-矩阵的 $s\ell_2$ 不变性

$$\Lambda_-(2s)\otimes\Lambda_-(2s)\,(u-v+P)=(u-v+P)\,\Lambda_-(2s)\otimes\Lambda_-(2s) \quad \text{(B.13)}$$

我们推导得出

$$(u-v+P)\,\big(L^-(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L^-(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes L^-(v)\big)\,\big(L^-(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+P)$$

在 L^+ 的情况下，推导过程非常相似。

B.1.2 约化为 DST M-算子

算子 M-算子 (1.25) 与 L^+-算子 (B.6) 除函数空间有所不同外是等价的，下面我们将构造它们之间的显式映射

$$L^+(u) = \begin{pmatrix} u + \partial_z z & -\partial_z \\ -z & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x \partial_x & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

第一步是傅里叶变换

$$[F\Psi](p) = \hat{\Psi}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, e^{-\mathrm{i}pz}\, \Psi(z). \tag{B.14}$$

在 XXX 自旋链的语境中，我们认为函数 $\Psi(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 内解析，见 [ABDK]。对于实数 z，它定义为极限 $\Psi(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi(z + \mathrm{i}\varepsilon)$。ˆ由于函数 $\Psi(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ 内解析，函数 $\Psi(p)$ 在 $p < 0$ 时为零，因此逆变换的公式为

$$\left[F^{-1}\hat{\Psi}\right](z) = \Psi(z) = \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}pz}\, \hat{\Psi}(p). \tag{B.15}$$

ˆ注意， $\Psi(p)$ 在 $p = 0$ 时也为零。对于点 $p = 0$，我们有

$$\hat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \Psi(z)$$

傅里叶变换针对来自 $L_1(\mathbb{R})$ 的函数定义，使得此积分绝对收敛。于是，对于 $|z| \to \infty$， $|\Psi(z)| = o(|z|^{-1})$，并且可以将积分路径闭合于上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$，此时由于 $\Psi(z)$ 在上半平面内解析，积分为零。我们有

$$\partial_z\, \Psi(z) = \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}pz}\, \mathrm{i}p\, \hat{\Psi}(p)\,,$$

$$z\, \Psi(z) = \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, \hat{\Psi}(p)\, (-\mathrm{i})\partial_p e^{\mathrm{i}pz} = -\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}pz}\, \hat{\Psi}(p)\Big|_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{\mathrm{i}pz}\, (\mathrm{i}\partial_p)\, \hat{\Psi}(p).$$

ˆ 额外项均消失：对于 $p \to +\infty$，我们有 $\Psi(p) \to 0$，这是由于积分（B.14）满足黎曼-勒贝格引理，其初始函数为 $\Psi(z)$，见 $L_1(\mathbb{R})$；对于点 $p = 0$，我们有 ˆ$\Psi(0) = 0$。更形式化地说，这些公式可表示为如下算子形式

$$FzF^{-1} = \mathrm{i}\partial_z \quad ; \quad F\partial_z F^{-1} = \mathrm{i}z. \tag{B.16}$$

所需的 L^+-算子变换为

$$L^+(u)\,\Psi(z)=\begin{pmatrix} u+\partial_z z & -\partial_z \\ -z & 1\end{pmatrix}\Psi(z)=\int_0^{+\infty}\frac{dp}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}pz}\begin{pmatrix} u-p\partial_p & -\mathrm{i}p \\ -\mathrm{i}\partial_p & 1\end{pmatrix}\hat{\Psi}(p)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\,\exp(\mathrm{i}ze^{-x}-x)\,(-\mathrm{i})\begin{pmatrix} \mathrm{i}u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x\partial_x & \mathrm{i}\end{pmatrix}\hat{\Psi}(e^{-x})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}ze^{-x}-x}\,(-\mathrm{i})M(\mathrm{i}u)\,\hat{\Psi}(e^{-x})$$

并且分为两个步骤：第一步是傅里叶变换，然后进行变量代换——变量 p 为正，因此可以进行变量代换 $p=e^{-x}$。更形式化地说，第一步是傅里叶变换（B.16）

$$F\,L^+(u)\,F^{-1}=F\begin{pmatrix} u+\partial_z z & -\partial_z \\ -z & 1\end{pmatrix}F^{-1}=\begin{pmatrix} u-z\partial_z & -\mathrm{i}z \\ -\mathrm{i}\partial_z & 1\end{pmatrix}=\hat{L}^+(u)$$

第二步是变量代换

$$\hat{L}^+(u)\,\hat{\Psi}(z)=\begin{pmatrix} u-z\partial_z & -\mathrm{i}z \\ -\mathrm{i}\partial_z & 1\end{pmatrix}\hat{\Psi}(z)\longrightarrow M(\mathrm{i}u)\,\hat{\Psi}(e^{-x})=\begin{pmatrix} \mathrm{i}u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x\partial_x & \mathrm{i}\end{pmatrix}\hat{\Psi}(e^{-x}).$$

L^+-算子之间的关系

$$(u-v+P)\,\big(L^+(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L^+(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes L^+(v)\big)\,\big(L^+(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+P)$$

变换为 M-算子之间的关系

$$(u-v+\mathrm{i}P)\,\big(M(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes M(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes M(v)\big)\,\big(M(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+\mathrm{i}P)\,.$$

经过变换 $F\cdots F^{-1}$ 以及对变量和谱参数$u\to$ –iu 和 $v\to$ –iv的必要变量代换后。

B.1.3 约化到 Toda L-算子

本节我们考虑从 DST链的 M算子到 Toda链的 L算子的约化

$$M(u)=\begin{pmatrix} u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x\partial_x & \mathrm{i}\end{pmatrix}\longrightarrow L(u)=\begin{pmatrix} u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x & 0\end{pmatrix}$$

或明确地写为

$$e^{-\lambda x}\,M(u-\mathrm{i}\lambda)\,e^{\lambda x}\xrightarrow{\lambda\to\infty}\Lambda_+(\lambda)\,L(u).\tag{B.17}$$

事实上，我们有

$$e^{-\lambda x}\,M(u-\mathrm{i}\lambda)\,e^{\lambda x}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x-\lambda^{-1}e^x\partial_x & \mathrm{i}\lambda^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\lambda\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x} \\ -e^x & 0\end{pmatrix}.$$

M算子的关系

$$(u-v+\mathrm{i}P)\,\big(M(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes M(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes M(v)\big)\,\big(M(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,(u-v+\mathrm{i}P)$$

经过变换 $e^{-\lambda x}\cdots e^{-\lambda x}$ 并在极限 $\lambda\to\infty$ 下改变谱参数 $u\to u-\mathrm{i}\lambda$、$v\to v-\mathrm{i}\lambda$ 后，得到

$$(u-v+\mathrm{i}P)\;\Lambda_+(\lambda)\otimes\Lambda_+(\lambda)\,\big(L(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L(v)\big)\;=$$
$$\Lambda_+(\lambda)\otimes\Lambda_+(\lambda)\,\big(\mathbf{1}\otimes L(v)\big)\,\big(L(u)\otimes\mathbf{1}\big)\;(u-v+\mathrm{i}P)\,.$$

利用恒等式

$$\Lambda_+(\lambda)\otimes\Lambda_+(\lambda)\;\;(u-v+\mathrm{i}P)=(u-v+\mathrm{i}P)\;\Lambda_+(\lambda)\otimes\Lambda_+(\lambda)$$

我们推导出

$$(u-v+\mathrm{i}P)\;\big(L(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes L(v)\big)=\big(\mathbf{1}\otimes L(v)\big)\,\big(L(u)\otimes\mathbf{1}\big)\;(u-v+\mathrm{i}P)\,.$$

B.2 R-算子与 RLL-关系

当 V_1 和 V_2 是 $s\ell_2$ 和 $V_3=\mathbb{C}^2$ 的两个任意表示的空间时，杨–巴克斯特关系可化为一般 R-算子的定义关系

$$\mathsf{R}_{12}(u-v)\,\mathsf{L}_1(u)\,\mathsf{L}_2(v)=\mathsf{L}_2(v)\,\mathsf{L}_1(u)\,\mathsf{R}_{12}(u-v)\,,\tag{B.18}$$

其中，$\mathsf{L}_1(u)$ 和 $\mathsf{L}_2(v)$ 表示对应于不同表示的 L 算子

$$\mathsf{L}_1(u)=\begin{pmatrix}u+s_1+z_1\partial_1 & -\partial_1\\ z_1^2\partial_1+2s_1z_1 & u-s_1-z_1\partial_1\end{pmatrix},\quad \mathsf{L}_2(v)=\begin{pmatrix}v+s_2+z_2\partial_2 & -\partial_2\\ z_2^2\partial_2+2s_2z_2 & v-s_2-z_2\partial_1\end{pmatrix}.$$

该关系的等价形式为

$$\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_1,v_2)\,\mathsf{L}_1(u_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(v_1,v_2)=\mathsf{L}_1(v_1,v_2)\,\mathsf{L}_2(u_1,u_2)\,\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_1,v_2)\tag{B.19}$$

其中

$$u_1=u+s_1-1,\;\;u_2=u-s_1;\;\;v_1=v+s_2-1,\;\;v_2=v-s_2.\tag{B.20}$$

算子 实数集$_{12}(u_1,u_2|v_1,v_2)$ 在 $u_1\,,u_2$ 和 $v_1\,,v_2$ 的乘积中交换参数对L算子。它可以分解为更简单算子的乘积 [D, DM]

$$\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_1,v_2)=P_{12}\,\mathsf{R}_{12}(v_1,u_2|v_2)\,\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2),\tag{B.21}$$

其中 P_{12} 是置换算子

$$P_{12}\,\Psi(z_1\,,z_2)=\Psi(z_2\,,z_1)\,,$$

算子 $\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,\;\;v_2)$ 和 $\mathsf{R}_{12}(u_1,\;\;u_2|v_2)$ 满足以下关系

$$\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2)\,\mathsf{L}_1(u_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(v_1,v_2)=\mathsf{L}_1(v_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(u_1,v_2)\,\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2)\,,\tag{B.22}$$

$$\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_2)\,\mathsf{L}_1(u_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(v_1,v_2)=\mathsf{L}_1(u_1,v_2)\,\mathsf{L}_2(v_1,u_2)\,\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_2)\,.\tag{B.23}$$

算子 $\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,\ v_2)$ 在由 L-算子构成的乘积中交换参数 u_1 和 v_1，而算子 $\mathsf{R}_{12}(u_1,\ u_2|v_2)$ 交换参数 u_2 和 v_2。这些算子并非相互独立。事实上，利用关系

$$\mathsf{L}^{-1}(u_1,u_2) = -(u_1u_2)^{-1}\,\mathsf{L}(-u_2,-u_1) \tag{B.24}$$

容易推导出两个基本算子之间的以下关系

$$\mathsf{R}_{12}(u_1,u_2|v_2) = P_{12}\,\mathsf{R}_{12}(-v_2|-u_2,-u_1)\,P_{12}\,. \tag{B.25}$$

下面我们将使用算子 实数集$_{12}(u_1|v_1,v_2)$ 作为基本算子。在一般情况下，定义方程（B.22）的解可以表示为两种等价形式，具体采用哪种形式取决于上下文。第一种表示形式简单而形式化

$$\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2) = \frac{\Gamma(z_{21}\partial_2+u_1-v_2+1)}{\Gamma(z_{21}\partial_2+v_1-v_2+1)}\,, \tag{B.26}$$

而第二种表示形式则将第一种表示形式展开为积分算子

$$\begin{aligned}&\left[\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,v_2)\Psi\right](z_1,z_2) = \\ &\qquad\frac{1}{\Gamma(v_1-u_1)}\int_0^1 d\alpha\;\alpha^{v_1-u_1-1}\,(1-\alpha)^{u_1-v_2}\,\Psi(z_1,(1-\alpha)z_2+\alpha z_1)\,.\end{aligned} \tag{B.27}$$

B.3 $L^{\pm}$算子乘积的交织算子

本节旨在通过适当的约化，推导 $L^{\pm}$算子乘积的交织关系

$$(1-z_2\partial_1)^{u-v}\,\mathrm{L}_1^-(u)\,\mathrm{L}_2^-(v) = \mathrm{L}_1^-(v)\,\mathrm{L}_2^-(u)\,(1-z_2\partial_1)^{u-v}\ , \tag{B.28}$$

$$(1+z_1\partial_2)^{u-v}\,\mathrm{L}_1^+(u)\,\mathrm{L}_2^+(v) = \mathrm{L}_1^+(v)\,\mathrm{L}_2^+(u)\,(1+z_1\partial_2)^{u-v}\ , \tag{B.29}$$

这些关于交织算子的形式表示清楚地展示了它的一些性质。首先，在点 $u=v$ 处，交织算子约化为恒等算子。这是自然的，因为对于 $u=v$，定义关系无需改变。对于第二个关系，交织算子作为积分算子的等价表示为

$$(1+z_1\partial_2)^{u-v}\,\Psi(z_1,z_2) = \frac{1}{\Gamma(v-u)}\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{v-u-1}\,e^{-\alpha}\,\Psi(z_1,z_2-\alpha z_1)\,. \tag{B.30}$$

我们从算子 $R_{12}(u_1|v_1,\ u_2)$ 的定义关系出发，推导第二个关系

$$\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)\,\mathsf{L}_1(u_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(v_1,u_2) = \mathsf{L}_1(v_1,u_2)\,\mathsf{L}_2(u_1,u_2)\,\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)\,.$$

首先，我们利用（B.10）提取 $u_2\to\infty$ 的主导渐近式

实数集$_{12}(u_1|v_1,u_2)\,\Lambda_+(u_2)L_1^+(u_1)\,\Lambda_+(u_2)L_2^+(v_1) = \Lambda_+(u_2)L_1^+(v_1)\,\Lambda_+(u_2)L^+(u_1)\,\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)$,

然后将所有内容转换为所需形式

$$u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)u_2^{z_2\partial_2}\,L_1^+(u_1)\,L_2^+(v_1) = L_1^+(v_1)\,L_2^+(u_1)\,u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)u_2^{z_2\partial_2} \tag{B.31}$$

利用关系式

$$\Lambda_+(u)L^+(v)\Lambda_+^{-1}(u) = u^{z\partial}L^+(v)u^{-z\partial}\,. \tag{B.32}$$

这个关系表明，对于 L^+-算子，通过矩阵$\Lambda_+(u)$进行矩阵相似变换，等价于通过膨胀算子 $u^{z\partial}$进行算子相似变换。

$$u^{z\partial}\Psi(z) = \Psi(uz)\,.$$

具体而言，逐步推导如下：

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}_{12}\,\Lambda_+(u_2)L_1^+(u_1)\,\Lambda_+(u_2)L_2^+(v_1) &= \Lambda_+(u_2)L_1^+(v_1)\,\Lambda_+(u_2)L^+(u_1)\,\mathsf{R}_{12}\\
&\downarrow\\
\mathsf{R}_{12}\,L_1^+(u_1)\,\Lambda_+(u_2)L_2^+(v_1)\Lambda_+^{-1}(u_2) &= L_1^+(v_1)\,\Lambda_+(u_2)L_2^+(u_1)\Lambda_+^{-1}(u_2)\,\mathsf{R}_{12}\\
&\downarrow\\
\mathsf{R}_{12}L_1^+(u_1)\,u_2^{z_2\partial_2}L_2^+(v_1)u_2^{-z_2\partial_2} &= L_1^+(v_1)\,u_2^{z_2\partial_2}L_2^+(u_1)u_2^{-z_2\partial_2}\,\mathsf{R}_{12}\\
&\downarrow\\
u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}u_2^{z_2\partial_2}\,L_1^+(u_1)L_2^+(v_1) &= L_1^+(v_1)L_2^+(u_1)\,u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}u_2^{z_2\partial_2}\,.
\end{aligned}$$

接下来只需计算算子 $u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)\,u_2^{z_2\partial_2}$在$u_2\to-\infty$时的首项渐近式。最直接的方法是使用积分表示

$$\begin{aligned}
&\left[u_2^{-z_2\partial_2}\mathsf{R}_{12}(u_1|v_1,u_2)u_2^{z_2\partial_2}\Psi\right](z_1,z_2)\\
&\qquad= \frac{1}{\Gamma(v_1-u_1)}\int_0^1 d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,(1-\alpha)^{u_1-u_2}\,\Psi(z_1,(1-\alpha)z_2+u_2\alpha z_1)\\
&\qquad= \frac{(-u_2)^{u_1-v_1}}{\Gamma(v_1-u_1)}\int_0^{-u_2} d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,(1+\alpha u_2^{-1})^{u_1-u_2}\,\Psi(z_1,(1+\alpha u_2^{-1})z_2-\alpha z_1)\\
&\qquad\qquad\xrightarrow{u_2\to-\infty}\frac{(-u_2)^{u_1-v_1}}{\Gamma(v_1-u_1)}\int_0^{\infty} d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,e^{-\alpha}\,\Psi(z_1,z_2-\alpha z_1).
\end{aligned}$$

注意，出现的标量因子（$-u_2$）$^{u_1-v_1}$ 并不重要，因为它可以在关系式（B.31）中约去。接下来，我们利用以下公式将积分表示转换为算子形式

$$\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{\lambda-1}\,e^{-\alpha A} = \Gamma(\lambda)\,A^{-\lambda}\quad;\quad e^{-\alpha z_1\partial_2}\,\Psi(z_1,z_2) = \Psi(z_1,z_2-\alpha z_1),$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,e^{-\alpha}\,\Psi(z_1,z_2-\alpha z_1) &= \int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,e^{-\alpha}\,e^{-\alpha z_1\partial_2}\,\Psi(z_1,z_2)\\
&= \int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{v_1-u_1-1}\,e^{-\alpha(1+z_1\partial_2)}\,\Psi(z_1,z_2) = \Gamma(v_1-u_1)\,(1+z_1\partial_2)^{u_1-v_1}\,\Psi(z_1,z_2)\,.
\end{aligned}$$

算子（B.28）的公式 L^-可以用类似的方法推导出来。

B.3.1 DST交织算子的约化

让我们改写这个关系

$$(1+z_1\partial_2)^{u-v}\,L_1^+(u)\,L_2^+(v)=L_1^+(v)\,L_2^+(u)\,(1+z_1\partial_2)^{u-v} \tag{B.33}$$

以一种新的表示作为关于 M-算子的关系

$$(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\,M_1(u)\,M_2(v)=M_1(v)\,M_2(u)\,(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\,. \tag{B.34}$$

傅里叶变换 $F_1F_2\dots F_1^{-1}F_2^{-1}$给出

$$\begin{gathered}(1+z_1\partial_2)^{u-v}\,L_1^+(u)\,L_2^+(v)=L_1^+(v)\,L_2^+(u)\,(1+z_1\partial_2)^{u-v}\\ \downarrow\\ (1-z_2\partial_1)^{u-v}\,\hat L_1^+(u)\,\hat L_2^+(v)=\hat L_1^+(v)\,\hat L_2^+(u)\,(1-z_2\partial_1)^{u-v}\\ \downarrow\\ (1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{u-v}\,M_1(\mathrm{i}u)\,M_2(\mathrm{i}v)=M_1(\mathrm{i}v)\,M_2(\mathrm{i}u)\,(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{u-v}\\ \downarrow\\ (1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\,M_1(u)\,M_2(v)=M_1(v)\,M_2(u)\,(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\end{gathered}$$

首先我们使用

$$F_1F_2\,(1+z_1\partial_2)^{u-v}\,F_1^{-1}F_2^{-1}=(1-z_2\partial_1)^{u-v}$$

然后进行所需的变量代换和谱参数变换。让我们以一种更直观的方式进行变量代换，以重构所得的积分算子。我们有

$$\begin{aligned}&\Gamma(\mathrm{i}u-\mathrm{i}v)\,(1-z_2\partial_1)^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\,\hat\Psi(z_1,z_2)=\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{\mathrm{i}u-\mathrm{i}v-1}\,e^{-\alpha}\,e^{\alpha z_2\partial_1}\,\hat\Psi(z_1,z_2)\\ &=\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{\mathrm{i}u-\mathrm{i}v-1}\,e^{-\alpha}\,\hat\Psi(z_1+\alpha z_2,z_2)=\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{\mathrm{i}u-\mathrm{i}v-1}\,e^{-\alpha}\,\hat\Psi(z_1+\alpha z_2,z_2)\\ &=z_2^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\int_{z_1}^\infty dz\,(z-z_1)^{\mathrm{i}u-\mathrm{i}v-1}\,e^{-\frac{z-z_1}{z_2}}\,\hat\Psi(z,z_2).\end{aligned}$$

接下来，改变变量 $z_k=e^{-x_k}, z=e^{-x}$ 并相应地记 $\hat\Psi(e^{-x_1},e^{-x_2})=\hat\varphi(x_1,x_2)$，$\Psi(e^{-x},e^{-x_2})=\varphi(x,x_2)$，从而上述公式变为

$$\begin{aligned}&\Gamma(\mathrm{i}u-\mathrm{i}v)\,(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u}\,\varphi(x_1,x_2)=\\ &=\int_{-\infty}^{x_1}dx\;\exp\big(\mathrm{i}(u-v)(x_2-x)+e^{x_2-x_1}-e^{x_2-x}\big)\,\big(1-e^{x-x_1}\big)^{\mathrm{i}u-\mathrm{i}v-1}\,\varphi(x,z_2).\end{aligned}$$

最后，对于由方程定义的算子 $\mathcal{R}_{12}(v)$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v)\,M_1(u)\,M_2(u-v)=M_2(u-v)\,M_1(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v) \tag{B.35}$$

由此得到对函数 $\varphi(x_1,x_2)$ 作用的以下显式公式

$$\begin{aligned}\big[\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v)\,\varphi\big](x_1,x_2)&=\big[P_{12}\,(1+e^{x_1-x_2}\partial_{x_1})^{-\mathrm{i}v}\,\varphi\big](x_1,x_2)\\ &=\frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}v)}\int_{-\infty}^{x_2}dy\;\exp\big(\mathrm{i}v(x_1-y)-e^{x_1-y}+e^{x_1-x_2}\big)\,\big(1-e^{y-x_2}\big)^{\mathrm{i}v-1}\,\varphi(y,x_1).\end{aligned} \tag{B.36}$$

除归一化因子外，这就是附录 A.5 中引入的积分算子 A。

在附录 A 中，我们还使用另一个 $\mathcal{R}$-算子（A.14），它将 M-算子与转置的 M-算子交织起来

$$\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\, M_2^t(-u)\, M_1(u-v) = M_1(u-v)\, M_2^t(-u)\, \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v). \tag{B.37}$$

让我们从同一关系出发，推导这个算子的显式表达式

$$(1+z_1\partial_2)^{u-v}\, L_1^+(u)\, L_2^+(v) = L_1^+(v)\, L_2^+(u)\, (1+z_1\partial_2)^{u-v}\,.$$

首先，转置的 L^+-算子可由 L^+-算子通过傅里叶变换（B.16）得到

$$\begin{aligned}
&\big[L^+(u)\big]^t = \begin{pmatrix} u+\partial z & -z \\ -\partial & 1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u-z\partial & \mathrm{i}\partial \\ \mathrm{i}z & 1 \end{pmatrix} F^{-1} \\
&= F \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u-1+\partial z & -\partial \\ -z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F^{-1} = F\,\Lambda^{-1}\, L^+(-u-1)\,\Lambda^{-1}\, F^{-1}
\end{aligned}$$

因此

$$L^+(u) \;= \Lambda\, F^{-1}\, \big[L^+(-u-1)\big]^t\; F\,\Lambda \quad ; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.38}$$

类比（B.32），有如下关系

$$\Lambda\, L^+(u)\, \Lambda^{-1} = \mathrm{i}^{-z\partial}\, L^+(u)\, \mathrm{i}^{z\partial}$$

这使我们能够将以矩阵 Λ 为对象的矩阵相似变换，重新表述为以膨胀算子$\mathrm{i}^{z\partial}$为对象的算子相似变换，其中

$$\mathrm{i}^{z\partial}\Psi(z) = \Psi(\mathrm{i}z) \quad ; \quad \mathrm{i}^{-z\partial}\Psi(z) = \Psi(\mathrm{i}^{-1}z) = \Psi(-\mathrm{i}z)\,.$$

我们有（为简洁起见，记作 $r_{12} = (1+z_1\partial_2)^{u-v}$）

$$\begin{aligned}
r_{12}\, L_1^+(u)\, L_2^+(v) &= L_1^+(v)\, L_2^+(u)\, r_{12} \\
&\downarrow \\
r_{12}\,\Lambda\, F_1^{-1}\, \big[L_1^+(-u-1)\big]^t\, F_1\,\Lambda\, \mathrm{L}_2^+(v) &= \mathrm{L}_1^+(v)\,\Lambda\, F_2^{-1}\, \big[L_2^+(-u-1)\big]^t\, F_2\,\Lambda\, r_{12} \\
&\downarrow \\
F_2\, r_{12}\, F_1^{-1}\, \big[L_1^+(-u-1)\big]^t\, \Lambda\, \mathrm{L}_2^+(v)\,\Lambda^{-1} &= \Lambda^{-1}\, \mathrm{L}_1^+(v)\,\Lambda\, \big[L_2^+(-u-1)\big]^t\, F_2\, r_{12}\, F_1^{-1} \\
&\downarrow \\
F_2\, r_{12}\, F_1^{-1}\, \big[L_1^+(-u-1)\big]^t\, \mathrm{i}^{-z_2\partial_2}\, \mathrm{L}_2^+(v)\, \mathrm{i}^{z_2\partial_2} &= \mathrm{i}^{z_1\partial_1}\, \mathrm{L}_1^+(v)\, \mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\, \big[L_2^+(-u-1)\big]^t\, F_2\, r_{12}\, F_1^{-1} \\
&\downarrow \\
\mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\, F_2\, r_{12}\, F_1^{-1}\, \mathrm{i}^{-z_2\partial_2}\, \big[L_1^+(-u-1)\big]^t\, L_2^+(v) &= L_1^+(v)\, \big[L_2^+(-u-1)\big]^t\, \mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\, F_2\, r_{12}\, F_1^{-1}\, \mathrm{i}^{-z_2\partial_2}
\end{aligned}$$

因此，tu ft u hift.... 1 bt i i t t i i l ti

$$\hat{r}_{12}\, \big[L_1^+(-u)\big]^t\, L_2^+(v) = L_1^+(v)\, \big[L_2^+(-u)\big]^t\, \hat{r}_{12} \tag{B.39}$$

其中交织算子 $\hat{r}_{12}$ 具有如下形式

$$\hat{r}_{12} = \mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\, F_2(1+z_1\partial_2)^{u-v-1}F_1^{-1}\,\mathrm{i}^{-z_2\partial_2}\,. \tag{B.40}$$

接下来要将一切转换到我们的表示中，第一步是傅里叶变换 $F_1F_2\ldots F_1^{-1}F_2^{-1}$

$$F_1F_2\,\hat{r}_{12}\,F_1^{-1}F_2^{-1}\,\left[\hat{L}_1^+(-u)\right]^t\,\hat{L}_2^+(v) = \hat{L}_1^+(v)\,\left[\hat{L}_2^+(-u)\right]^t\,F_1F_2\,\hat{r}_{12}\,F_1^{-1}F_2^{-1}\,, \tag{B.41}$$

其中

$$F_1F_2\,\hat{r}_{12}\,F_1^{-1}F_2^{-1} = F_1\,\mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\,F_2^2\,(1+z_1\partial_2)^{u-v-1}\,\mathrm{i}^{-z_2\partial_2}\,F_1^{-2}\,F_2^{-1} =$$
$$F_1\,\mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\,(-)^{z_2\partial_2}\,(1+z_1\partial_2)^{u-v-1}\,\mathrm{i}^{-z_2\partial_2}\,(-)^{z_1\partial_1}\,F_2^{-1}\,.$$

在最后一行中，我们用到了

$$\left[F^2\,\Psi\right](z) = \Psi(-z) = (-)^{z\partial}\,\Psi(z).$$

为避免误解，我们应指出，所考虑的算子作用于函数 $\hat{\Psi}(z_1,\ z_2)$，其中 $z_1 \geq 0$ 和 $z_1 \geq 0$。现在来解析所得到的交织算子的表示

$$\hat{\Psi}(z_1,z_2) \xrightarrow{F_2^{-1}} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{\mathrm{i}pz_2}\,\hat{\Psi}(z_1,p) \xrightarrow{\mathrm{i}^{-z_2\partial_2}(-)^{z_1\partial_1}} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{pz_2}\,\hat{\Psi}(-z_1,p)$$
$$\xrightarrow{(1+z_1\partial_2)^{u-v-1}} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{pz_2}\,(1+z_1p)^{u-v-1}\hat{\Psi}(-z_1,p) \xrightarrow{\mathrm{i}^{-z_1\partial_1}\,(-)^{z_2\partial_2}}$$
$$\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{-pz_2}\,(1-\mathrm{i}z_1p)^{u-v-1}\hat{\Psi}(\mathrm{i}z_1,p) \xrightarrow{F_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,e^{-\mathrm{i}kz_1}\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{-pz_2}\,(1-\mathrm{i}kp)^{u-v-1}\hat{\Psi}(\mathrm{i}k,p).$$

下一步是进行积分变量替换 $\mathrm{i}k \to k$，从而得到如下积分算子形式的交织算子

$$\left[F_1F_2\,\hat{r}_{12}\,F_1^{-1}F_2^{-1}\,\hat{\Psi}\right](z_1,z_2) = (-\mathrm{i})\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} dk\,e^{-kz_1}\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\,e^{-pz_2}\,(1-kp)^{u-v-1}\hat{\Psi}(k,p).$$

关于 k 的积分路径是虚轴。根据条件 $z_1 \geq 0$，可以将其变形为右半平面内的汉克尔型积分路径，沿着从点 $k = \frac{1}{p} \geq 0$ 到 $k = +\infty$的支割线。对于实轴上方和下方的取值，我们有

$$(1-(k\pm\mathrm{i}0)p)^{u-v-1} = |1-kp|^{u-v-1}\,e^{\mp\mathrm{i}\pi(u-v-1)},$$

因此

$$(1-(k+\mathrm{i}0)p)^{u-v-1} - (1-(k-\mathrm{i}0)p)^{u-v-1} = 2\mathrm{i}\,\sin(\pi(u-v))\,|1-kp|^{u-v-1}.$$

最终得到

$$\left[F_1F_2\,\hat{r}_{12}\,F_1^{-1}F_2^{-1}\,\hat{\Psi}\right](z_1,z_2) = \frac{\sin(\pi(u-v))}{\pi}\int_0^\infty dp\,e^{-pz_2}\int_{\frac{1}{p}}^{+\infty} dk\,e^{-kz_1}\,|1-kp|^{u-v-1}\,\hat{\Psi}(k,p).$$

为了得到交织算子

$$P_{12}\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(u-v)\;[M_1(-u)]^t\;M_2(v)=M_1(v)\;[M_2(-u)]^t\;P_{12}\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(u-v)\,, \tag{B.42}$$

接下来只需变换谱参数 $u\to -\mathrm{i}u$ 和 $v\to -\mathrm{i}v$，换成指数变量 $z_1=e^{-x_1}$, $z_2=e^{-x_2}$ 和 $k=e^{-y_1}$, $p=e^{-y_2}$，并将函数改为 $\varphi(x_1\,,x_2)=\hat{\Psi}(e^{-x_1}\,,e^{-x_2})$

$$\Big[P_{12}\,\widehat{\mathcal{R}}_{12}(u-v)\varphi\Big]\,(x_1,x_2)=\frac{\sin(\pi(\mathrm{i}v-\mathrm{i}u))}{\pi}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}dy_2\,e^{-y_2}\,e^{-e^{-y_2}-x_2}\int_{-y_2}^{-\infty}dy_1\;e^{-y_1}\,e^{-e^{-y_1}-x_1}\,|1-e^{-y_1-y_2}|^{\mathrm{i}v-\mathrm{i}u-1}\,\varphi(y_1,y_2).$$

最后，为了得到交织算子

$$\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\;[M_1(-u)]^t\;M_2(u-v)=M_1(u-v)\;[M_2(-u)]^t\;\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\,, \tag{B.43}$$

我们必须从左侧乘以置换 P_{12} （即交换 $x_1\leftrightarrows x_2$），替换$v\to u-v$，并对整个积分表示稍作改写

$$\Big[\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\varphi\Big]\,(x_1,x_2)=\frac{\sin(\mathrm{i}\pi v)}{\pi}\int_{\mathbb{R}}dy_2\int_{y_2}^{\infty}dy_1\;\exp\big(\mathrm{i}v(y_2-y_1)-e^{-x_1-y_2}-e^{y_1-x_2}\big)$$
$$\times\,(1-e^{y_2-y_1})^{-\mathrm{i}v-1}\,\varphi(-y_1,y_2).$$

除积分前的系数外，这恰好就是公式（A.14）。

B.3.2 约化为 Toda 交织算子

Let 我们推导出交织 Toda 与 DST Lax 矩阵的积分算子 $\mathcal{R}_{12}(v)$ ces

$$\mathcal{R}_{12}(v)\,L_1(u)\,M_2(u-v)=M_2(u-v)\,L_1(u)\,\mathcal{R}_{12}(v) \tag{B.44}$$

˜由积分算子 $\mathcal{R}_{12}(v)$ 得到，该算子交织两个 DST Lax 矩阵

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v)\,M_1(u)\,M_2(u-v)=M_2(u-v)\,M_1(u)\,\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v). \tag{B.45}$$

我们在最后一个关系式中进行平移 $v\to v-\mathrm{i}\lambda$ 和 $u\to u-\mathrm{i}\lambda$，并将所有内容改写成合适的形式

$$e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\,e^{-\lambda x_1}M_1(u-\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\;M_2(u-v)$$
$$=M_2(u-v)\,e^{-\lambda x_1}M_1(u-\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\,e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)\,e^{\lambda x_1}.$$

取 $\lambda\to\infty$ 的渐近行为，我们得到

$$e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\,\Lambda_+(\lambda)L_1(u)\;M_2(u-v)=M_2(u-v)\,\Lambda_+(\lambda)L_1(u)\,e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)\,e^{\lambda x_1}$$
$$\downarrow$$
$$e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\,L_1(u)\,M_2(u-v)=\Lambda_+^{-1}(\lambda)M_2(u-v)\Lambda_+(\lambda)\,L_1(u)\,e^{-\lambda x_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)\,e^{\lambda x_1}.$$

恒等式

$$\Lambda_+^{-1}(\lambda)\, M(u)\, \Lambda_+(\lambda) = e^{-(\ln\lambda)\partial_x}\, M(u)\, e^{+(\ln\lambda)\partial_x} \tag{B.46}$$

从而可以将所得关系改写为所需的形式

$$e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}} e^{-\lambda x_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, L_1(u)\; M_2(u-v) = M_2(u-v)\, L_1(u)\, e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}} e^{-\lambda x_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)\, e^{\lambda x_1}.$$

所得算子对该函数的作用由以下显式公式定义

$$e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}} e^{-\lambda x_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{12}(v-\mathrm{i}\lambda)\, e^{\lambda x_1}\, \varphi(x_1,x_2) \sim$$

$$e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}} e^{-\lambda x_1} \int_{-\infty}^{x_2} dy\; \exp\bigl(\mathrm{i}(v-\mathrm{i}\lambda)(x_1-y) - e^{x_1-y} + e^{x_1-x_2}\bigr)\, \bigl(1-e^{y-x_2}\bigr)^{\mathrm{i}(v-\mathrm{i}\lambda)-1}\, e^{\lambda y}\, \varphi(y,x_1) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_2+\ln\lambda} dy\; \exp\bigl(\mathrm{i}v(x_1-y) - e^{x_1-y} + \lambda^{-1}\, e^{x_1-x_2}\bigr)\, \bigl(1-\lambda^{-1}\, e^{y-x_2}\bigr)^{\mathrm{i}v-1+\lambda}\, \varphi(y,x_1)$$

$$\xrightarrow{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\; \exp\bigl(\mathrm{i}v(x_1-y) - e^{x_1-y} - e^{y-x_2}\bigr)\, \varphi(y,x_1) = \bigl[\mathcal{R}_{12}(v)\,\varphi\bigr](x_1,x_2).$$

类似地，我们导出积分算子 $\mathcal{R}^*_{12}(v)$，它将 Toda 矩阵与转置 DST 矩阵互换

$$\mathcal{R}^*_{12}(v)\, M_2^t(-u-v)\, L_1(u) = L_1(u)\, M_2^t(-u-v)\, \mathcal{R}^*_{12}(v) \tag{B.47}$$

fro $\widehat{\mathrm{m}}$ 将 DST 与转置 DST Lax 矩阵相互交织的 $\mathcal{R}_{12}(v)$ 算子

$$\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v)\, M_2^t(-u-v)\, M_1(u) = M_1(u)\, M_2^t(-u-v)\, \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v).$$

首先，我们将最后一个关系改写为适当的等价形式

$$e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, M_2^t(-u-v)\, e^{-\lambda x_1} M_1(u-\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}$$
$$= e^{-\lambda x_1} M_1(u-\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, M_2^t(-u-v)\, e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}$$

然后考察 $\lambda\to\infty$ 时的渐近行为

$$e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, M_2^t(-u-v)\, \Lambda_+(\lambda) L_1(u) = \Lambda_+(\lambda) L_1(u)\, M_2^t(-u-v)\, e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}$$
$$\downarrow$$
$$e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, \Lambda_+^{-1}(\lambda) M_2^t(-u-v)\, \Lambda_+(\lambda) L_1(u) = L_1(u)\, M_2^t(-u-v)\, e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}$$

使用相同的关系式（B.46）后，可得

$$e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1}\, e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}} M_2^t(-u-v)\, L_1(u)$$
$$= L_1(u)\, M_2^t(-u-v)\, e^{-\lambda x_1} \widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda) e^{\lambda x_1} e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}}.$$

所得算子对该函数的作用由以下显式公式定义

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda x_1}\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\, e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}}\varphi(x_1,x_2) = \\
e^{-\lambda x_1}\int_{\mathbb{R}} dy_2 \int_{y_2}^{\infty} dy_1\, \exp\bigl(\mathrm{i}(v+\mathrm{i}\lambda)(y_2-y_1) - e^{-x_1-y_2} - e^{y_1-x_2}\bigr) \\
\times (1-e^{y_2-y_1})^{-\mathrm{i}(v+\mathrm{i}\lambda)-1}\, e^{-\lambda y_1}\varphi(-y_1, y_2+\ln\lambda) = \\
\lambda^{\lambda-iv}\int_{\mathbb{R}} dy_2\, \exp -\lambda\bigl(y_2+x_1+e^{-x_1-y_2}\bigr)\int_{y_2-\ln\lambda}^{\infty} dy_1\, \exp\bigl(\mathrm{i}v(y_2-y_1) - e^{y_1-x_2}\bigr) \\
\times (1-\lambda^{-1}e^{y_2-y_1})^{-\mathrm{i}v-1+\lambda}\,\varphi(-y_1,y_2).
\end{aligned}
$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，主渐近贡献可通过应用标准拉普拉斯方法得到

$$
\int_{\mathbb{R}} dy_2\, f(y_2)\, e^{\lambda\, S(y_2)} \to f(\bar y_2)\, e^{\lambda\, S(\bar y_2)}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(\bar y_2)}}
$$

其中 $\bar y_2$ 由方程 $S'(\bar y_2) = 0$ 得到。在我们的例子中，$S(y_2) = -\bigl(y_2+x_1+e^{-x_1-y_2}\bigr)$，因此 $\bar y_2 = -x_1$，并且

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda x_1}\widehat{\mathcal{R}}_{12}(v+\mathrm{i}\lambda)e^{\lambda x_1}\, e^{(\ln\lambda)\partial_{x_2}}\varphi(x_1,x_2) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \\
\lambda^{\lambda-\mathrm{i}v}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\int_{\mathbb{R}} dy_1\, \exp\bigl(\mathrm{i}v(-x_1-y_1) - e^{y_1-x_2} - e^{-x_1-y_1}\bigr)\,\varphi(-y_1,-x_1).
\end{aligned}
$$

这个表达式与公式 $y_1\to -y$ （1.69）相差一个归一化因子和一次变量代换

$$
\bigl[\mathcal{R}^*_{12}(v)\,\varphi\bigr](x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} dy\, \exp\bigl(\mathrm{i}v(y-x_1) - e^{y-x_1} - e^{-y-x_2}\bigr)\,\varphi(y,-x_1).
$$

B.4 反射方程

与 XXX 自旋链相关的一般反射方程具有以下形式 [Skl2]

$$
\mathsf{R}_{12}(u-v)\,\mathsf{K}_1(u)\,\mathsf{R}_{12}(u+v)\,\mathsf{K}_2(v) = \mathsf{K}_2(v)\,\mathsf{R}_{12}(u+v)\,\mathsf{K}_1(u)\,\mathsf{R}_{12}(u-v)\,. \tag{B.48}
$$

R 算子$_{12}(u)$作用于两个自旋分别为 s_1 和s_2 的表示的张量积 $V_1\otimes V_2$ 中，这两个表示属于 $s\ell_2$。它是谱参数 u 和自旋的函数，而自旋决定了这些表示。反射算子 K$_1(u)$定义在自旋为 s_1 的表示的空间 V_1 中，类似的算子 K$_2(v)$则作用于对应自旋 s_2 的空间 V_2 中。

完全类比杨–巴克斯特方程，根据表示 V_1 和 V_2的选择，广义反射方程有不同的变体。

在最简单的二维表示情形下，$V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2$ 算子 R$_{12}(u)$ 退化为杨–巴克斯特方程的有限维解——杨氏 R-矩阵，其作用于张量积 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$

$$
R_{12}(u) = R(u) = u + P\,, \qquad P\,a\otimes b = b\otimes a\,.
$$

反射关系（B.48）在这种情况下化为以下形式

$$R(u-v)\left(\widehat{K}(u)\otimes\mathbf{1}\right)R(u+v)\left(\mathbf{1}\otimes\widehat{K}(v)\right)$$
$$=\left(\mathbf{1}\otimes\widehat{K}(v)\right)R(u+v)\left(\widehat{K}(u)\otimes\mathbf{1}\right)R(u-v)\,,\quad\text{(B.49)}$$

其中 $\mathbf{1}$ 是 2×2 单位矩阵。它是 2×2 K矩阵的方程，而该关系的 [Skl2 中IS] 一般解具有以下形式

$$\widehat{K}(u)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\alpha & u\\ -\beta^2\,u & \mathrm{i}\alpha\end{pmatrix}.\quad\text{(B.50)}$$

在 $V_1=\mathbb{C}^2$ 且 V_2 是 $s\ell_2$的任意表示空间的情况下，可得到一般反射算子 $\mathsf{K}(v)=\mathsf{K}(v\,,\ s)$ 的定义关系

$$\mathsf{L}(u-v+\tfrac{1}{2})\,\widehat{K}(u)\,\mathsf{L}(u+v+\tfrac{1}{2})\,\mathsf{K}(v\,,s)=\mathsf{K}(v\,,s)\,\mathsf{L}(u+v+\tfrac{1}{2})\,\widehat{K}(u)\,\mathsf{L}(u-v+\tfrac{1}{2})\,.$$

将谱参数 $u\to u-\frac{1}{2}$ 平移后，定义关系具有更便于处理的形式

$$\mathsf{L}(u-v)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u+v)\,\mathsf{K}(v\,,s)=\mathsf{K}(v\,,s)\,\mathsf{L}(u+v)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u-v)\,,\quad\text{(B.51)}$$

其中我们采用了一个记号来表示反射 K矩阵，该记号与标准记号（B.50）的区别在于自变量平移了 $u\to u-\frac{1}{2}$

$$\hat{K}(u)=\widehat{K}(u-\tfrac{1}{2})=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\alpha & u-\frac{1}{2}\\ -\beta^2\big(u-\frac{1}{2}\big) & \mathrm{i}\alpha\end{pmatrix}.\quad\text{(B.52)}$$

算子 $\mathsf{K}(v\,,\ s)$ 在 [ABDK] 中被显式构造为积分算子，其公式如下

$$\left[\mathsf{K}(v\,,s)\,\Phi\right](z)=\frac{(2i\beta)^{-2v}}{\Gamma(-2v)}\,(z+i\beta)^{g+v-s}$$
$$\times\int_0^1 dt\,(1-t)^{-2v-1}\,t^{g+v+s-1}\,\big(t(z-\mathrm{i}\beta)+2\mathrm{i}\beta\big)^{v+s-g}\,\Phi(t(z-\mathrm{i}\beta)+i\beta)\quad\text{(B.53)}$$

其中 $g=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}$。我们的下一个目标是推导以下关系

$$L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\hat{\mathcal{K}}(v)$$
$$=\hat{\mathcal{K}}(v)\,\sigma_2\,L^-(u+v)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,L^+(u-v-1)\,\sigma_2\,\sigma_3\,,\quad\text{(B.54)}$$

其中，算子 $\mathcal{K}(v)$ 是通过对算子 $\mathsf{K}(v\,,s)$ 进行适当约化得到的

$$\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\xrightarrow{s\to+\infty}\hat{\mathcal{K}}(v)=(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{v-g+1}\,\mathrm{i}^{z\partial}\,F\quad\text{(B.55)}$$

且 σ_2，σ_3 是标准泡利矩阵

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\quad;\quad\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.\quad\text{(B.56)}$$

在公式（B.55） P 是求逆算子

$$[P\,\Psi]\,(z) = z^{-2s}\,\Psi\left(\frac{1}{z}\right) \quad ; \quad P^2 = 1\,, \tag{B.57}$$

以及 F 是傅里叶变换。正如我们将在下一步所展示的，关系式（2.2）

$$\mathcal{K}(v)\,M^t(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M(u-v)\sigma_2 = M(u-v)\,K(u)\,\sigma_2 M^t(-u-v)\sigma_2\,\mathcal{K}(v).$$

恰好是用等价表示重写的关系式（B.54）。由此可独立推导出算子 $\mathcal{K}$（v）。

让我们从关系式B.54出发进行推导

$$\mathsf{L}(u-v)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u+v)\,\mathsf{K}(v\,,s) = \mathsf{K}(v\,,s)\,\mathsf{L}(u+v)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u-v). \tag{B.58}$$

第一步是求逆 P，它会引起生成元以及整个 L-算子的如下变换

$$P\,S\,P = -S \quad ; \quad P\,S^{\pm}\,P = S^{\mp} \quad ; \quad P\,\mathsf{L}(u)\,P = \sigma_2\,\sigma_3\,\mathsf{L}(u)\,\sigma_3\,\sigma_2. \tag{B.59}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned} P\,\mathsf{L}(u)\,P &= P\begin{pmatrix} u+S & S_- \\ S_+ & u-S \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} u-S & S_+ \\ S_- & u+S \end{pmatrix} \\ &= \sigma_2\begin{pmatrix} u+S & -S_+ \\ -S_- & u-S \end{pmatrix}\sigma_2 = \sigma_2\,\sigma_3\begin{pmatrix} u+S & S_+ \\ S_- & u-S \end{pmatrix}\sigma_3\,\sigma_2. \end{aligned}$$

让我们从右侧乘以求逆算子，将（B.58）

$$\mathsf{L}(u-v)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u+v)\,\mathsf{K}(v\,,s)\,P = \mathsf{K}(v\,,s)\,P\,P\,\mathsf{L}(u+v)\,P\,\hat{K}(u)\,P\,\mathsf{L}(u-v)\,P,$$

然后使用（B.59），并对谱参数进行平移 $v \to v+s$

$$\begin{aligned} &\mathsf{L}(u-v-s)\,\hat{K}(u)\,\mathsf{L}(u+v+s)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P = \\ &\qquad \mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,\sigma_2\,\sigma_3\,\mathsf{L}(u+v+s)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,\sigma_3\,\mathsf{L}(u-v-s)\,\sigma_3\,\sigma_2 \end{aligned}$$

现在我们提取主渐近贡献，得到 $s \to \infty$

$$\begin{aligned} &\Lambda_+(2s)\,\sigma_3\,L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\Lambda_-(2s)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P = \\ &\quad \mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,\sigma_2\,\sigma_3\,L^-(u+v)\,\Lambda_-(2s)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,\sigma_3\,\Lambda_+(2s)\,\sigma_3\,L^+(u-v-1)\,\sigma_3\,\sigma_2 \end{aligned} \tag{B.60}$$

使用公式（B.12）

$$\mathsf{L}(u+s) \xrightarrow{s\to\infty} L^-(u)\,\Lambda_-(2s) \quad ; \quad \mathsf{L}(u-s) \xrightarrow{s\to\infty} \Lambda_+(2s)\,\sigma_3\,L^+(u-1)\,,$$

其中

$$\Lambda_-(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Lambda_+(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

接下来，我们在关系式（B.60）左侧乘以矩阵 $\sigma_3\,\Lambda_+^{-1}(2s)$，并在右侧乘以矩阵 $\Lambda_-^{-1}(2s$

$$L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P=\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,\sigma_3\,\Lambda_+^{-1}(2s)\sigma_2\,\sigma_3\,L^-(u+v)\,\Lambda_-(2s)$$
$$\times\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,\sigma_3\,\Lambda_+(2s)\,\sigma_3\,L^+(u-v-1)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\Lambda_-^{-1}(2s).$$

然后利用以下关系变换右端

$$\sigma_3\,\Lambda_\pm(2s)=\Lambda_\pm(2s)\,\sigma_3\quad;\quad\sigma_2\,\Lambda_\pm(u)=\Lambda_\mp(u)\,\sigma_2\tag{B.61}$$

以及泡利矩阵 $\sigma_2^2=\sigma_3^2=\mathbf{1}$, $\sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2$ 的标准公式，得到

$$L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P=\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,\sigma_2\,\Lambda_-^{-1}(2s)\,L^-(u+v)\,\Lambda_-(2s)$$
$$\times\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,\Lambda_+(2s)\,L^+(u-v-1)\,\Lambda_+^{-1}(2s)\,\sigma_2\,\sigma_3.$$

最后一步是利用以下关系

$$\Lambda_-^{-1}(2s)\,L^-(u+v)\,\Lambda_-(2s)=(2s)^{z\partial}\,L^-(u+v)\,(2s)^{-z\partial}$$
$$\Lambda_+(2s)\,L^+(u-v-1)\,\Lambda_+^{-1}(2s)=(2s)^{z\partial}\,L^+(u-v-1)\,(2s)^{-z\partial}$$

从而

$$L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P=\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,\sigma_2\,(2s)^{z\partial}\,L^-(u+v)\,(2s)^{-z\partial}$$
$$\times\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,(2s)^{z\partial}\,L^+(u-v-1)\,(2s)^{-z\partial}\,\sigma_2\,\sigma_3,$$

或者等价地

$$L^+(u-v-1)\,\hat{K}(u)\,L^-(u+v)\,\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}=$$
$$\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\,\sigma_2\,L^-(u+v)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat{K}(u)\,\sigma_2\,L^+(u-v-1)\,\sigma_2\,\sigma_3.$$

最终得到关系（B.54），其中

$$\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\xrightarrow{s\to\infty}\hat{\mathcal{K}}(v).$$

它仍然.....以显式计算交织算子的主导渐近式 r

$$\left[\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\,\Psi\right](z)=\frac{(2\mathrm{i}\beta)^{-2v-2s}}{\Gamma(-2v-2s)}\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v}$$
$$\int_0^1 dt\,(1-t)^{-2v-1}\,t^{g+v-1}\,(t(z-\mathrm{i}\beta)+2\mathrm{i}\beta)^{v-g}\,\left(\frac{t}{1-t}\,\frac{t(z-\mathrm{i}\beta)+2\mathrm{i}\beta}{t(z-\mathrm{i}\beta)+\mathrm{i}\beta}\right)^{2s}\,\Psi\left(\frac{2s}{t(z-\mathrm{i}\beta)+\mathrm{i}\beta}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{2s-2v}(2\mathrm{i}\beta)^{-2v-2s}}{2s\Gamma(-2v-2s)}\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{v-g+1}$$
$$\int_{-\mathrm{i}\frac{2s}{\beta}}^{\frac{2s}{z}}dx\,\left(1-\frac{zx}{2s}\right)^{-2v-1}\,\left(1-\frac{\mathrm{i}\beta x}{2s}\right)^{g+v-1}\,\left(1+\frac{\mathrm{i}\beta x}{2s}\right)^{v-g}\,\left(\frac{\left(1+\frac{\mathrm{i}\beta x}{2s}\right)\left(1-\frac{\mathrm{i}\beta x}{2s}\right)}{1-\frac{zx}{2s}}\right)^{2s}\,\Psi(x),$$

因此，除去整体上无关紧要的归一化系数，可得

$$\left[\mathsf{K}(v+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\,\Psi\right](z)\xrightarrow{s\to\infty}(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{v-g+1}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{zx}\,\Psi(x).$$

最后一步是将所有内容改写为适当的表示。这个过程与从公式（B.16）出发的计算非常相似。我们有

$$F\,L^{+}(u)\,F^{-1}=F\begin{pmatrix}u+\partial_z z & -\partial_z\\ -z & 1\end{pmatrix}F^{-1}=\begin{pmatrix}u-z\partial_z & -\mathrm{i}z\\ -\mathrm{i}\partial_z & 1\end{pmatrix}=\hat{L}^{+}(u)\,,$$
$$F\,L^{-}(u)\,F^{-1}=F\begin{pmatrix}1 & -\partial_z\\ z & u-z\partial_z\end{pmatrix}F^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}z\\ \mathrm{i}\partial_z & u+\partial_z z\end{pmatrix}=\hat{L}^{-}(u)\,.$$

第二步是变量代换

$$\hat{L}^{+}(u)\,\hat{\Psi}(z)=\begin{pmatrix}u-z\partial_z & -\mathrm{i}z\\ -\mathrm{i}\partial_z & 1\end{pmatrix}\hat{\Psi}(z)$$
$$\longrightarrow(-\mathrm{i})\begin{pmatrix}\mathrm{i}u+\mathrm{i}\partial_x & e^{-x}\\ -e^{x}\partial_x & i\end{pmatrix}\hat{\Psi}(e^{-x})=(-\mathrm{i})\,M(\mathrm{i}u)\,\hat{\Psi}(e^{-x})$$

并使用一般公式

$$\sigma_2\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\sigma_2=\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$

我们得到

$$\sigma_2\,\hat{L}^{-}(u)\,\sigma_2\,\hat{\Psi}(z)=\begin{pmatrix}u+\partial_z z & -\mathrm{i}\partial_z\\ \mathrm{i}z & 1\end{pmatrix}\hat{\Psi}(z)\longrightarrow(-\mathrm{i})\begin{pmatrix}\mathrm{i}u+\mathrm{i}-\mathrm{i}\partial_x & -e^{x}\partial_x\\ -e^{-x} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\hat{\Psi}(e^{-x})$$
$$=\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}u-\mathrm{i}+\mathrm{i}\partial_x & -e^{x}\partial_x\\ e^{-x} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\sigma_3\,\hat{\Psi}(e^{-x})=\mathrm{i}\,M^{t}(-\mathrm{i}u-\mathrm{i})\,\sigma_3\,\hat{\Psi}(e^{-x}).$$

请注意，对谱参数进行所需的变换后， $u\to -\mathrm{i}u$ 在 K矩阵（B.52）中，得到的恰好是 K矩阵（1.56）

$$\hat{K}(-\mathrm{i}u)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\alpha & -\mathrm{i}u-\frac{1}{2}\\ -\beta^2\left(-\mathrm{i}u-\frac{1}{2}\right) & \mathrm{i}\alpha\end{pmatrix}=(-\mathrm{i})\begin{pmatrix}-\alpha & u-\frac{\mathrm{i}}{2}\\ -\beta^2\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) & -\alpha\end{pmatrix}=(-\mathrm{i})\,K(u).\qquad\text{(B.62)}$$

˄ 利用得到的公式，我们将关系式（B.54）（带有平移 $v\to v-1$）和算子 $\mathcal{K}(v)$

在适当的表示中

$$
\begin{gathered}
L^+(u-v)\,\hat K(u)\,L^-(u+v-1)\,\hat{\mathcal{K}}(v-1)= \\
\hat{\mathcal{K}}(v-1)\,\sigma_2\,L^-(u+v-1)\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat K(u)\,\sigma_2\,L^+(u-v)\,\sigma_2\,\sigma_3 \\
\downarrow \\
(-\mathrm{i})\,M(\mathrm{i}(u-v))\,\hat K(u)\,\sigma_2\,\mathrm{i}\,M^t(-\mathrm{i}(u+v-1)-\mathrm{i})\,\sigma_3\,\sigma_2\,\mathcal{K}(\mathrm{i}v)= \\
\mathcal{K}(\mathrm{i}v)\,\sigma_2\,\sigma_2\,\mathrm{i}\,M^t(-\mathrm{i}(u+v-1)-\mathrm{i})\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_2\,\hat K(u)\,\sigma_2\,(-\mathrm{i})\,M(\mathrm{i}(u-v))\,\sigma_2\,\sigma_3 \\
\downarrow \\
M(\mathrm{i}(u-v))\,\hat K(u)\,\sigma_2\,M^t(-\mathrm{i}(u+v))\,\sigma_2\,\mathcal{K}(\mathrm{i}v)=\mathcal{K}(\mathrm{i}v)\,M^t(-\mathrm{i}(u+v))\,\hat K(u)\,\sigma_2\,M(\mathrm{i}(u-v))\,\sigma_2 \\
\downarrow \\
M(u-v)\,\hat K(-\mathrm{i}u)\,\sigma_2\,M^t(-u-v)\,\sigma_2\,\mathcal{K}(v)=\mathcal{K}(v)\,M^t(-u-v)\,\hat K(-\mathrm{i}u)\,\sigma_2\,M(u-v)\,\sigma_2 \\
\downarrow \\
M(u-v)\,K(u)\,\sigma_2\,M^t(-u-v)\,\sigma_2\,\mathcal{K}(v)=\mathcal{K}(v)\,M^t(-u-v)\,K(u)\,\sigma_2\,M(u-v)\,\sigma_2
\end{gathered}
$$

其中算子 $\mathcal{K}(v)$ 是通过两个步骤得到的

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{K}(v-1+s\,,s)\,P\,(2s)^{z\partial}\xrightarrow{s\to\infty}\hat{\mathcal{K}}(v-1)=(z+\mathrm{i}\beta)^{g+v-1}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{v-g}\,\mathrm{i}^{z\partial}\,F,\\
&\mathcal{K}(v)=F\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\mathrm{i}^{-z\partial}\,F\,F^{-1}=F\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(z-\mathrm{i}\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\mathrm{i}^{z\partial}\,.
\end{aligned}
$$

将算子 $\mathcal{K}(v)$ 显式地表示为积分算子

$$
\begin{aligned}
\big[\mathcal{K}(v)\,\hat\Psi b\big](z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{-\mathrm{i}pz}\,(p+\mathrm{i}\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(p-\mathrm{i}\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\mathrm{i}^{p\partial_p}\hat\Psi(p)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,e^{-\mathrm{i}pz}\,(p+\mathrm{i}\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(p-\mathrm{i}\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\hat\Psi(\mathrm{i}p)\\
&=\mathrm{i}^{2\mathrm{i}v}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}dk\,e^{-kz}\,(k-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(k+\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\hat\Psi(k).
\end{aligned}
$$

记住，$z\geq 0$。关于 k 的积分路径是虚轴，根据条件 $z\geq 0$，可以将此积分路径闭合于右半平面。由于函数 $(k-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}$，我们在从 $k=\beta\geq 0$ 到 $k=+\infty$ 的正实轴上有一条支割线。对于实轴上方和下方的值，我们有

$$
(k\pm\mathrm{i}0-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}=|k-\beta|^{g-\mathrm{i}v-1}\,e^{\mp\mathrm{i}\pi(g-\mathrm{i}v-1)}
$$

因此，不连续性为

$$
(k+\mathrm{i}0-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}-(k-\mathrm{i}0-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}=2\mathrm{i}\,\sin(\pi(g-\mathrm{i}v))\,|k-\beta|^{g-\mathrm{i}v-1}.
$$

最终得到

$$
\big[\mathcal{K}(v)\,\hat\Psi\big](z)=2\mathrm{i}\,\sin(\pi(g-iv))\,\mathrm{i}^{2iv}\int_{\beta}^{+\infty}dk\,e^{-kz}\,(k-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(k+\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\hat\Psi(k).
$$

ˆ 还需进行变量替换 $z = e^{-x}$, $k = e^{-y}$，并改用函数 $\varphi(x) = \Psi(e^{-x})$

$$\big[\mathcal{K}(v)\,\varphi\big](x) = -2\mathrm{i}\,\sin(\pi(g-\mathrm{i}v))\,\mathrm{i}^{2\mathrm{i}v}\int_{-\ln\beta}^{-\infty} dy\,e^{-y}\,e^{-e^{-x-y}}\,(e^{-y}-\beta)^{g-\mathrm{i}v-1}\,(e^{-y}+\beta)^{-\mathrm{i}v-g}\,\varphi(y)$$

$$= -2\mathrm{i}\,\sin(\pi(g-\mathrm{i}v))\,\mathrm{i}^{2\mathrm{i}v}\int_{-\ln\beta}^{-\infty} dy\,\exp\left(2\mathrm{i}vy - e^{-x-y}\right)\,(1-\beta e^{y})^{g-\mathrm{i}v-1}\,(1+\beta e^{y})^{-\mathrm{i}v-g}\,\varphi(y)$$

$$= 2\mathrm{i}\,\sin(\pi(g-\mathrm{i}v))\,\mathrm{i}^{2\mathrm{i}v}\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\,\exp\left(-2\mathrm{i}vy - e^{y-x}\right)\,(1-\beta e^{-y})^{g-\mathrm{i}v-1}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}v-g}\,\varphi(-y)$$

因此，除整体归一化因子外，可得到反射算子（1.65）。

参考文献

[ABDK] P. Antonenko, N. Belousov, S. Derkachov, S. Khoroshkin，反射算子与超几何 I: $SL(2,\mathbb{R})$ 自旋链，Zap. Nauchn. Sem. POMI 532 (2024) 5–46,[2406.19862].[ADV1] P. Antonenko, S. Derkachov, P. Valinevich，A 型开放 $SL(2,\mathbb{C})$自旋链，SIGMA 21 (2025) 107, [2507.09568].[ADV2] P. Antonenko, S. Derkachov, P. Valinevich，BC 型开放 $SL(2,\mathbb{C})$ 自旋链，Annales Henri Poincar´e (2026), [2508.04972].[AV] A. Appel, B. Vlaar，源自量子对称对的边界传递矩阵，《数学研究》36:6 (2025) 1830–1862, [2410.21654].[BDK] N. Belousov, S. Derkachov, S. Khoroshkin，BC Toda 链 II：对称性。对偶图景，即将发表。[BC] A. Borodin, I. Corwin，Macdonald 过程，《概率论及相关领域》158 (2014) 225–400, [1111.4408].[D] S. E. Derkachov，R 矩阵分解。I，《数学科学杂志》143 (2007) 2773–2790, [math/0503396].[DE] J. F. van Diejen, E. Emsiz，带边界扰动的量子 Toda 链的双谱对偶差分方程，《国际数学研究通知》2019:12 (2019) 3740–3767, [1903.01827].[DKM] S. ´E.Derkachov, K. K.Kozlowski, A. N. Manashov，$SL(2,\mathbb{R})$自旋链的分离变量表示完备性，SIGMA 17 (2021) 063, [2102.13570].[DL] J. Derezi´nski, J. Lee，与合流方程相关的精确可解薛定谔算子，《米兰数学杂志》93 (2025) 109–147, [2409.14994].[DLMF] NIST 数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/，2025-03-15 发布的 1.2.4 版。F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。

[DM] S. E. Derkachov, A. N. Manashov，具有对称群 SL($n, \mathbb{C}$) 的杨–巴克斯特方程的一般解，《代数与分析》21:4 (2009) 1–94，《圣彼得堡数学杂志》21:4 (2010) 513–577。[F] L. D. Faddeev，场论中的量子完全可积模型，《数学物理评论》1 (1980) 107–155，重印于《数学物理四十年》，世界科学出版社 (1995)。[FGK]R. Frassek, C. Giardin`a, J. Kurchan，非紧量子自旋链作为可积随机粒子过程，《统计物理学杂志》180 (2020) 135–171,[1904.01048].[Gaud] M. Gaudin，《贝特波函数》（Masson，巴黎，1983）；英文译本：《贝特波函数》，Jean-S´ebastien Caux 译（剑桥大学出版社，剑桥，2014）。[Giv] A. Givental，驻相积分、量子托达格、旗流形与镜像猜想，载于：奇点理论专题，美国数学会译丛（第二辑）180 (1997) 103–115, [alg-geom/9612001].[GKLO] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin，量子 Toda 链波函数的 Gauss–Givental 表示，《国际数学研究通知》2006 (2006), [math/0505310].[GLO1] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin，巴克斯特算子与阿基米德赫克代数，《数学物理通讯》284 (2008) 867–896, [0706.3476].[GLO2]A. A. Gerasimov, D. R. Lebedev, S. V. Oblezin，经典李群惠特克函数的新积分表示，《俄罗斯数学评论》67:1 (2012),[0705.2886].[GLO3] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin，相互交织的量子 Toda 链，《圣彼得堡数学杂志》22 (2011) 411–435, [0907.0299].[I] V. I. Inozemtsev，有限托达格，《数学物理通讯》121 (1989) 629–638。[IS] N. Z. Iorgov, V. N. Shadura，具有边界相互作用的 Toda 链波函数，《理论与数学物理》142 (2005) 289–305, [nlin/0411002].[Kost] B. Kostant，量子化与表示论，载于：李群表示论，伦敦数学会讲义系列34 (1979) 287–316。[K] K. K. Kozlowski，Toda 链分离变量变换的幺正性。《数学物理通讯》334 (2015) 223–273, [1306.4967].[KL] S. Kharchev, D. Lebedev， $GL(N, \mathbb{R})$ Toda 链的特征函数：梅林–巴恩斯表示，《实验与理论物理学快报》71 (2000) 235–238,[hep-th/0004065]。

[KS] V. B. Kuznetsov, E. K. Sklyanin，关于多体系统的B ¨acklund变换，《数学与一般物理学杂志A》31（1998） 2241, [solv-int/9711010].[KSS] V. B. Kuznetsov, M. Salerno, E. K. Sklyanin，可积DST模型的量子B ¨acklund变换，《数学与一般物理学杂志A》33（2000） 171，[solv-int/9908002].[N] Y. A. Neretin，关于酉表示主系列的Derkachov–Manashov R矩阵，《数学物理学杂志》65（2024）， [2306.08389].[Sil] A. V. Silantyev，Toda链的过渡函数，《理论与数学物理》150（2007）315–331, [nlin/0603017].[Skl1] E. K. Sklyanin，量子 Toda 链，载于：《经典与量子场论中的非线性方程》。《物理学讲义》226（1985）196–233。[Skl2] E. K. Sklyanin，可积量子系统的边界条件，《数学与一般物理学杂志A》21（1988）2375–2389。[Skl3] E. K. Sklyanin，B ¨acklund变换与Baxter的Q算子，载于：可积系统：从经典到量子，CRM会议论文集与讲义 **26**, [nlin/0009009].[Sl] N. A. Slavnov，代数 Bethe Ansatz，arXiv预印本 [1804.07350].[W] N. R. Wallach，Whittaker Plancherel定理，《日本数学杂志》19（2024）1-65, [1705.06787]。