arXiv:2603.16387v1 [math-ph] 17 Mar 2026

BC Toda 链 II：对称性。对偶图景

N. Belousov[†]、S. Derkachov[◇†]、S. Khoroshkin[*○†]

[†]北京数学科学与应用研究院，中国北京市怀柔区，*101408*

[◇]斯捷克洛夫数学研究所，丰坦卡街27号，俄罗斯圣彼得堡，*191023*

[*]以色列理工学院数学系，以色列海法

[○]斯科尔科沃科学技术研究院，俄罗斯斯科尔科沃，*121205*

摘要

在上一篇论文中，我们推导了量子 BC Toda 链波函数的高斯–吉文塔尔积分表示，并为该模型引入了巴克斯特算子。本文证明了巴克斯特算子的可交换性，并表明所构造的波函数关于谱参数的带符号置换具有对称性，且能将巴克斯特算子对角化。此外，我们还推导了波函数的梅林–巴恩斯积分表示。借助这一表示，我们证明波函数关于谱参数满足对偶差分方程组，并且与超八面体 Whittaker 函数一致。最后，我们给出了波函数正交性和完备性的启发式证明。

目录

1 引言 **2**

1.1 哈密顿量 .3 1.2 波函数与巴克斯特算子 .4 1.3 主要结果 .7

2 Gauss–Give ntal 表示 12

2.1 图示 .12 2.2 升算子与反射对称性 .18 2.3 巴克斯特算子及其约化 .20 2.4 可交换性与交换关系 .22 2.5 波函数的性质 .26 2.6 局部关系： GL 与 BC 算子 .27 2.7 GL与 BC 波函数之间的标量积 .31 2.8 从 Gauss–Givental 到梅林–巴恩斯 .34 2.9 正交性.35

3 对偶系统 39

3.1 GL系统.39 3.1.1 对偶哈密顿量、升算子与巴克斯特算子.39 3.1.2 局部关系与特征函数.41 3.2 BC系统.42 3.2.1 对偶哈密顿量.42 3.2.2 GL–BC 交织算子与梅林–巴恩斯积分.43

3.2.3 QISM 技术.483.2.4 渐近行为与超八面体 Whittaker 函数.543.2.5 完备性.58

A 积分恒等式 **59**
A.1 翻转关系的证明 .59A.2 约化翻转关系的证明 .60

B Gauss–Givental 界 **61**
B.1 GL系统 .62B.2 BC系统 .64B.3 算子乘积的核 .66B.4 从核相等到算子相等 .68B.5 关于 BC Toda 波函数 .68

C 梅林–巴恩斯界与解析性 **70**
C.1 GL系统 .71C.2 BC系统 .72

D Gustafson 积分约化 **74**

1 引言

T该量子 Toda 链 BC_n 由如下哈密顿量控制： [Skl2，I]

$$\mathbb{H}_{BC} = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j - x_{j+1}} + 2\alpha\, e^{-x_1} + \beta^2 e^{-2x_1}, \tag{1.1}$$

它作用于 n 空间变量 $x_j \in \mathbb{R}$ 的函数，并含有两个参数 α， β。在 [BDK] 中，我们找到了反射算子，它作用于单变量函数，可用于对角化 BC_1 Toda 哈密顿量。此外，将反射算子与 Sklyanin 交织算子结合起来 [Skl3]，我们构造了满足与 BC_n 系统相关的反射方程的单值算子。单值算子的约化产生了所谓的升算子和巴克斯特算子。借助升算子，我们推导出 BC_n 系统波函数的显式表达式，其形式为 Gauss–Givental 迭代积分。此外，我们证明了巴克斯特算子与 BC_n Toda 哈密顿量的可交换性，以及刻画其谱的巴克斯特方程。

同样的技术曾用于 [ADV1、DKM1、BKP] 以分析 q-Toda 链和海森堡自旋链；而对于 GL_n Toda 链（$\alpha = \beta = 0$），类似的构造重现了 [GLO2] 利用经典李群表示论所得的已知结果 GL（n、 $\mathbb{R}$）。

本文进一步运用量子可积系统理论中的其他工具，研究 BC_n Toda 链的波函数。首先，我们证明了在 [BDK]中构造的巴克斯特算子和升算子的可交换性与交换关系。这些关系对应于某些积分恒等式，可借助图形语言，通过几种称为星-三角关系和翻转关系的基本变换来描述和推导。此外，我们证明，我们的升算子和巴克斯特算子及其乘积在多项式有界连续函数空间上均定义良好。

其次，利用巴克斯特算子与升算子之间的关系，我们对巴克斯特算子进行对角化，并确立波函数关于谱参数的带符号置换的对称性。

接下来，我们计算 GL_n 和 BC_n 波函数之间的标量积。该计算使我们得到 BC_n 波函数的梅林–巴恩斯积分表示，从而推广了 Iorgov 和 Shadura 关于 [IS] 系统（ B_n ）的结果。进一步，我们证明 Gauss–Givental 和梅林–巴恩斯积分表示本质上足以证明 BC_n 波函数的正交性和完备性关系。

众所周知， BC_n Toda 链的适当归一化波函数（也称为超正多面体惠特克函数）关于谱参数满足差分方程 [DE2]。为验证我们的波函数满足对偶方程，我们注意到梅林–巴恩斯表示的核可视为 Ruijsenaars BC_n — GL_n 核函数，它满足相应的差分方程。此外，我们还找到了第二核函数，以及波函数的另一种梅林–巴恩斯积分表示。 BC_n

最后，遵循 [HR、BCDK] 的策略，我们推导出波函数的渐近行为，并将其识别为 van Diejen 和 Emsiz 所定义的超八面体 Whittaker 函数。Mellin–Barnes 迭代积分可通过留数计算，所得结果给出了相应 Harish-Chandra 级数的精确公式。

在接下来的小节中，我们简要回顾 GL_n 和 BC_n Toda 链的对易哈密顿量及其特征函数的构造（详情参见 [BDK] 及其中的参考文献），然后陈述本文的主要结果。

1.1 哈密顿量

为了描述 GL 和 BC 型量子 Toda 链，我们需要两个基本模块：与第 j个粒子 [F、G、Skl1]相关联的 Lax 矩阵

$$L_j(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_{x_j} & e^{-x_j} \\ -e^{x_j} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

以及反射（边界）矩阵

$$K(u) = \begin{pmatrix} -\alpha & u - \frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\beta^2\big(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\big) & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

借助它们，我们构造单值化矩阵 $T_n(u)$

$$T_n(u) = L_n(u)\cdots L_1(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

它用于 GL Toda 链，以及单值化矩阵 $\mathbb{T}_n(u)$

$$\mathbb{T}_n(u) = T_n(u)\,K(u)\,\sigma_2\,T_n^t(-u)\,\sigma_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_n(u) & \mathbb{B}_n(u) \\ \mathbb{C}_n(u) & \mathbb{D}_n(u) \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

它描述 BC Toda 系统（为了区分与 BC 系统相关的对象，我们通常使用 mathbb 字体）。元素 $A_n(u)$ 和 $\mathbb{B}_n(u)$ 分别是 GL 和 BC Toda 链的对易哈密顿量的生成函数

$$A_n(u) = u^n + \sum_{s=1}^{n} u^{n-s}\,\mathrm{H}_s, \qquad [\mathrm{H}_s, \mathrm{H}_r] = 0, \tag{1.6}$$

$$\mathbb{B}_n(u) = (-1)^n \Big(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\Big(u^{2n} + \sum_{s=1}^{n} u^{2(n-s)}\,\mathbb{H}_s\Big), \qquad [\mathbb{H}_s, \mathbb{H}_r] = 0. \tag{1.7}$$

前几个系数与二次哈密顿量（1.1）有关，即，$\mathbb{H}_1 = -\mathbb{H}_{BC}$ 和

$$\mathrm{H}_1 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\partial_{x_j}, \qquad \mathrm{H}_2 = \frac{1}{2}\big(\mathrm{H}_1^2 - \mathrm{H}_{GL}\big), \tag{1.8}$$

其中

$$\mathrm{H}_{GL} = \mathbb{H}_{BC}\big|_{\alpha=\beta=0} = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j - x_{j+1}}. \tag{1.9}$$

BC Toda 系统的另外两个特例是 B Toda 链（$\alpha \neq 0, \beta = 0$）和 C Toda 链（$\alpha = 0, \beta \neq 0$）。

1.2 波函数与巴克斯特算子

记 n变量的元组及其分量之和为

$$\boldsymbol{x}_n = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \underline{\boldsymbol{x}}_n = x_1 + \ldots + x_n. \tag{1.10}$$

GL 和 BC 系统的波函数由生成函数本征值的零点参数化

$$A_n(u)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n}(u - \lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{1.11}$$

$$\mathbb{B}_n(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = (-1)^n\Big(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\prod_{j=1}^{n}(u^2 - \lambda_j^2)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{1.12}$$

如 [BDK], 所示，它们可以使用所谓的升算子来构造。为引入这些算子，记

$$g = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.13}$$

此外，在下文中我们始终假设条件

$$g > 0, \qquad \beta > 0. \tag{1.14}$$

升算子是作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$的积分算子，其公式为

$$\big[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\ \Lambda_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}), \tag{1.15}$$

$$\big[\ \ {}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\quad {}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}), \tag{1.16}$$

其中核由下式给出

$$\Lambda_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) = \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}\big)\Big), \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} {}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) &= \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\ (1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\ (1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta) \\ &\times \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1} - 2\underline{\boldsymbol{z}}_n\big) - \sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}}\big) - e^{z_n-x_n}\Big). \end{aligned} \tag{1.18}$$

这里及下文中， $\theta(x)$表示赫维赛阶跃函数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

波函数由迭代积分定义

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(\lambda_n)\cdots\Lambda_1(\lambda_1)\cdot 1, \tag{1.20}$$

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \ \ {}_n(\lambda_n)\cdots\ \ {}_1(\lambda_1)\cdot 1, \tag{1.21}$$

按照惯例，这些表示称为 Gauss–Givental 表示。注意，根据显式公式（1.17），我们有

$$\Lambda_n(\lambda+\rho) = e^{\mathrm{i}\rho\underline{\boldsymbol{x}}_n}\,\Lambda_n(\lambda)\,e^{-\mathrm{i}\rho\underline{\boldsymbol{x}}_{n-1}}, \tag{1.22}$$

因此，

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n+\rho\boldsymbol{e}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\mathrm{i}\rho\underline{\boldsymbol{x}}_n}\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \boldsymbol{e}_n = (1,\dots,1). \tag{1.23}$$

例 1. 在 $n=1$ 的情况下，我们有 $\Phi_\lambda(x) = e^{\mathrm{i}\lambda x}$ 以及

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(x) &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\,W_{\frac{1}{2}-g,-\mathrm{i}\lambda}(2\beta e^{-x}) \\ &= \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\ln\beta}^{\infty} dz\ e^{\mathrm{i}\lambda(x-2z)-e^{z-x}}\,(1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

其中 $W_{\kappa,\ \mu}(z)$ 是惠特克函数 [DLMF，第 13]。其上述积分表示式广为人知 [DLMF，(13.16.5)]。

升算子的近亲是巴克斯特算子。它们是作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$ 的积分算子，其公式为

$$\big[Q_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; Q_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n), \tag{1.25}$$

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n), \tag{1.26}$$

其中核由下式给出

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_n\big) - \sum_{j=1}^{n-1}(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}) - e^{x_n-y_n}\Big), \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{z}_{n+1}\;(1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta)\\ \times\exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{y}}_n - 2\underline{\boldsymbol{z}}_{n+1}\big) - \sum_{j=1}^{n}(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}})\Big).\end{aligned} \tag{1.28}$$

这些算子与相应系统的哈密顿量对易

$$\big[Q_n(\lambda), A_n(u)\big] = 0, \qquad \big[\mathbb{Q}_n(\lambda), \mathbb{B}_n(u)\big] = 0, \tag{1.29}$$

并且还满足巴克斯特方程

$$Q_n(\lambda)\,A_n(\lambda) = \mathrm{i}^{-n}\,Q_n(\lambda-\mathrm{i}), \qquad \mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{B}_n(\lambda) = -\frac{\beta(g+\mathrm{i}\lambda)}{2\lambda}\,\mathbb{Q}_n(\lambda-\mathrm{i}), \tag{1.30}$$

参见 [BDK]。

如附录 B所示，以上所有积分算子在多项式有界连续函数空间上都有良好定义

$$\mathcal{P}_n = \big\{\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\colon\quad |\varphi(\boldsymbol{x}_n)| \le P(|x_1|,\dots,|x_n|),\quad P\text{ — polynomial}\big\}. \tag{1.31}$$

具体而言，由命题B.1、B.2可得

$$\Lambda_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1}\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{1.32}$$

$$_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1}\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{1.33}$$

$$Q_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda<0, \tag{1.34}$$

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda\in(-g,0). \tag{1.35}$$

因此，这些算子的乘积是良定义的。特别是，Gauss–Givental 表示（1.20）、（1.21）收敛，并且波函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 有多项式增长界。

在上一篇论文 [BDK] 中，我们还证明了波函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 在经典禁区 $x_{j+1}\ll x_j$中以及 $x_1\ll 0$都快速衰减，精确表述见此处的命题 B.3 。

注 1。 在 [BDK] 中，所有涉及算子的关系都在指数缓增光滑函数空间上成立；这些空间适用于单值矩阵元的作用。本文使用空间 $\mathcal{P}_n$，它们更适用于积分算子的乘积：注意，巴克斯特算子不保持 $\mathcal{E}_n(\mathbb{R}^n)$ 中考虑的空间 [BDK的推论 5]。

1.3 主要结果

I接下来，我们用简写表示伽马函数的乘积

$$\Gamma(a\pm b)=\Gamma(a+b)\,\Gamma(a-b),\qquad \Gamma(\pm a\pm b)=\Gamma(a+b)\,\Gamma(a-b)\,\Gamma(-a+b)\,\Gamma(-a-b). \tag{1.36}$$

在第 2节中，运用图示技术，我们推导出关于 BC 升算子和巴克斯特算子的以下关系。

命题 2.1、2.3。这些关系

$$\begin{aligned}
&{}_n(\lambda)= \ {}_n(-\lambda), && \lambda\in\mathbb{R},\\
&{}_{n+1}(\lambda)\ {}_n(\rho)= \ {}_{n+1}(\rho)\ {}_n(\lambda), && \lambda,\rho\in\mathbb{R},\\
&\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho)=\mathbb{Q}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_n(\lambda), && \operatorname{Im}\lambda,\operatorname{Im}\rho\in(-g,0),\\
&\mathbb{Q}_n(\lambda)\ {}_n(\rho)=\Gamma(\mathrm{i}\lambda\pm\mathrm{i}\rho)\ {}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_{n-1}(\lambda), && \operatorname{Im}\lambda\in(-g,0),\ \rho\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

分别在空间 $\mathcal{P}_{n-1}$ 和 $\mathcal{P}_n$ 上成立。

在关于 $n=1$ 的最后一个恒等式中，我们记

$$\mathbb{Q}_0(\lambda)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}. \tag{1.37}$$

上述关系表明， BC 波函数 (1.21) 是巴克斯特算子的特征函数，并且在根系 BC_n 的 Weyl 群作用下保持对称。

定理 2.1。 设 $\sigma\in S_n$， $\boldsymbol{\varepsilon}_n\in\{1,-1\}^n$。则

$$\Psi_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n)=\Psi_{\varepsilon_1\lambda_{\sigma(1)},\dots,\varepsilon_n\lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n). \tag{1.38}$$

定理 2.2。 设 $\boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{R}^n$ 且 $\operatorname{Im}\lambda\in(-g,\ 0)$。则

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\mathrm{i}\lambda\pm\mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

请注意，上述对称性意味着哈密顿量本征值非简并（1.12），而最后一个公式与 Baxter 方程（1.30）相一致。此外，为便于比较，我们写出 GL 升算子与巴克斯特算子之间的关系

$$\Lambda_{n+1}(\lambda)\,\Lambda_n(\rho)=\Lambda_{n+1}(\lambda)\,\Lambda_n(\rho), \tag{1.39}$$

$$Q_n(\lambda)\,Q_n(\rho)=Q_n(\rho)\,Q_n(\lambda), \tag{1.40}$$

$$Q_n(\lambda)\,\Lambda_n(\rho)=\Gamma(\mathrm{i}\lambda-\mathrm{i}\rho)\,\Lambda_n(\rho)\,Q_{n-1}(\lambda), \tag{1.41}$$

由此可得到关于 GL 波函数（1.20）的类似结论

$$\Phi_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Phi_{\lambda_{\sigma(1)},\dots,\lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \sigma \in S_n, \tag{1.42}$$

$$Q_n(\lambda)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\lambda - \mathrm{i}\lambda_j)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{1.43}$$

参见 [GLO1，定理 2。3]。

借助上述巴克斯特算子以及第2.7 节中的图示技术，我们计算以下 GL与 BC 波函数之间的标量积。

命题2.5。设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\gamma}_n \in \mathbb{C}^n$ 满足$\operatorname{Im}\gamma_1 = \ldots = \operatorname{Im}\gamma_n < 0$。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \exp(-\beta e^{-x_1}) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}.$$

众所周知， GL 波函数满足正交性和完备性关系

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \overline{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{\hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \delta(\lambda_1 - \rho_{\sigma(1)}) \cdots \delta(\lambda_n - \rho_{\sigma(n)}), \tag{1.44}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \overline{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\, \Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{y}_n) = \delta(x_1 - y_1) \cdots \delta(x_n - y_n) \tag{1.45}$$

其中谱测度为

$$\hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n) = \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} \prod_{1\le j\ne k\le n} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k)}, \tag{1.46}$$

参见 [STS，W1、K]。结合完备关系（1.45）与上述命题，我们得到 BC 波函数的梅林–巴恩斯积分表示，具体细节见第2.8节。

定理 2.3。对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{1.47}$$

从这一表示可以明显看出，对谱参数的带符号置换具有对称性（1.38）。

公式（1.47）推广了 Iorgov 和 Shadura 结果，适用于 B Toda 链 [IS, (26)], ，它可以通过取极限 $\beta \to 0$得到。在此极限下，被积函数化简为

$$\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)} = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\beta} + \mathrm{i}\gamma_j\right)} \sim \left[\frac{(e\beta/\alpha)^{\alpha/\beta}}{\sqrt{2\pi}}\right]^n (2\alpha)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}, \qquad \beta \to 0, \tag{1.48}$$

由于 Stirling 公式。

例 2. 在 $n=1$ 的情况下，我们有

$$\Psi_\lambda(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\,W_{\frac12-g,-\mathrm{i}\lambda}(2\beta e^{-x})=e^{\beta e^{-x}}\int_{\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon}\frac{d\gamma}{2\pi}\,\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\gamma}\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma+\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma-\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\gamma)}\,e^{\mathrm{i}\gamma x},\qquad(1.49)$$

这是惠特克函数的一个著名公式 [DLMF，(13.16.12)]。

所得的 BC 波函数的梅林–巴恩斯表示与 GL 波函数的梅林–巴恩斯表示略有不同。后者由递归公式定义 [KL2，定理 4。1]

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\int_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}\varepsilon)^{n-1}}d\boldsymbol{\gamma}_{n-1}\,\hat\mu(\boldsymbol{\gamma}_{n-1})\,e^{\mathrm{i}x_n(\lambda_n-\gamma_{n-1})}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\mathrm{i}\lambda_j-\mathrm{i}\gamma_k)\,\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}),\qquad(1.50)$$

该公式从单粒子函数开始 $\Phi_{\lambda_1}(x_1)=e^{\mathrm{i}\lambda_1 x_1}$。对于 B Toda 链 [GaKL，(4.11)]，也存在递归梅林–巴恩斯公式，而对于 BC 模型，其构造（以及对偶 Q算子的构造）仍然是一个有趣的开放问题。

值得指出的是，GL Toda 链的梅林–巴恩斯表示与 Gauss–Givental 表示之间的等价性已在 [GLO1第3], [K节、附录 B]中得到证明。

在第2.9 节和第3.2.5 节中，我们利用 BC 波函数

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{x}_n\,\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\,\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\frac{1}{\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)}\,\delta_{\mathrm{sym}}(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n),\qquad(1.51)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{\lambda}_n\,\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{y}_n)=\delta(x_1-y_1)\cdots\delta(x_n-y_n),\qquad(1.52)$$

分别使用 Gauss–Givental 表示（1.21）和梅林–巴恩斯表示（1.47）。这里，$\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ 是 BC 谱测度

$$\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)=\frac{1}{n!\,(4\pi)^n}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{1}{\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j\pm\mathrm{i}\lambda_k)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(g\pm\mathrm{i}\lambda_j)}{\Gamma(\pm2\mathrm{i}\lambda_j)}\qquad(1.53)$$

并且在正交关系中，δ 函数关于带符号的置换是对称的

$$\delta_{\mathrm{sym}}(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n)=\frac{1}{n!\,2^n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n\in\{1,-1\}^n}}\delta\big(\lambda_1-\varepsilon_1\rho_{\sigma(1)}\big)\cdots\delta\big(\lambda_n-\varepsilon_n\rho_{\sigma(n)}\big).$$

我们对（1.51）和（1.52的推导颇具启发性。不过，我们认为可以通过类似于 [K], [DKM2], [BK]的方法使其变得严谨。

注意，梅林–巴恩斯公式（1.47）中被积函数的极点

$$\gamma_j=\pm\lambda_k+\mathrm{i}m,\qquad m\in\mathbb{N}_0\qquad(1.54)$$

由谱参数 λ_k确定。通过平移积分路径可以证明，BC 波函数关于谱参数是整函数，见附录C，其中我们还证明了所有梅林–巴恩斯积分的绝对收敛性。

推论C.2。函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 可以解析延拓至 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{C}^n$。

波函数对谱参数的依赖可描述为关于对偶哈密顿量的特征值问题，这些对偶哈密顿量由 van Diejen 和 Emsiz [DE2 定理 3]给出。其中最简单的一个是

$$\hat{\mathbb{H}}_1 = 2\beta \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_k^2} \left(\frac{\mathrm{i}\lambda_j + g}{2\lambda_j(2\lambda_j - \mathrm{i})} \left(e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}} - 1\right) + \frac{-\mathrm{i}\lambda_j + g}{2\lambda_j(2\lambda_j + \mathrm{i})} \left(e^{\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}} - 1\right) \right), \tag{1.55}$$

其余的由公式（3.26）给出。在第 3.2.2 节中，我们证明波函数确实是 van Diejen–Emsiz 哈密顿量的本征函数。

定理 3.1。波函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 满足 *van Diejen–Emsiz* 方程

$$\hat{\mathbb{H}}_s \, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{x_{n-s+1}+\ldots+x_n} \, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$$

对于 $s = 1, \ldots, n$。

梅林–巴恩斯表示式（1.47）的核

$$K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)} \tag{1.56}$$

交织 BC 和 GL模型的对偶哈密顿量

$$\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_n) \, K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n) = \hat{\mathrm{H}}_s(-\boldsymbol{\gamma}_n) \, K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n), \qquad s = 1, \ldots, n, \tag{1.57}$$

ˆ 在算子的参数中，我们强调了它们作用于哪些变量。这里 H_s 是由 Babelon 推导出的对偶 GL Toda 哈密顿量， [B], 第一个为

$$\hat{\mathrm{H}}_1 = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{1}{\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k} \, e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}}, \tag{1.58}$$

其余的由公式（3.1）给出。此外，我们还找到了另一个核函数K_2（$\boldsymbol{\lambda}_n$， $\boldsymbol{\gamma}_n$）（3.34），它给出了 BC 波函数的第二种梅林–巴恩斯表示。

命题 3.2。对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon \in$ （0， g）

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n \, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n) \, \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g - \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)} \, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

在极限 $\beta \to 0$下，这对应于 B Toda 链，两个梅林–巴恩斯表示相同。第 3.2.2节借助在 [DM] 中计算的 Gustafson 型积分，证明了这些表示在一般情形下的相等性。

例 3. 在 $n=1$ 的情形下，最后一个公式等于

$$\Psi_\lambda(x)=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\beta}}\,W_{\frac12-g,-\mathrm{i}\lambda}(2\beta e^{-x})=e^{-\beta e^{-x}}\int_{\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon}\frac{d\gamma}{2\pi}\,\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\gamma}\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma+\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(\mathrm{i}\gamma-\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\gamma)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\,e^{\mathrm{i}\gamma x},$$

这与惠特克函数的已知表达式 [DLMF, （13.16.11）]相一致。

在第 3.2.3 节中，按照 [KL1、KL2、IS] 的方法，我们独立验证了梅林–巴恩斯表示（1.47）中的波函数将 Toda 链哈密顿量（1.12）对角化

$$\mathbb{B}_n(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=(-1)^n\Big(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\prod_{j=1}^{n}(u^2-\lambda_j^2)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n),\tag{1.59}$$

并计算了算子 $\mathbb{D}_n(u)$ 由单值化矩阵（1.5）导出的作用

$$\mathbb{D}_n(\pm\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=-\beta(g\pm\mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\lambda_1,\dots,\lambda_j\mp\mathrm{i},\dots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n),\qquad j=1,\dots,n.\tag{1.60}$$

由定义（1.5）可知，$\mathbb{D}_n(\mathrm{i}/2)=-\alpha$ 和 $\mathbb{D}_n(u)$ 是次数为 $2n$的多项式。因此，我们恰好有 $2n+1$ 个点，可以在任意点对其作用进行插值。注意，公式（1.60）与对称性（1.38）和关系相一致

$$\mathbb{D}_n(\lambda)\quad{}_n(\lambda)=-\beta(g+\mathrm{i}\lambda)\quad{}_n(\lambda-\mathrm{i}),\tag{1.61}$$

在我们之前的论文中推导出 [BDK]。

为了将我们的波函数与 [DE2] 中通过级数表示分析的超八面体 Whittaker 函数进行比较，我们在第 3.2.4 节计算了 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 在该区域中的渐近行为

$$0\ll x_1\ll x_2\ll\ldots\ll x_n$$

使用梅林–巴恩斯表示。其形式为（3.121）

$$\Psi^{as}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)=\sum_{w\in W_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(2\mathrm{i}w(\lambda_k))}{\Gamma(\mathrm{i}w(\lambda_k)+g)}\prod_{1\le i<j\le n}\Gamma(\mathrm{i}w(\lambda_j)\pm\mathrm{i}w(\lambda_i))\,e^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}w(\lambda_k)\tilde{x}_k},\tag{1.62}$$

其中 $\tilde{x}_k=x_k-\ln(2\beta)$，而 $W_n=S_n\times Z_2^n$是 BC_n 根系的 Weyl 群。该渐近公式与已知的超八面体 Whittaker 函数渐近行为一致 [DE2, （3.5b）], 因此我们得出结论：这些函数完全相同，因为后者是唯一的（与 [DE2] 比较时，令 $2\beta=1$）。

最后，在第 3.2.4 节中，我们对梅林–巴恩斯积分（1.47）进行留数计算。这给出了收敛的 Harish-Chandra 级数（3.118）、（3.120），它们是惠特克函数经典级数表示的多变量推广 $W_{\kappa,\,\mu}$ [DLMF, (13.14.33), (13.14.6)]。

我们注意到，上述许多结果与最近针对 BC 开放 $SL(2,\mathbb{C})$ 自旋链 [ADV2]所得到的结果相平行。特别要注意，在梅林–巴恩斯表示（1.47）中，我们将 BC 波函数展开为函数 $e^{\beta e^{-x_1}}\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 的基底。后者是线性组合 $A_n(u)+\mathrm{i}\beta B_n(u)$ 的特征函数（见第3.2.3 节，尤其是公式（3.71））。自旋链的类似展开见 [ADV2，第 8]节。

2 Gauss–Givental 表示

2.1 图示

Gauss–Givental 表示的基本计算归结为某些积分恒等式。使用图示来直观表示相应的积分和恒等式是很方便的。本节将介绍图形记号以及图形语言中的基本恒等式。

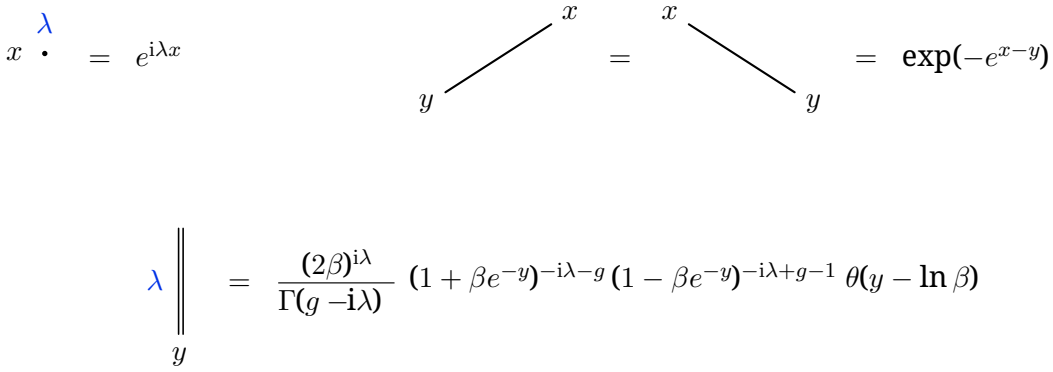


图1：图示元素

与 Gauss–Givental 表示相关的所有算子的核均由三类函数构成，我们用带标签的顶点和线来表示它们，见图1。我们区分普通线的顶部和底部，因为函数 $\exp(-e^{x-y})$ 关于 x、y并不对称。为了证明各种积分恒等式，我们还需要用虚线表示的函数，见图2。它们的作用类似“幽灵”，因为只在计算过程中出现，不会出现在最终答案中。为清楚起见，我们用不同颜色表示虚线的参数。



图2：“幽灵”

最后，粗体顶点表示对 $\mathbb{R}$ 按照相应变量进行积分，示例见图 3。下文中，我们省略被积变量的标记。

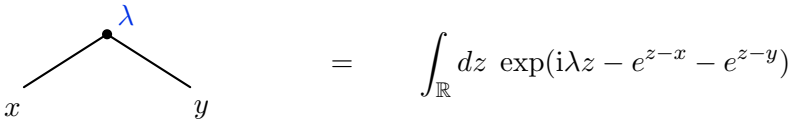


图3：粗体顶点表示积分

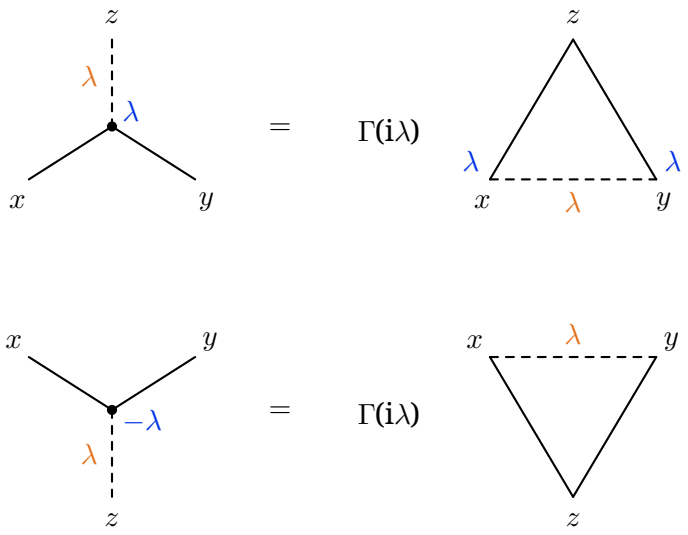


图4：星-三角关系

利用上述规则，我们可以将许多有用的积分恒等式表示为图示的变换，见下图。请注意，除了图示之外，有些关系还包含伽马函数的系数。在全部恒等式中，基本的恒等式是 星形-三角形 和 翻转关系（图 4 和 8），因为其他恒等式都可以由它们导出。或者，也可以独立证明所有关系。

The 图4中的第一个星三角关系4表示以下积分恒等式 y

$$\int_z^\infty dw\,(1-e^{z-w})^{\mathrm{i}\lambda-1}\,\exp(\mathrm{i}\lambda w-e^{w-x}-e^{w-y})$$

$$=\Gamma(\mathrm{i}\lambda)\,(e^x+e^y)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\exp\big(\mathrm{i}\lambda(x+y)-e^{z-x}-e^{z-y}\big). \quad (2.1)$$

证明很直接：在作积分变量变换 $w\to t$之后

$$t=(e^{-x}+e^{-y})(e^w-e^z),\qquad dt=(e^{-x}+e^{-y})\,e^w\,dw, \quad (2.2)$$

左边可写成如下形式

$$(e^{-x}+e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda}\,\exp(-e^{z-x}-e^{z-y})\int_0^\infty dt\;t^{\mathrm{i}\lambda-1}\,e^{-t}.$$

剩余的积分给出伽马函数 $\Gamma(\mathrm{i}\lambda)$。因此，我们得到了星三角恒等式（2.1）的右侧。第二个星三角关系也可以用类似的方法证明。注意，在假设 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda)>0$。

图 5 中的链关系表示星三角关系的约化 $z\to\pm\infty$，即某些线消失时的情形。例如，借助公式 $z\to-\infty$ ，对第一个星三角关系取极限，

$$\lim_{z\to-\infty}(1-e^{z-w})^{\mathrm{i}\lambda-1}\,\theta(w-z)=1,\qquad \lim_{z\to-\infty}\exp(-e^{z-x})=1 \quad (2.3)$$

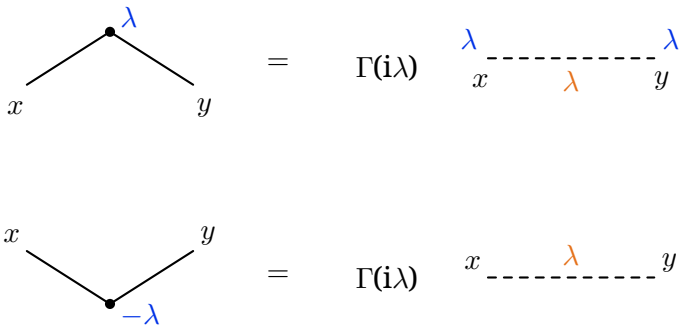


图 5：链关系

我们得到第一个链关系。

为证明极限与积分可以交换，注意到“链”积分在以下区域内是解析的 $\lambda\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) > 0$，见图 3。因此，可以先假设 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) \geq 1$，然后利用以下界应用控制收敛定理

$$\left|(1-e^{z-w})^{\mathrm{i}\lambda-1}\,\theta(w-z)\right| \leq 1, \tag{2.4}$$

并在最后对答案作解析延拓。

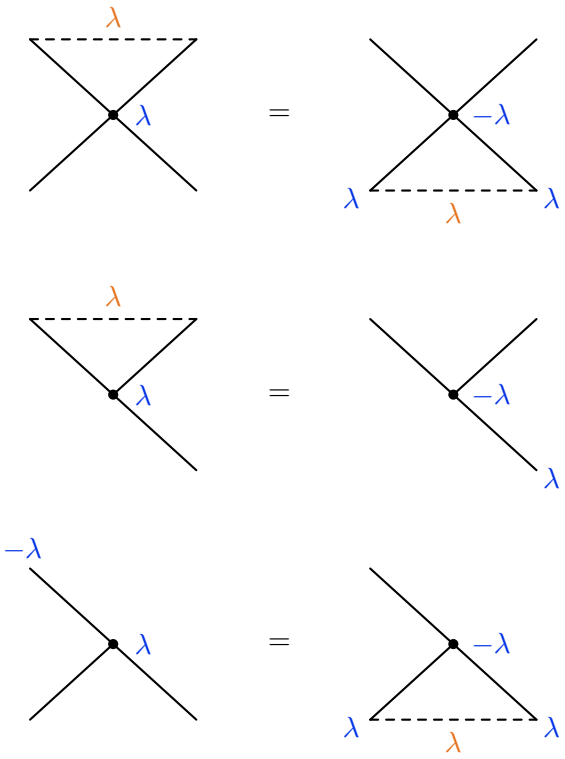


图 6：交叉关系与约化交叉关系

图中所示的交叉关系6可以通过两步星—三角变换证明，如图7所示。需要说明的是，在这些图以及下文中，我们经常省略顶点的标签。

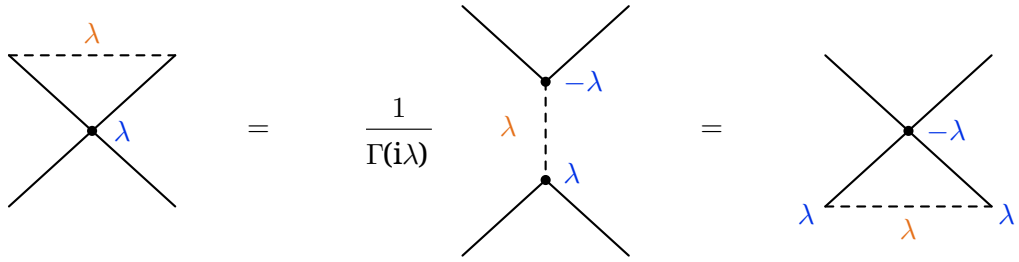


图7：利用星-三角关系证明交叉关系

还要注意，交叉关系两边关于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都是解析的。因此，为了利用星-三角关系证明该关系，我们假设 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) > 0$，并在最后对答案作解析延拓。

图示 6 中的另外两个关系，可以在一个非被积变量趋于 $\pm\infty$时，从第一个关系取极限得到。

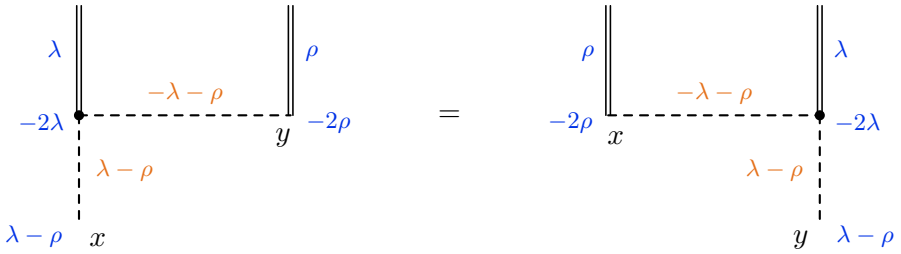


图8：翻转关系

现在考虑图示 8中的翻转关系。竖直线带有阶跃函数，因此，左侧的图示表示表达式

$$\frac{(2\beta)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\rho)}\,F(x,y)\,\theta(x-\ln\beta)\,\theta(y-\ln\beta), \tag{2.5}$$

其中我们记

$$\begin{aligned} F(x,y) &= e^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)x-2\mathrm{i}\rho y}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\rho-g}\,(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\rho+g-1} \\ &\times\int_{\ln\beta}^{x} dz\; e^{-2\mathrm{i}\lambda z}\,(1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,(e^{z}+e^{y})^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\,(1-e^{z-x})^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

翻转关系说明该函数是对称的 $F(x,\ y) = F(y,\ x)$，证明见附录 A.1。注意，在条件 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho) < \mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) < g$. 下，上述积分绝对收敛。

在计算中，我们实际上不需要翻转关系本身，而需要图示 9中的变换。后者可由图示10所示的翻转与星三角关系序列推出。在这组关系序列的最后一步，两条虚线相互抵消。

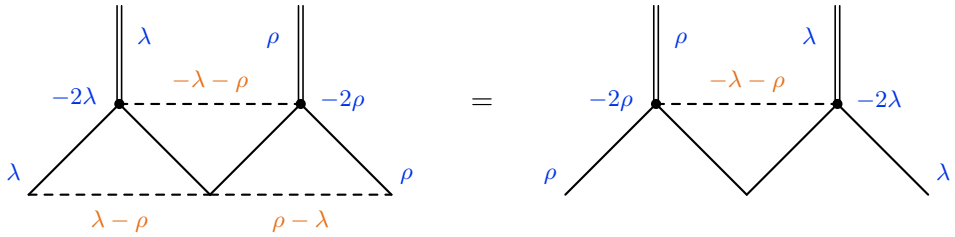


图 9：双峰关系

图示 9 表示的积分在条件 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda),\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho) < g$下绝对收敛；由于存在双线，我们要求满足这一条件。要执行图示 10 中的所有步骤，我们还应假设 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho) < \mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda)$。计算完成后，可通过解析延拓去掉这一假设。

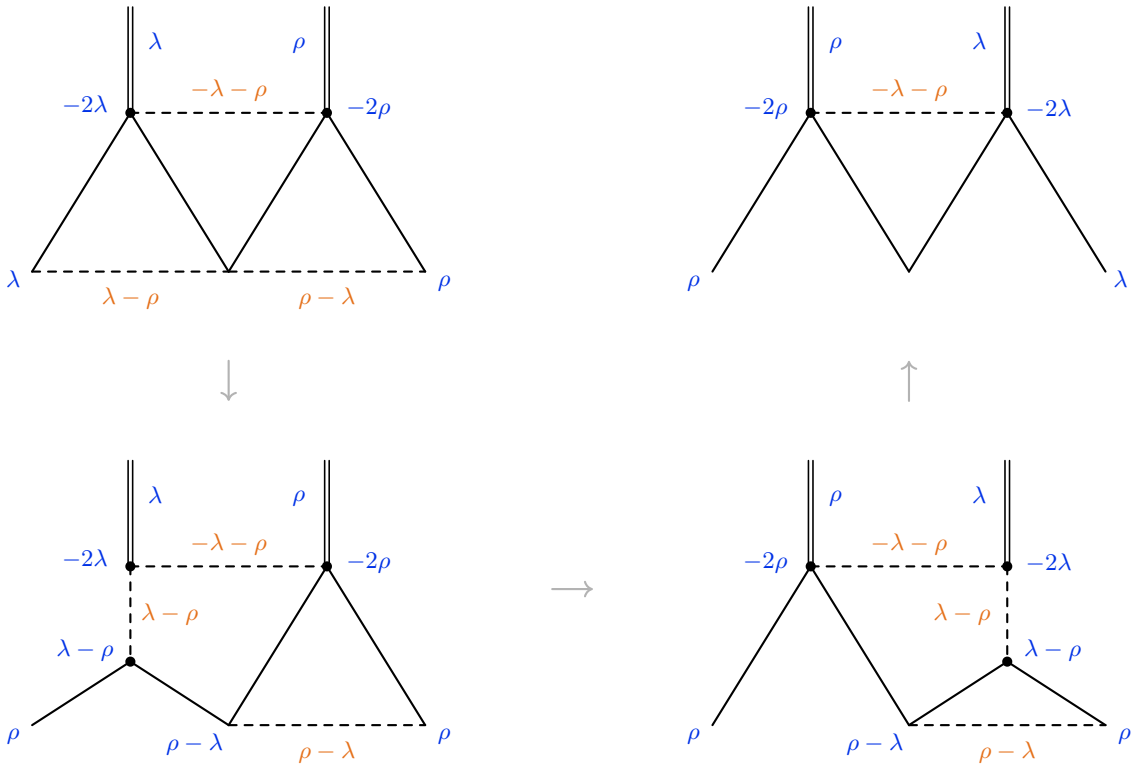


图10：翻转与星三角关系序列



图11：线的消去

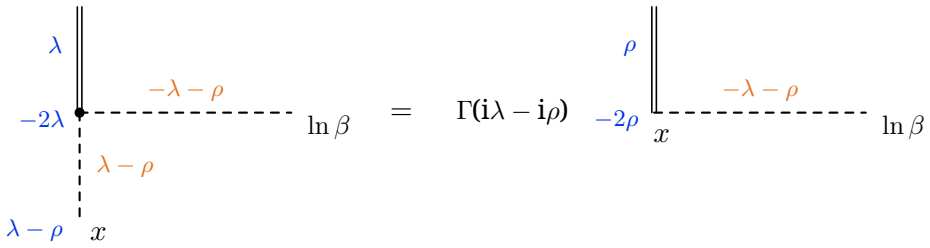


图12：约化翻转关系

在极限 $y \to \ln\beta^{+}$ 翻转关系化为图 12所示的积分恒等式。这个极限恒等式在附录 A.2中得到证明。进一步取极限 $x \to +\infty$ ，即可得到图 13所示的关系。

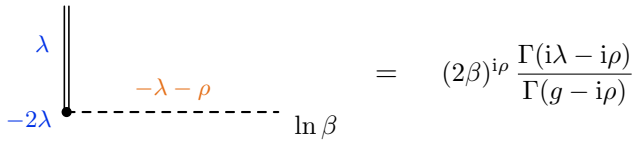


图13：图 12 中的关系在极限 $x \to +\infty$

将约化的翻转关系与星三角关系结合，可得到图 14所示的另一种有用变换。由于存在双线，该变换成立的条件是 $\mathrm{Re}(i\lambda), \mathrm{Re}(i\rho) < g$。此外，当 $\rho = -\lambda$ 时，一条虚线消失，恒等式也随之简化，见图 15。

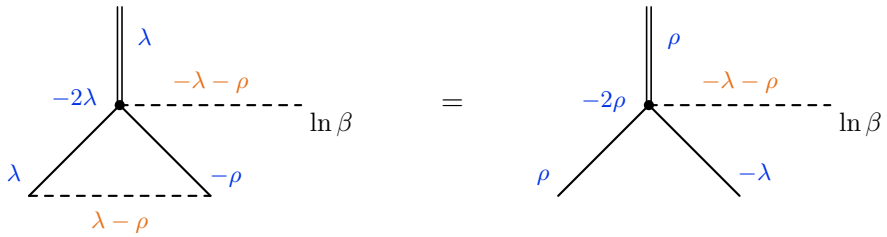


图14：约化翻转关系与星-三角关系的组合

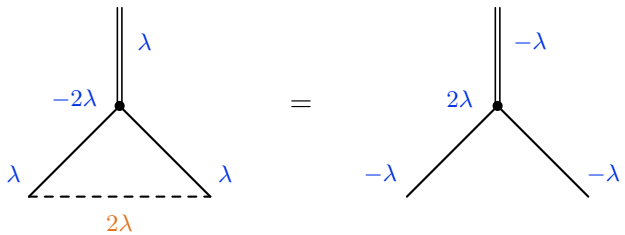
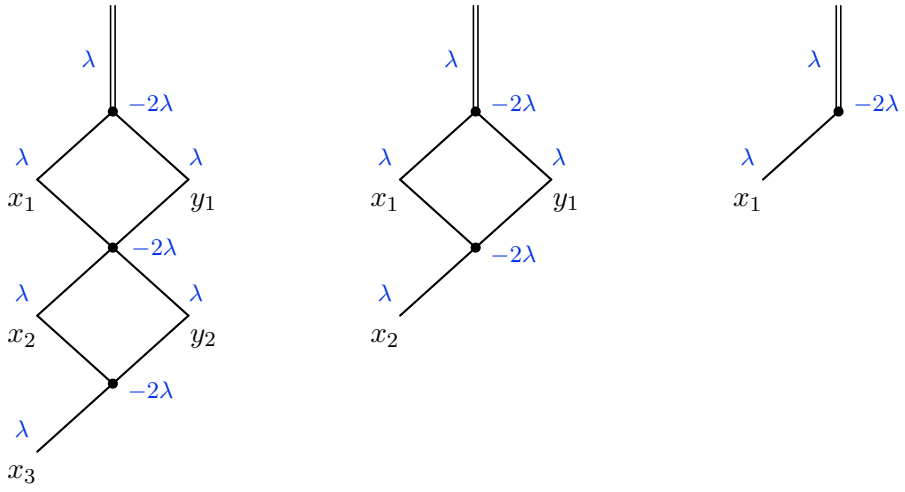


图15：情形 $\rho = -\lambda$



$\Lambda_\lambda(x_1, x_2, x_3|y_1, y_2)$ $\Lambda_\lambda(x_1, \ x_2|y_1)$ $\Lambda_\lambda(x_1|\varnothing)$

图 16：升算子核

2.2 升算子与反射对称性

Toda 链的升算子 $\Lambda_n(\lambda)$ 是一个积分算子，作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_{n-1})$

$$\big[\ \Lambda_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1} \quad \Lambda_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}) \tag{2.7}$$

与核

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) &= \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\ (1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\ (1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta)\\ &\times\exp\Bigg(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n+\underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}-2\underline{\boldsymbol{z}}_n\big)-\sum_{j=1}^{n-1}\big(e^{z_j-x_j}+e^{z_j-y_j}+e^{x_j-z_{j+1}}+e^{y_j-z_{j+1}}\big)-e^{z_n-x_n}\Bigg).\end{aligned} \tag{2.8}$$

通过观察图示中相应的图示，很容易理解这个积分的结构。16对于升算子的参数，我们总是假设 $\lambda\in\mathbb{R}$，在这种情况下，核显然绝对收敛（因为 $g>0$）。

回顾连续且具有多项式增长界的函数空间

$$\mathcal{P}_n = \big\{\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\colon \quad |\varphi(\boldsymbol{x}_n)|\le P(|x_1|,\dots,|x_n|), \quad P\text{ — polynomial}\big\}. \tag{2.9}$$

根据命题B.2 升算子保持这个空间不变

$$\Lambda_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1}\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

本节证明反射对称性。

命题 2.1。对于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 这个关系成立

$$\Lambda_n(\lambda) = \quad \Lambda_n(-\lambda) \tag{2.11}$$

在空间 $\mathcal{P}_{n-1}$ 上成立。

证明。 由于等式两边在 $\mathcal{P}_{n-1}$ 上均有定义，因此只需证明核相等

$$_{\lambda}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) = \quad _{-\lambda}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}). \tag{2.12}$$

这可以通过三种图变换来实现，如图17所示。

第一步是使用图6中的约化交叉关系。结果，虚线出现在底部，其下方的谱参数变号。之后，我们应用图6中的完整交叉关系，将这条虚线移到顶部的菱形处。同样，虚线经过之处的谱参数也会变号。

最后，我们使用图15所示的恒等式。这会从图示中移除虚线，同时使其上方的谱参数变号。所得图示表示恒等式右侧算子的核（2.11）。

尽管图 17 对应于情形 $n = 3$，但推广到任意 n 很简单：中间有多个菱形时，只需多次使用交叉关系，将虚线从底部移到顶部。

□

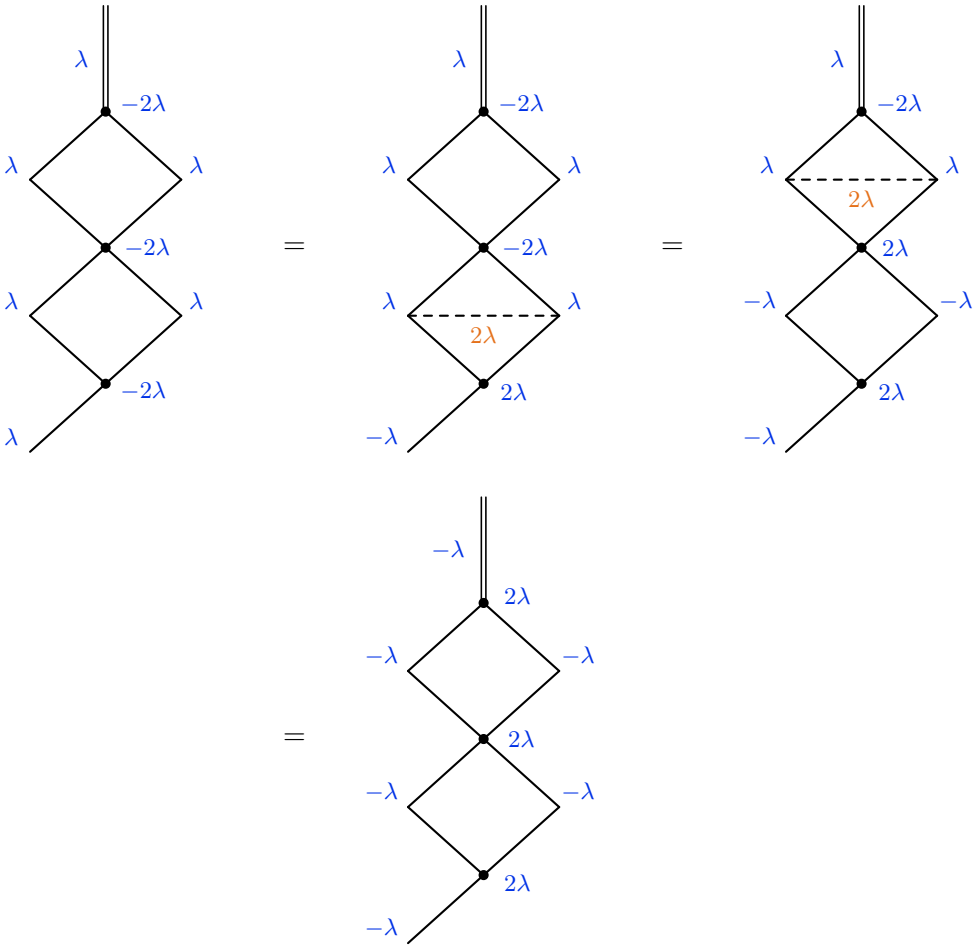
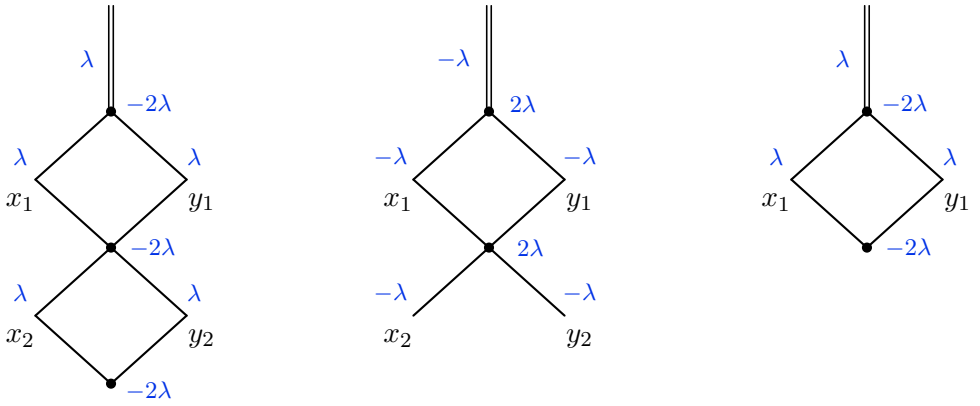


图17：升算子的反射对称性



$\mathbb{Q}_\lambda(x_1, x_2|y_1, y_2)$ $\mathbb{Q}'_\lambda(x_1, x_2|y_1, y_2)$ $\mathbb{Q}_\lambda(x_1|y_1)$

图18：巴克斯特算子的核

2.3 巴克斯特算子及其约化

巴克斯特算子 $\mathbb{Q}_n(\lambda)$ 是一个作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{x}_n)$ 上的积分算子

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n), \tag{2.13}$$

其中核

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{z}_{n+1}\; (1+\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\; (1-\beta e^{-z_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta) \\ \times \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n + \underline{\boldsymbol{y}}_n - 2\underline{\boldsymbol{z}}_{n+1}\big) - \sum_{j=1}^{n}(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}})\Big).\end{aligned} \tag{2.14}$$

我们来 定义密切相关的约化 巴克斯特算子 $\mathbb{Q}'_n(\lambda)$，它是一个积分算 tor

$$\big[\mathbb{Q}'_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n), \tag{2.15}$$

其核由一个稍小的积分给出

$$\mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\; \big(1+\beta e^{-z_1}\big)^{\mathrm{i}\lambda-g}\,\big(1-\beta e^{-z_1}\big)^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(z_1-\ln\beta) \tag{2.16}$$

$$\times \exp\Big(\mathrm{i}\lambda\big(2\underline{\boldsymbol{z}}_n - \underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_n\big) - \sum_{j=1}^{n-1}(e^{z_j-x_j} + e^{z_j-y_j} + e^{x_j-z_{j+1}} + e^{y_j-z_{j+1}}) - e^{z_n-x_n} - e^{z_n-y_n}\Big).$$

这些核的示例见图18。注意，这些算子的核中的谱参数符号相反。

根据命题B.2 ，上述巴克斯特算子在连续多项式有界函数空间（2.9）上保持不变

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda\in(-g,0), \tag{2.17}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda<0. \tag{2.18}$$

在上述参数假设下，它们的核绝对收敛。

命题 2.2。对于 $\operatorname{Im}\lambda\in(-g,0)$ 该关系

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)=\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)\,\mathbb{Q}'_n(\lambda) \tag{2.19}$$

在 $\mathcal{P}_n$ 上成立。

证明。 由于等式两边在 $\mathcal{P}_n$ 上都有定义，只需证明核相等；借助图示即可完成，见图 19。第一步应用图5 中的链关系，得到底部的虚线，其余变换与图 17 中的变换相同。

□

在 $n=0$ 的情况下，根据（2.19）及上述定义，我们记

$$\mathbb{Q}'_0(\lambda)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}, \qquad \mathbb{Q}_0(\lambda)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}. \tag{2.20}$$

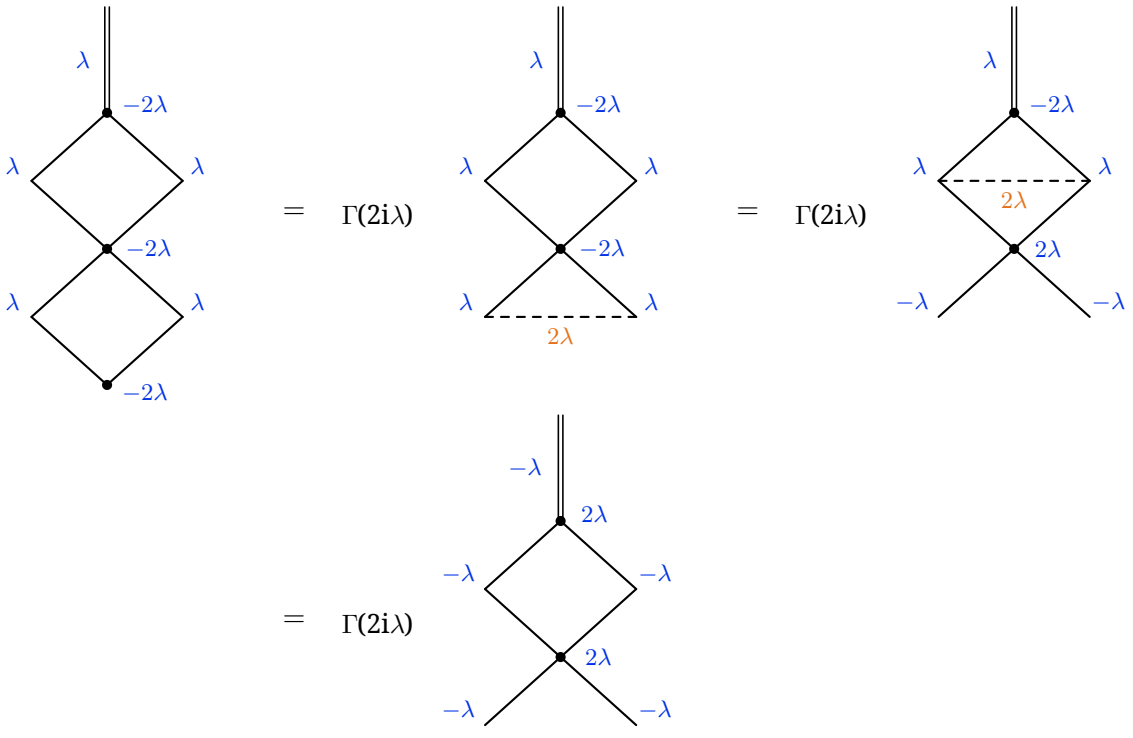


图 19：巴克斯特算子的约化

2.4 可交换性与交换关系

命题 2.3。这些关系

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho) = \mathbb{Q}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_n(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Im}\rho \in (-g, 0), \tag{2.21}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda)\,\mathbb{Q}'_n(\rho) = \mathbb{Q}'_n(\rho)\,\mathbb{Q}'_n(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Im}\rho < 0, \tag{2.22}$$

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) \quad _n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho) \quad _n(\rho)\,\mathbb{Q}_{n-1}(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0),\ \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda) \quad _n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho) \quad _n(\rho)\,\mathbb{Q}'_{n-1}(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0,\ \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

$$_{n+1}(\lambda) \quad _n(\rho) = \quad _{n+1}(\rho) \quad _n(\lambda), \qquad \lambda, \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

分别作用于空间 $\mathcal{P}_n$ 和 $\mathcal{P}_{n-1}$。

证明。 根据命题 2.2， $\mathbb{Q}_n(\lambda) = \Gamma(2\mathrm{i}\lambda)\,\mathbb{Q}'_n(\lambda)$，因此只需证明关于约化巴克斯特算子 $\mathbb{Q}'_n(\lambda)$ 的关系。

可交换性 (2.22)。 在附录 B.4 中，我们证明了只需确立相应核的相等性

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\ \mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}'_\rho(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\ \mathbb{Q}'_\rho(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n). \tag{2.26}$$

如图 20所示，可以通过图形变换来完成。我们将收敛性问题留到证明末尾再讨论。与前面一样，这些图示对应于 $n = 3$ 的情形；不过，推广到任意 n 也很直接。

图 20 中的第一个图示描绘了乘积 $\mathbb{Q}'_3(\lambda)\,\mathbb{Q}'_3(\rho)$ 的核。可交换性等价于该核关于 λ、ρ 的对称性。

第一步是对底部的粗体顶点应用链关系（图 5），得到带虚线的第二个图示。为简洁起见，我们省略此变换中出现的系数 $\Gamma(\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}\rho)$，因为它关于 λ、ρ 对称。

第二，我们应用交叉关系（图示 6）两次，将虚线移至顶部。请注意，下面的一些谱参数会发生变化。

接下来，我们使用图示 9 中的恒等式，该恒等式交换双线中的参数 λ，ρ。由于这个恒等式，又出现了两条虚线。随后，借助交叉关系（图示 6），可以将这些新出现的虚线移至图示底部。

最后，可以使用约化交叉关系（图示 6）移除第五个图示底部的虚线。由此得到第六个图示，它与第三个图示的区别仅在于交换了 λ 和 ρ。因此，初始积分关于 λ，ρ对称，这就证明了巴克斯特算子的可交换性。

还需说明，推导过程中的每个图示都对应一个绝对收敛积分。考虑任意一个图示，并将其对应的积分记为$D_{\lambda,\ \rho}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)$。根据线的定义（图示1、2），我们有

$$\left|D_{\lambda,\rho}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\right| \le C(\lambda,\rho)\,D_{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda,\mathrm{i}\operatorname{Im}\rho}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n). \tag{2.27}$$

因此，只需考虑以下情况 $\lambda, \rho \in \mathrm{i}\mathbb{R}$。在附录 B.3 中，我们证明了与第一个图示对应的巴克斯特算子乘积（2.26）的核是收敛的。由于

下一个图示仅相差一次变换，因此相应的积分至少在一种积分次序下收敛（即先对变换后的积分进行积分）。根据富比尼–托内利定理，它在任意积分次序下都收敛。第三个图示相差两次变换，对于这两次变换，我们都可以归纳地应用相同的论证。这个归纳过程可以持续到最后一个图示，因此所有图示都表示收敛积分。

关系 (2.24)。 再次，如第B.4节所述，只需证明相应核相等即可

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n \; \mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n) \quad \rho(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_{n-1}) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1} \quad \rho(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\, \mathbb{Q}'_\lambda(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1}). \tag{2.28}$$

借助图示，几乎可以用证明巴克斯特算子可交换性时相同的方法来完成。图21 中的第一个图示描绘了算子 $\mathbb{Q}'_n(\lambda)\; {}_n(-\rho)$的核。这里我们将升算子 ρ 的参数反射，以便于与图20进行比较。具体来说，注意图20 和21 中的第一个图示，除底部的一条线外完全相同。

要得到图21 中的第二个图示，重复图20中的相同步骤即可。其余变换略有不同。转到第三个图示时，我们对左侧的底部顶点使用约化交叉关系（图6），对右侧的底部顶点使用链关系（图5）。所得图示只包含一条虚线，我们使用交叉关系（图6）将其移到底部。最后，要得到最后一个图示（它描绘了算子$_n(-\rho)\, \mathbb{Q}'_{n-1}(\lambda)$的核），我们再次使用约化交叉关系（图6）。

请注意，出现在恒等式（2.24）右端的伽马函数，是在图示 21的前两次变换中出现的。至此，所需关系的证明完成。按照与之前相同的论证，所有图示都对应于绝对收敛积分。

关系 (2.25)。 证明与前面的证明类似。 □

注 2. 由于图示 20 和 21 的第一个图示除底部的一条线外完全一致，后者可以作为前者的极限得到

$$\mathrm{Kernel}\left[\mathbb{Q}'_n(\lambda) \quad {}_n(-\rho)\right](\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}) = \lim_{y_n\to\infty} e^{\mathrm{i}\rho y_n}\, \mathrm{Kernel}\left[\mathbb{Q}'_n(\lambda)\, \mathbb{Q}'_n(\rho)\right](\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n). \tag{2.29}$$

因此，一旦巴克斯特算子的可交换性得到确立，就可以通过取上述极限，从中推导出巴克斯特算子与升算子之间的关系（2.24）。这种方法已应用于卡洛杰罗–鲁伊塞纳尔斯类型的模型 [BDKK、BCDK], ，这些模型缺少局部图示变换。

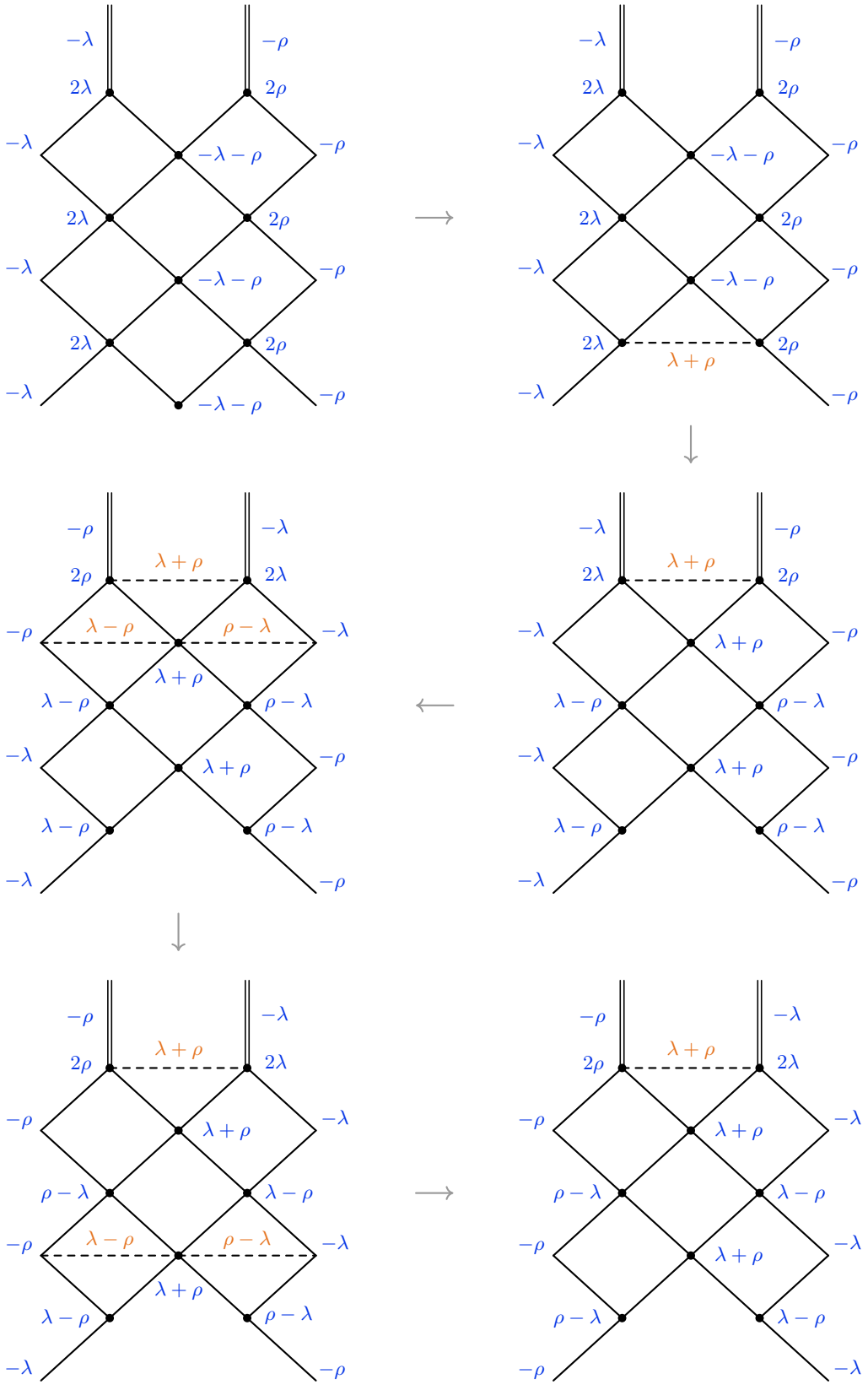


图 20：Baxter 算子的可交换性

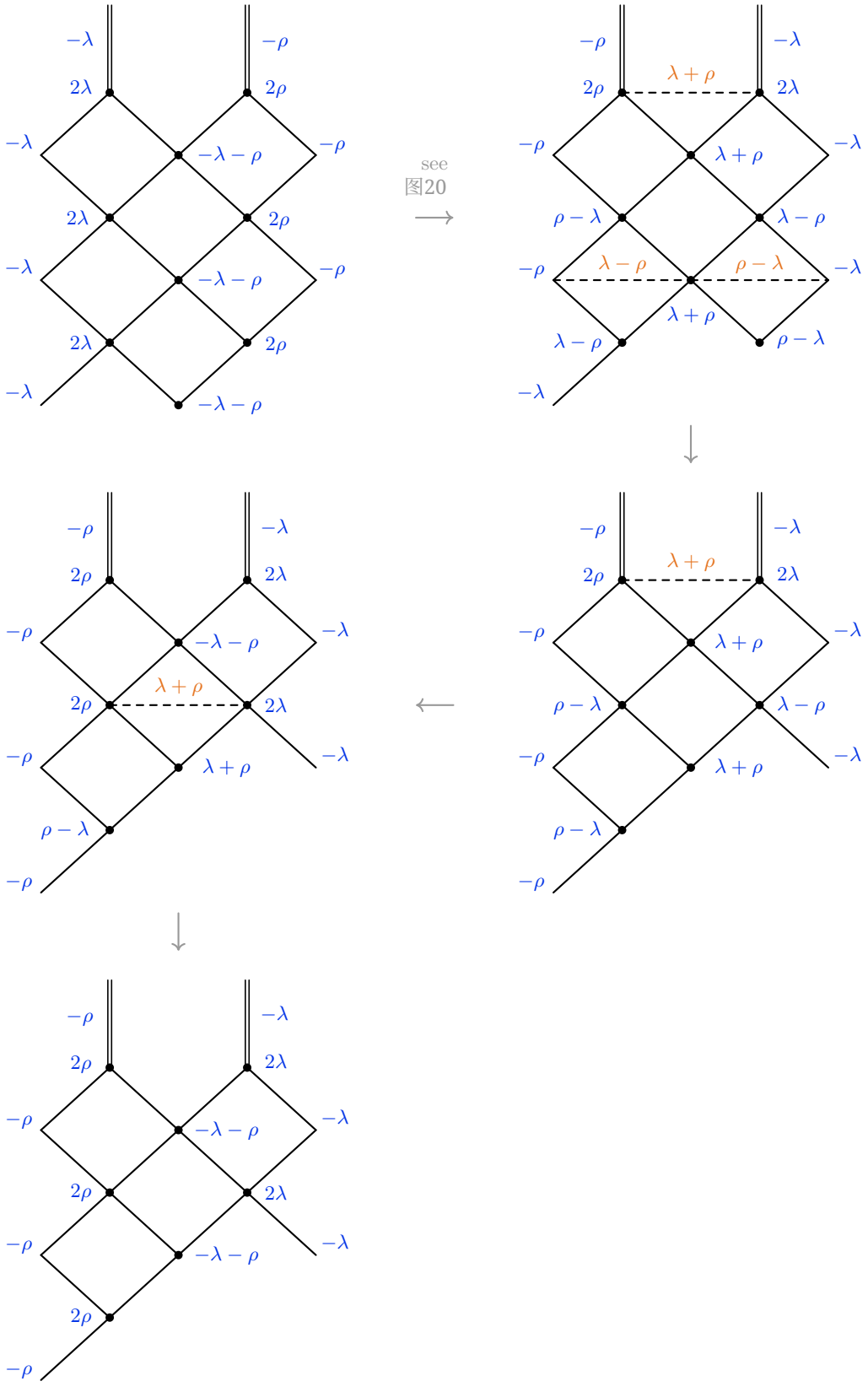
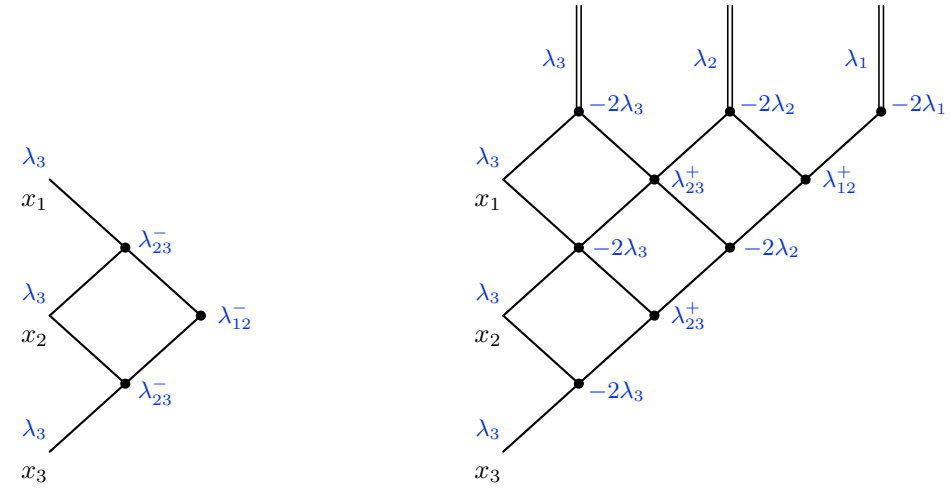


图 21：巴克斯特与升算子之间的局部关系



$\Phi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(x_1,x_2,x_3)$ $\Psi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(x_1,x_2,x_3)$

图 22： GL 和 BC 系统的波函数（$\lambda_{jk}^{\pm}=\lambda_j\pm\lambda_k$）

2.5 波函数的性质

BC Toda 链的波函数由迭代积分给出

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)= \quad _n(\lambda_n)\cdots \quad _1(\lambda_1)\cdot 1, \tag{2.30}$$

其中我们假设 $\boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{R}^n$。这个多重积分可以通过图示轻松直观地表示，见图 22；作为比较，我们还画出了由（ GL ）定义的Toda 链的波函数。1.20。

定理 2.1。设 $\sigma\in S_n$， $\varepsilon_n\in\{1,-1\}^n$。则

$$\Psi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n)=\Psi_{\varepsilon_1\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\varepsilon_n\lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n). \tag{2.31}$$

证明。 由命题 B.2可知，升算子保持多项式有界连续函数空间

$$_k(\lambda_k)\colon\ \mathcal{P}_{k-1}\ \to\ \mathcal{P}_k,\qquad \lambda_k\in\mathbb{R}, \tag{2.32}$$

这意味着积分（2.30）收敛。此外，由命题 2.1，2.3可知，升算子满足恒等式

$$_k(\lambda)= \quad _k(-\lambda),\qquad _{k+1}(\lambda)\quad _k(\rho)= \quad _{k+1}(\rho)\quad _k(\lambda) \tag{2.33}$$

该结论在 $\mathcal{P}_{k-1}$ 上成立。由此即可得到所述结论。 □

推论 2.1。设 $\boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{R}^n$。则 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\in\mathbb{R}$。

证明。 根据定义（2.8），对于 $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\overline{_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})}= \quad _{-\lambda}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1}), \tag{2.34}$$

因此，对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)} = \Psi_{-\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{2.35}$$

因此，根据 2.1 波函数是实数。 □

定理 2.2. 设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。则

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0), \tag{2.36}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\lambda_j)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{2.37}$$

证明。 根据命题 2.3，巴克斯特算子及其约化版本满足以下关系（该关系在 $\mathcal{P}_{n-1}$上成立）

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) \quad {}_n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho) \quad {}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_{n-1}(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0), \quad \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.38}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda) \quad {}_n(\rho) = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho) \quad {}_n(\rho)\,\mathbb{Q}'_{n-1}(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \tag{2.39}$$

其中尤其有

$$\mathbb{Q}_0(\lambda) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}\,\Gamma(2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}, \qquad \mathbb{Q}'_0(\lambda) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\mathrm{Id}. \tag{2.40}$$

因此，由迭代表示（2.30）可得到所述公式。 □

2.6 GL 与 BC 算子之间的局部关系

对于任意积分算子 K

$$[K\,\varphi](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^m} d\boldsymbol{y}_m\; K(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_m)\,\varphi(\boldsymbol{y}_m) \tag{2.41}$$

将其转置 K^t 定义为公式

$$[K^t\,\varphi](\boldsymbol{x}_m) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; K(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_m)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n). \tag{2.42}$$

下述恒等式是下一节计算 GL与 BC 波函数标量积时的关键要素。

命题 2.4。 设 $n \geq 2$、$\operatorname{Im}\lambda < 0$ 和 $\rho \in \mathbb{R}$。则关系

$$\begin{aligned} &Q^t_{n-1}(\lambda)\,\Lambda^t_n(-\lambda)\,\exp(-\beta e^{-x_1}) \quad {}_n(\rho) \\ &\qquad = \Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho)\,Q^t_{n-1}(\rho)\,Q^t_{n-1}(-\rho)\,\exp(-\beta e^{-x_1})\,\mathbb{Q}'_{n-1}(\lambda) \end{aligned} \tag{2.43}$$

作为对应核之间的等式成立。

证明。 恒等式（2.43）的图示证明见图 23、24。在第 B.3 节中，我们证明左侧（2.43）的核（对应第一个图示）是绝对收敛的。与命题 2.3的证明采用相同的论证，其余所有图示也都对应绝对收敛积分。

与之前一样，图示针对特定情形 $n = 3$，而推广到任意 n是直接的。在所有图示中，我们标出了坐标 $\ln \beta$，它来自函数 $\exp(-\beta e^{-x_1})$（见（2.43）。

第一步是对底部的顶点使用链关系（图 5），得到一条虚线。然后使用交叉关系（图6）将这条虚线移到顶部。之后，我们对右侧底部的顶点重复相同的步骤。

这样我们得到顶部有两条虚线的第五幅图示。下一步是使用图 14中的恒等式，该恒等式会移除一条虚线并改变一些谱参数。特别是，双线的参数变为 $\rho \to \lambda$。请注意，对于这个恒等式而言，顶部虚线连接双线与坐标 $\ln \beta$这一点至关重要。

下一步如图 24所示，我们使用图 25中的恒等式。它表示 GL Toda Q-算子的可交换性（见（1.27）、（1.40））。这一步使我们能够再次使用交叉关系（图6）将虚线移到底部。

转到最后一个图示时，我们使用约化交叉关系（图6），这样虚线便消失了，并得到恒等式（2.43）右侧算子的核。汇总上述所有变换中出现的因子，我们得到系数 $\Gamma(\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho)$。 □

备注 3。 借助 [BDK、推论 2]以及附录 $\mathcal{P}_{n-1}$B 中的界，可以证明恒等式（2.43）在 $\mathcal{P}_{n-1}$上成立。

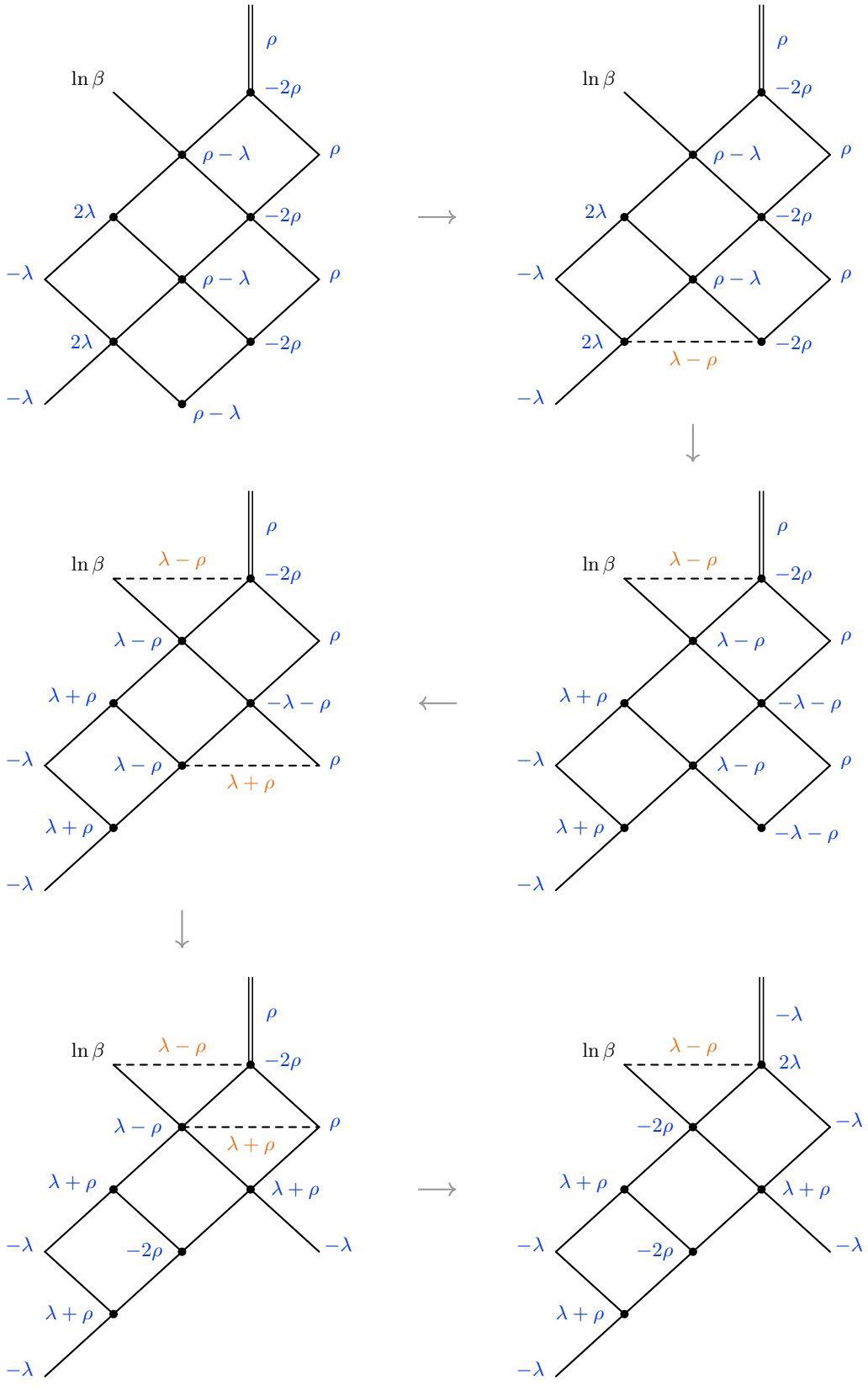


图 23：恒等式证明（2.43）（续见图 24）

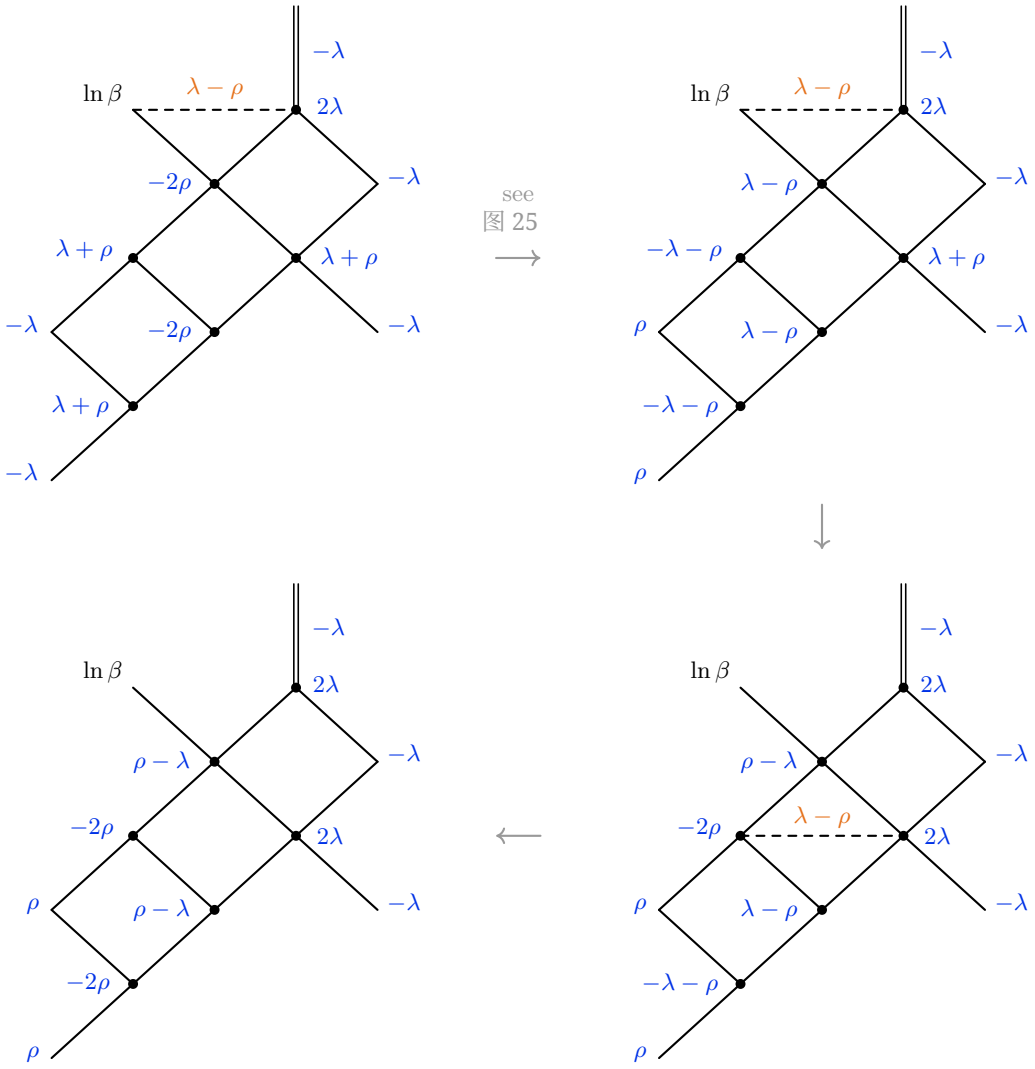


图 24：恒等式证明（2.43）（续自图23）

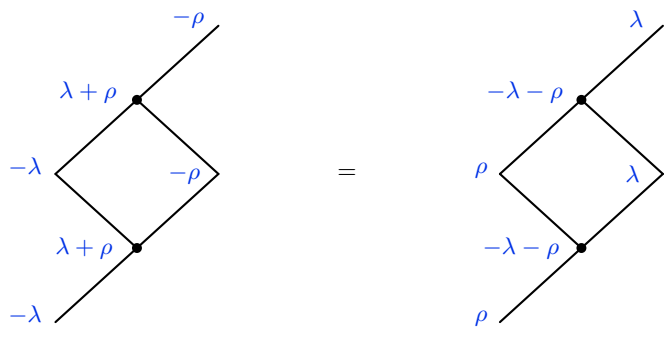


图 25： GL Toda Q算子的可交换性

2.7 GL 与 BC 波函数之间的标量积

下面的命题用于推导 BC 波函数的梅林–巴恩斯表示。

命题 2.5. 设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$、 $\boldsymbol{\rho}_n \in \mathbb{C}^n$ 满足$\operatorname{Im}\rho_1 = \ldots = \operatorname{Im}\rho_n < 0$。则

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \exp(-\beta e^{-x_1}) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\boldsymbol{\rho}}_n} \prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j + \mathrm{i}\rho_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\rho_j)}. \tag{2.44}$$

证明采用对 n的归纳法。将上述积分记为

$$I(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\rho}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \exp(-\beta e^{-x_1}). \tag{2.45}$$

下面的引理分别给出归纳的基础情形和归纳步骤。

引理 2.1. 设 $\lambda \in \mathbb{R}$，且$\operatorname{Im}\rho < 0$。则

$$I(\lambda, \rho) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \Phi_{-\rho}(x)\, \Psi_{\lambda}(x)\, \exp(-\beta e^{-x}) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\rho}\, \Gamma(\mathrm{i}\rho \pm \mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g + \mathrm{i}\rho)}. \tag{2.46}$$

证明。 利用波函数的 Gauss–Givental 表示（见例1），我们将上述积分改写为

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-\mathrm{i}\rho x - \beta e^{-x}} \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda)} \int_{\ln\beta}^{\infty} dy\, (1 + \beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda - g} (1 - \beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda + g - 1}\, e^{\mathrm{i}\lambda(x-2y) - e^{y-x}}. \tag{2.47}$$

然后可借助图示进行计算，见图 26。第一步使用链关系（图 5），第二步使用图 13中的恒等式。 □

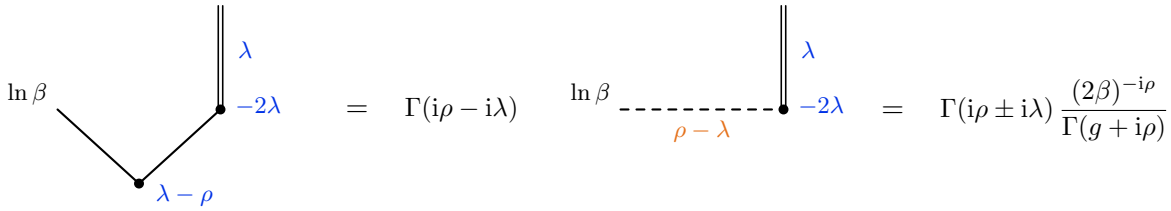


图 26：积分（2.47）的计算

引理 2.2。 设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$， $\boldsymbol{\rho}_n \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\operatorname{Im}\ \rho_1 = \ldots = \operatorname{Im}\rho_n < 0$。那么积分 (2.45)满足递推关系

$$I(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\rho}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\rho_n}\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_n \pm \mathrm{i}\lambda_n) \prod\limits_{j=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\rho_n \pm \mathrm{i}\lambda_j)\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_n)}{\Gamma(g + \mathrm{i}\rho_n) \prod\limits_{j=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j + \mathrm{i}\rho_n)}\, I(\boldsymbol{\lambda}_{n-1}, \boldsymbol{\rho}_{n-1}). \tag{2.48}$$

证明。 我们先给出证明的主要步骤，将交换积分的合理性以及其他收敛性问题留待最后讨论。

首先，改写 GL波函数（1.2的 Gauss–Givental 表示 0)

$$\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(-\rho_n)\,\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \tag{2.49}$$

利用相应的巴克斯特算子（1.43）

$$\begin{aligned}\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma(\mathrm{i}\rho_n+\mathrm{i}\rho_j)}\,\Lambda_n(-\rho_n)\,Q_{n-1}(\rho_n)\,\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma(\mathrm{i}\rho_n+\mathrm{i}\rho_j)}\\ \times\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\;\Lambda_{-\rho_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,Q_{\rho_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1})\,\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1}).\end{aligned} \tag{2.50}$$

此外，回顾一下 BC 波函数（2.30）的 Gauss–Givental 表示

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \;{}_n(\lambda_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{s}_{n-1}\quad{}_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{s}_{n-1})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{s}_{n-1}). \tag{2.51}$$

将这些公式代入积分（2.45），得到

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma(\mathrm{i}\rho_n+\mathrm{i}\rho_j)}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{s}_{n-1}\;\exp(-\beta e^{-x_1})\\ \times\Lambda_{-\rho_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,Q_{\rho_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1})\quad{}_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{s}_{n-1})\,\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{s}_{n-1}).\end{aligned} \tag{2.52}$$

对 $\boldsymbol{x}_n$ 的积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\;\exp(-\beta e^{-x_1})\,\Lambda_{-\rho_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,Q_{\rho_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1})\quad{}_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{s}_{n-1}) \tag{2.53}$$

表示算子乘积的核

$$Q^t_{n-1}(\rho_n)\,\Lambda^t_n(-\rho_n)\;\exp(-\beta e^{-x_1})\quad{}_n(\lambda_n). \tag{2.54}$$

转置算子的定义见（2.42）。

根据命题 2.4，关系

$$\begin{aligned}&Q^t_{n-1}(\rho_n)\,\Lambda^t_n(-\rho_n)\;\exp(-\beta e^{-x_1})\quad{}_n(\lambda_n)\\ &\qquad=\Gamma(\mathrm{i}\rho_n\pm\mathrm{i}\lambda_n)\;Q^t_{n-1}(\lambda_n)\,Q^t_{n-1}(-\lambda_n)\;\exp(-\beta e^{-x_1})\,\mathbb{Q}'_{n-1}(\rho_n)\end{aligned} \tag{2.55}$$

作为相应核之间的等式成立。将其应用于积分（2.52），得到

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n) = \frac{\Gamma(\mathrm{i}\rho_n\pm\mathrm{i}\lambda_n)}{\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma(\mathrm{i}\rho_n+\mathrm{i}\rho_j)}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{s}_{n-1}\;\exp(-\beta e^{-x_1})\\ \times Q_{-\lambda_n}(\boldsymbol{x}_{n-1}|\boldsymbol{y}_{n-1})\,Q_{\lambda_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1})\,\mathbb{Q}'_{\rho_n}(\boldsymbol{x}_{n-1}|\boldsymbol{s}_{n-1})\,\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{s}_{n-1}).\end{aligned} \tag{2.56}$$

现在可以计算关于 $\boldsymbol{s}_{n-1}$ 的积分，因为它表示 BC 巴克斯特算子作用于其特征函数（2.37）

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{s}_{n-1}\, \mathbb{Q}'_{\rho_n}(\boldsymbol{x}_{n-1}|\boldsymbol{s}_{n-1})\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{s}_{n-1}) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\rho_n}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\rho_n)} \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\rho_n \pm \mathrm{i}\lambda_j)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}). \quad (2.57)$$

类似地，对于关于 $\boldsymbol{y}_{n-1}$ 和 $\boldsymbol{z}_{n-1}$ 的积分，我们使用（1.43）

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{z}_{n-1}\, Q_{-\lambda_n}(\boldsymbol{x}_{n-1}|\boldsymbol{y}_{n-1})\, Q_{\lambda_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1})\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_n)\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}). \quad (2.58)$$

将这些结果代入（2.56）后，剩下关于 $\boldsymbol{x}_{n-1}$的积分，由此得到所声称的关系（2.48）。

接下来需要证明上述所有操作的合理性。记

$$\operatorname{Re}\rho_j = \gamma_j \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im}\rho_j = -\varepsilon < 0. \quad (2.59)$$

于是，由性质（1.23）

$$\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n). \quad (2.60)$$

首先，我们证明初始积分（2.52）绝对收敛。结合推论B.1、B.2，可得估计

$$\left| e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n - \beta e^{-x_1}}\, \Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \right| \le C(1+|\boldsymbol{x}_n|)^{-d} \quad (2.61)$$

对任意 $d \ge 0$，这意味着该积分收敛。

接下来，注意到表示式（2.50）也可以等价地写成

$$\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\rho_n + \mathrm{i}\rho_j)}\, e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \Lambda_n(-\gamma_n)\, Q_{n-1}(\gamma_n - 2\mathrm{i}\varepsilon)\, \Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}). \quad (2.62)$$

由于 $\Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \in \mathcal{P}_{n-1}$ (推论 B.1) 以及算子 $Q_{n-1}(\gamma_n - 2\mathrm{i}\varepsilon)$、 $\Lambda_n(-\gamma_n)$ 在 $\mathcal{P}_{n-1}$ (命题 B.1) 上定义良好，以上表示式收敛。

现在考虑多重积分（2.52）。被积函数可估计为

$$\begin{aligned} &\left| \Lambda_{-\rho_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\, Q_{\rho_n}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1}) \quad {}_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{s}_{n-1})\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1})\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_{n-1}}(\boldsymbol{s}_{n-1}) \right| \\ &\le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \Lambda_0(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\, Q_{-2\mathrm{i}\varepsilon}(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{z}_{n-1}) \quad {}_0(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{s}_{n-1})\, \Phi_{0,\dots,0}(\boldsymbol{z}_{n-1})\, \Psi_{0,\dots,0}(\boldsymbol{s}_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

因此，至少在初始次序下，该积分绝对收敛；此时它等于原表达式（2.45），其中 $\boldsymbol{\lambda}_n = (0,\dots,0)$ 且 $\boldsymbol{\rho}_n = -\mathrm{i}\varepsilon(1,\dots,1)$，其收敛性已得到证明。因此，根据富比尼 – 托内利定理，它按任意次序均收敛，我们可以先对 $\boldsymbol{x}_n$ 积分。

类似的论证也可应用于积分（2.56）：按以下顺序先计算积分（2.57）、（2.58）时，该积分是绝对收敛的，因为在这种情况下，它归结为变量数目减少后的初始表达式（2.45），其中变量数减少了（$n \to n-1$）。 □

2.8 从 Gauss–Givental 到梅林–巴恩斯

在本节中，我们证明 BC 通过高斯–吉文塔尔积分定义的 Toda 波函数也具有梅林–巴恩斯表示，该表示推广了伊奥尔戈夫–沙杜拉公式 [IS，(26)]。

回顾 GL Toda 谱测度（1.46）

$$\hat\mu(\boldsymbol\lambda_n) = \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} \prod_{j\neq k} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k)} \tag{2.64}$$

并定义函数

$$K_1(\boldsymbol\lambda_n, \boldsymbol\gamma_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}. \tag{2.65}$$

定理 2.3。对于 $\boldsymbol\lambda_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$

$$\Psi_{\boldsymbol\lambda_n}(\boldsymbol x_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol\gamma_n\; \hat\mu(\boldsymbol\gamma_n)\, K_1(\boldsymbol\lambda_n, \boldsymbol\gamma_n)\, \Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n). \tag{2.66}$$

证明。 证明依赖于命题 2.5以及 GLToda 波函数的反演公式。具体而言，已知 [W1] 光滑且衰减足够快的函数 $\varphi(\boldsymbol x_n)$ ，它们属于所谓的惠特克–施瓦茨空间，可以按照 GLToda 波函数展开

$$\varphi(\boldsymbol x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol\gamma_n\; \hat\mu(\boldsymbol\gamma_n)\, \Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n) \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol y_n\; \overline{\Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol y_n)}\, \varphi(\boldsymbol y_n). \tag{2.67}$$

等价地， GL 波函数满足完备关系（1.45）。惠特克–施瓦茨空间的定义见第B.5节。

公式（2.66）可以用相同的方式改写。也就是说，利用关系式（1.23）

$$\Phi_{\boldsymbol\gamma_n - \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol e_n}(\boldsymbol x_n) = e^{\varepsilon \underline{\boldsymbol x}_n}\, \Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n), \qquad \boldsymbol e_n = (1, \dots, 1), \tag{2.68}$$

并将积分变量 $\gamma_j \to \gamma_j - \mathrm{i}\varepsilon$ 平移后，我们得到

$$e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol x}_n - \beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol\lambda_n}(\boldsymbol x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol\gamma_n\; \hat\mu(\boldsymbol\gamma_n)\, K_1(\boldsymbol\lambda_n, \boldsymbol\gamma_n - \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol e_n)\, \Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n). \tag{2.69}$$

根据推论 B.2，函数 $e^{-\varepsilon \boldsymbol x_n - \beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol\lambda_n}(\boldsymbol x_n)$ 属于惠特克–施瓦茨空间，因此可以对其应用反演公式（2.67）。

只需回顾命题2.5，该命题指出，此函数与GL Toda 波函数的标量积等于核（2.65）。具体而言，对于 $\boldsymbol\gamma_n \in \mathbb{R}^n$ ，有

$$\overline{\Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n)} = \Phi_{-\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n) \tag{2.70}$$

见（1.17），因此

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol x_n\; \overline{\Phi_{\boldsymbol\gamma_n}(\boldsymbol x_n)}\, e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol x}_n - \beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol\lambda_n}(\boldsymbol x_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol x_n\; \Phi_{-\boldsymbol\gamma_n + \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol e_n}(\boldsymbol x_n)\, e^{-\beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol\lambda_n}(\boldsymbol x_n) \\ &= K_1(\boldsymbol\lambda_n, \boldsymbol\gamma_n - \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol e_n). \end{aligned} \tag{2.71}$$

□

2.9 正交性

BC Toda 链的哈密顿量关于标准标量积形式上是自伴的

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{x}_n\, \overline{\psi(\boldsymbol{x}_n)}\, \varphi(\boldsymbol{x}_n). \tag{2.72}$$

本节中，我们 对 BC 波函数之间的标量积进行启发式计算

$$\langle\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}|\Psi_{\boldsymbol{\rho}_n}\rangle = \frac{1}{\hat{\mu}_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)}\,\delta_{\mathrm{sym}}(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n), \qquad \boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n\in\mathbb{R}^n, \tag{2.73}$$

其中我们将测度记为

$$\hat{\mu}_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n) = \frac{1}{n!\,(4\pi)^n}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{1}{\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j\pm\mathrm{i}\lambda_k)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(g\pm\mathrm{i}\lambda_j)}{\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)} \tag{2.74}$$

并将关于带符号置换对称的 δ 函数记为

$$\delta_{\mathrm{sym}}(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\rho}_n) = \frac{1}{n!\,2^n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n\in\{1,-1\}^n}}\delta\big(\lambda_1-\varepsilon_1\rho_{\sigma(1)}\big)\cdots\delta\big(\lambda_n-\varepsilon_n\rho_{\sigma(n)}\big). \tag{2.75}$$

计算与 GL Toda 链的计算非常相似，参见 [Sil，第 4] 节。请注意，下面的大多数推导都是形式上的，因为我们处理的是发散积分。不过，对于 GL 模型，通过对相应积分进行正则化并选取合适的测试函数空间，可以使类似的推导变得严谨，参见 [K，第 1, 2] 节。我们预计，下面的计算也可以用同样的方法加以论证。

单个粒子。在最简单的单粒子情形下，可以利用 Gauss–Givental 表示法直接计算标量积

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(x) &= \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_{\ln\beta}^{\infty} dy\; e^{\mathrm{i}\lambda(x-2y)-e^{y-x}}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\\ &= \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\int_0^{\infty} dt\; e^{\mathrm{i}\lambda x-\beta(2t+1)e^{-x}}\,(t+1)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,t^{-\mathrm{i}\lambda+g-1},\end{aligned} \tag{2.76}$$

在推导第二行时，我们进行了变量替换 $e^y=\beta(2t+1)$。将最后一个表达式代入标量积，得到

$$\begin{aligned}\langle\Psi_\lambda|\Psi_\rho\rangle &= \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\,\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\rho}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\rho)}\\ &\times\int_{\mathbb{R}}dx\int_0^{\infty}dt\int_0^{\infty}ds\; e^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)x-2\beta(t+s+1)e^{-x}}\,(t+1)^{\mathrm{i}\lambda-g}\,t^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\,(s+1)^{-\mathrm{i}\rho-g}\,s^{-\mathrm{i}\rho+g-1}.\end{aligned} \tag{2.77}$$

通过变换变量 $x\to x+\ln(2\beta(t+s+1))$，我们计算关于 x 的积分

$$\int_{\mathbb{R}}dx\; e^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)x-2\beta(t+s+1)e^{-x}} = (2\beta(t+s+1))^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\,\Gamma(\mathrm{i}\lambda-\mathrm{i}\rho), \tag{2.78}$$

为使右侧有意义，我们假设 $\lambda \neq \rho$。在剩余的二重积分中，我们将积分变量 $s \to (t+1)s$

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty ds\, (t+s+1)^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\, (t+1)^{\mathrm{i}\lambda-g}\, t^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\, (s+1)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, s^{-\mathrm{i}\rho+g-1}$$
$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds\, t^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\, (s+1)^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\, (st+s+1)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, s^{-\mathrm{i}\rho+g-1}. \quad (2.79)$$

再进行一次积分变量替换 $t \to (s+1)t/s$ 后，积分便可分离并显式求出

$$\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt\, t^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\, (s+1)^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\, (st+s+1)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, s^{-\mathrm{i}\rho+g-1}$$
$$= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt\, t^{\mathrm{i}\lambda+g-1}\, (t+1)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, s^{-\mathrm{i}(\lambda+\rho)-1} = \frac{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(\mathrm{i}\rho-\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\rho)}\, 2\pi\delta(\lambda+\rho), \quad (2.80)$$

其中我们用到了

$$\int_0^\infty ds\, s^{-\mathrm{i}(\lambda+\rho)-1} = \int_{-\infty}^\infty dp\, e^{-\mathrm{i}p(\lambda+\rho)} = 2\pi\delta(\lambda+\rho). \quad (2.81)$$

将所有结果汇总后，我们得到

$$\langle \Psi_\lambda | \Psi_\rho \rangle = 2\pi \frac{\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda)}\, \delta(\lambda+\rho), \quad (2.82)$$

其中我们假设 $\lambda \neq \rho$。由于波函数关于谱参数为偶函数，因此可以利用对称性还原一般公式

$$\langle \Psi_\lambda | \Psi_\rho \rangle = 4\pi \frac{\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda)}\, \frac{\delta(\lambda+\rho)+\delta(\lambda-\rho)}{2}. \quad (2.83)$$

这与所声称的表达式（2.73）相符。

多粒子。利用高斯–吉文塔尔递归公式，我们可以将标量积改写为

$$\langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n} | \Psi_{\boldsymbol{\rho}_n} \rangle = \ {}^{t}_{1}(\lambda_n) \cdots {}^{t}_{n}(\lambda_1)\ \ {}_{n}(\rho_n) \cdots {}_{1}(\rho_1) \cdot 1, \quad (2.84)$$

转置算子定义见（2.42）。该计算基于局部关系

$${}^{t}_{n}(\lambda)\ \ {}_{n}(\rho) = \Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda \pm \mathrm{i}\rho)\ \ {}_{n-1}(\rho)\ \ {}^{t}_{n-1}(\lambda), \qquad n \geq 2. \quad (2.85)$$

我们把它的证明留到本节末尾。多次应用它可得

$${}^{t}_{n}(\lambda_1)\ \ {}_{n}(\rho_n) \cdots {}_{1}(\rho_1) \cdot 1 = \prod_{k=2}^{n} \Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_1 \pm \mathrm{i}\rho_k)\ \ {}_{n-1}(\rho_n) \cdots {}_{1}(\rho_2)\ \ {}^{t}_{1}(\lambda_1)\ \ {}_{1}(\rho_1) \cdot 1. \quad (2.86)$$

这里，右侧是单粒子波函数的标量积

$$ {}^{t}_{1}(\lambda_1) \quad {}_{1}(\rho_1)\cdot 1 = \langle \Psi_{\lambda_1} | \Psi_{\rho_1} \rangle, \tag{2.87} $$

其余部分则表示 $n-1$ 粒子的波函数

$$ {}^{t}_{n}(\lambda_1) \quad {}_{n}(\rho_n)\cdots \quad {}_{1}(\rho_1)\cdot 1 = \langle \Psi_{\lambda_1} | \Psi_{\rho_1} \rangle \prod_{k=2}^{n} \Gamma(\pm \mathrm{i}\lambda_1 \pm \mathrm{i}\rho_k) \quad {}_{n-1}(\rho_n)\cdots \quad {}_{1}(\rho_2)\cdot 1. \tag{2.88} $$

因此，整个标量积（2.84）可分解为最简单的标量积

$$ \langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n} | \Psi_{\boldsymbol{\rho}_n} \rangle = \prod_{j=1}^{n} \Big[\langle \Psi_{\lambda_j} | \Psi_{\rho_j} \rangle \prod_{k=j+1}^{n} \Gamma(\pm \mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\rho_k) \Big]. \tag{2.89} $$

为使右侧有意义，我们假设 $\lambda_j \neq \pm\rho_k$ 对于 $j \neq k$。代入单粒子标量积（2.83），得到

$$ \begin{aligned} \langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n} | \Psi_{\boldsymbol{\rho}_n} \rangle = (4\pi)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)}{\Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)} \prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\pm \mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \\ \times \frac{1}{2^n} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}_n \in \{1,-1\}^n} \delta(\lambda_1 - \varepsilon_1\rho_1)\cdots\delta(\lambda_n - \varepsilon_n\rho_n). \end{aligned} \tag{2.90} $$

利用波函数关于谱参数置换的对称性（定理2.73），即可恢复对 λ_j、ρ_k 没有限制的一般公式（定理2.1）。

接下来只需证明含升算子的局部关系（2.85）。这可以借助图示完成，见图 27、28。在几乎所有变换中，我们都使用链关系（图 5）得到虚线，并使用交叉关系（图 6）将其沿竖直方向移动。此外，为得到图 27中的最后一个图示，我们使用图 9中的双线恒等式。最终关系（2.85）中的伽马函数，每次都出现在使用链关系时。

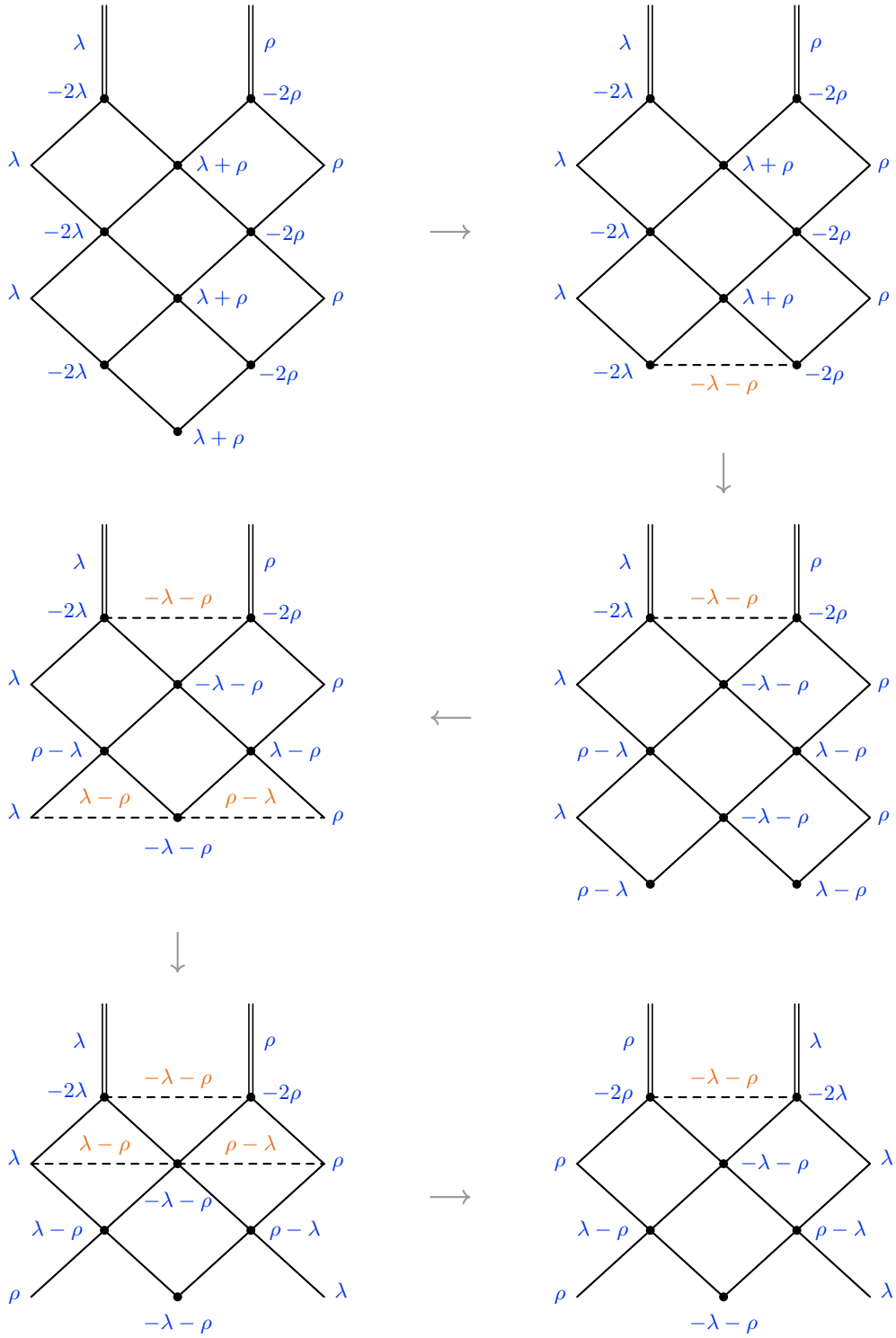


图27：恒等式证明（2.85）（续于图28）

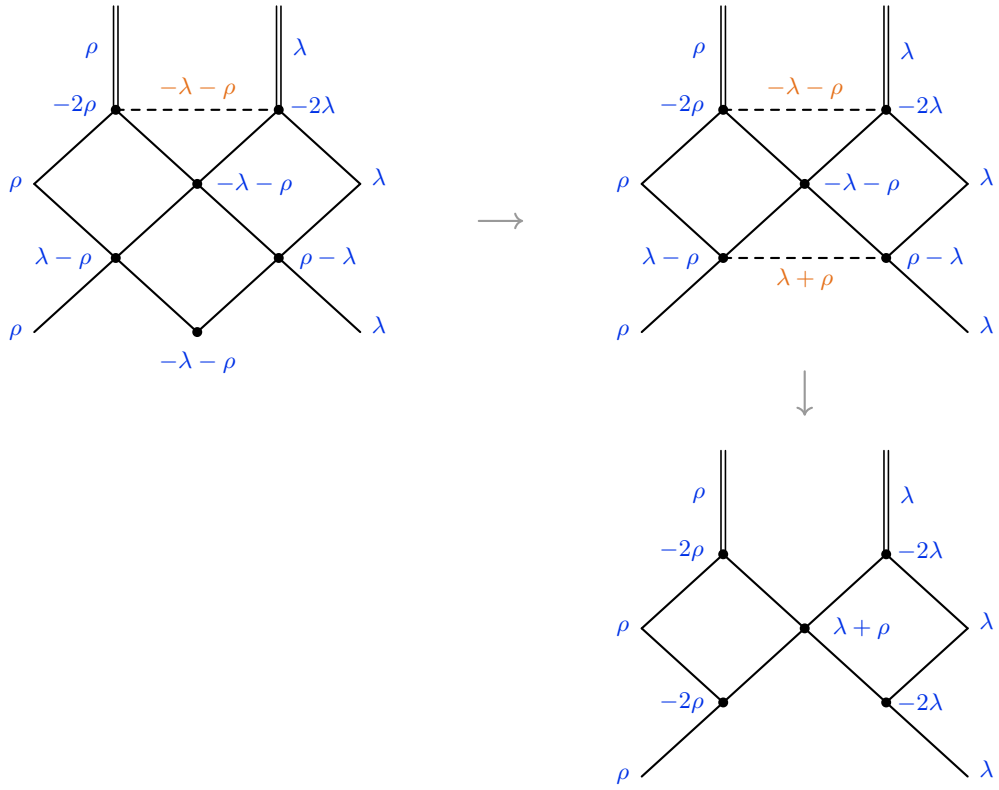


图28：恒等式证明（2.85）（始于图27）

3 对偶系统

在前几节中，我们讨论了作用于空间变量x_j空间中的算子。另一方面， GL 和 BC Toda波函数也可以视为谱变量 λ_j的函数来研究，这涉及类似的对象，例如作用于谱空间中的哈密顿量和积分算子。

3.1 GL系统

本节回顾关于 GL Toda 链的已知事实：对偶哈密顿量、对偶巴克斯特算子和升算子，以及波函数的梅林–巴恩斯表示。

3.1.1 对偶哈密顿量、升算子和巴克斯特算子

作用于谱变量函数的对偶哈密顿量 $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)$ 由以下 [B]

$$\hat{\mathrm{H}}_s = \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ |J|=s}} \prod_{\substack{j\in J\\ k\notin J}} \frac{1}{\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k} \prod_{j\in J} e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}}, \tag{3.1}$$

最简单的几个是

$$\hat{\mathrm{H}}_1 = \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{1}{\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k}\, e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_j}}, \qquad \hat{\mathrm{H}}_n = e^{-\mathrm{i}(\partial_{\lambda_1}+\ldots+\partial_{\lambda_n})}. \tag{3.2}$$

这里 $e^{-\mathrm{i}\partial_\lambda}\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda - \mathrm{i})$，因此这些算子在条带 $\operatorname{Im}\lambda_j \in [-1, 0]$ 中关于 λ_j 解析的函数上定义良好。相对于标量积，哈密顿量形式上是自伴的

$$\langle\psi|\varphi\rangle_{\hat{\mu}} = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \overline{\psi(\boldsymbol{\lambda}_n)}\, \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n) \tag{3.3}$$

其测度为

$$\hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n) = \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} \prod_{1\leq j\neq k\leq n} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k)}. \tag{3.4}$$

注意到，该函数出现在 GL波函数（1.44）的正交关系中。

ˆ 对偶升算子 $\Lambda_n(x)$ 按下式作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_{n-1})$

$$\big[\hat{\Lambda}_n(x)\,\varphi\big](\boldsymbol{\lambda}_n) = \int_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}0)^{n-1}} d\boldsymbol{\gamma}_{n-1}\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_{n-1})\, e^{\mathrm{i}(\underline{\boldsymbol{\lambda}}_n - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{n-1})x} \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\gamma_k)\, \varphi(\boldsymbol{\gamma}_{n-1}). \tag{3.5}$$

ˆ 对偶巴克斯特算子 $Q_n(x)$ 按下式作用于函数 $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)$

$$\big[\hat{Q}_n(x)\,\varphi\big](\boldsymbol{\lambda}_n) = \int_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}0)^{n}} d\boldsymbol{\gamma}_{n}\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_{n})\, e^{\mathrm{i}(\underline{\boldsymbol{\lambda}}_n - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{n})x} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\gamma_k)\, \varphi(\boldsymbol{\gamma}_{n}). \tag{3.6}$$

这些算子定义于 [GLO1第 3], ，尽管升算子实质上已出现在更早的工作中 [KL2, （4.3）]。

记反射算子为

$$\hat{\mathcal{I}}_n\colon\ \varphi(\boldsymbol{\lambda}_n)\ \mapsto\ \varphi(-\boldsymbol{\lambda}_n). \tag{3.7}$$

哈密顿量族在其作用下保持不变

$$\hat{\mathcal{I}}_n\, \hat{H}_s\, \hat{\mathcal{I}}_n = \hat{H}_n^{-1}\, \hat{H}_{n-s}. \tag{3.8}$$

定义反射后的升算子和巴克斯特算子

$$\hat{\Lambda}'(x) = \hat{\mathcal{I}}_n\, \hat{\Lambda}_n(-x)\, \hat{\mathcal{I}}_n, \qquad \hat{Q}'_n(x) = \hat{\mathcal{I}}_n\, \hat{Q}_n(-x)\, \hat{\mathcal{I}}_n, \tag{3.9}$$

因此，特别是，

$$\big[\hat{Q}'_n(x)\,\varphi\big](\boldsymbol{\lambda}_n) = \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}0)^{n}} d\boldsymbol{\gamma}_{n}\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_{n})\, e^{\mathrm{i}(\underline{\boldsymbol{\lambda}}_n - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{n})x} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_k - \mathrm{i}\lambda_j)\, \varphi(\boldsymbol{\gamma}_{n}). \tag{3.10}$$

3.1.2 局部关系与特征函数

上述算子满足局部关系

$$\hat{\mathrm{H}}_s\,\hat{Q}_n(x) = \hat{Q}_n(x)\,\hat{\mathrm{H}}_s, \tag{3.11}$$

$$\hat{\mathrm{H}}_s\,\hat{\Lambda}_n(x) = e^{x}\,\hat{\Lambda}_n(x)\,\hat{\mathrm{H}}_{s-1}, \tag{3.12}$$

$$\hat{Q}_n(x)\,\hat{Q}_n(y) = \hat{Q}_n\big(-\ln(e^{-x}+e^{-y})\big) = \hat{Q}_n(y)\,\hat{Q}_n(x), \tag{3.13}$$

$$\hat{Q}_n(x)\,\hat{\Lambda}_n(y) = \exp(-e^{y-x})\,\hat{\Lambda}_n(y), \tag{3.14}$$

ˆ 其中，在第二个恒等式中，对于 $s=1$，我们记 $\mathrm{H}_0 = \mathrm{Id}$。

前两个可以利用哈密顿量关于标量积的对称性（3.3）以及简单的核函数类型恒等式来证明 [B]

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\|I|=s}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}}\frac{1}{x_i-x_j}\prod_{\substack{i\in I\\ a=1,\dots,n}}(x_i-y_a) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\|I|=s}}\prod_{\substack{a\in I\\ b\notin I}}\frac{1}{y_b-y_a}\prod_{\substack{a\in I\\ i=1,\dots,n}}(x_i-y_a), \tag{3.15}$$

或其在 $y_n\to\infty$ 处的退化形式。最后两个关系可由 Gustafson 恒等式（D.1）的退化形式推出。

事实上，本文并不需要上述关系，只需要其中的一些推论。注意，引言（GL）中提到的 GL Toda波函数的梅林–巴恩斯表示（1.50）由以下迭代公式给出

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \hat{\Lambda}_n(x_n)\cdots\hat{\Lambda}_1(x_1)\cdot 1. \tag{3.16}$$

此外，利用 Gauss–Givental 表示（1.20）可以轻松证明对称

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Phi_{-\boldsymbol{\lambda}_n}(-x_n,\dots,-x_1), \tag{3.17}$$

用对偶算子表示为

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \hat{\Lambda}'_n(x_1)\cdots\hat{\Lambda}'_1(x_n)\cdot 1. \tag{3.18}$$

因此，根据上述关系和定义，GL Toda波函数将对偶哈密顿量和巴克斯特算子对角化

$$\hat{\mathrm{H}}_s\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{x_{n-s+1}+\dots+x_n}\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.19}$$

$$\hat{Q}_n(x)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \exp(-e^{x_n-x})\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.20}$$

$$\hat{Q}'_n(x)\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \exp(-e^{x-x_1})\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.21}$$

对偶哈密顿量的对角化已在 [B第 4], 节中证明，而巴克斯特算子的对角化则见于 [GLO1，命题 3。2]。注意，根据推论C.1，梅林–巴恩斯表示（3.16）可以解析延拓至 $\boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{C}^n$，因此对偶哈密顿量（3.1）的作用是良定义的。

谱参数空间中波函数的正交关系等价于空间参数空间中的完备关系

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\,\hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\overline{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\,\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{y}_n) = \delta(x_1-y_1)\cdots\delta(x_n-y_n). \tag{3.22}$$

不同方法的证明见 [W1], [K，第 3], [DKM2 节，第 2]节。

3.2 BC系统

3.2.1 对偶哈密顿量

本节介绍 [DE2定理 3] 中导出的对偶哈密顿量。引入有理函数

$$B(u_1,u_2)=\frac{1}{u_1^2-u_2^2},\qquad C(u_1,u_2)=\frac{1}{(u_1+u_2)(u_1+u_2+1)} \tag{3.23}$$

以及任意指标子集 I， $J\subset\{1,\dots,n\}$（满足 $I\cap J=\varnothing$）对应的乘积

$$\begin{aligned} B_{I,J}(\boldsymbol{u}_n)&=\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}}B(u_i,u_j),\\ C_I(\boldsymbol{u}_n)&=\prod_{i\in I}(u_i+g)\prod_{\substack{i,j\in I\\ i\le j}}C(u_i,u_j),\\ C'_I(\boldsymbol{u}_n)&=\prod_{i\in I}(u_i+g)\prod_{\substack{i,j\in I\\ i\le j}}(-C(u_i,u_j)). \end{aligned} \tag{3.24}$$

此外，对于任意子集 I，定义对称化子

$$\mathrm{Refl}_I=\prod_{i\in I}\mathrm{Refl}_i,\qquad \mathrm{Refl}_i\big[\varphi(u_i)\big]=\varphi(u_i)+\varphi(-u_i). \tag{3.25}$$

对偶 van Diejen–Emsiz 哈密顿量定义为

$$\hat{\mathbb{H}}_s=(2\beta)^s\sum_{\substack{I,J,K:\ |K|=n-s,\\ I\sqcup J\sqcup K=\{1,\dots,n\}}}\mathrm{Refl}_{I\sqcup J}\Big[B_{I,J}(\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_n)B_{I,K}(\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_n)B_{J,K}(\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_n)\,C_I(\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_n)\,C'_J(\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_n)\prod_{i\in I}e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_i}}\Big]. \tag{3.26}$$

特别地，对于 $s=1$

$$\hat{\mathbb{H}}_1=2\beta\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\left[\frac{\mathrm{i}\lambda_i+g}{2\lambda_i(2\lambda_i-\mathrm{i})}\left(e^{-\mathrm{i}\partial_{\lambda_i}}-1\right)+\frac{-\mathrm{i}\lambda_i+g}{2\lambda_i(2\lambda_i+\mathrm{i})}\left(e^{\mathrm{i}\partial_{\lambda_i}}-1\right)\right]. \tag{3.27}$$

对偶哈密顿量在形式上相对于标量积是自伴的 t

$$\langle\psi|\varphi\rangle_{\hat\mu_{BC}}=\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{\lambda}_n\,\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\overline{\psi(\boldsymbol{\lambda}_n)}\,\varphi(\boldsymbol{\lambda}_n) \tag{3.28}$$

关于测度（2.74）

$$\hat\mu_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)=\frac{1}{n!\,(4\pi)^n}\prod_{1\le j<k\le n}\frac{1}{\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j\pm\mathrm{i}\lambda_k)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(g\pm\mathrm{i}\lambda_j)}{\Gamma(\pm2\mathrm{i}\lambda_j)}. \tag{3.29}$$

此外，算子（3.26）的每一项在形式上都是自伴的。由于系数呈因子分解形式，只需验证以下恒等式

$$\frac{m(\lambda+\mathrm{i})}{m(\lambda)}=\frac{\overline{c(\lambda)}}{c(\lambda+\mathrm{i})},\qquad \frac{m(\lambda+\mathrm{i},\rho+\mathrm{i})}{m(\lambda,\rho)}=\frac{\overline{c(\lambda,\rho)}}{c(\lambda+\mathrm{i},\rho+\mathrm{i})} \tag{3.30}$$

其中，对所有实数 λ，ρ 和 a

$$c(\lambda)=\frac{\mathrm{i}\lambda+g}{2\lambda(2\lambda-\mathrm{i})(\lambda^2-a^2)},\qquad m(\lambda)=\frac{\Gamma(g\pm\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(\pm2\mathrm{i}\lambda)\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda\pm\mathrm{i}a)}, \tag{3.31}$$

$$c(\lambda,\rho)=\frac{1}{(\lambda+\rho)(\lambda+\rho-\mathrm{i})},\qquad m(\lambda,\rho)=\frac{1}{\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda\pm\mathrm{i}\rho)}. \tag{3.32}$$

3.2.2 GL–BC 互 intertwiner 和梅林–巴恩斯积分

在第 2.8节中，我们推导了 BC 波函数的梅林–巴恩斯表示。该表示的核由函数 (2.65)

$$K_1(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\mathrm{i}\gamma_j\pm\mathrm{i}\lambda_k)}{\prod_{1\le j<k\le n}\Gamma(\mathrm{i}\gamma_j+\mathrm{i}\gamma_k)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(g+\mathrm{i}\gamma_j)} \tag{3.33}$$

其中 $m=n$。考虑类似的核函数

$$K_2(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n)=\frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\Gamma(\mathrm{i}\gamma_j\pm\mathrm{i}\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(g-\mathrm{i}\gamma_j)}{\prod_{1\le j<k\le n}\Gamma(\mathrm{i}\gamma_j+\mathrm{i}\gamma_k)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(g\pm\mathrm{i}\lambda_j)}. \tag{3.34}$$

为证明 BC 波函数将对偶哈密顿量 (3.26) 对角化，我们需要以下恒等式。

命题 3.1。对于 $n\le m$ 核函数 $K_1(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n)$ 和 $K_2(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n)$，它们在 GL 型和 BC 型的对偶哈密顿量之间交织

$$\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_m)\,K_i(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n)=\hat{\mathrm{H}}_s(-\boldsymbol{\gamma}_n)\,K_i(\boldsymbol{\lambda}_m,\boldsymbol{\gamma}_n),\qquad i=1,2,\quad s=1,\dots,n. \tag{3.35}$$

证明。通过直接计算，函数 $K_1(\boldsymbol{\lambda}_m,\ \boldsymbol{\gamma}_n)$ 的关系（3.35）等价于以下有理函数恒等式

$$\sum_{\substack{I,J,K:\ |K|=m-s,\\ I\sqcup J\sqcup K=\{1,\dots,m\}}}\mathrm{Refl}_{I\sqcup J}\Big[B_{I,J}(\boldsymbol{x}_m)B_{I,K}(\boldsymbol{x}_m)B_{J,K}(\boldsymbol{x}_m)\,C_I(\boldsymbol{x}_m)\,C'_J(\boldsymbol{x}_m)D^n_I(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_n)\Big]$$

$$=\sum_{\substack{L,M:\ |L|=s,\\ L\sqcup M=\{1,\dots,n\}}}\tilde{B}_{L,M}(\boldsymbol{y}_n)\tilde{C}_L(\boldsymbol{y}_n)\tilde{D}^m_L(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_n), \tag{3.36}$$

其中记

$$\tilde{B}_{L,M}(\boldsymbol{y}_n)=\prod_{\substack{a\in L\\ b\in M}}\frac{y_a+y_b+1}{y_b-y_a},\qquad \tilde{C}_L(\boldsymbol{y}_n)=\prod_{a\in L}(y_a+g)\prod_{\substack{a,b\in L\\ a<b}}(y_a+y_b)(y_a+y_b+1),$$
$$\tilde{D}^m_L(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_n)=\prod_{\substack{a\in L,\\ i=1,\dots,m}}\frac{1}{y_a^2-x_i^2},\qquad D^n_I(\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_n)=\prod_{\substack{i\in I,\\ a=1,\dots,n}}\frac{y_a+x_i+1}{y_a-x_i}. \tag{3.37}$$

下面证明恒等式（3.36）。等式两边都是关于 $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{y}_n$的有理函数，关于变量 $\boldsymbol{y}_n$ 的排列对称，并且关于变量 $\boldsymbol{x}_m$的排列和符号变化对称。此外，它们关于每个变量 x_i的次数都小于零。因此，只需证明等式两边之差关于每个 x_i都没有极点。所有极点都是简单的。由对称性可知，不存在形如 $x_i=x_j$ 和 $x_i=0$的极点。需要检查的极点只有

$$x_i=\pm\frac{1}{2},\qquad x_i=\pm x_j\pm 1,\qquad x_i=\pm y_j.$$

Again，由于我们的函数具有对称性，只需检查三种可能

$$x_m=-\frac{1}{2},\qquad x_1=-x_2-1,\qquad x_m=y_n.$$

L证明这些点处不同项的留数相互抵消 .

在 $x_m=-1/2$处的极点。 显然，等式（3.36）右边没有这样的极点。记 $b_{I,J,K}$ 为等式（3.36）左边对应于分解 $\{1,\dots,m\}=I\sqcup J\sqcup K$的加项，并假设 I包含 m。记 $I'=I\setminus\{m\}$ 和 $J'=J\sqcup\{m\}$。于是

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{x_m=-1/2}b_{I,J,K}&=-\operatorname*{Res}_{x_m=-1/2}b_{I',J',K}\\&=-\frac{1}{2}\Big(g-\frac{1}{2}\Big)\prod_{i\in I'}\frac{1}{x_i^2-1/4}\prod_{j\in J}\frac{1}{1/4-x_j^2}\prod_{k\in K}\frac{1}{1/4-x_k^2}B_{I',J}B_{I',K}B_{J,K}C_{I'}C'_JD^n_{I'}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

因此，两个留数相互抵消，这验证了左侧的总留数为零。

极点位于 $x_1=-x_2-1$。 同样，(3.36) 的右侧并不存在这样的极点。左侧则有来自各项 $b_{I、J、K}$ 的贡献，其中 I 或 J 包含 **1** 和 **2**。令 $\mathbf{1},2\in I$。记 $I''=I\setminus\{1,2\}$, $J''=J\sqcup\{1,2\}$。于是

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{x_1=-x_2-1}b_{I,J,K}&=-\operatorname*{Res}_{x_1=-x_2-1}b_{I'',J'',K}\\&=\prod_{i\in I''}\frac{1}{(x_i^2-x_1^2)(x_i^2-x_2^2)}\prod_{j\in J}\frac{1}{(x_1^2-x_j^2)(x_2^2-x_j^2)}\prod_{k\in K}\frac{1}{(x_1^2-x_k^2)(x_2^2-x_k^2)}\\&\quad\times\frac{1}{x_1+x_2}\frac{x_1+g}{2x_1(2x_1+1)}\frac{x_2+g}{2x_2(2x_2+1)}B_{I'',J}B_{I'',K}B_{J,K}C_{I''}C'_JD^n_{I''}\Big|_{x_1=-x_2-1}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

同样，两个留数相互抵消。

极点位于 $x_m = y_n$。 在（3.36）右边，我们计算包含 n 的各项 $b_{L,\ M}$（ L ）的留数。记 $L' = L \setminus \{n\}$。于是

$$\operatorname*{Res}_{x_m=y_n} \tilde{b}_{L,M} = -\frac{y_n+g}{2y_n} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{1}{y_n^2 - x_l^2} \prod_{c=1}^{n-1} \frac{y_c+y_n+1}{y_c-y_n} \tilde{B}_{L',M} \tilde{C}_{L'} \tilde{D}_{L'}^{m-1}. \tag{3.40}$$

类似地，在式（3.36）的左边，我们计算包含 m的各项$b_{I、\ J、\ K}$ 的留数，其中 I。再次记 $I' = I \setminus \{m\}$。于是

$$\operatorname*{Res}_{x_m=y_n} b_{I,J,K} = -\frac{y_n+g}{2y_n} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{1}{y_n^2 - x_l^2} \prod_{c=1}^{n-1} \frac{y_c+y_n+1}{y_c-y_n} B_{I',J} B_{I',K} B_{J.K} C_{I'} C'_J D_{I'}^{n-1}. \tag{3.41}$$

将式（3.41）对式（3.36）中出现的所有分拆求和，可得，式（$x_m=y_n$）左边的留数 Res 等于将式（3.36）的左边在变量 $\boldsymbol{x}_{m-1}$、$\boldsymbol{y}_{n-1}$ 中取值后，再乘以函数

$$-\frac{y_n+g}{2y_n} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{1}{y_n^2 - x_l^2} \prod_{c=1}^{n-1} \frac{y_c+y_n+1}{y_c-y_n}.$$

式（3.36）的右边也同样成立。这就通过对 n 作归纳证明，两边之差的留数为零。注意，在基础情形 $n = 0$ 下，右边为零，而左边是一个次数小于零且没有极点的有理函数，因此也等于零。

核 $K_2(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\gamma}_n)$ 的关系（3.35）也可以改写为恒等式（3.36）的形式，只需在函数 $C_I(\boldsymbol{u}_m)$ 和 $C_L(\boldsymbol{y}_n)$ 的定义式(3.24) 和 (3.37) 中，用 $g-1-u_i$ 和 $g-1-y_a$ 分别代替 $g+u_i$ 和 $g+y_a$：

$$C_I(\boldsymbol{u}_m) = \prod_{i\in I} (g-1-u_i) \prod_{\substack{i,j\in I \\ i\le j}} C(u_i,u_j),$$

$$\tilde{C}_L(\boldsymbol{y}_n) = \prod_{a\in L} (g-1-y_a) \prod_{\substack{a,b\in L \\ a<b}} (y_a+y_b)(y_a+y_b+1).$$

对应恒等式的证明相同。 □

根据定理 2.3， BC 波函数具有梅林–巴恩斯表示

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\ \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n)\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.42}$$

其中 $\varepsilon > 0$。当 $|\mathrm{Im}\ \lambda_j| < \varepsilon$ 时，该积分绝对收敛；通过移动积分路径（即增大 ε），可解析延拓至 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{C}^n$，参见命题 C.2和推论C.2。因此，对偶哈密顿量（3.26）作用于这些函数是良定义的，并且借助命题 3.1，我们可以证明以下结论。

定理 3.1。 波函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 满足 *van Diejen–Emsiz* 方程

$$\hat{\mathbb{H}}_s\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{x_{n-s+1}+\ldots+x_n}\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.43}$$

对于 $s = 1, \ldots, n$。

证明。 根据命题 C.2，积分 (3.42) 在 λ_j 中从条带 $|\operatorname{Im}\lambda_j| < \varepsilon$的紧子集ˆ上一致收敛。因此，取 $\varepsilon > 1$，我们可以将差分算子 $\mathbb{H}_s$ 与 (3.43) 中的积分交换，然后使用命题 3.1

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) &= e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\; \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\left[\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_n) K_1(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\gamma}_n)\right] \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n) \\ &= e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\; \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\left[\hat{\mathrm{H}}_s(-\boldsymbol{\gamma}_n) K_1(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\gamma}_n)\right] \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n).\end{aligned} \tag{3.44}$$

接下来将积分变量 $\gamma_j = \rho_j - \mathrm{i}\varepsilon$ 平移，使得 $\rho_j \in \mathbb{R}$ and

$$\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \overline{\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)}, \tag{3.45}$$

见（1.17）和（1.20）。因此，

$$\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1} + \varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\rho}_n\; \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n)\left[\hat{\mathrm{H}}_s(-\boldsymbol{\rho}_n) K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\rho}_n - \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol{e}_n)\right] \overline{\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)}. \tag{3.46}$$

现在回想一下， GL 对偶哈密顿量关于测度为 ˆ$\mu(\boldsymbol{\rho}_n) = $ ˆ$\mu(-\boldsymbol{\rho}_n)$ 的标量积是对称的 (3.3)

$$\hat{\mathbb{H}}_s(\boldsymbol{\lambda}_n)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1} + \varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\rho}_n\; \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n)\, K_1(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\rho}_n - \mathrm{i}\varepsilon \boldsymbol{e}_n) \overline{\left[\hat{\mathrm{H}}_s(-\boldsymbol{\rho}_n)\, \Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right]}. \tag{3.47}$$

ˆ 接下来只需利用这一事实： $\Phi_{-\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 对角化哈密顿量 H_s (3.19)。 □

类似地，命题 3.1意味着函数

$$\tilde{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}0)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\; \mu(\boldsymbol{\gamma}_n) K_2(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{\gamma}_n) \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.48}$$

也满足 van Diejen–Emsiz 方程

$$\hat{\mathbb{H}}_s\, \tilde{\Psi}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{x_{n-s+1}+\ldots+x_n}\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

根据命题 C.3 积分（3.48）绝对收敛于 |虚部 $\lambda_j| < \varepsilon < g$，因此对于最后一项性质，我们还假设 $g > 1$。

如第 1.3节所述，当 $n = 1$ 时，梅林–巴恩斯积分（3.42）、（3.48）给出了惠特克函数的两种已知表达式，参见例 2、3。下面证明它们在一般情形下也相同。

命题 3.2. 对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon \in (0, g)$

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\; \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, K_2(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\gamma}_n)\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.49}$$

证明。 我们需要证明等式

$$e^{\beta e^{-x_1}} \int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{\prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}\, (2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.50}$$

$$= e^{-\beta e^{-x_1}} \int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{\prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g - \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)}\, (2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.51}$$

为此，我们需要两个要素。第一个是 GLToda 对偶（反射）巴克斯特算子 $\hat{} Q'_n(x)$ 对 $\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 的作用，见（3.10）和（3.21），其显式表达式为

$$\int\limits_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}r)^n} d\boldsymbol{\rho}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n)\, e^{\mathrm{i}(\underline{\gamma}_n - \underline{\rho}_n)x} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j - \mathrm{i}\gamma_k)\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-e^{x-x_1}}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.52}$$

这里 $r < \operatorname{Im}\gamma_k$ 对所有 $k = 1,\dots,n$ 均成立。

第二个要素是 Gustafson 型积分

$$\int d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{\prod\limits_{j=1}^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma(a_j - \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm b_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n+1} \prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma(a_j \pm b_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n+1} \Gamma(a_j + a_k)}, \tag{3.53}$$

其中我们假设积分路径将伽马函数的极点级数分别向下和向上分开

$$\gamma_j = -\mathrm{i}a_k - \mathrm{i}n, \qquad \gamma_j = \pm\mathrm{i}b_k + \mathrm{i}n, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.54}$$

它们分别向下和向上延伸。上述积分已在 [DM, （3）]中计算。需要指出的是，该计算基于各种自旋链本征函数的正交性与完备性这一假设；这一点后来已在 [DKM1]中得到证明。

现在考虑积分（3.51），并重写积分号后面的指数 al

$$e^{-\beta e^{-x_1}} = e^{\beta e^{x_1}}\, e^{-e^{\ln(2\beta)-x_1}}. \tag{3.55}$$

注意到第二个因子与巴克斯特算子的特征值（3.52）在参数 $x = \ln(2\beta)$ 下相同。因此，我们可以利用积分（3.51）和积分（3.52）重写第二种表示

$$e^{\beta e^{-x_1}} \int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{\prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g - \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)}\, (2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n}$$

$$\times \int\limits_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}r)^n} d\boldsymbol{\rho}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n)\, (2\beta)^{\mathrm{i}\underline{\gamma}_n - \mathrm{i}\underline{\rho}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j - \mathrm{i}\gamma_k)\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.56}$$

由于 $\operatorname{Im}\gamma_j = -\varepsilon$，我们应取 $r < -\varepsilon$。接下来，改变积分次序，先对 $\boldsymbol{\gamma}_n$ 积分。相应的积分与 Gustafson 积分（3.53）相同，因此可以显式计算

$$\int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{\prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j - \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g - \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k)}$$

$$= \frac{\prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\rho_j + \mathrm{i}\rho_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\rho_j)}. \tag{3.57}$$

将右侧代入表达式（3.56），即可得到第一个梅林–巴恩斯表示式（3.50）。

□

3.2.3 QISM 技术

回顾 GL和 BC 型的单值矩阵（1.4）、（1.5）

$$T_n(u) = L_n(u)\cdots L_1(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

$$\mathbb{T}_n(u) = T_n(u)\, K(u)\, \sigma_2\, T_n^t(-u)\, \sigma_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_n(u) & \mathbb{B}_n(u) \\ \mathbb{C}_n(u) & \mathbb{D}_n(u) \end{pmatrix}, \tag{3.59}$$

其中

$$L_j(u) = \begin{pmatrix} u + \mathrm{i}\partial_{x_j} & e^{-x_j} \\ -e^{x_j} & 0 \end{pmatrix}, \qquad K(u) = \begin{pmatrix} -\alpha & u - \frac{\mathrm{i}}{2} \\ -\beta^2\big(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\big) & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

在本节　我们采用以下文献的思路 [KL1、KL2、IS] 来证明关系　　s

$$\mathbb{B}_n(u)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = (-1)^n \Big(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big) \prod_{j=1}^{n} (u^2 - \lambda_j^2)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.61}$$

$$\mathbb{D}(\pm\lambda_k)\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = -\beta(g \pm \mathrm{i}\lambda_k)\, \Psi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k \mp \mathrm{i},\ldots\lambda_n}(\boldsymbol{x}_n), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{3.62}$$

这些关系是在 [BDK] 中利用 Gauss–Givental 表示推导出来的。不过，我们在此介绍使用梅林–巴恩斯表示和经典 QISM 技术推导这些关系的方法。

注意，公式（3.62）连同关系

$$\mathbb{D}_n(\mathrm{i}/2) = -\alpha, \tag{3.63}$$

根据定义，给出 $2n+1$ 个点，用于插值多项式 $\mathbb{D}_n(u)$，其次数为 $2n$。微分-差分方程组（3.61）、（3.62）将波函数$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n$确定到相差一个关于 λ_k的 i-周期函数。因此，我们自然会预期可以由此导出 van Diejen–Emsiz 方程的对偶系统。

作用于 $\mathbb{B}_n(u)$。 根据（3.59）， BC 哈密顿量的生成函数可以用 GL 单值化矩阵元

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_n(u) &= \alpha\left(A_n(u)B_n(-u) - B_n(u)A_n(-u)\right)\\ &+ \left(u - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(A_n(u)A_n(-u) + \beta^2 B_n(u)B_n(-u)\right).\end{aligned} \tag{3.64}$$

根据定理 2.3,

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{t}_n \; Q(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{t}_n)\, \Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.65}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 并记

$$Q(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{t}_n) = \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\boldsymbol{t}_n} \prod_{a,i=1}^{n} \Gamma\left(\mathrm{i}(\pm\lambda_i + t_a)\right)}{\prod_{a\neq b} \Gamma\left(\mathrm{i}(t_a - t_b)\right) \prod_{a<b} \Gamma\left(\mathrm{i}(t_a + t_b)\right) \prod_{a=1}^{n} \Gamma\left(g + \mathrm{i}t_a\right)}. \tag{3.66}$$

因此，要证明（3.61），我们需要计算 $\mathbb{B}_n(u)$ 对 $e^{\beta e^{-x_1}}\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 的作用。算子 $A_n(u)$ 和 $B_n(u)$ 对 GL 波函数的作用已知 [IS, （7）, （8）]

$$A_n(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{l=1}^{n}(u - t_l)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.67}$$

$$B_n(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \mathrm{i}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}\left(\prod_{l\neq p}\frac{u - t_l}{t_p - t_l}\right)\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.68}$$

由定义（3.58）可得

$$A_n(u) = \tilde{A}_{n-1}(u)\,\mathrm{i}\partial_{x_1} + a_n(u), \qquad B_n(u) = \tilde{A}_{n-1}(u)\,e^{-x_1},$$

˜其中 $a_n(u)$ 不含 ∂_{x_1} ，而 $A_{n-1}(u)$ 是矩阵的（1，1）元素 x

$$L_n(u)\ldots L_2(u).$$

因此,

$$A_n(u) = B_n(u)\,e^{x_1}\,\mathrm{i}\partial_{x_1} + a_n(u). \tag{3.69}$$

算子 $A_n(u)$ 和 $B_n(u)$ 作用于函数（3.65）时，可以作用于函数 $\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 或前因子 $e^{\beta e^{-x_1}}$。将它们仅作用于函数 $A_n^0(u)$ 的部分分别记为 $B_n^0(u)$ 和 $\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)$。由于

$$e^{x_1}\,\mathrm{i}\partial_{x_1}\,e^{\beta e^{-x_1}} = -\mathrm{i}\beta\,e^{\beta e^{-x_1}} \tag{3.70}$$

我们有以下关系

$$A_n(u) = A_n^0(u) - \mathrm{i}\beta B_n^0(u), \qquad B_n(u) = B_n^0(u). \tag{3.71}$$

另请注意，以供后续参考，同理

$$C_n(u) = C_n^0(u) - \mathrm{i}\beta D_n^0(u), \qquad D_n(u) = D_n^0(u). \tag{3.72}$$

将（3.71）代入（3.64），得到

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_n(u) &= \alpha\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) - B_n^0(u)A_n^0(-u)\right) + \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)A_n^0(u)A_n^0(-u)\\ &\quad -\mathrm{i}\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) + B_n^0(u)A_n^0(-u)\right).\end{aligned} \tag{3.73}$$

分别利用（3.67）和（3.68计算各项。于是有

$$A_n^0(u)A_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{l=1}^{n}(t_l^2-u^2)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n),$$

$$A_n^0(u)B_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \mathrm{i}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}(u-t_p-\mathrm{i})\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_p-t_l}\,\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n),$$

$$B_n^0(u)A_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \mathrm{i}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}(-u-t_p)\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_p-t_l}\,\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n).$$

因此，

$$\begin{aligned}&\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) - B_n^0(u)A_n^0(-u)\right)\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)\\ &= 2\mathrm{i}^{n-1}\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\sum_{p=1}^{n}\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_p-t_l}\,\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) + B_n^0(u)A_n^0(-u)\right)\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)\\ &= -2\mathrm{i}^{n-1}\left(t_p+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\sum_{p=1}^{n}\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_p-t_l}\,\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n).\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}&\left(\alpha\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) - B_n^0(u)A_n^0(-u)\right) - \mathrm{i}\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) + B_n^0(u)A_n^0(-u)\right)\right)\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)\\ &= 2\beta\,\mathrm{i}^{n-1}\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\sum_{p=1}^{n}(\mathrm{i}t_p+g-1)\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_p-t_l}\,\Phi_{t_1,\ldots,t_p+\mathrm{i},\ldots,t_n}(\boldsymbol{x}_n),\end{aligned} \tag{3.74}$$

其中，与之前一样，$g = 1/2 + \alpha/\beta$。将表达式（3.74）代入积分（3.65），并在每一项中作变量代换 $t_p \to t_p - \mathrm{i}$。于是我们恰好得到与 [IS、附录 B],中相同的表达式

$$\begin{aligned}&\left(\alpha\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) - B_n^0(u)A_n^0(-u)\right) - \mathrm{i}\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(A_n^0(u)B_n^0(-u) + B_n^0(u)A_n^0(-u)\right)\right)\Psi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n)\\ &= \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\sum_{p=1}^{n}e^{\beta e^{-x_1}}\int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n}d\boldsymbol{t}_n\;Q(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{t}_n)\prod_{l\neq p}\frac{t_l^2-u^2}{t_l^2-t_p^2}\prod_{a=1}^{n}(\lambda_a^2-t_p^2)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n).\end{aligned} \tag{3.75}$$

这里我们也对 t_p 的积分路径进行了平移，这可由附录 C.2 中的界得到论证。其余部分与 [IS、附录 B]中的相同：利用关系

$$A_n^0(u)A_n^0(-u)\,\Psi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{t}_n\; Q(\boldsymbol{\lambda}_n,\boldsymbol{t}_n) \prod_{a=1}^n (\lambda_a^2-u^2)\,\Phi_{\boldsymbol{t}_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{3.76}$$

以及插值型恒等式 [IS，(46)]

$$\sum_{p=1}^n \prod_{l\neq p} \frac{t_l^2-u^2}{t_l^2-t_p^2} \prod_{a=1}^n (\lambda_a^2-t_p^2) + \prod_{l=1}^n (t_l^2-u^2) = \prod_{a=1}^n (\lambda_a^2-u^2) \tag{3.77}$$

我们得到所需的公式（3.61）。

$\mathbb{D}_n(u)$ **的作用。根据定义**（3.59），

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_n(u) &= \alpha\big(C_n(u)B_n(-u) - D_n(u)A_n(-u)\big) \\ &\quad + \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\big(C_n(u)A_n(-u) + \beta^2 D_n(u)B_n(-u)\big).\end{aligned} \tag{3.78}$$

将关系（3.71）、（3.72）代入其中，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_n(u) &= \alpha\big(C_n^0(u)B_n^0(-u) - D_n^0(u)A_n^0(-u)\big) + \left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)C_n^0(u)A_n^0(-u) \\ &\quad - \mathrm{i}\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\big(C_n^0(u)B_n^0(-u) + D_n^0(u)A_n^0(-u)\big).\end{aligned} \tag{3.79}$$

为简洁起见，记作

$$\boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{t}_n, \qquad \boldsymbol{t}^{\pm p} = (t_1,\dots,t_p \pm \mathrm{i},\dots,t_n), \qquad t_{pq} = t_p - t_q. \tag{3.80}$$

为使算子 $\mathbb{D}_n(u)$ 作用于梅林–巴恩斯表示 (3.65)，我们需要以下已知关系 [IS，(7)、(8)、(9)、(11)]

$$\begin{aligned}
A_n^0(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= \prod_{l=1}^n (u-t_l)\,\Phi_{\boldsymbol{t}}, \\
B_n^0(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= \mathrm{i}^{n-1}\sum_{p=1}^n \left(\prod_{l\neq p}\frac{u-t_l}{t_{pl}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{+p}}, \\
C_n^0(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= \mathrm{i}^{-n-1}\sum_{p=1}^n \left(\prod_{l\neq p}\frac{u-t_l}{t_{pl}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{-p}}, \\
D_n^0(u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= \mathrm{i}\sum_{p=1}^n \left(\prod_{l\neq p}\frac{u-t_l}{t_{pl}}\right)\left(\frac{1}{\prod_{l\neq p}(t_{pl}-\mathrm{i})} - \frac{1}{\prod_{l\neq p}(t_{pl}+\mathrm{i})}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}} \\
&\quad - \sum_{\substack{p,q\\ p\neq q}} \frac{1}{(t_{qp}-\mathrm{i})\prod_{l\neq p} t_{pl}} \left(\prod_{l\neq p,q}\frac{u-t_l}{t_{ql}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{+p,-q}}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

由此我们推导出以下公式，这些公式已出现于 [IS]，

$$\begin{aligned} C_n^0(u)B_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= -\sum_q \left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}(t_{ql}+\mathrm{i})}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}} \\ &\quad +\sum_{\substack{p,q\\ p\neq q}}\frac{(u-t_p-\mathrm{i})(u+t_q)}{(t_{qp}-\mathrm{i})t_{pq}}\left(\prod_{l\neq p,q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{pl}t_{ql}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{+p,-q}}, \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned} D_n^0(u)A_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} &= \sum_q \left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}}\right)\left[\frac{\mathrm{i}(u+t_q)}{\prod_{l\neq q}(t_{ql}+\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{i}(u+t_q)}{\prod_{l\neq q}(t_{ql}-\mathrm{i})}\right]\Phi_{\boldsymbol{t}} \\ &\quad -\sum_{\substack{p,q\\ p\neq q}}\frac{(u+t_p)(u+t_q)}{(t_{qp}-\mathrm{i})t_{pq}}\left(\prod_{l\neq p,q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{pl}t_{ql}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{+p,-q}}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$C_n^0(u)A_n^0(-u)\,\Phi_{\boldsymbol{t}} = -\mathrm{i}^{-n-1}\sum_q (u+t_q)\left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}}\right)\Phi_{\boldsymbol{t}^{-q}}. \tag{3.84}$$

作用于 $\mathbb{D}(u)$ 特征函数 (3.65) 时，和往常一样，我们对积分变量作变换并平移积分路径，将结果写成如下形式

$$\mathbb{D}(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = e^{\beta e^{-x_1}}\int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{t}\; Q(\boldsymbol{t})\,\Phi_{\boldsymbol{t}}\,R(u), \tag{3.85}$$

为简洁起见，我们记 $Q(\boldsymbol{t}) \equiv Q(\boldsymbol{\lambda}_n,\ \boldsymbol{t}_n)$。所有平移后出现的函数分为几部分

$$R(u) = \sum_{q=1}^{n}\left[R_q^1(u)+R_q^2(u)+R_q^3(u)+R_q^4(u)\right], \tag{3.86}$$

也就是说，

$$R_q^1(u) = -\mathrm{i}^{-n-1}\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)(u+t_q+\mathrm{i})\left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}+\mathrm{i}}\right)\frac{Q(\boldsymbol{t}^{+q})}{Q(\boldsymbol{t})}, \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned} R_q^2(u) &= \sum_{\substack{p=1\\ p\neq q}}^{n} 2\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\frac{(u+t_q+\mathrm{i})\left(\mathrm{i}t_p+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}\right)}{(t_{qp}+\mathrm{i})(t_{pq}-2\mathrm{i})} \\ &\quad\times\left(\prod_{l\neq p,q}\frac{t_l^2-u^2}{(t_{pl}-\mathrm{i})(t_{ql}+\mathrm{i})}\right)\frac{Q(\boldsymbol{t}^{-p,+q})}{Q(\boldsymbol{t})}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$R_q^3(u)=\left[\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)(u+t_q+\mathrm{i})-\mathrm{i}\alpha(u+t_q-\mathrm{i})\right]\left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}(t_{ql}+\mathrm{i})}\right) \tag{3.89}$$

$$R_q^4(u)=(u+t_q)\left[-\beta\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)+\mathrm{i}\alpha\right]\left(\prod_{l\neq q}\frac{t_l^2-u^2}{t_{ql}(t_{ql}-\mathrm{i})}\right). \tag{3.90}$$

由于核的显式形式 $Q(\boldsymbol{t})$(3.66) 我们有

$$\frac{Q(\boldsymbol{t}^{+q})}{Q(\boldsymbol{t})}=2\beta\,\mathrm{i}^{n+1}\frac{\left(\mathrm{i}t_q+\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{2}\right)}{\prod_{l=1}^{n}\left[(t_q+\mathrm{i})^2-\lambda_l^2\right]}\left(\prod_{l\neq q}\frac{(t_{ql}+\mathrm{i})(t_q+t_l+\mathrm{i})}{t_{ql}}\right), \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}\frac{Q(\boldsymbol{t}^{-p,+q})}{Q(\boldsymbol{t})}&=\frac{(t_{pq}-2\mathrm{i})\left(\mathrm{i}t_q+\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{2}\right)}{t_{pq}\left(\mathrm{i}t_p+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}\right)}\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{t_p^2-\lambda_l^2}{(t_q+\mathrm{i})^2-\lambda_l^2}\right)\\&\quad\times\left(\prod_{l\neq p,q}\frac{(t_{pl}-\mathrm{i})(t_{ql}+\mathrm{i})(t_q+t_l+\mathrm{i})}{t_{pl}t_{ql}(t_p+t_l)}\right).\end{aligned} \tag{3.92}$$

利用上述公式，我们希望证明

$$R(\lambda_k)=-\beta\left(\mathrm{i}\lambda_k+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{2}\right)\prod_{l=1}^{n}\frac{t_l+\lambda_k}{t_l-\lambda_k+\mathrm{i}} \tag{3.93}$$

对任意 $k\in\{1,\dots,n\}$。于是容易看出

$$Q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})\prod_{l=1}^{n}\frac{t_l+\lambda_k}{t_l-\lambda_k+\mathrm{i}}=Q(\boldsymbol{\lambda}^{-k},\boldsymbol{t}) \tag{3.94}$$

从而，当3.62成立时，我们证明了所需的关系（ $u=\lambda_k$。情形 $u=-\lambda_k$ 由特征函数 $\lambda_k\to-\lambda_k$ 的反射对称性 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$可得。

由于关于 λ_k的置换对称性，只需考虑 R（λ_n）。考虑前两项之和（3.87）、（3.88）

$$\begin{aligned}R_q^1(u)+R_q^2(u)&=-2\beta\,\frac{\left(u-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)(u+t_q+\mathrm{i})\left(\mathrm{i}t_q+\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{2}\right)}{\prod_{l=1}^{n}\left[(t_q+\mathrm{i})^2-\lambda_l^2\right]}\left(\prod_{l\neq q}\frac{(t_l^2-u^2)(t_q+t_l+\mathrm{i})}{t_{ql}}\right)\\&\quad\times\left[1+\sum_{p\neq q}\frac{\prod_{l=1}^{n}(t_p^2-\lambda_l^2)}{(t_p^2-u^2)\left[(t_q+\mathrm{i})^2-t_p^2\right]\prod_{l\neq p,q}(t_p^2-t_l^2)}\right].\end{aligned} \tag{3.95}$$

在 $u=\lambda_n$ 的情况下，方括号中的表达式大幅简化

$$1+\sum_{p\neq q}\frac{\prod_{l=1}^{n-1}(t_p^2-\lambda_l^2)}{\left[(t_q+\mathrm{i})^2-t_p^2\right]\prod_{l\neq p,q}(t_p^2-t_l^2)}=\frac{\prod_{l=1}^{n-1}\left[(t_q+\mathrm{i})^2-\lambda_l^2\right]}{\prod_{l\neq q}\left[(t_q+\mathrm{i})^2-t_l^2\right]}. \tag{3.96}$$

如 [IS，第 13]，页所述，这是插值恒等式公式的推论

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\prod_{l=1}^{n-1}(a_p - b_l)}{\prod_{l\neq p}(a_p - a_l)} = 1. \tag{3.97}$$

因此，我们有

$$R_q^1(\lambda_n) + R_q^2(\lambda_n) = -2\beta \, \frac{\left(\lambda_n - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(\mathrm{i}t_q + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2}\right)}{t_q - \lambda_n + \mathrm{i}} \left(\prod_{l\neq q} \frac{t_l^2 - \lambda_n^2}{t_{ql}(t_{ql} + \mathrm{i})} \right). \tag{3.98}$$

下一步是将第三项（3.89）求和

$$R_q^1(\lambda_n) + R_q^2(\lambda_n) + R_q^3(\lambda_n) = \beta \, \frac{(t_q^2 - \lambda_n^2)\left(\mathrm{i}\lambda_n + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2}\right)}{\mathrm{i}t_q - \mathrm{i}\lambda_n - 1} \left(\prod_{l\neq q} \frac{t_l^2 - \lambda_n^2}{t_{ql}(t_{ql} + \mathrm{i})} \right). \tag{3.99}$$

最后，将第四项（3.90）相加，并对 q 求和，我们便得到整个函数

$$\begin{aligned} R(\lambda_n) &= \sum_{q=1}^{n} \left[R_q^1(\lambda_n) + R_q^2(\lambda_n) + R_q^3(\lambda_n) + R_q^4(\lambda_n) \right] \\ &= \beta \left(\mathrm{i}\lambda_n + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \right) \sum_{q=1}^{n} \left(\prod_{l\neq q} \frac{t_l^2 - \lambda_n^2}{t_{ql}} \right) \left[\frac{t_q^2 - \lambda_n^2}{(\mathrm{i}t_q - \mathrm{i}\lambda_n - 1) \prod_{l\neq q}(t_{ql} + \mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}t_q + \mathrm{i}\lambda_n}{\prod_{l\neq q}(t_{ql} - \mathrm{i})} \right]. \end{aligned} \tag{3.100}$$

同样，正如 [IS，第 13],页所证明的，最后一行中的和可以改写为

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\prod_{l\neq q} \frac{t_l^2 - \lambda_n^2}{t_{ql}} \right) \left[\frac{t_q^2 - \lambda_n^2}{(\mathrm{i}t_q - \mathrm{i}\lambda_n - 1) \prod_{l\neq q}(t_{ql} + \mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}t_q + \mathrm{i}\lambda_n}{\prod_{l\neq q}(t_{ql} - \mathrm{i})} \right] = -\prod_{l=1}^{n} \frac{t_l + \lambda_n}{t_l - \lambda_n + \mathrm{i}}, \tag{3.101}$$

由此得到结果（3.93）。最后一个公式同样是插值恒等式（3.97）的推论。

3.2.4 渐近行为与超八面体惠特克函数

在本节中，我们通过留数计算 GL 和 BC 波函数的梅林–巴恩斯积分。由此得到波函数的 Harish-Chandra 级数表示及渐近行为。

GL 系统。 已知波函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$在所有渐近区域中都快速衰减，除了

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \tag{3.102}$$

例如，参见 [BC，命题 4.1 中给出的界。3]。在后一个区域中，它可以表示为一个收敛级数，该级数来自对梅林–巴恩斯积分进行留数计算（3.16）。注意，对于 $x_1 \ll \ldots \ll x_n$ 粒子间的相互作用消失（1.9）。

令 $\mathcal{A}$ 为所有对角线上为零、元素为非负整数的下三角矩阵的集合

$$\mathcal{A} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{N}_0) \,|\, a_{ij} = 0 \text{ for all } i \leq j\}. \tag{3.103}$$

每个矩阵 $A \in \mathcal{A}$ 都根据以下规则确定另一个下三角矩阵 $P = (p_{ij})$

$$p_{ij} = a_{ij} + a_{i+1,j} + \ldots + a_{nj}, \qquad 1 \le j < i \le n. \tag{3.104}$$

对于给定的 $A \in \mathcal{A}$，定义亚纯函数

$$c_A(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{k=2}^{n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{a_{ki}}}{a_{ki}!} \frac{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{k} \Gamma(\mathrm{i}(\lambda_j - \lambda_i) - p_{ki} + p_{k+1,j})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{k-1} \Gamma(\mathrm{i}(\lambda_j - \lambda_i) - p_{ki} + p_{kj})}, \tag{3.105}$$

其中我们设 $p_{n+1,\ i} = 0$. 例如，对于 $n = 3$

$$\begin{aligned} c_A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{(-1)^{a_{31}+a_{32}+a_{21}}}{a_{31}!a_{32}!a_{21}!} \Gamma(\mathrm{i}(\lambda_2 - \lambda_1) - a_{21} - a_{31} + a_{32}) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_3 - \lambda_1) - a_{31}\right) \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_2 - \lambda_1) - a_{31}\right) \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_3 - \lambda_2) - a_{32}\right) \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_1 - \lambda_2) - a_{32}\right)}{\Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_2 - \lambda_1) - a_{31} + a_{32}\right) \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_1 - \lambda_2) - a_{32} + a_{31}\right)}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

记 $\varphi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 为级数

$$\varphi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} \sum_{A \in \mathcal{A}} c_A(\boldsymbol{\lambda}_n)\, e^{-\sum_{j<i} a_{ij}(x_i - x_j)}. \tag{3.107}$$

那么波函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 可以表示为（实际上对于任意 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{C}^n$ [DE2，命题 1]）关于谱参数的 $\varphi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$的对称化

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varphi_{\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_n), \tag{3.108}$$

这可由直接计算梅林–巴恩斯积分（3.16）并取留数得到。

注 4. 对于 $n = 2$，分解式（3.108）通过修正贝塞尔函数表示麦克唐纳函数 [DLMF，(10.27.4)],

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}.$$

最近极点（$a_{ij} = 0$）决定了$x_1 \ll \ldots \ll x_n$的梅林–巴恩斯积分的渐近行为。令

$$\Phi^{as}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i<j} \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_{\sigma(j)} - \lambda_{\sigma(i)})\right) e^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \lambda_{\sigma(k)} x_k} \tag{3.109}$$

按照 [HR] 中所述的论证（另见 [BCDK，第 5 节。1]），可以证明，在区域（3.102）内，在条件

$$\min_{i=1,\ldots,n-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon > 0 \tag{3.110}$$

我们有如下界

$$|\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) - \Phi^{as}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)| < C(\boldsymbol{\lambda}_n) \exp(-\varepsilon/2) \tag{3.111}$$

对任意满足 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 的 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$，都有。

Toda 哈密顿量的特征函数在区域 GL 内解析，且具有平面波渐近 $x_1 < \ldots < x_n$，通常称为 Harish-Chandra 函数 $e^{\mathrm{i}\sum_k \lambda_k x_k}\ \varphi^{HC}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ [HC]。它可以表示为关于变量 $e^{-(x_k - x_{k+1})}$ [DE1、DE2、O],的收敛级数形式；对谱参数进行对称化后，得到的特征函数关于谱参数对称且解析。

因此,

$$\varphi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \prod_{i<j} \Gamma\left(\mathrm{i}(\lambda_j - \lambda_i)\right) \varphi^{HC}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.112}$$

而关系式（3.108）恰好是波函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 的 Harish-Chandra 分解。

BC 系统。 记 $W_n = S_n \ltimes Z_2^n$ 为 BC_n 根系的 Weyl 群。每个元素$w \in W_n$ 由置换 $\sigma(w) \in S_n$ 和符号组 $\varepsilon_k(w) \in \{1, -1\}$参数化，因此其在 $\mathbb{R}^n$ 上的右作用由关系式给出

$$w(x_k) = \varepsilon_k(w) x_{\sigma(w)(k)}.$$

令 D_0 为渐近区域

$$D_0 = \{\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}. \tag{3.113}$$

那么， $\mathbb{R}^n$ 去掉超平面 $x_i = \pm x_j$ 和 $x_k = 0$ 的并集后的补集，是若干个渐近区域的不交并

$$D_w = w(D_0), \qquad w \in W_n. \tag{3.114}$$

波函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 在除 D_0之外的所有渐近区域中都快速衰减，参见命题 B.3。梅林–巴恩斯表示可将其表示为类似于（3.107）和（3.108）的级数；据推测，该级数对所有 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ 都收敛。

令 $\mathcal{B}$ 为所有非负整数元组的集合（可以将它们想象为一个下三角矩阵和一个向量）

$$\mathcal{B} = \{B = (b_{ij},\ b_k) \in M_n(\mathbb{N}_0) \times \mathbb{N}_0^n \,|\, b_{ij} = 0 \text{ for all } i \leq j\}. \tag{3.115}$$

每个数组 $B \in \mathcal{B}$ 都按照以下规则确定一个下三角矩阵 $Q = (q_{ij})$

$$q_{ij} = b_{ij} + b_{i+1,j} + \ldots + b_{nj} - b_j, \qquad 1 \leq j < i \leq n, \qquad q_{n+1,j} = -b_j. \tag{3.116}$$

对于给定的 $B \in \mathcal{B}$，按以下规则定义亚纯函数 $c^k_B(\boldsymbol{\lambda}_n)$

$$c^k_B(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{b_{ki}}}{b_{ki}!} \frac{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{k} \Gamma(\mathrm{i}(\lambda_j - \lambda_i) - q_{ki} + q_{k+1,j})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{k-1} \Gamma(\mathrm{i}(\lambda_j - \lambda_i) - q_{ki} + q_{kj})}, \qquad 2 \leq k \leq n, \tag{3.117}$$

$$c^1_B(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{b_k} \Gamma\left(2\mathrm{i}\lambda_k - b_k\right)}{b_k! \Gamma\left(\mathrm{i}\lambda_k + g - b_k\right)} \prod_{1\leq j\neq i\leq n} \frac{\Gamma(\mathrm{i}(\lambda_i \pm \lambda_j) - b_i)}{\Gamma(\mathrm{i}(\lambda_i - \lambda_j) - b_i + b_j)} \prod_{1\leq j<i\leq n} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}(\lambda_i + \lambda_j) - b_i - b_j)}$$

并令

$$c_B(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{k=1}^{n} c_B^k(\boldsymbol{\lambda}_n).$$

用 $\psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$表示级数

$$\psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\,\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\tilde{x}_i+\beta e^{-x_1}} \sum_{B\in\mathcal{B}} c_B(\boldsymbol{\lambda}_n)\, e^{\sum_{j<i} b_{ij}(x_j-x_i)-\sum_{k=1}^{n} b_k\tilde{x}_k} \tag{3.118}$$

其中

$$\tilde{x}_k = x_k - \ln 2\beta. \tag{3.119}$$

通过留数计算梅林–巴恩斯积分（3.65），再结合 GL 波函数（3.108）的级数表示，可得以下结论。

定理 3.2. 波函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 是级数（*3.118*）的对称化

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{w\in W_n} \psi_{w(\lambda_1),\ldots,w(\lambda_n)}(\boldsymbol{x}_n). \tag{3.120}$$

例 4。 对于 $n=1$，关系（3.120）给出了惠特克函数 $W_{k,\,\mu}(z)$ 通过惠特克函数 $M_{k,\,\pm\mu}(z)$ [DLMF, (13.14.33)]

$$W_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)} M_{k,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)} M_{k,-\mu}(z).$$

再一次，最近极点（$b_{ij}=b_i=0$）决定了区域 $0\ll x_1\ll\ldots\ll x_n$ 内梅林–巴恩斯积分的渐近行为。设

$$\Psi^{as}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \sum_{w\in W_n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(2\mathrm{i}w(\lambda_k))}{\Gamma(\mathrm{i}w(\lambda_k)+g)} \prod_{1\le i<j\le n} \Gamma(\mathrm{i}w(\lambda_j)\pm\mathrm{i}w(\lambda_i))\, e^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} w(\lambda_k)\tilde{x}_k}. \tag{3.121}$$

沿用 [HR 的方法，BCDK] 可以证明，在区域（3.102）且满足条件

$$\min_i\{(x_{i+1}-x_i), x_i\} = \varepsilon > 0 \tag{3.122}$$

我们有如下界

$$|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) - \Psi^{as}_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)| < C(\boldsymbol{\lambda}_n)\exp(-\varepsilon/2) \tag{3.123}$$

对于任意 $\boldsymbol{\lambda}_n\in\mathbb{R}^n$，使得 $\lambda_i\neq\pm\lambda_j$ 且 $\lambda_j\neq 0$。这正是超八面体 Whittaker 函数 [DE2, (3.5b)]（对比时令 $2\beta=1$）。因此我们得出结论：$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 根据超八面体 Whittaker 函数的唯一性，与之重合，而关系式(3.120)即为其 Harish-Chandra 分解。如 [DE2], 所示，超八面体 Whittaker 函数关于谱参数是整函数，这与推论 C.2一致。

3.2.5 完备性

正如我们已经讨论过的 所讨论的 GL Toda 链的波函数满足完备关系(3.22)

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \overline{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\, \Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{y}_n) = \delta(x_1 - y_1)\cdots\delta(x_n - y_n), \tag{3.124}$$

其中 $\boldsymbol{x}_n,\ \boldsymbol{y}_n \in \mathbb{R}^n$ 且测度由式（3.4）给出。本节将启发式地推导 BC 波函数的完备关系

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \hat{\mu}_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)}\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{y}_n) = \delta(x_1 - y_1)\cdots\delta(x_n - y_n), \tag{3.125}$$

其中相应的测度由正交关系确定

$$\hat{\mu}_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n) = \frac{1}{n!\,(4\pi)^n} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{1}{\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)}{\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)}, \tag{3.126}$$

参见第 2.9 节。

根据推论 2.1， $\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)} = \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 。利用它以及梅林–巴恩斯表示（2.66），我们将积分（3.125）改写为

$$\begin{aligned} e^{\beta(e^{-x_1}+e^{-y_1})} &\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\rho}_n\, \hat{\mu}_{BC}(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n) \\ &\times \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n - \mathrm{i}\underline{\rho}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k)\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_j + \mathrm{i}\rho_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)\, \Gamma(g + \mathrm{i}\rho_j)}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{y}_n). \end{aligned} \tag{3.127}$$

首先，我们来计算关于 $\boldsymbol{\lambda}_n$ 的积分。注意，它与附录D中推导的 Gustafson 积分（D.2）的约化相同，因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!\,(4\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \frac{\prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)} \\ &\quad = \prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k)\, \Gamma(\mathrm{i}\rho_j + \mathrm{i}\rho_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)\, \Gamma(g + \mathrm{i}\rho_j) \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\rho_k). \end{aligned} \tag{3.128}$$

因此，整个表达式（3.127）变为

$$\begin{aligned} e^{\beta(e^{-x_1}+e^{-y_1})} &\int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\rho}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n) \\ &\times (2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n - \mathrm{i}\underline{\rho}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\rho_k)\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{y}_n). \end{aligned} \tag{3.129}$$

现在，对 $\boldsymbol{\rho}_n$ 的积分与 GL 对偶巴克斯特算子 $\hat{}\, Q'_n(\ln 2\beta)$ 作用于其特征函数上的结果相同，见（3.10）和（3.21），

$$\int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\rho}_n\ \hat{\mu}(\boldsymbol{\rho}_n)\,(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\boldsymbol{\gamma}}_n-\mathrm{i}\underline{\boldsymbol{\rho}}_n}\prod_{j,k=1}^{n}\Gamma(\mathrm{i}\gamma_j+\mathrm{i}\rho_k)\,\Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{y}_n)=e^{-2\beta e^{-y_1}}\,\Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{y}_n). \tag{3.130}$$

因此，积分 (3.129) 化简为

$$e^{\beta(e^{-x_1}-e^{-y_1})}\int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\ \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\,\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\,\Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{y}_n). \tag{3.131}$$

最后，改变积分变量 $\gamma_j=\nu_j-\mathrm{i}\varepsilon$ （使得 $\nu_j\in\mathbb{R}$），并利用 GL波函数的性质

$$\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)=e^{\varepsilon\underline{\boldsymbol{x}}_n}\,\Phi_{\boldsymbol{\nu}_n}(\boldsymbol{x}_n),\qquad \Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{y}_n)=e^{-\varepsilon\underline{\boldsymbol{y}}_n}\,\Phi_{-\boldsymbol{\nu}_n}(\boldsymbol{y}_n)=e^{-\varepsilon\underline{\boldsymbol{y}}_n}\,\overline{\Phi_{\boldsymbol{\nu}_n}(\boldsymbol{y}_n)} \tag{3.132}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&e^{\beta(e^{-x_1}-e^{-y_1})}\int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}\varepsilon)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\ \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\,\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n)\,\Phi_{-\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{y}_n)\\ &=e^{\beta(e^{-x_1}-e^{-y_1})+\varepsilon(\underline{\boldsymbol{x}}_n-\underline{\boldsymbol{y}}_n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\nu}_n\ \hat{\mu}(\boldsymbol{\nu}_n)\,\Phi_{\boldsymbol{\nu}_n}(\boldsymbol{x}_n)\,\overline{\Phi_{\boldsymbol{\nu}_n}(\boldsymbol{y}_n)}=\delta(x_1-y_1)\cdots\delta(x_n-y_n),\end{aligned} \tag{3.133}$$

其中，最后一个等号由 GL 波函数的完备关系 (3.124) 得出。由此完成了 (3.125) 的推导。

致谢

第二位和第三位作者感谢 BIMSA 的热情接待。他们在 BIMSA 访问期间完成了大部分工作。S. Derkachov（第 2 节）的工作得到了 RNF 资助项目 23-11-00311 的支持。S. Khoroshkin（第 3 节）的工作得到了 RNF 资助项目 23-11-00150 的支持。

A 积分恒等式

A.1 翻转关系的证明

回想一下，图8中的翻转关系等价于对称性

$$F(x,y)=F(y,x) \tag{A.1}$$

函数（2.6）

$$\begin{aligned}F(x,y)&=e^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)x-2\mathrm{i}\rho y}\,(1+\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\rho-g}\,(1-\beta e^{-y})^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\\ &\times\int_{\ln\beta}^{x}dz\ e^{-2\mathrm{i}\lambda z}\,(1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,(e^{z}+e^{y})^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\,(1-e^{z-x})^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1},\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中我们假设 $x > \ln\beta$、 $y > \ln\beta$，并且为保证收敛性，$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho) < \mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) < g$。为了证明这一对称性，方便起见，我们转而使用指数变量

$$X = e^x > \beta, \qquad Y = e^y > \beta, \qquad Z = e^z. \tag{A.3}$$

于是，该函数可以改写为以下形式

$$\begin{aligned} F &= X^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)}\, Y^{-2\mathrm{i}\rho}\, (1+\beta/Y)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, (1-\beta/Y)^{-\mathrm{i}\rho+g-1} \\ &\times \int_\beta^X dZ\ Z^{-2\mathrm{i}\lambda-1}\, (1+\beta/Z)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\, (1-\beta/Z)^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\, (Z+Y)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\, (1-Z/X)^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

接下来，为了消除积分上下限对外部参数的依赖，我们进行变量代换

$$w = \frac{X-Z}{Z-\beta}. \tag{A.5}$$

由此得到以下表达式

$$\begin{aligned} F &= XY\, (X-\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\, (Y-\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\, (Y+\beta)^{-\mathrm{i}\rho-g} \\ &\times \int_0^\infty dw\ w^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}\, (X+\beta+2\beta w)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\, \big(X+Y+(Y+\beta)w\big)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

最后，只需对积分变量进行缩放

$$w = (X+\beta)s \tag{A.7}$$

即可得到公式

$$\begin{aligned} F &= XY\, (X-\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\, (Y-\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\, (X+\beta)^{-\mathrm{i}\rho-g}\, (Y+\beta)^{-\mathrm{i}\rho-g} \\ &\times \int_0^\infty ds\ s^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}\, (1+2\beta s)^{-\mathrm{i}\lambda-g}\, \big(X+Y+(X+\beta)(Y+\beta)s\big)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

显然，该公式关于 X、Y 对称。

A.2 约化翻转关系的证明

图12中所示的约化翻转关系表示以下恒等式

$$\begin{aligned} &e^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)x} \int_{\ln\beta}^x dz\ e^{-2\mathrm{i}\lambda z}\, (1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\, (1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1} \\ &\qquad \times (e^z+\beta)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\, (1-e^{z-x})^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1} = (2\beta)^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\, \frac{\Gamma(\mathrm{i}\lambda-\mathrm{i}\rho)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g-\mathrm{i}\rho)} \\ &\qquad\qquad \times e^{-2\mathrm{i}\rho x}\, (1+\beta e^{-x})^{-\mathrm{i}\rho-g}\, (1-\beta e^{-x})^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\, (e^x+\beta)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

其中我们假设 $x > \ln\beta$。还需注意，在条件 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho) < \mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda) < g$ 下，该积分绝对收敛。

为证明上述恒等式，考察函数 $F(x,\ y)$，该函数由 (A.2) 定义，当$y \to \ln\beta^{+}$时。根据其定义，我们有

$$F(x,y) \underset{y\to\ln\beta^{+}}{=} (y-\ln\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\ 2^{-\mathrm{i}\rho-g}\ \beta^{-2\mathrm{i}\rho}$$
$$\times\, e^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)x}\int_{\ln\beta}^{x} dz\ \ e^{-2\mathrm{i}\lambda z}\,(1+\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-z})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}$$
$$\times\,(e^{z}+\beta)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\,(1-e^{z-x})^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}. \quad \text{(A.10)}$$

除第一行外，此表达式与恒等式（A.9）的左侧相同。

接下来，考虑公式（A.8）的相同极限（我们将其改写为原变量）

$$F(x,y) \underset{y\to\ln\beta^{+}}{=} (y-\ln\beta)^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\ 2^{-\mathrm{i}\rho-g}\ \beta^{-2\mathrm{i}\rho}$$
$$\times\, e^{-2\mathrm{i}\rho x}\,(1+\beta e^{-x})^{-\mathrm{i}\rho-g}\,(1-\beta e^{-x})^{-\mathrm{i}\rho+g-1}\,(e^{x}+\beta)^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}$$
$$\times\int_{0}^{\infty} ds\ \ s^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}\,(1+2\beta s)^{\mathrm{i}\rho-g}. \quad \text{(A.11)}$$

重标度后剩余的积分 $s\to s/2\beta$ 变为欧拉贝塔积分

$$\int_{0}^{\infty} ds\ \ s^{\mathrm{i}(\lambda-\rho)-1}\,(1+2\beta s)^{\mathrm{i}\rho-g} = (2\beta)^{\mathrm{i}(\rho-\lambda)}\,\frac{\Gamma(\mathrm{i}\lambda-\mathrm{i}\rho)\,\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}{\Gamma(g-\mathrm{i}\rho)}, \quad \text{(A.12)}$$

这与右侧的系数（A.9）相同。将所有结果汇总后，便得到所要证明的公式。

有一点需要注意：为了得到（A.10），我们交换了极限与积分的顺序。为证明这一点，我们使用控制收敛定理。具体而言，除前述假设外，还假设 $\mathbf{Re(i}\lambda)$，$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho)\ <0$，最后可通过解析延拓去掉这一限制。由于$e^{y}\geq\beta$，因此我们可以使用不等式

$$\left|(e^{z}+e^{y})^{\mathrm{i}(\lambda+\rho)}\right| = (e^{z}+e^{y})^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda)+\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho)} \leq (e^{z}+\beta)^{\mathrm{Re}(\mathrm{i}\lambda)+\mathrm{Re}(\mathrm{i}\rho)} \quad \text{(A.13)}$$

将（A.4）中的被积函数以一个可积函数为上界，该函数与 y无关。对于第二个公式（A.8）的极限，也应采用类似的论证。

B Gauss–Givental 界

记 $\mathcal{P}_n$ 为关于 n 个变量的连续多项式有界函数空间

$$\mathcal{P}_n = \big\{\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\colon\quad |\varphi(\boldsymbol{x}_n)|\leq P(|x_1|,\dots,|x_n|),\quad P\text{ — polynomial}\big\}. \quad \text{(B.1)}$$

在本附录中，我们证明，GL和 BC Toda 系统的巴克斯特算子与升算子在该空间上保持不变。

为此，我们需要以下三个界。后两个界的证明见 [BDK]，，不过这里陈述的是稍弱一些的版本，这些版本足以满足当前情形的需要。

引理 B.1. 设 $m \in \mathbb{N}_0$, $\kappa > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$。则

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\ \exp\bigl(\kappa(x-y) - e^{x-y}\bigr) \le P(|x|), \tag{B.2}$$

其中 $P(|x|) \equiv P(|x|;\ m, \kappa)$ 是关于 $|x|$ 的多项式，且该积分关于x 在 $\mathbb{R}$的紧子集上是一致收敛的。

L引理 B.2。 *[BDK，推论 1]* 设 $m \in \mathbb{N}_0$， κ_1， $\kappa_2 \ge 0$ 和 x_1。则

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\ \exp\bigl(\kappa_1(x_1-y) + \kappa_2(y-x_2) - e^{x_1-y} - e^{y-x_2}\bigr) \le P(|x_1|, |x_2|), \tag{B.3}$$

其中 $P(|x_1|, |x_2|) \equiv P(|x_1|, |x_2|;\ m, \kappa_1, \kappa_2)$ 是关于 $|x_j|$ 的多项式，且该积分关于 x_1, x_2 在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上是一致收敛的。

引理 B.3。 *[BDK，引理 3]* 设 $m \in \mathbb{N}_0$， $g > 0$， $\kappa \ge 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$。则

$$\int_0^{\infty} dy\ y^m\ (1+e^{-y})^{-g}\ (1-e^{-y})^{g-1}\ \exp\bigl(\kappa(y+x) - e^{y+x}\bigr) \le P(|x|), \tag{B.4}$$

其中 $P(|x|) \equiv P(|x|;\ m, g, \kappa)$ 是关于 $|x|$ 的多项式，且该积分关于 x 在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上是一致收敛的。

引理 *B.1* 的证明。 将所讨论积分中的变量替换为 $z = x - y$

$$\int_{\mathbb{R}} dy\ |y|^m\ e^{\kappa(x-y)-e^{x-y}} = \int_{\mathbb{R}} dz\ |x-z|^m\ e^{\kappa z - e^z} \le \int_{\mathbb{R}} dz\ (|x|+|z|)^m\ e^{\kappa z - e^z}. \tag{B.5}$$

Then 展开括号即可得到所需的界，因为（回忆一下， $\kappa > 0$）

$$\int_{\mathbb{R}} dz\ |z|^{\ell}\ e^{\kappa z - e^z} < \infty. \tag{B.6}$$

上述界显然对紧子集中的 x是一致的。 □

B.1 *GL*系统

回顾 *GL* Toda 升算子和巴克斯特算子

$$\begin{aligned}
\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\ \exp\Biggl(\mathrm{i}\lambda\bigl(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n-1}\bigr) - \sum_{j=1}^{n-1}\bigl(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}\bigr)\Biggr)\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}),\\
\bigl[Q_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) &= \int_{\mathbb{R}^{n}} d\boldsymbol{y}_{n}\ \exp\Biggl(\mathrm{i}\lambda\bigl(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n}\bigr) - \sum_{j=1}^{n-1}\bigl(e^{x_j-y_j} + e^{y_j-x_{j+1}}\bigr) - e^{x_n-y_n}\Biggr)\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n}),
\end{aligned} \tag{B.7}$$

其中我们总是假设 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$。下面的辅助算子

$$\bigl[\Lambda'_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) = e^{-\mathrm{i}\lambda x_1}\,\bigl[\Lambda_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_n) \tag{B.8}$$

当我们转到 *BC* 系统的情形时，这也会很有用。

命题 B.1. 我们有

$$\Lambda'_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1}\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda \geq 0, \tag{B.9}$$

$$\Lambda_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1}\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{B.10}$$

$$Q_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n\ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{B.11}$$

证明。 首先，注意到第二个陈述（B.10）由定义（B.9）可得，这是由于定义（B.8）。根据定义，第一个陈述为

$$\Big|\big[\Lambda'_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\ P(|y_1|,\dots,|y_{n-1}|)\prod_{j=1}^{n-1} e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_j-x_{j+1})-e^{x_j-y_j}-e^{y_j-x_{j+1}}}. \tag{B.12}$$

将多项式按单项式 $|y_1|^{m_1}\cdots|y_{n-1}|^{m_{n-1}}$ 展开，我们得到一组项的和，每一项都分解为一维积分

$$\int_{\mathbb{R}} dy_j\ |y_j|^{m_j}\, e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_j-x_{j+1})-e^{x_j-y_j}-e^{y_j-x_{j+1}}}, \tag{B.13}$$

其中 $\operatorname{Im}\ \lambda \geq 0$。根据引理 B.2，这些积分可由多项式 $P(|x_j|,|x_{j+1}|)$ 控制，并且在 x_j,x_{j+1} 上一致收敛。这就得到了所需的多项式估计

$$\Big|\big[\Lambda'_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)\Big| \leq P(|x_1|,\dots,|x_n|), \tag{B.14}$$

而一致性保证了 $\big[\Lambda'_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)$ 关于 $\boldsymbol{x}_n$ 连续。

现在考虑第三个陈述（B.11）。根据定义

$$\Big|\big[Q_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\ P(|y_1|,\dots,|y_n|)\, e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_n-y_n)-e^{x_n-y_n}} \times\prod_{j=1}^{n-1} e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_j-y_j)-e^{x_j-y_j}-e^{y_j-x_{j+1}}}. \tag{B.15}$$

再次将多项式按单项式展开，我们得到一组项的和，每一项都分解为两种类型的积分

$$\int_{\mathbb{R}} dy_j\ |y_j|^{m_j}\, e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_j-y_j)-e^{x_j-y_j}-e^{y_j-x_{j+1}}} \qquad (j=1,\dots,n-1), \tag{B.16}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dy_n\ |y_n|^{m_n}\, e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_n-y_n)-e^{x_n-y_n}}, \tag{B.17}$$

其中 $\operatorname{Im}\lambda\ <\ 0$。它们全都具有多项式有界性，并且根据引理，在 x_j 上一致收敛 B.1、B.2。 □

作为一个附带结果，由上述命题可得以下关于 GLToda 波函数的估计

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \Lambda_n(\lambda_n)\cdots\Lambda_1(\lambda_1)\cdot 1. \tag{B.18}$$

推论 B.1. 设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。则 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{P}_n$，且相应的积分绝对收敛。

证明。 波函数属于 $\mathcal{P}_n$ 这一事实由式（B.10）显然可知。绝对收敛性由升算子核的性质得出

$$\big|\Lambda_{\lambda_k}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{k-1})\big| \le \Lambda_0(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{k-1}), \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}, \tag{B.19}$$

参见（B.7）。 □

B.2 BC系统

引入两个辅助算子

$$\big[V_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\, (1+\beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(y_1-\ln\beta)$$
$$\times \exp\!\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_n\big) - \sum_{j=1}^{n-1}(e^{y_j-x_j}+e^{x_j-y_{j+1}}) - e^{y_n-x_n}\Big)\,\varphi(\boldsymbol{y}_n), \tag{B.20}$$

$$\big[W_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \frac{(2\beta)^{\mathrm{i}\lambda}}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{y}_{n+1}\, (1+\beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{-\mathrm{i}\lambda+g-1}\,\theta(y_1-\ln\beta)$$
$$\times \exp\!\Big(\mathrm{i}\lambda\big(\underline{\boldsymbol{x}}_n - \underline{\boldsymbol{y}}_{n+1} - y_1\big) - \sum_{j=1}^{n}(e^{y_j-x_j}+e^{x_j-y_{j+1}})\Big)\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n+1}). \tag{B.21}$$

于是 BC 第 2.2 节中的 Toda 升算子和巴克斯特算子 以及第 2.3 节中的可以写成 GL Toda 算子与辅助算子的乘积

$$\begin{aligned} {}_n(\lambda) &= V_n(\lambda)\,\Lambda_n(-\lambda), \\ \mathbb{Q}_n(\lambda) &= W_n(\lambda)\,\Lambda'_{n+1}(-\lambda), \\ \mathbb{Q}'_n(\lambda) &= V_n(-\lambda)\,Q_n(\lambda). \end{aligned} \tag{B.22}$$

利用第 2 节中的图示语言，可以轻易地将这种拆分可视化。 1.

根据命题 B.1 GL Toda 算子作用于多项式有界的连续函数空间，因此只需证明辅助算子也具有相同性质。

引理 B.4. 有

$$V_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n \ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda \ge 0, \tag{B.23}$$

$$W_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n+1} \ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0). \tag{B.24}$$

在证明该引理之前，我们先指出，它与命题 B.1及公式（B.22）结合起来可得以下结论。

命题 B.2. 我们有

$${}_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_{n-1} \ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{B.25}$$

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n \ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0), \tag{B.26}$$

$$\mathbb{Q}'_n(\lambda)\colon\ \mathcal{P}_n \ \to\ \mathcal{P}_n, \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{B.27}$$

引理 *B.4* 的证明。首先，考虑算子 $V_n(\lambda)$。根据定义（B.20），我们有

$$\Big|\big[V_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)\Big| \le \frac{(2\beta)^{-\operatorname{Im}\lambda}}{|\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)|}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; P(|y_1|,\dots,|y_n|)\prod_{j=2}^{n} e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_j-x_j)-e^{x_{j-1}-y_j}-e^{y_j-x_j}}$$

$$\times\, e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda+g-1}\,\theta(y_1-\ln\beta). \quad \text{(B.28)}$$

将多项式按单项式展开 $|y_1|^{m_1}\cdots|y_n|^{m_n}$，得到一组项的和，每项都因式分解为两类积分

$$\int_{\mathbb{R}} dy_j\;|y_j|^{m_j}\,e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_j-x_j)-e^{x_{j-1}-y_j}-e^{y_j-x_j}} \qquad (j=2,\dots,n), \quad \text{(B.29)}$$

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\;|y_1|^{m_1}\,e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda+g-1}, \quad \text{(B.30)}$$

其中 $\operatorname{Im}\lambda\ge 0$。根据引理 B.2，第一行中的积分具有多项式上界，并且关于 x_{j-1}，x_j 一致收敛。在第二行的积分中，我们可以使用不等式

$$(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g} = (1+\beta e^{-y_1})^{2\operatorname{Im}\lambda}\,(1+\beta e^{-y_1})^{-\operatorname{Im}\lambda-g} \le 4^{\operatorname{Im}\lambda}\,(1+\beta e^{-y_1})^{-\operatorname{Im}\lambda-g}, \quad \text{(B.31)}$$

并将积分变量换为 $z=y_1-\ln\beta$，于是

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\;|y_1|^{m_1}\,e^{\operatorname{Im}\lambda\,(y_1-x_1)-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda+g-1}$$

$$\le 4^{\operatorname{Im}\lambda}\int_0^{\infty} dz\;(|z|+|\ln\beta|)^{m_1}\,e^{\operatorname{Im}\lambda\,(z+\ln\beta-x_1)-e^{z+\ln\beta-x_1}}\,(1+e^{-z})^{-g'}\,(1-e^{-z})^{g'-1}, \quad \text{(B.32)}$$

这里我们还记 $g'=\operatorname{Im}\lambda+g>0$。于是，引理 B.3 表明，最后一个积分具有多项式上界，并且关于 x一致收敛。因此，整个右端（B.28）被 $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\big[V_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)$ 是连续的。

现在考虑算子 $W_n(\lambda)$。根据定义（B.21），我们有

$$\Big|\big[W_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n)\Big| \le \frac{(2\beta)^{-\operatorname{Im}\lambda}}{|\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)|}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{y}_{n+1}\; P(|y_1|,\dots,|y_{n+1}|)$$

$$\times\, e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_n-y_{n+1})-e^{x_n-y_{n+1}}}\prod_{j=2}^{n} e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_{j-1}-y_j)-e^{x_{j-1}-y_j}-e^{y_j-x_j}} \quad \text{(B.33)}$$

$$\times\, e^{2\operatorname{Im}\lambda\,y_1-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda+g-1}\,\theta(y_1-\ln\beta).$$

再次将多项式写成单项式之和后，我们得到一个由三类积分因子分解而成的和

$$\int_{\mathbb{R}} dy_{n+1}\;|y_{n+1}|^{m_{n+1}}\,e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_n-y_{n+1})-e^{x_n-y_{n+1}}}, \quad \text{(B.34)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dy_j\;|y_j|^{m_j}\,e^{-\operatorname{Im}\lambda\,(x_{j-1}-y_j)-e^{x_{j-1}-y_j}-e^{y_j-x_j}} \qquad (j=2,\dots,n), \quad \text{(B.35)}$$

$$\int_{\ln\beta}^{\infty} dy_1\;|y_1|^{m_1}\,e^{2\operatorname{Im}\lambda\,y_1-e^{y_1-x_1}}\,(1+\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda-g}\,(1-\beta e^{-y_1})^{\operatorname{Im}\lambda+g-1}, \quad \text{(B.36)}$$

其中 $\operatorname{Im}\lambda < 0$。前两个积分根据引理 B.1 和 B.2 分别具有多项式上界。在最后一个积分中，我们可以使用不等式

$$e^{2\operatorname{Im}\lambda\, y_1} = \beta^{2\operatorname{Im}\lambda}\, e^{2\operatorname{Im}\lambda\,(y_1 - \ln\beta)} \le \beta^{2\operatorname{Im}\lambda} \tag{B.37}$$

将其界定为同类型积分（我们此前已经遇到过（B.30）的积分）。其余步骤与之前相同，因此我们得到整个表达式的多项式界（B.33）。

□

B.3 算子乘积的核

Toda 的提升算子和巴克斯特算子可分解为两个更简单算子的乘积（B.22）。此外，在本文中，我们还考察上述算子的各种乘积之间的局部关系，例如

$$Q_n(\lambda)\, Q_n(\rho) = Q_n(\rho)\, Q_n(\lambda), \qquad \mathbb{Q}_n(\lambda)\, \mathbb{Q}_n(\rho) = \mathbb{Q}_n(\rho)\, \mathbb{Q}_n(\lambda), \tag{B.38}$$

以及其他关系。我们来证明，所有这些乘积的核都可以表示为绝对收敛积分。

例如，考虑 BC 巴克斯特算子（B.22）

$$\mathbb{Q}_n(\lambda) = W_n(\lambda)\, \Lambda'_{n+1}(-\lambda), \tag{B.39}$$

其中 $\operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0)$. 根据命题 B.2，以下积分对 $\varphi \in \mathcal{P}_n$ 收敛

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{y}_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\, W_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n+1})\, \Lambda'_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n)\, \varphi(\boldsymbol{z}_n), \tag{B.40}$$

其中被积函数中包含算子 $W_n(\lambda)$、$\Lambda'_{n+1}(-\lambda)$ 的核。此外，由于

$$\begin{aligned} \big|W_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n+1})\big| &= \left|\frac{\Gamma(g + \operatorname{Im}\lambda)}{\Gamma(g - \mathrm{i}\lambda)}\right| W_{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n+1}), \\ \big|\Lambda'_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n)\big| &= \Lambda'_{-\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n) \end{aligned} \tag{B.41}$$

且 $|\varphi|$ 仍属于 $\mathcal{P}_n$，上述积分绝对收敛。根据富比尼–托内利定理，这意味着我们可以交换积分次序，并写成

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\, \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{z}_n)\, \varphi(\boldsymbol{z}_n), \tag{B.42}$$

其中

$$\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{z}_n) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\boldsymbol{y}_{n+1}\, W_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{n+1})\, \Lambda'_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n). \tag{B.43}$$

现在注意，核

$$\Lambda'_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n) = \prod_{j=1}^{n} \exp\big(\mathrm{i}\lambda(z_j - y_{j+1}) - e^{y_j - z_j} - e^{z_j - y_{j+1}}\big), \tag{B.44}$$

作为 $\boldsymbol{y}_{n+1}$的函数，属于 $\mathcal{P}_{n+1}$。事实上，它是连续且有界的，其上界为常数

$$\bigl|\Lambda'_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n)\bigr| \le \prod_{j=1}^{n} \exp\bigl(-\operatorname{Im}\lambda(z_j - y_{j+1}) - e^{z_j - y_{j+1}}\bigr) \le C(\lambda), \tag{B.45}$$

由于 $\operatorname{Im}\lambda < 0$。根据引理 B.4，算子 $W_n(\lambda)$ 在 $\mathcal{P}_{n+1}$ 上定义良好，因此积分 (B.43) 在 $\operatorname{Im}\lambda \in (-g, 0)$ 时收敛。此外，由于 (B.41)，该积分绝对收敛。

同样的论证也适用于本文中出现的所有其他算子乘积的核。例如，Q-算子乘积的核

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho) = W_n(\lambda)\,\Lambda'_{n+1}(-\lambda)\,W_n(\rho)\,\Lambda'_{n+1}(-\rho) \tag{B.46}$$

可由收敛积分给出，因为最后一个算子 $\Lambda'_{-\rho}(\boldsymbol{y}_{n+1}|\boldsymbol{z}_n)$的核（作为 $\boldsymbol{y}_{n+1}$ 的函数）仍属于 $\mathcal{P}_{n+1}$。

我们还来考察第 2.6 节中的算子乘积

$$\begin{aligned} &Q^t_{n-1}(\lambda)\,\Lambda^t_n(-\lambda)\,\exp(-\beta e^{-x_1}) \quad {}_n(\rho) \\ &\qquad = Q^t_{n-1}(\lambda)\,\Lambda^t_n(-\lambda)\,\exp(-\beta e^{-x_1})\,V_n(\rho)\,\Lambda_n(-\rho), \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{B.47}$$

si因为它稍微棘手一些。这里，转置算子定义如下

$$\bigl[Q^t_{n-1}(\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1}\; Q_\lambda(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{x}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n-1}), \tag{B.48}$$

$$\bigl[\Lambda^t_n(-\lambda)\,\varphi\bigr](\boldsymbol{x}_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n}} d\boldsymbol{y}_{n}\; \Lambda_{-\lambda}(\boldsymbol{y}_{n}|\boldsymbol{x}_{n-1})\,\varphi(\boldsymbol{y}_{n}). \tag{B.49}$$

上述算子乘积的核等于

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\boldsymbol{y}_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{s}_n\; Q_\lambda(\boldsymbol{y}_{n-1}|\boldsymbol{x}_{n-1})\,\Lambda_{-\lambda}(\boldsymbol{z}_n|\boldsymbol{y}_{n-1})\,\exp(-\beta e^{-z_1}) \\ &\qquad\qquad \times V_\rho(\boldsymbol{z}_n|\boldsymbol{s}_n)\,\Lambda_{-\rho}(\boldsymbol{s}_n|\boldsymbol{t}_{n-1}). \end{aligned} \tag{B.50}$$

注意，$\Lambda_{-\rho}(\boldsymbol{s}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})$作为 $\boldsymbol{s}_n$的函数，属于 $\mathcal{P}_n$。因此，要再次证明最后一个积分绝对收敛，只需表明该乘积

$$Q^t_{n-1}(\lambda)\,\Lambda^t_n(-\lambda)\,\exp(-\beta e^{-x_1})\,V_n(\rho) \tag{B.51}$$

在空间 $\mathcal{P}_n$上定义良好。

由显式公式（B.7）可得

$$\Lambda^t_n(-\lambda)\,\exp(-\beta e^{-x_1})\colon\ \varphi(\boldsymbol{x}_n)\ \mapsto\ \bigl[Q_n(\lambda)\,\varphi\bigr](\ln\beta, \boldsymbol{x}_{n-1}). \tag{B.52}$$

此外，

$$Q^t_{n-1}(\lambda) = \mathcal{I}_{n-1}\,Q_{n-1}(\lambda)\,\mathcal{I}_{n-1}, \qquad \mathcal{I}_{n-1}\colon\ \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \varphi(-x_{n-1}, \dots, -x_1). \tag{B.53}$$

因此　根据命题 B.1 和引理 B.4，乘积（B.51）在 $\mathcal{P}_n$上定义良好。

B.4 从核相等到算子相等

GL 与 BC Toda 算子之间的所有局部关系都在多项式有界连续函数空间上成立。本节将说明，要在该空间上建立算子相等，只需证明核相等即可。

例如，考虑可交换性

$$\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho) = \mathbb{Q}_n(\rho)\,\mathbb{Q}_n(\lambda), \qquad \operatorname{Im}\lambda,\, \operatorname{Im}\rho \in (-g, 0). \tag{B.54}$$

根据命题 B.2，该关系两边在 $\mathcal{P}_n$ 上都有定义；并且，正如我们在第B.3节所论证的，两个乘积的核都由绝对收敛积分给出。在第 2.4 节中，我们使用图示技术证明这些核彼此相等

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}_\rho(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\rho(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n). \tag{B.55}$$

我们来证明，由此可得，恒等式（B.54）在 $\mathcal{P}_n$上成立。

从左侧作用于 $\varphi \in \mathcal{P}_n$，我们得到

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}_\rho(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n)\,\varphi(\boldsymbol{z}_n). \tag{B.56}$$

根据定义

$$\big|\mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\big| = \left|\frac{\Gamma(g+\operatorname{Im}\lambda)}{\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda)}\right| \mathbb{Q}_{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n), \tag{B.57}$$

且显然 $|\varphi| \in \mathcal{P}_n$。因此，根据命题 B.2，积分（B.56）绝对收敛（按初始顺序）。因此，根据富比尼–托内利定理，我们可以交换积分的顺序

$$\big[\mathbb{Q}_n(\lambda)\,\mathbb{Q}_n(\rho)\,\varphi\big](\boldsymbol{x}_n) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{z}_n \left[\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}_n\; \mathbb{Q}_\lambda(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_n)\,\mathbb{Q}_\rho(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{z}_n)\right] \varphi(\boldsymbol{z}_n). \tag{B.58}$$

对（B.54）右侧也采用相同步骤。由此，利用方括号中的核等式（B.55），即可得到这个恒等式。

本文讨论的所有其他局部恒等式，依据相同的论证，在多项式有界连续函数空间上也成立。

B.5 BC Toda 波函数的界

对于 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$，按惯例记作

$$\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} = \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}. \tag{B.59}$$

另外，为简洁起见，我们引入

$$C(\boldsymbol{\lambda}_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{|\Gamma(g-\mathrm{i}\lambda_j)|}. \tag{B.60}$$

在预 篇论文中 [BDK] 我们证明了以下关于 BC Toda 波函数的界。

命题 B.3。 *[BDK，命题 1]* 设 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$ 且 $\boldsymbol{x}_n$，$\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$。则 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 在 $\boldsymbol{x}_n$ 上光滑，并满足以下界

$$\left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| \le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, P(|x_1|,\dots,|x_n|,|\lambda_n|)\, \exp\Bigg(\left[k_1(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}\right] \theta(\ln\beta - x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[(k_j + k_{j+1}) \frac{x_j - x_{j+1}}{2} - e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}} \right] \theta(x_j - x_{j+1}) \Bigg), \tag{B.61}$$

其中 P 是多项式，其系数依赖于 $\boldsymbol{k}_n$、β、g。特别地，对于 $\boldsymbol{k}_n = (0, \dots\dots, 0)$，它不依赖于 λ_n

$$\begin{aligned} \left|\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| &\le C(\boldsymbol{\lambda}_n)\, P(|x_1|,\dots,|x_n|) \\ &\quad \times \exp\Bigg(-\beta e^{-x_1}\, \theta(\ln\beta - x_1) - \sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{x_j - x_{j+1}}{2}}\, \theta(x_j - x_{j+1}) \Bigg). \end{aligned} \tag{B.62}$$

在第 2.8 节中，为了证明 BC Toda 波函数的 Gauss–Givental 表示与梅林–巴恩斯表示等价，我们使用 GLToda 波函数的反演公式。根据 Wallach [W1]（另见 [W2，第 7]节），该公式对属于惠特克–施瓦茨空间 $\mathcal{T}$的函数成立，该空间由满足以下条件的$(\boldsymbol{x}_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 组成：

$$\sup_{\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j - x_{j+1}}{2} \right) (1 + |\boldsymbol{x}_n|)^d\, |\mathcal{D}\,\psi(\boldsymbol{x}_n)| < \infty, \tag{B.63}$$

对于所有 m_j，$d \in \mathbb{N}_0$ 以及常系数微分算子 $\mathcal{D}$，均成立。由上述命题可得以下结论。

推论 B.2. 设 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$。则

$$e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n - \beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) \in \mathcal{T}. \tag{B.64}$$

证明。 为简洁起见，将所讨论的函数记为

$$\psi(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n - \beta e^{-x_1}}\, \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{B.65}$$

首先，由命题 B.3 可知它是光滑的。其次，我们来计算它的导数。对于任意 $\boldsymbol{k}_n \in \mathbb{N}_0^n$，有

$$\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n} \psi(\boldsymbol{x}_n) = \sum_i c_i(\varepsilon)\, e^{\ell^{(i)}(\ln\beta - x_1) - \varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n - \beta e^{-x_1}}\, \partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{s}_n^{(i)}} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{B.66}$$

其中系数为 c_i，整数为 $\ell^{(i)} \in \mathbb{N}_0$、$\boldsymbol{s}_n^{(i)} \in \mathbb{N}_0^n$，且满足 $\ell^{(i)} \le k_1$、$s_j^{(i)} \le k_j$。由于$\ell^{(i)} \ge 0$,

$$e^{\ell^{(i)}(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}} \le e^{[\ell^{(i)}(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}]\, \theta(\ln\beta - x_1)}. \tag{B.67}$$

因此，利用命题 B.3 以及 $\ell^{(i)} \le k_1$，$s_j^{(i)} \le k_j$ 我们得到估计

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\boldsymbol{x}_n}^{\boldsymbol{k}_n}\,\psi(\boldsymbol{x}_n)\right| \le P(|x_1|,\dots,|x_n|)\,\exp\Bigg(&-\varepsilon \underline{\boldsymbol{x}}_n + 2\big[k_1(\ln\beta - x_1) - \beta e^{-x_1}\big]\,\theta(\ln\beta - x_1)\\ &+\sum_{j=1}^{n-1}\left[(k_j+k_{j+1})\,\frac{x_j - x_{j+1}}{2} - e^{\frac{x_j-x_{j+1}}{2}}\right]\theta(x_j - x_{j+1})\Bigg),\end{aligned} \tag{B.68}$$

这足以证明（B.63）。注意，函数 $(1+|\boldsymbol{x}_n|)^{\,d}$（来自B.63）可以吸收到多项式 P

$$(1+|\boldsymbol{x}_n|)^d\,P(|x_1|,\dots,|x_n|) \le (1+|\boldsymbol{x}_n|^2)^d\,P(|x_1|,\dots,|x_n|), \tag{B.69}$$

而在（B.63）的指数中，我们可以加入阶跃函数

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j\,\frac{x_j - x_{j+1}}{2}\right) \le \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j\,\frac{x_j - x_{j+1}}{2}\,\theta(x_j - x_{j+1})\right), \tag{B.70}$$

使其具有与第三行（B.68）中的指数相同的形式。因此，这两个因子不会实质性地改变右侧（B.68）中的估计。为了说明该估计对所有 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$都有界，我们作变量代换

$$y_1 = \ln\beta - x_1, \qquad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \qquad \dots \qquad y_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2}. \tag{B.71}$$

将多项式 P展开为单项式 $|y_1|^{d_1}\cdots|y_n|^{d_n}$后，我们可以将估计（B.68改写为因式分解函数之和

$$|y_1|^{d_1}\,e^{n\varepsilon\,y_1 + 2[k_1 y_1 - e^{y_1}]\,\theta(y_1)}\prod_{j=2}^{n}|y_j|^{d_j}\,e^{2(n+1-j)\varepsilon y_j + [(k_j+k_{j+1})y_j - e^{y_j}]\,\theta(y_j)}, \tag{B.72}$$

由于 $\varepsilon > 0$，这些函数对所有 $\boldsymbol{y}_n \in \mathbb{R}^n$ 都有界。 □

C 梅林–巴恩斯界与解析性

本节证明，GL 和 BC 波函数的梅林–巴恩斯表示绝对收敛，并且关于谱参数是整函数。为此，我们使用伽马函数的界。

$$|\Gamma(a+\mathrm{i}b)| \le \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{1}{6a}}\,|a+\mathrm{i}b|^{a-\frac12}\,e^{-\frac{\pi}{2}|b|}, \tag{C.1}$$

$$\frac{1}{|\Gamma(a+\mathrm{i}b)|} \le \frac{e^{a+\frac{1}{6a}}}{\sqrt{2\pi}}\,|a+\mathrm{i}b|^{-a+\frac12}\,e^{\frac{\pi}{2}|b|}, \tag{C.2}$$

其中 $a > 0$，$b \in \mathbb{R}$。这些界限源自 [PK，第 34]页。

C.1 GL系统

梅林–B arnes 表示中的 GL Toda 波函数由递归公式定义

$$\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \int\limits_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}r)^{n-1}} d\boldsymbol{\gamma}_{n-1}\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_{n-1})\, e^{\mathrm{i}(\underline{\boldsymbol{\lambda}}_n - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{n-1})x_n} \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\gamma_k)\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_{n-1}}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \tag{C.3}$$

带有单粒子波函数 $\Phi_{\lambda_1}(x_1) = e^{\mathrm{i}\lambda_1 x_1}$ 和测度

$$\hat{\mu}(\boldsymbol{\lambda}_n) = \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} \prod_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mathrm{i}\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_k)} = \frac{1}{n!\,(2\pi)^n} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{(\lambda_j-\lambda_k)\,\operatorname{sh}\pi(\lambda_j-\lambda_k)}{\pi}. \tag{C.4}$$

参数 $r \in \mathbb{R}$ 的选取使得伽马函数的极点

$$\gamma_k = \lambda_j - \mathrm{i}m, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \tag{C.5}$$

位于积分路径下方，即对于所有 $j = 1, \dots, n$, $r > \operatorname{Im}\lambda_j$。

谱变量中波函数的解析延拓通过平移积分路径实现。为了证明上述积分绝对收敛，并据此证明此类平移的合理性，我们需要以下不等式。

引理 C.1. *[BDKK, 引理 2]* 设 $(y_{m1}, \dots, y_{mm}) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $m = 1, \dots n$。那么，对于任意$\delta > 0$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\begin{aligned} 2\sum_{m=2}^{n-1} \sum_{1\le j<k\le m} |y_{mj} - y_{mk}| - \sum_{m=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m-1} |y_{mj} - y_{m-1,k}| \\ \le -\sum_{1\le j<k\le n} |y_{nj} - y_{nk}| + \delta \sum_{j=1}^{n} |y_{nj}| - \varepsilon \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} |y_{mj}|. \end{aligned} \tag{C.6}$$

命题 C.1. 设 $\operatorname{Im}\lambda_j < r$ 满足 $j = 1, \dots, n$。则积分 (C.3) 在紧子集上关于 λ_j 一致绝对收敛。特别地，对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$ 和任意 $\delta > 0$，有

$$\left|\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)\right| \le P_\delta(\boldsymbol{\lambda}_n)\, \exp\!\left(-\frac{\pi}{2}\sum_{1\le j<k\le n} |\lambda_j - \lambda_k| + \delta\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|\right), \tag{C.7}$$

其中 P_δ 是多项式。

推论 C.1. 函数 $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 可解析延拓至 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{C}^n$.

命题 *C.1* 的证明。记 $\boldsymbol{\gamma}_m = (\gamma_{m1}, \dots, \gamma_{mm})$ 并取识别关系 $\boldsymbol{\gamma}_0 \equiv 0$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_n \equiv \boldsymbol{\lambda}_n$。那么，完整形式的梅林–巴恩斯表示为

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = \left(\prod_{m=1}^{n-1} \int\limits_{(\mathbb{R}+\mathrm{i}r_m)^m} d\boldsymbol{\gamma}_m\right) e^{\,\mathrm{i}\sum\limits_{m=1}^{n}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}_m - \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{m-1})x_m} \prod_{m=2}^{n-1} \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_m) \\ \times \prod_{m=2}^{n}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{m-1} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_{mj} - \mathrm{i}\gamma_{m-1,k}), \end{aligned} \tag{C.8}$$

其中 $r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} \equiv r > \operatorname{Im} \lambda_j$。由定义（C.4）可得测度的界

$$\left|\hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_m)\right| \leq P(\boldsymbol{\gamma}_m)\, \exp\Bigg(\pi \sum_{1\leq j<k\leq m} |\operatorname{Re}\gamma_{mj} - \operatorname{Re}\gamma_{mk}|\Bigg). \tag{C.9}$$

此处及下文中，P 表示多项式。结合不等式（C.1），我们可以用函数C.8给出的被积函数（

$$\begin{aligned} P(\operatorname{Re}\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \operatorname{Re}\boldsymbol{\gamma}_{n-1}, \operatorname{Re}\boldsymbol{\lambda}_n)\, \exp\Bigg(& \sum_{m=1}^{n-1} (x_{m+1} - x_m) m r_m - x_n \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im}\lambda_j \\ & + \pi \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{1\leq j<k\leq m} |\operatorname{Re}\gamma_{mj} - \operatorname{Re}\gamma_{mk}| - \frac{\pi}{2} \sum_{m=2}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m-1} |\operatorname{Re}\gamma_{mj} - \operatorname{Re}\gamma_{m-1,k}| \Bigg) \end{aligned} \tag{C.10}$$

根据（C.6），对于任意 $\delta > 0$，此函数都有如下界：

$$\begin{aligned} P(\operatorname{Re}\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \operatorname{Re}\boldsymbol{\gamma}_{n-1}, \operatorname{Re}\boldsymbol{\lambda}_n)\, \exp\Bigg(& \sum_{m=1}^{n-1} (x_{m+1} - x_m) m r_m - x_n \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im}\lambda_j \\ & - \frac{\pi}{2} \sum_{1\leq j<k\leq n} |\operatorname{Re}\lambda_j - \operatorname{Re}\lambda_k| + \delta \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\lambda_j| - \varepsilon \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} |\operatorname{Re}\gamma_{mj}| \Bigg) \end{aligned} \tag{C.11}$$

其中 $\varepsilon > 0$。这说明该收敛关于取自紧子集的 λ_j 是一致的。此外，这一估计保证我们可以移动积分路径。因此，对于 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{R}^n$，我们可以依次令 $r_m \to 0$ 趋于无穷（逐个进行），从而得到所声称的界（C.7）。

□

C.2 BC系统

BC 波函数的第一个梅林–巴恩斯表示为

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{\beta e^{-x_1}} \int\limits_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}r)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod\limits_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\leq j<k\leq n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(g + \mathrm{i}\gamma_j)}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{C.12}$$

其中，$r > 0$ 的选取使得被积函数的极点

$$\gamma_k = \pm\lambda_k + \mathrm{i}m, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \tag{C.13}$$

位于积分路径上方，也就是说 $r > |\operatorname{Im}\lambda_j|$ 对于 $j = 1, \ldots n$。和之前一样，为了对谱参数进行解析延拓，我们移动积分路径；这由下面的命题保证。

命题 C.2。 设 $|\operatorname{Im}\lambda_j| < r$ 对于 $j = 1, \ldots, n$。那么积分 (C.12) 在 λ_j 的紧子集上绝对收敛且一致。

推论 C.2。 函数 $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n)$ 可以解析延拓到 $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathbb{C}^n$.

命题 *C.2*的证明。 首先，作积分变量替换 $\gamma_j = \rho_j - \mathrm{i}r$，使得 $\rho_j \in \mathbb{R}$，并利用关系

$$\Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{r\underline{\boldsymbol{x}}_n}\, \Phi_{\boldsymbol{\rho}_n}(\boldsymbol{x}_n). \tag{C.14}$$

然后，借助不等式 (C.1)、(C.2)、(C.7) 和 (C.9)，我们用以下函数估计 (C.12) 中被积函数的绝对值

$$f(\boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\rho}_n)\, \exp\Bigg(\frac{\pi}{2} \sum_{1\le j<k\le n} (|\rho_j - \rho_k| + |\rho_j + \rho_k|) \\ - \frac{\pi}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (|\rho_j - \operatorname{Re}\lambda_k| + |\rho_j + \operatorname{Re}\lambda_k|) + \Big(\frac{\pi}{2} + \delta\Big) \sum_{j=1}^{n} |\rho_j| \Bigg), \tag{C.15}$$

其中 f 是正则的（对于 $|\operatorname{Im}\lambda_j| < r$, $\rho_j \in \mathbb{R}^n$），且具有多项式有界性。由于

$$\sum_{1\le j<k\le n} |\rho_j \pm \rho_k| \le \sum_{1\le j\ne k\le n} |\rho_j| = (n-1) \sum_{j=1}^{n} |\rho_j|, \tag{C.16}$$

$$-\sum_{j,k=1}^{n} |\rho_j \pm \operatorname{Re}\lambda_k| \le \sum_{j,k=1}^{n} (|\operatorname{Re}\lambda_k| - |\rho_j|) = n \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{Re}\lambda_j| - n \sum_{j=1}^{n} |\rho_j|, \tag{C.17}$$

指数部分有如下界

$$\exp\Bigg(\Big(\delta - \frac{\pi}{2}\Big) \sum_{j=1}^{n} |\rho_j| \Bigg), \tag{C.18}$$

由此可得所述的收敛性。这个界还允许移动积分路径，并且显然关于取自紧集的 λ_j 一致。 □

第二个梅林–巴恩斯表示为

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}_n}(\boldsymbol{x}_n) = e^{-\beta e^{-x_1}} \int_{(\mathbb{R}-\mathrm{i}r)^n} d\boldsymbol{\gamma}_n\, \hat{\mu}(\boldsymbol{\gamma}_n)\, \frac{(2\beta)^{-\mathrm{i}\underline{\gamma}_n} \prod_{j,k=1}^{n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j \pm \mathrm{i}\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g - \mathrm{i}\gamma_j)}{\prod_{1\le j<k\le n} \Gamma(\mathrm{i}\gamma_j + \mathrm{i}\gamma_k) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(g \pm \mathrm{i}\lambda_j)}\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}_n}(\boldsymbol{x}_n), \tag{C.19}$$

其中， r 的选取使得积分路径位于被积函数极点的向上级数与向下级数之间

$$\gamma_j = \pm\lambda_k + \mathrm{i}m, \qquad \gamma_j = -\mathrm{i}g - \mathrm{i}m, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \tag{C.20}$$

即 $r > |\operatorname{Im}\lambda_j|$ 和 $r < g$。其收敛性可以用类似的方法证明，但这次我们只能将其解析延拓到条带 $|\operatorname{Im}\lambda_j| < g$。

命题 C.3。 设 $|\operatorname{Im}\lambda_j| < r < g$ 对于 $j = 1, \dots, n$。则积分 (C.19) 在 λ_j 的紧子集上一致绝对收敛。

D Gustafson 积分约化

以下恒等式证明见 [G，定理 9。3]

$$\frac{1}{(4\pi)^n\, n!}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \frac{\prod\limits_{j=1}^{2n+2}\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(z_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n}\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)} = \frac{\prod\limits_{1\le j<k\le 2n+2}\Gamma(z_j+z_k)}{\Gamma(z_1+\ldots+z_{2n+2})}, \tag{D.1}$$

其中假设 $\mathrm{Re}\ z_j > 0 \,\text{for}\ j = 1,\ldots,2n+2$。下面证明，当 $z_{2n+2}\to\infty$ 时，它约化为公式

$$\frac{1}{(4\pi)^n\, n!}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\lambda}_n\, \frac{\prod\limits_{j=1}^{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(z_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)}{\prod\limits_{1\le j<k\le n}\Gamma(\pm\mathrm{i}\lambda_j \pm \mathrm{i}\lambda_k)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(\pm 2\mathrm{i}\lambda_j)} = \prod_{1\le j<k\le 2n+1}\Gamma(z_j+z_k). \tag{D.2}$$

利用不等式 (C.1) 和伽马函数的反射公式，可以轻松证明这两个积分都绝对收敛。

为求极限，我们使用渐近公式 [DLMF，(5.11.12)]

$$\frac{\Gamma(a+L)}{\Gamma(b+L)} \sim L^{a-b}, \qquad L\to\infty. \tag{D.3}$$

具体而言，记作 $z_{2n+2} = L$，并将恒等式 (D.1) 两边除以 $\Gamma^{2n}(L)$。那么右边趋于所需的表达式

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\prod\limits_{1\le j<k\le 2n+1}\Gamma(z_j+z_k)\prod\limits_{j=1}^{2n+1}\Gamma(z_j+L)}{\Gamma(z_1+\ldots+z_{2n+1}+L)\,\Gamma^{2n}(L)} = \prod_{1\le j<k\le 2n+1}\Gamma(z_j+z_k). \tag{D.4}$$

左边的被积函数也逐点趋于约化公式 (D.2) 中的被积函数，因为

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(L\pm\mathrm{i}\lambda_k)}{\Gamma^{2n}(L)} = 1. \tag{D.5}$$

此外，由于 $|\Gamma(z)| \le |\Gamma(\mathrm{Re}\, z)|$，我们有不等式

$$\left|\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(L\pm\mathrm{i}\lambda_k)}{\Gamma^{2n}(L)}\right| \le 1. \tag{D.6}$$

因此，我们可以使用控制收敛定理来交换极限 $L\to\infty$ 与积分，从而完成对（D.2）的证明。

参考文献

[ADV1] P. Antonenko, S. Derkachov, P. Valinevich，A 型开放 $SL(2,\mathbb{C})$自旋链，SIGMA 21（2025） 107, [2507.09568].[ADV2] P. Antonenko, S. Derkachov, P. Valinevich，BC 型开放 $SL(2,\mathbb{C})$自旋链，Annales Henri Poincar´e（2026）， [2508.04972].[B] O. Babelon，惠特克函数的对偶变量方程，Letters in Mathematical Physics 65（2003）229–240, [math-ph/0307037].[BC] A. Borodin, I. Corwin，麦克唐纳过程，《概率论及相关领域》158（2014）225–400, [1111.4408].[BCDK]N. Belousov, L. Cherepanov, S. Derkachov, S. Khoroshkin，Calogero–Sutherland 双曲系统与 Heckman-Opdam 超几何函数，arXiv 预印本[2508.18864].[BDK] N. Belousov, S. Derkachov, S. Khoroshkin，Toda 链 I：反射算子与本征函数，即将出版。[BDKK] N. Belousov, S. Derkachov, S. Kharchev, S. Khoroshkin, Ruijsenaars 双曲系统中的巴克斯特算子 II：双谱波函数，Annales Henri Poincar´e 25（2024年）3259–3296, [2303.06382].[BK]N. Belousov, S. Khoroshkin，Ruijsenaars 谱变换，Letters in Mathematical Physics 115（2025）， [2411.19659].[BKP] O. Babelon, K. K. Kozlowski, V. Pasquier，q-Toda 链和 Toda 链的巴克斯特算子与 Baxter 方程，Reviews in Mathematical Physics 30:6（2018）， [1803.06196].[DE1] J. F. van Diejen, E. Emsiz, Heckman-Opdam 超几何函数及其合流惠特克极限的差分方程，《数学进展》285（2015）1225–1240，[1411.0463].[DE2] J. F. van Diejen, E. Emsiz，带边界扰动的量子 Toda 链的双谱对偶差分方程，International Mathematics Research Notices 2019:12（2019）3740–3767, [1903.01827].[DKM1] S. ´E. Derkachov, K. K. Kozlowski, A. N. Manashov，模 XXZ 磁体和格点 sinh-Gordon 模型的变量分离，Annales Henri Poincar´e 20（2019）2623–2670, [1806.04487].[DKM2] S. ´E. Derkachov, K. K. Kozlowski, A. N. Manashov， $SL(2,\mathbb{R})$自旋链 SoV 表示的完备性，SIGMA 17（2021） 063, [2102.13570].[DM]S. ´E. Derkachov, A. N. Manashov，自旋链与 Gustafson 积分，《物理学杂志 A：数学与理论》50（2017），[1611.09593].[DLMF] 美国国家标准与技术研究院数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/，2025-03-15 发布的 1.2.4 版。F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。

[F] L. D. Faddeev，场论中的量子完全可积模型，Mathematical Physics Reviews 1 (1980) 107–155，转载于《数学物理 40 年》，World Scientific (1995)。[GaKL] A. Galiullin、S. Khoroshkin、M. Lyachko，Zhelobenko–Stern 公式与 Toda波函数，Letters in Mathematical Physics 114 (2024)， [2402。16120]G] M. Gaudin，La fonction d'onde de Bethe (Masson, 巴黎, 1983)；英文译本：The Bethe Wavefunction，译者 Jean-S´ebastien Caux (剑桥大学出版社, 剑桥, 2014)。[GKL] A. Gerasimov、S. Kharchev、D. Lebedev，表示论与量子逆散射方法：开 Toda 链与双曲 Sutherland 模型，International Mathematics Research Notices 2004:17 (2004) 823–854, [数学/0204206]。[GLO1] A. Gerasimov、D. Lebedev、S. Oblezin，巴克斯特算子与阿基米德 Hecke 代数，Communications in Mathematical Physics 284 (2008) 867–896, [0706。3476]。[GLO2]A. A. Gerasimov、D. R. Lebedev、S. V. Oblezin，经典李群上惠特克函数的新积分表示，Russian Mathematical Surveys 67:1 (2012)，[0705。2886]。[G] R. A. Gustafson，紧李群与李代数上的若干 q-β 积分和 Mellin-Barnes 积分，Transactions of the American Mathematical Society 341:1 (1994) 69–119。[HC] Harish-Chandra，半单李群上的球函数，I，American Journal of Mathematics 80:2 (1958) 241–310。[HR] M. Halln¨as、S. Ruijsenaars，双曲型相对论 Calogero–Moser 哈密顿量的联合特征函数。III. 因子化渐近行为，International Mathematics Research Notices 2021:6 (2021) 4679–4708, [1905。12918]。[I] V. I. Inozemtsev，有限 Toda 晶格，Communications in Mathematical Physics 121 (1989) 629–638。[IS] N. Z. Iorgov、V. N. Shadura，具有边界相互作用的 Toda 链波函数，Theoretical and mathematical physics 142 (2005) 289–305, [nlin/0411002]。[K] K. K. Kozlowski，Toda 链分离变量变换的幺正性，Communications in Mathematical Physics 334 (2015) 223–273, [1306。4967]。[KL1] S. Kharchev、D. Lebedev，从 QISM 形式体系得到量子开 Toda 链与周期 Toda 链本征函数的积分表示，Journal of Physics A: Mathematical and General 34 (2001)， [hep-th/0007040]。[KL2] S. Kharchev、D. Lebedev， $GL(N,\mathbb{R})$ Toda 链的本征函数：Mellin-Barnes 表示，Journal of Experi mental and Theoretical Physics Letters 71 (2000) 235–238，[hep-th/0004065]。[O] E. M. Opdam，根系与超几何函数。IV，Compositio Mathematica 67 (1988) 191–209。

[PK] R. B. Paris、D. Kaminski，《渐近分析与梅林-巴恩斯积分》，剑桥大学出版社 (2001)。[Sil] A. V. Silantyev，Toda 链的转移函数，Theoretical and Mathematical Physics 150 (2007) 315–331, [nlin/0603017]。[Skl1] E. K. Sklyanin，量子 Toda 链，载于：《经典与量子场论中的非线性方程》。物理学讲义 226 (1985) 196–233。[Skl2] E. K. Sklyanin，可积量子系统的边界条件，《物理学杂志 A》21 (1988) 2375–2389。[Skl3] E. K. Sklyanin，巴克隆变换与 Baxter 的 Q 算子，载于：可积系统：从经典到量子，CRM 会议录与讲义 **26**, [nlin/0009009]。[STS] M. A. Semenov-Tian-Shansky，开托达格的量子化，载于：动力系统 VII，数学科学百科全书 16 (1994) 226–259。[W1] N. R. Wallach，惠特克-普朗歇尔定理，《日本数学杂志》19 (2024) 1-65, [1705。06787]。[W2] N. R. Wallach，球面惠特克反演定理与量子非周期托达格，arXiv 预印本 [2303。11256]。