arXiv:2603.16388v1 [math.CV] 17 Mar 2026

# 某些解析映射与调和映射类的前施瓦茨范数与施瓦茨范数估计

VASUDEVARAO ALLU、RAJU BISWAS 和 RAJIB MANDAL

Abstract. 设 $\mathcal{A}$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$中所有解析函数 $f$ 构成的类：$=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ 满足 $f(0)=f'(0)-1=0$。本文引入一个新的子类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$，它是 $\mathcal{A}$ 的子类，由满足以下关系的函数 $f$ 构成：

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)<\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\theta,\ z\in\mathbb{D},\ \gamma>0,\ \text{and}\ |\theta|<\frac{\pi}{2},$$

并研究属于类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 的函数 $f$ 的施瓦茨导数与施瓦茨范数。我们为类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 中的函数 $f$ 建立施瓦茨范数的最佳估计$\|S_f\|$，并利用前施瓦茨范数与施瓦茨范数估计推导单叶性判据。我们还引入相应的调和类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$，该类由满足 $h\in\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 且伸缩函数 $\omega=g'/h'\in$Aut($\mathbb{D}$) 的映射 $f=h+g$ 构成。对于这一调和类，我们推导前施瓦茨范数与施瓦茨范数的界，并在特殊情形下得到最佳结果。

## 1. Introduction

若解析函数 $f(z)$ 定义在区域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上，且对每个 $z_0\in\Omega$，都存在 $N(z_0)$ 的一个邻域 $z_0$，使得 $f(z)$ 在$N(z_0)$ 中单叶，则称其为局部单叶。复值函数 $f=u+iv$的雅可比行列式定义为 $J_f(z)=|f_z|^2-|f_z|^2$。众所周知，雅可比行列式不为零是解析映射局部单叶的充要条件（见 [13,第 1]章）。令 $\mathcal{S}$ 表示在 $\mathbb{D}$ 中满足规范化条件$f(0)=f'(0)-1=0$的所有解析单叶函数 $f$ 组成的类。因此，$\mathcal{S}$中的每个函数 $f$都有如下泰勒级数展开：

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n. \tag{1.1}$$

令 $\mathcal{B}$ 表示所有满足 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 且 $\mathcal{B}_0=\{\omega\in\mathcal{B}:\ \omega(0)=0\}$ 的解析函数 $\omega$ 组成的类。$\mathcal{B}_0$ 中的函数称为施瓦茨函数。根据施瓦茨引理，若$\omega\in\mathcal{B}_0$，则 $|\omega(z)|\le|z|$ 且 $|\omega'(0)|\le1$。除非 $\omega(z)=e^{i\theta}z,\ \theta\in\mathbb{R}$，否则这两个估计中的不等号均为严格不等号。对于 $\omega\in\mathcal{B}$，Schwarz-Pick 引理给出估计$|\omega'(z)|\le(1-|\omega(z)|^2)/(1-|z|^2)$，其中 $z\in\mathbb{D}$。1931年，Dieudonné ´e [12] 首次求得函数类 $\mathcal{B}_0$中函数在固定 $z_0\in\mathbb{D}$ 时 $\omega'(z_0)$ 的精确变值区域。

**引理 1.1**。 *[12] [13, Dieudonn ´e 引理，P. 198]* 设 $\omega\in\mathcal{B}_0$ 和 $z_0\neq0$ 是 $\mathbb{D}$中的固定点。$\omega'(z_0)$ 的变值区域为

$$\left|\omega'(z_0)-\frac{\omega(z_0)}{z_0}\right|\le\frac{|z_0|^2-|\omega(z_0)|^2}{|z_0|(1-|z_0|^2)}.$$

当且仅当 $\omega$ 是一个固定2 的二阶布拉施克乘积时，等号成立0。

2020年数学主题分类：30C45，30C55。关键词和短语：单叶函数、调和函数、前施瓦茨范数、施瓦茨范数。

**引理 1.2**。 *[11]* 假设 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 中解析，且满足 $|f(z)| \leq 1$，则有

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1-|f(z)|^2}{(1-|z|)^{n-1}(1-|z|^2)} \quad and \quad |a_n| \leq 1-|a_0|^2 \quad for \quad n \geq 1,\ |z|<1.$$

Dieudonn´e 引理是对施瓦茨引理以及 Schwarz-Pick 引理的改进。次数为 $n \in \mathbb{N}$ 的布拉施克乘积具有如下形式

$$f(z) = e^{i\theta}\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}, \quad z, z_j \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

微分从属方法是几何函数论中最重要且实用的工具之一。借助微分从属，几何函数论中的许多问题都能以简单而精确的方式解决。若单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数 $f$ 从属于 $\mathbb{D}$上的解析函数$g$，记作 $f \prec g$，则存在函数 $\omega \in \mathcal{B}_0$，使得对于 $z \in \mathbb{D}$，有 $f(z) = g(\omega(z))$。此外，若 $g$ 在 $\mathbb{D}$中是单叶的，则当且仅当 $f(0) = g(0)$ 且$f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ 时，$f \prec g$ 成立。关于从属类的基本细节和结果，请参阅 [13,第 6]章。利用从属的概念，Ma 和 Minda [29]引入了更一般的星形函数和凸函数子类，如下所示:

$$\mathcal{S}^*(\varphi) = \left\{f \in \mathcal{S} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)\right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{C}(\varphi) = \left\{f \in \mathcal{S} : 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)\right\},$$

其中，函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$（称为 Ma-Minda 函数）在 $\mathbb{D}$ 中解析且单叶，并满足 $\varphi(\mathbb{D})$ 具有正实部、关于实轴对称、关于 $\varphi(0) = 1$ 星形，且 $\varphi'(0) > 0$。Ma-Minda 函数 $\varphi(z)$ 的泰勒级数展开形式为 $\varphi(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\,(a_1 > 0)$。我们称 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和$\mathcal{C}(\varphi)$ 分别为与$\varphi$相关的 Ma-Minda 型星形类和 Ma-Minda 型凸类。容易证明包含关系 $\mathcal{S}^*(\varphi) \subset \mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}(\varphi) \subset \mathcal{C}$。已知，当且仅当 $zf' \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 时，$f \in \mathcal{C}(\varphi)$。

对于 $\phi$ 的不同取值，类 $\mathcal{S}^*(\phi)$ 和 $\mathcal{C}(\phi)$ 可生成若干重要子类，包括 Janowski 类以及强星形类和凸类（见 $[20,39]$）。2025年，Kumar [25] 考察了以下类

$$S_\theta(\gamma) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\theta,\ z \in \mathbb{D},\ \gamma > 0 \text{ and } |\theta| < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

显然，函数 $f(z) = z$ 属于类 $S_\theta(\gamma)$，因此类$S_\theta(\gamma)$非空。1973年，Shah [38] 针对 $\theta = 0$ 和 $\gamma = 1$引入了类 $S_\theta(\gamma)$。此外，Shah [38]已证明，$S_0(1)$ 是单方向星形函数类。本文考虑如下定义的一个新类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$:

$$\mathcal{C}_\theta(\gamma) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) < \left(1+\frac{\gamma}{2}\right)\cos\theta,\ z \in \mathbb{D},\ \gamma > 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$要求函数 $p(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$位于一个旋转了 $\theta$ 的半平面内，其中 $\gamma$ 决定其到原点的距离。两个特殊情形可立即得到:

（i）对于 $\theta = 0$，类 $\mathcal{C}_0(\gamma)$ 与经典条件 $\mathrm{Re}\,(p(z)) < 1+\gamma/2$一致，该条件由 Ozaki [33]针对 $\gamma = 1$研究，后又由 Umezawa [41],进一步探讨；其证明了此类函数为单方向凸。（ii）对于 $\theta \neq 0$，半平面 $\mathrm{Re}\,\left(e^{i\theta}p(z)\right) < (1+\gamma/2)\cos\theta$关于实轴不对称，从而使该类不属于 Ma–Minda 框架。

因此，参数 $\theta$ 和 $\gamma$ 为研究旋转不对称性和区域平移如何影响施瓦茨导数估计提供了一个可控的设定。从属意义下，类 $C_\theta(\gamma)$ 可定义如下:

$$f \in \mathcal{C}_\theta(\gamma) \Longleftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1-e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta+e^{i\theta}\right)z}{1-z} := g(z). \tag{1.2}$$

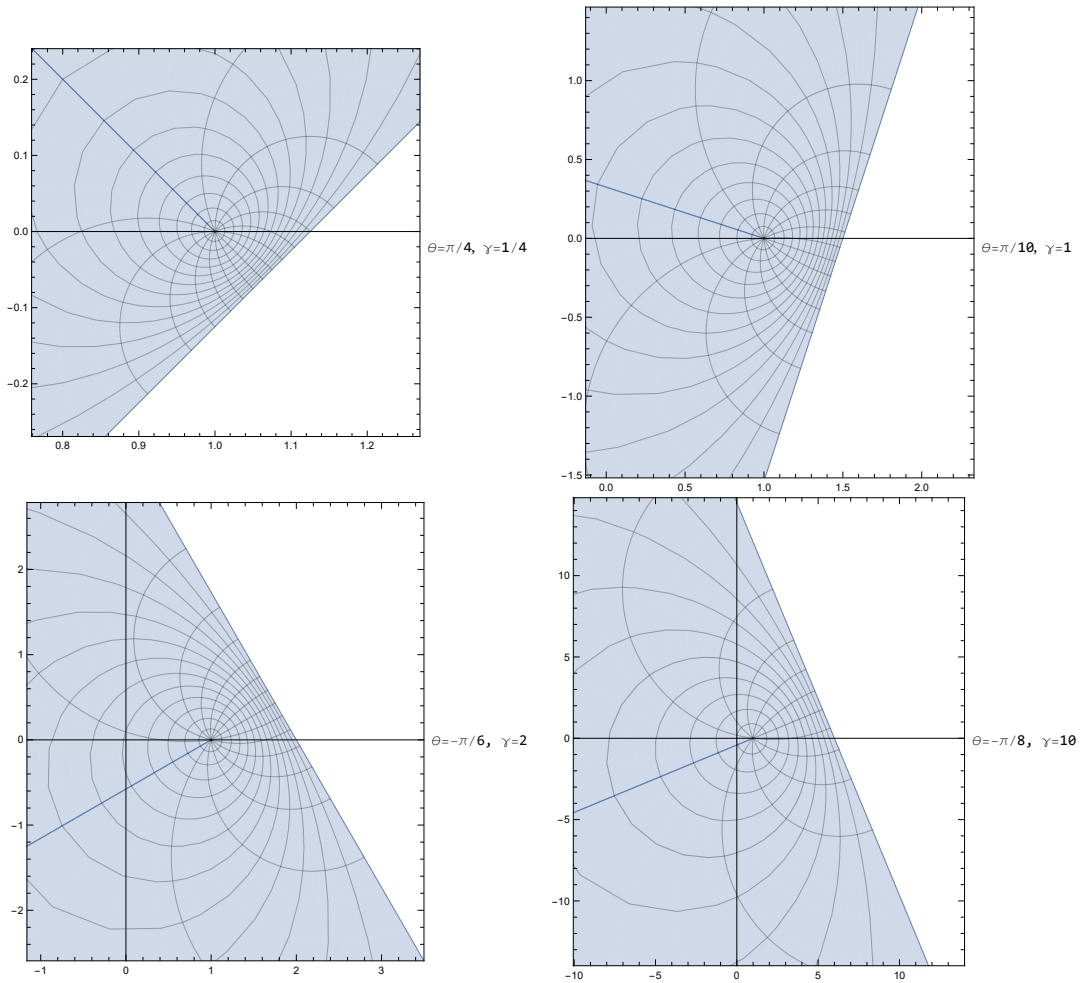


FIGURE 1. 在映射 $g(z)$ 下的 $\mathbb{D}$图像，其中 $\theta$和 $\gamma$取不同值

当 $\theta=0$时，类 $C_\theta(\gamma)$ 化为以下类别

$$\mathcal{G}(\gamma) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1+zf''(z)/f'(z)\right) < 1+\frac{\gamma}{2},\ z\in\mathbb{D},\ \gamma>0 \right\}.$$

1941年，Ozaki [33] 引入了类 $\mathcal{G} := \mathcal{G}(1)$，并证明该类 $\mathcal{G}$ 中的函数在 $\mathbb{D}$中是单叶的。此外，该类 $\mathcal{G}$ 中的函数在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中是星形的（见 [19,35]）。因此，当 $\gamma\in(0,1]$时，类 $\mathcal{G}(\gamma)$ 包含于 $\mathcal{S}^*$。容易证明，对于 $\gamma>1$， $\mathcal{G}(\gamma)$ 中的函数在 $\mathbb{D}$ 中不是单叶的。对于 $0<\gamma\le 2/3$，Uralegaddi 研究了类 $\mathcal{G}(\gamma)$等人 [42]。在图1中，我们得到不同取值的 $\theta$ 和 $\gamma$ 满足 $|\theta|<\pi/2$ 和 $\gamma>0$ 时，函数 $g(z) = \left(1-e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta+e^{i\theta}\right)z\right)/(1-z)$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射所得的像。因此，容易得出结论

对于 $\theta \neq 0$，类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 是一种与$g(z) = \left(1 - e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta + e^{i\theta}\right)z\right)/(1-z)$ 相关的非 Ma-Minda 型凸类。

设 $f = u + iv$ 是单连通域 $\Omega$ 上的复值函数。如果 $f \in C^2(\Omega)$（在 $\Omega$ 中具有连续的一阶和二阶偏导数）且满足 $\Omega$ 中的拉普拉斯方程 $\Delta f = 4f_{zz} = 0$，则称 $f$ 在 $\Omega$ 中为调和函数，其中 $f_z = (1/2)(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ 且 $f_z = (1/2)(\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y)$。注意，每个调和映射 $f$ 都有规范表示 $f = h + g$，其中 $h$ 和 $g$ 在 $\Omega$ 中解析，分别称为 $f$ 的解析部分和共解析部分。该表示在相差一个加法常数的意义下唯一（见 [14]）。反函数定理及 Lewy 的一个结果 [27] 表明，调和函数 $f$ 在 $\Omega$ 中局部单叶，当且仅当 $J_f(z) \neq 0$ 在 $\Omega$ 中。调和映射 $f$ 在 $\Omega$ 中局部单叶且保向，当且仅当 $J_f(z) > 0$ 在 $\Omega$ 中。注意，当 $J_f > 0$ 时，$|f_z| \neq 0$。令 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathbb{D}$ 中所有满足 $h(0) = h'(0) - 1 = g(0) = 0$ 的调和映射 $f = h + g$ 构成的类。因此，每个 $f \in \mathcal{H}$ 都有如下表示：

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

令 $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{H}$ 中在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内保向且单叶的子类，并进一步令 $S^0_\mathcal{H} = \{f = h + g \in \mathcal{S}_\mathcal{H} : g'(0) = 0\}$。关于平面调和单叶映射的深入研究，可参见 [14]。

本文现在引入一类新的调和映射 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$，它们在 $\mathcal{H}$ 中满足 $f = h + g$

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\left(1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right)\right) < \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\cos\theta \quad \text{for } z \in \mathbb{D},\ \gamma > 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

且 $f$ 的膨胀 $\omega = g'/h'$ 属于 Aut($\mathbb{D}$)，其中 Aut($\mathbb{D}$) 表示 $\mathbb{D}$ 的所有自同构构成的集合，即

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} : \alpha \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

**1.1. 解析函数的预施瓦茨导数和施瓦茨导数。** 对于定义在单连通域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 内的局部单叶解析函数 $f$，其预施瓦茨导数 $P_f$ 和施瓦茨导数 $S_f$ 分别定义如下：

$$P_f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad \text{and} \quad S_f(z) = P_f'(z) - \frac{1}{2}P_f^2(z) = \frac{f'''(z)}{f''(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \tag{1.3}$$

此外，$f$ 的预施瓦茨范数和施瓦茨范数分别为

$$\|P_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|P_f(z)| \quad \text{and} \quad \|S_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^2|S_f(z)|. \tag{1.4}$$

利用前 Schwarz 导数范数和施瓦茨范数，已经得到了若干关于局部单叶解析函数的重要全局单叶性判据。众所周知，对于 $f$ in $\mathbb{D}$中的单叶解析函数，$\|P_f\| \leq 6$，且等号在科比函数或其旋转函数处取得。局部单叶解析函数最常用的单叶性判据之一是贝克尔单叶性判别准则 [7], ，该准则指出：若 $f$是局部单叶解析函数，且 $\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)|zP_f(z)| \leq 1$，则 $f$在 $\mathbb{D}$中单叶。随后，Becker 和 Pommerenke [8] 证明常数 1 是最佳的。1976 年，Yamashita [43] 证明，$\|P_f\|$ 有限当且仅

当 $f$ 在 $\mathbb{D}$中一致局部单叶时。此外，若 $\|P_f\| < 2$，则 $f$ 在$\mathbb{D}$中有界（见 [22]）。

关于施瓦茨导数，众所周知，对于任意定义在 $\mathbb{D}$中的单叶解析函数 $f$，都有最佳不等式 $\|S_f\| \leq 6$，且等号在科比函数或其旋转函数的情形下成立（见 [24]）。1949年，Nehari [30] 借助施瓦茨导数与线性微分方程之间的联系，建立了全局单叶性的重要判别准则。例如，若 $f$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内局部单叶且解析，并满足 $\|S_f\| \leq 2$，则 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 内单叶。常数2是最佳的 [18]。这一结果称为 Nehari 单叶性判别准则。

在单叶函数理论领域，若干研究者考察了各种解析单叶函数子类的前施瓦茨范数。1998年，Sugawa [40] 给出了强星形函数类中阶为 $\alpha$ 的函数的前施瓦茨范数最佳估计（$0 < \alpha \leq 1$）。1999年，Yamashita [44]证明，对于 $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$，有 $\|P_f\| \leq 6 - 4\alpha$；对于 $f \in \mathcal{C}(\alpha)$，有 $\|P_f\| \leq 4(1-\alpha)$，其中$0 \leq \alpha < 1$，且这两个估计都是最佳的。2000年，Okuyama [31] 给出了 $\alpha$-螺旋星形函数的前施瓦茨范数最佳估计。Kim 和 Sugawa [23] 给出了 $f \in \mathcal{C}[A,B]$ 的前施瓦茨范数最佳估计 $\|P_f\| \leq 2\,(A-B)\,/\,(1+\sqrt{1-B^2})$（另见 [36]）。Ponnusamy 和 Sahoo [37] 得到了类$\mathcal{S}^*[\alpha,\beta] := S^*\left(\left((1+(1-2\beta)z)\,/\,(1-z)\right)^{\alpha}\right)$中函数的前施瓦茨范数最佳估计，其中 $0 < \alpha \leq 1$ 且 $0 \leq \beta < 1$。2014年，Aghalary 和 Orouji [1]得到了阶为 $\rho$的 $\alpha$-螺旋星形函数的前施瓦茨范数最佳估计，其中 $\alpha \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ 且 $\rho \in [0,1)$。文献中也研究了 $f$ 的某些子类中 $f$ 的某些积分变换的前施瓦茨范数。关于前施瓦茨范数的详细研究，请参阅 [2–6, 9, 10, 21, 34, 36] 及其中的参考文献。

**1.2.调和映射的前施瓦茨范数与施瓦茨范数**。对于单位圆盘 $\mathbb{D}$中的局部单叶调和映射 $f = h + g$，Hern´andez 和 Mart´ín [16] 分别定义前施瓦茨导数和施瓦茨导数如下：

$$P_f = (\log(J_f))_z = \frac{h''}{h'} - \frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} \quad \text{and}$$

$$S_f = (\log J_f)_{zz} - \frac{1}{2}(\log J_f)_z^2 = S_h + \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\right)^2,$$

其中，$S_h$ 是解析函数 $h$的经典施瓦茨导数，$J_f$ 是雅可比行列式，$\omega = g'/h'$ 是 $f$ 的第二复伸缩。这些导数对于理解调和函数的行为起着至关重要的作用，尤其是在共形映射及其几何性质的背景下。调和函数的前施瓦茨导数和施瓦茨导数这一概念，是对解析函数的经典前施瓦茨导数和施瓦茨导数的推广。注意，当 $f$为解析函数时，有 $\omega = 0.$。同样容易看出，$S_f = (P_f)_z - (1/2)(P_f)^2.$。与解析函数的情形一样，对于单位圆盘 $\mathbb{D}$中的保向局部单叶调和映射 $f = h + \bar{g}$，前施瓦茨范数 $\|P_f\|$ 和施瓦茨范数 $\|S_f\|$ 由（1.4）定义。关于调和映射的前施瓦茨导数和施瓦茨导数的全面研究，参见 [16, 28]。

Hern´andez 和 Mart´ın [17] 证明了一个充分条件：单位圆盘 $\mathbb{D}$中的局部单叶调和映射 $f$ 在 $\mathbb{D}$中为单叶。此外，他们

还证明，若 $f$ 是 $\mathbb{D}$ 中的保向调和映射，且 $\|S_f\| \leq \delta t$ 对某个$t < 1$ 成立，并且其膨胀 $\omega_f$ 满足 $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\omega_f(z)| < 1$，则 $f$ 可扩展为黎曼球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$上的拟共形映射。 $\delta$ 的最佳值仍是一个未解决的问题。以下定理给出了施瓦茨导数与拟共形映射之间关系的主要结果。

**定理 A.** *[26,第二章] [32,* 定理 *3.2]* 如果 $f$ 可扩张为黎曼球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上的一个 $k$-拟共形$(0 \leq k < 1)$ 映射，那么 $\|S_f\| \leq 6k$。反之，若 $\|S_f\| \leq 2k$，则 $f$ 可扩张为黎曼球面$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$上的一个 $K$-拟共形映射，其中 $K = (1 + k)/(1 - k)$。

2015年，Hern´andez 和 Mart´ın [16,定理 5] 证明了存在一个正常数 $C$，使得对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中所有的单叶调和映射 $f$， $\|S_f\| \leq C$。2016年，Graf [15, 定理 3] 证明，对于仿射与线性不变族中的局部单叶调和映射， $\|S_f\|$ 有界。然而，这些界的最佳常数仍然未知。2016年，Graf [15, 定理 3]证明，对于仿射与线性不变族中的局部单叶调和映射， $\|S_f\|$ 有界。2015年，Hern´andez 和 Mart´ın [16, 定理 5] 证明了存在一个正常数 $C$ ，使得对于单位圆盘 $\mathbb{D}$中所有的单叶调和映射 $f$ ， $\|S_f\| \leq C$ 。但关于最佳界的研究仍未解决。Hern´andez 和 Mart´ın [16] 已证明凸调和函数的前施瓦茨范数 $\|P_f\| \leq 5$ 和施瓦茨范数 $\|S_f\| \leq 6$ 。这里，界 6 不是最佳的，而界 5 是最佳的。

本文为类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 中的函数建立了施瓦茨导数和施瓦茨范数的最佳估计。利用前施瓦茨范数和施瓦茨范数，我们确定了类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 中的函数在单位圆盘 $\mathbb{D}$内成为单叶函数的条件。此外，我们还研究了类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 中函数的前施瓦茨范数和施瓦茨范数。

## 2. Main results

在以下结果中，我们为类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 中的函数 $f$ 建立了施瓦茨导数的最佳估计。

**定理 2.1.** 对于 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$，设 $f$ 属于类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$。则施瓦茨导数满足以下不等式

$$|S_f| \leq \frac{\gamma \cos\theta \sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1 - |z|)^2}.$$

此外，由函数 $f_1(z)$ 取等号，该函数定义为

$$f_1(z) = \frac{1 - (1 - z)^{\gamma e^{-i\theta}\cos\theta + 1}}{\gamma e^{-i\theta}\cos\theta + 1}.$$

证明。 设 $f \in \mathcal{C}_\theta(\gamma)$，其中 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$。根据类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 的定义以及由 (1.2)，我们有

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1 - e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta + e^{i\theta}\right)z}{1 - z}.$$

因此，存在一个施瓦茨函数 $\omega \in \mathcal{B}_0$，使得

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1-e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta+e^{i\theta}\right)\omega(z)}{1-\omega(z)},$$

$$i.e., \qquad \frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{\left(1-e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta+e^{i\theta}\right)\right)\omega(z)}{z(1-\omega(z))}.$$

为简便起见，令 $\Gamma(\gamma,\ \theta)=-e^{-i\theta}\gamma\cos\theta$。因此，函数 $f\in S_\theta(\gamma)$ 的施瓦茨导数为

$$\begin{aligned}
S_f(z) &= \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2\\
&= \Gamma(\gamma,\theta)\left(\frac{z\omega'(z)-\omega(z)}{z^2(1-\omega(z))^2}+\frac{(2-\Gamma(\gamma,\theta))\omega^2(z)}{2z^2(1-\omega(z))^2}\right)\\
&= \Gamma(\gamma,\theta)\left(\frac{\omega'(z)-\omega(z)/z}{z(1-\omega(z))^2}+\frac{(2-\Gamma(\gamma,\theta))\omega^2(z)}{2z^2(1-\omega(z))^2}\right).
\end{aligned}$$

考虑变换 $h(z)=\omega'(z)-\omega(z)/z$。由引理 1.1 可知，函数 $h(z)$ 取遍闭圆盘

$$|h(z)|\le\frac{|z|^2-|\omega(z)|^2}{|z|\left(1-|z|^2\right)} \quad \text{for fixed} \quad |z|<1. \tag{2.1}$$

利用 (2.1)，我们有

$$\begin{aligned}
|S_f(z)| &= |\Gamma(\gamma,\theta)|\left|\left(\frac{h(z)}{z(1-\omega(z))^2}+\frac{(2-\Gamma(\gamma,\theta))\omega^2(z)}{2z^2(1-\omega(z))^2}\right)\right|\\
&\le |\Gamma(\gamma,\theta)|\left(\frac{|h(z)|}{|z|(1-|\omega(z)|)^2}+\frac{|2-\Gamma(\gamma,\theta)||\omega(z)|^2}{2|z|^2(1-|\omega(z)|)^2}\right)\\
&\le |\Gamma(\gamma,\theta)|\left(\frac{|z|^2-|\omega(z)|^2}{|z|^2(1-|z|^2)(1-|\omega(z)|)^2}+\frac{|2-\Gamma(\gamma,\theta)||\omega(z)|^2}{2|z|^2(1-|\omega(z)|)^2}\right).
\end{aligned}$$

对于 $0<t:=|\omega(z)|\le|z|<1$，我们有

$$\begin{aligned}
|S_f(z)| &\le |\Gamma(\gamma,\theta)|\left(\frac{|z|^2-t^2}{|z|^2(1-|z|^2)(1-t)^2}+\frac{|2-\Gamma(\gamma,\theta)|t^2}{2|z|^2(1-t)^2}\right)\\
&= |\Gamma(\gamma,\theta)|\left(\frac{2|z|^2-2t^2+|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-|z|^2)t^2}{2|z|^2(1-|z|^2)(1-t)^2}\right).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$|S_f(z)|\le|\Gamma(\gamma,\theta)|\,F_1(|z|,t), \tag{2.2}$$

其中

$$F_1(r,t)=\frac{2r^2+\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t^2}{2r^2(1-r^2)(1-t)^2} \quad \text{for} \quad r=|z|.$$

目标是确定 $\Omega = \{(r,\ t) :\ 0 < t \le r < 1\}$ 上 $F_1(r,\ t)$ 的最大值。对 $F_1(r,\ t)$ 关于 $t$ 求偏导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_1(r,t) &= \frac{4r^2+2\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t^2}{2r^2(1-r^2)(1-t)^3}+\frac{2\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t}{2r^2(1-r^2)(1-t)^2}\\ &= \frac{4r^2+2\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t^2+2\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t(1-t)}{2r^2(1-r^2)(1-t)^3}\\ &= \frac{2r^2+\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t}{r^2(1-r^2)(1-t)^3}.\end{aligned}$$

注意，对于所有 $\gamma > 0$ 和 $|\theta| < \pi/2$，$|2-\Gamma(\gamma,\ \theta)| = \sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta} > 2$。对于$\gamma > 0$ 和 $|\theta| < \pi/2$，我们有

$$|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2 > -2r^2 \text{ and } 2r^2+\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|(1-r^2)-2\right)t > 2r^2(1-t) > 0$$

对于所有 $(r,\ t) \in \Omega$。因此，对于所有 $(r,\ t) \in \Omega$，我们有 $\frac{\partial}{\partial t}F_1(r,\ t) \ge 0$，这表明 $F_1(r,\ t)$ 是 $t \in (0,\ r]$ 上的单调递增函数。因此，$F_1(r,\ t) \le F_1(r,\ r)$，于是我们有

$$|S_f| \le \frac{|\Gamma(\gamma,\theta)|\left(|2-\Gamma(\gamma,\theta)|\right)}{2(1-r)^2} = \frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1-r)^2}.$$

为了证明该估计是尖锐的，我们考虑由 $f_1$ 给出的函数

$$f_1(z) = \frac{1-(1-z)^{\gamma e^{-i\theta}\cos\theta+1}}{\gamma e^{-i\theta}\cos\theta+1} \in \mathcal{C}_\theta(\gamma). \tag{2.3}$$

$f_1$ 的施瓦茨导数为

$$S_{f_1}(z) = \left(\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)}\right)^2 = -\frac{\left(\gamma e^{-i\theta}\cos\theta+2\right)\gamma e^{-i\theta}\cos\theta}{2(1-z)^2},$$

$$i.e., \qquad |S_{f_1}(z)| = \frac{\left|\gamma e^{-i\theta}\cos\theta+2\right|\left|\gamma e^{-i\theta}\cos\theta\right|}{2|1-z|^2}.$$

在正实轴上，我们注意到

$$|S_{f_1}(z)| = \frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1-|z|)^2}.$$

至此，证明完成。 □

**注 2.1.** 令 $f \in \mathcal{C}_\theta(\gamma)$，那么根据定理 *2.1*，我们有

$$|zP_f(z)| = \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| = \left|\frac{-e^{-i\theta}\gamma\cos\theta\ \omega(z)}{1-\omega(z)}\right| \le \frac{\gamma\cos\theta\ |\omega(z)|}{1-|\omega(z)|} \le \frac{\gamma\cos\theta\ |z|}{1-|z|}.$$

因此，我们有 $\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)|zP_f(z)| \le 2\gamma\cos\theta$。根据贝克尔单叶性判别准则，当满足条件 $2\gamma\cos\theta \le 1$ 时，对于使 $\gamma > 0$ 和 $|\theta| < \pi/2$ 成立的那些值，函数 $f \in \mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中是单叶的。当 $\theta = 0$ 时，属于类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 的函数在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，前提是 $\gamma \le 1/2$。显然，随着 $|\theta| \to \pi/2$，$\gamma$ 的取值范围增大。

在以下结果中，我们建立了类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$中函数 $f$ 的施瓦茨范数的锐估计。

**定理2.2.** 对于 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$，设 $f$ 属于类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$。那么，施瓦茨范数满足以下不等式

$$\|S_f\| \leq 2\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}$$

且该估计是最佳的。

证明。由于 $f$ 在 $|\theta|<\pi/2$ 且 $\gamma>0$时属于类 $\mathcal{C}_\theta(\gamma)$，根据定理 2.1， $f$ 的施瓦茨导数满足以下不等式

$$|S_f| \leq \frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1-|z|)^2}.$$

因此， $f$ 的施瓦茨范数为

$$\|S_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)^2|S_f(z)| \leq 2\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}.$$

为证明该估计是锐利的，我们考虑式 (2.3) 中给出的函数 $f_1$ ，于是有

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)^2|S_{f_1}(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)^2\frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}}{2|1-z|^2}.$$

在正实轴上，我们有

$$\sup_{0\leq z<1}\left(1-z^2\right)^2\frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1-z)^2} = 2\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}.$$

证明至此完成。 □

在定理2.2中令 $\theta=0$ ，即可得到函数类$G(\gamma)$的施瓦茨范数估计，该结果由Ali和Pal [4]证明。

**推论2.1**。对于 $\gamma>0$，设 $f\in G(\gamma)$ 具有形式（*1.1*）。则施瓦茨范数满足以下尖锐不等式

$$\|S_f\| \leq 2\gamma(\gamma+2).$$

令 $\delta(\gamma,\ \theta) := \gamma\cos\ \theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}$。根据定理2.2和定理 A，我们立即得到关于 $C_\theta(\gamma)$中函数的以下结果。

**推论2.2**。设 $\gamma>0$ 和 $|\theta|<\pi/2$ 满足 $\delta(\gamma,\theta)\in[0,1)$，且 $f\in\mathcal{C}_\theta(\gamma)$。则 $f$ 可扩展为一个$(1+\delta(\gamma,\theta))/(1-\delta(\gamma,\theta))$拟共形映射。

**注2.2**。根据*Nehari*单叶性判别准则，类$\mathcal{C}_\theta(\gamma)$ 中的函数 $f$ 在 $\mathbb{D}$ 上是单叶的，只要 $\delta(\gamma,\theta)\in[0,1)$，其中 $\gamma>0$ 和 $|\theta|<\pi/2$。

在表2中，我们得到了 $\gamma$ 在 ( $\theta$ ， $-\pi/2,\pi/2$) 中某些取值对应的数值，其中$\delta(\gamma,\theta)\in[0,1)$。这些数值是通过求解 $\delta(\gamma,\theta)<1$ 得到的。

TABLE 1. 对于 $\theta$ 的某些取值， $\gamma$ 的取值范围满足 $\delta(\gamma, \theta) \in [0,1)$。这些取值通过求解 $\delta(\gamma, \theta) < 1$得到。

| $\theta$ | $\gamma$的范围 |
|---|---|
| $\pm\pi/4$ | $0 < \gamma < 0.608465$ |
| $\pm\pi/5$ | $0 < \gamma < 0.524526$ |
| $\pm\pi/6$ | $0 < \gamma < 0.486367$ |
| $\pm\pi/10$ | $0 < \gamma < 0.438151$ |

TABLE 2. 对于$\theta$的某些取值， $\gamma$ 的取值范围满足 $\delta(\gamma, \theta)$ 属于 $[0,1)$

在以下结果中，我们得到了类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 中函数的前施瓦茨范数估计。

**定理 2.3**。 对于 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$，设 $f = h + g$ 属于类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$。那么前施瓦茨范数满足以下不等式

$$\|P_f\| \leq 1 + 2\gamma \cos\theta.$$

并且当 $\theta = 0$时，该估计是最佳的。

证明。 由于 $f = h + g \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$，因此 $h$ 满足以下条件

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\left(1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right)\right) < \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)\cos\theta \quad \text{for } z \in \mathbb{D},\ \gamma > 0 \text{ and } |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

根据 (1.2)，我们有

$$1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \prec \frac{1 - e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta + e^{i\theta}\right)z}{1 - z}.$$

因此，存在一个施瓦茨函数 $\omega \in \mathcal{B}_0$，使得

$$\frac{h''(z)}{h'(z)} = \frac{\Gamma(\gamma,\theta)\omega(z)}{z(1 - \omega(z))}.$$

其中 $\Gamma(\gamma,\theta) = -e^{-i\theta}\gamma\cos\theta$。对于 $0 < t := |\omega(z)| \leq |z| < 1$，我们有

$$\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq \frac{\gamma t\cos\theta}{|z|(1-t)} := G_1(|z|, t).$$

对 $G_1(|z|,t)$ 关于 $t$ 求偏导，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(|z|,t) = \frac{\gamma\cos\theta}{|z|(1-t)^2} > 0,$$

这表明 $G_1(|z|,t)$ 是区间 $t \in (0,|z|]$ 上的单调递增函数，因此我们有 $G_1(|z|,t) \leq G_1(|z|,|z|)$，即

$$\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq \frac{\gamma\cos\theta}{1 - |z|}.$$

因此，函数 $f \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 的前施瓦茨范数为

$$\|P_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)\left|\frac{h''}{h'} - \frac{\overline{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2}\right|,$$

其中 $\omega = g'/h'$ 是 $f$ 的膨胀。由于 $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，根据 Schwarz-Pick 引理和三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}\|P_f\| &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left(\left|\frac{h''}{h'}\right|+\left|\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right|\right)\\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left(\frac{\gamma\cos\theta}{1-|z|}+\frac{|\overline{\omega}|}{1-|z|^2}\right)\\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\gamma\cos\theta(1+|z|)+|\omega|\right)=1+2\gamma\cos\theta.\end{aligned}$$

为证明结果的尖锐性，我们考虑具有膨胀 $\omega(z) = (a-z)/(1-az)$ 的函数 — $f_2 = h_2 + g_2 \in \mathcal{H}$，其中 $a \in (0,1)$，并令 $h_2$ 满足

$$1+\frac{zh_2''(z)}{h_2'(z)} = \frac{1-e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta+e^{i\theta}\right)z}{1-z}.$$

显然，$f_2 \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 和 $\omega'(z) = (a^2-1)/(1-az)^2$。因此，

$$1-|\omega(z)|^2 = 1-\frac{(a-z)}{(1-az)}\frac{(a-\overline{z})}{(1-a\overline{z})} = \frac{(1-a^2)(1-|z|^2)}{(1-az)(1-a\overline{z})}$$

and $$\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} = \frac{(a^2-1)}{(1-az)^2}\cdot\frac{(a-\overline{z})}{(1-a\overline{z})}\cdot\frac{(1-az)(1-a\overline{z})}{(1-a^2)(1-|z|^2)} = \frac{\overline{z}-a}{(1-az)(1-|z|^2)}.$$

因此，$f_1$ 的前施瓦茨范数为

$$\begin{aligned}\|P_{f_2}\| &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|\frac{h''}{h'}-\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right|\\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|\frac{\Gamma(\gamma,\theta)}{1-z}-\frac{\overline{z}-a}{(1-az)(1-|z|^2)}\right|,\end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\gamma,\theta) = -e^{-i\theta}\gamma\cos\theta$。令 $\theta = 0$，则 $\Gamma(\gamma,\theta) = -\gamma$。在正实轴上，我们有

$$\sup_{0\leq r<1}(1-r^2)\left|\frac{\Gamma(\gamma,\theta)}{1-r}-\frac{r-a}{(1-ar)(1-r^2)}\right| = \sup_{0\leq r<1}\left|\gamma(1+r)+\frac{r-a}{(1-ar)}\right|.$$

令 $F_2(r) := \gamma(1+r) + (r-a)/(1-ar)$。因此，

$$F_2'(r) = \gamma+\frac{1-a^2}{(1-ar)^2} \geq 0,$$

这表明 $F_2(r)$ 是关于 $r \in [0,1)$ 的单调递增函数，因此我们有 $\|P_{f_2}\| = \sup_{0\leq r<1} F_2(r) = 2\gamma+1$。证明完毕。□

**注 2.3.** 令 $f = h+g \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$。那么，根据定理 *2.3*，我们有

$$\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq \frac{\gamma\cos\theta}{1-|z|}, \quad \textit{which shows that} \quad \|P_h\| \leq 2\gamma\cos\theta.$$

利用式 *(2.3)* 中给出的函数，我们很容易证明该估计是锐利的。因此，对于函数 $|\|P_f\| - \|P_h\|| \leq 1$ *for functions* $f = h+g \in \overline{\mathcal{HC}_\theta(\gamma)}$，当 $\theta = 0$ 时等号成立。因此，函数类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 支持 *Liu* 和 *Ponnusamy* *[28,*定理 *2.1]* 的结果。

**定理 2.4**。对于 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$，设 $f = h+g$ 属于类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$。那么施瓦茨范数满足以下不等式

$$\|S_f\| \leq 2\gamma\cos\theta\sqrt{4+(\gamma^2+4\gamma)\cos^2\theta}+2\gamma\cos\theta+11/2.$$

证明。 设 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$，根据定理 2.3，我们有

$$1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} \prec \frac{1 - e^{-i\theta}\left(\gamma\cos\theta + e^{i\theta}\right)z}{1 - z}.$$

按照定理 2.1 证明中的论证，我们得到 $h$ 的施瓦茨导数满足以下不等式

$$|S_h| \leq \frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta}}{2(1 - |z|)^2}.$$

同样，根据定理 2.3，我们有

$$\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq \frac{\gamma\cos\theta}{1 - |z|}.$$

因此， $f = h + g \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 的施瓦茨导数为

$$S_f = S_h + \frac{\overline{\omega}}{1 - |\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1 - |\omega|^2}\right)^2$$

$$i.e., \qquad |S_f(z)| \leq |S_h| + \left|\frac{\overline{\omega}}{1 - |\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right)\right| + \left|\frac{3}{2}\left(\frac{\omega'\overline{\omega}}{1 - |\omega|^2}\right)^2\right|.$$

由于 $\omega \in$Aut($\mathbb{D}$)，根据引理 1.2，我们有

$$(1 - |z|^2)^2\frac{|\omega(z)\omega''(z)|}{1 - |\omega(z)|^2} \leq 2(1 + |z|)|\omega(z)|.$$

根据 Schwarz-Pick 引理，我们有

$$\begin{aligned}
(1 - |z|^2)^2|S_f(z)| &\leq (1 - |z|^2)^2|S_h(z)| + (1 - |z|^2)\frac{\left|\overline{\omega(z)}\omega'(z)\right|}{1 - |\omega(z)|^2}\cdot(1 - |z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \\
&\quad + (1 - |z|^2)^2\frac{\left|\overline{\omega(z)}\omega''(z)\right|}{1 - |\omega(z)|^2} + \frac{3}{2}\left((1 - |z|^2)\frac{|\omega'(z)\overline{\omega(z)}|}{1 - |\omega(z)|^2}\right)^2 \\
&\leq (1 + |z|)^2\frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta}}{2} + (1 + |z|)|\omega(z)|\gamma\cos\theta \\
&\quad + 2(1 + |z|)|\omega(z)| + \frac{3}{2}|\omega(z)|^2 \\
&\leq (1 + |z|)^2\frac{\gamma\cos\theta\sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta}}{2} + (1 + |z|)|z|\gamma\cos\theta \\
&\quad + 2(1 + |z|)|z| + \frac{3}{2}|z|^2.
\end{aligned}$$

因此， $f \in \mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 的施瓦茨范数为

$$\|S_f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)^2|S_f(z)| \leq 2\gamma\cos\theta\sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta} + 2\gamma\cos\theta + 11/2.$$

至此证明完毕。 □

**注记 2.4**。 定理 *2.4* 中的界未必是尖锐的。为 $\|S_f\|$ 在 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$ 中求出尖锐界仍是一个开放问题，即使在特殊情形 $\theta = 0$ 下也是如此。

**推论 2.3**。对于 $|\theta| < \pi/2$ 和 $\gamma > 0$，设 $f = h + g$ 属于类 $\mathcal{HC}_\theta(\gamma)$，且 $g'(z)/h'(z) = z$。则施瓦茨范数满足以下不等式

$$\|S_f\| \leq 2\gamma \cos\theta \sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta} + 2\gamma \cos\theta + 3/2.$$

证明。按照定理 2.4 证明中的论证，我们得到 $f = h + g$ 的施瓦茨导数如下：

$$S_f = S_h + \frac{\overline{z}}{1 - |z|^2} \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{z}}{1 - |z|^2}\right)^2$$

$$i.e., \quad (1 - |z|^2)^2 |S_f(z)| \leq (1 - |z|^2)^2 |S_h| + |z| \cdot (1 - |z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| + \frac{3}{2}|z|^2.$$

因此，$f = h + g$ 的施瓦茨范数为

$$\|S_f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^2 |S_f(z)| \leq 2\gamma \cos\theta \sqrt{4 + (\gamma^2 + 4\gamma)\cos^2\theta} + 2\gamma \cos\theta + 3/2.$$

证明完毕。 □

## Declarations

**致谢：** 第二作者的工作得到大学拨款委员会（IN）奖学金（编号：F. 44 - 1/2018 (SA - III)）的资助。

**利益冲突：** 作者声明，就本文的发表而言不存在任何利益冲突。

**数据和材料的可用性：** 不适用。

**作者贡献：** 所有作者对该问题的研究贡献相同，且均已阅读并批准最终稿件。

## References

[1] R. Aghalary 和 Z. Orouji，《α阶螺旋形函数的前施瓦茨导数范数估计》，*ρ*(4) (2014年)，791–801。[2] V. Allu、R. Biswas 和 R. Mandal，《某些解析函数类的前施瓦茨范数估计》，https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.19132。[3] M. F. Ali 和 S. Pal，《Janowski 星形函数类的前施瓦茨范数估计》，*Monatsh. Math.* **201**(2) (2023)，311–327。[4] M. F. Ali 和 S. Pal *Mediterr.*，《某些 *J. Math.* **20** 2023 294 解析函数类的施瓦茨范数估计》，( )，。[5] M. F. Ali 和 S. Pal *Bull. Sci.*，《 *Math.* **188** 2023 103335 Robertson 类函数的施瓦茨范数估计》，，( )，。[6] M. F. Ali 和 S. Pal *Proc.*，《 *Edinb. Math. Soc.* **67** 2 2024 299 315 Janowski 凸函数的施瓦茨范数估计》，( ) ( )，–。[7] J. Becker，《L¨ownersche 微分方程与可作拟共形延拓的单叶函数》，*J. Reine Angew. Math.* **255** (1972)，23–43。[8] J. Becker 和 C. Pommerenke *J. Reine Angew.*，《单叶 *Math.* **354** 1984 74 94 性判据与 Jordan 区域》，( )，–。[9] R. Biswas，《Ma-Minda 型星形类和凸类函数的前施瓦茨范数估计》，https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.01910。[10] J. H. Choi、Y. C. Kim、S. Ponnusamy 和 T. Sugawa，《alpha 阶凸函数的 Alexander 变换范数估计》。*J. Math. Anal. Appl.* **303** (2005)，661–668。[11] S. Y. Dai 和 Y. F. Pan，《有界解析函数及具有正实部的解析函数的 Schwarz-Pick 估计注记》，*Proc. Am. Math. Soc.* **136** (2008)，635–640。[12] J. A. Dieudonné，《关于复变数多项式与有界函数若干问题的研究》，*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **48** (1931)，247–358。

[13] P. L. Duren, 《单叶函数》, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 第259卷, 施普林格出版社, 纽约、柏林、海德堡、东京, 1983年。[14] P. Duren, 《平面上的调和映射》, *Cambridge University Press*, 纽约, 2004年。[15] S. Y. Graf, 《调和映射的施瓦茨范数》, *Probl. Anal. Issues Anal.* **5(23)** (2016年), 20–32。[16] R. Hernández 和 M. J. Martín, 《调和映射的前施瓦茨导数与施瓦茨导数》, *J. Geomet. Anal.*, 25(1) (2015年), 64–91。
[17] R. Hernández 和 M. J. Martín, 《以施瓦茨导数为依据的调和映射单叶性与拟共形延拓判据》, *Arch. Math.* **104** (2015年), 53–59。[18] E. Hille, 《关于 Zeev Nehari 一篇论文的评述》, *Bull. Am. Math. Soc.* **55** (1949年), 552–553。[19] I. Jovanović 和 M. Obradović, 《关于某些单叶函数类的注记》, *Filomat* **9(1)** (1995年), 69–72。[20] W. Janowski, 《具有正实部函数族及其相关函数族的极值问题》, *Ann. Polon. Math.* **23** (1973年), 159–177。[21] Y. C. Kim、S. Ponnusamy 和 T. Sugawa, 《非线性积分算子的映射性质与前施瓦茨导数》, *J. Math. Anal. Appl.* **299** (2004年), 433–447。[22] Y. C. Kim 和 T. Sugawa, 《单位圆盘上一致局部单叶函数的增长与系数估计》, *Rocky Mountain J. Math.* **32** (2002年), 179–200。
[23] Y. C. Kim 和 T. Sugawa, 《某些单叶函数类的前施瓦茨导数范数估计》, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **49(1)** (2006年), 131–143。[24] W. Kraus, 《关于单连通区域特征与圆映射之间的联系》, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, 21 (1932年), 1–28。[25] S. Kumar, 《涉及 Hornich 运算的某些非线性积分算子的映射性质》, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **48** (2025年), 43。
[26] O. Lehto, 《单叶函数与 Teichm¨uller 空间》, 《数学研究生教材》, 第109卷, 施普林格出版社, 纽约, 1987年。[27] H. Lewy, 关于某些一一映射中雅可比行列式非零的性质, *Bull. Am. Math. Soc.* 42 1936 689 692 , () , –。[28] G. Liu 和 S. Ponnusamy, 《与前施瓦茨范数相关的一致局部单叶调和映射》, *Indag. Math.* **29(2)** (2018年), 752–778。[29] W. Ma 和 D. A. Minda, 《若干特殊单叶函数类的统一处理》, 载于: 天津复分析会议论文集。Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Int. Press, 马萨诸塞州剑桥, 第157–169页 (1992年)。[30] Z. Nehari, 《施瓦茨导数与单叶函数》, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(6) (1949年), 545–551。
[31] Y. Okuyama, 《螺旋形函数的前施瓦茨导数范数估计》, *Complex Var. Theory Appl.* **42** 2000 225 239 ( ), –。
[32] B. Osgood, 《施瓦茨导数的古今论述》, 载于: P. Duren、J. Heinonen、B. Osgood、B. Palka (编) 《拟共形映射与分析》, *Springer*, 纽约, 1998年。[33] S. Ozaki, 《多叶函数理论 II》, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku. Sect. A.* **4** 1941 45 87 ( ), –。[34] R. Parvatham、S. Ponnusamy 和 S. K. Sahoo, 《由从属关系定义的函数的 Bernardi 积分变换范数估计》。 *Hiroshima Math. J.* **38** (2008年), 19–29。
[35] S. Ponnusamy 和 S. Rajasekaran, 《星形函数与单叶函数的新充分条件》, *Soochow J. Math.* **21(2)** (1995年), 193–201。[36] S. Ponnusamy 和 S. K. Sahoo, 《某些解析函数类的卷积变换范数估计》, *J. Math. Anal. Appl.* **342** (2008年), 171–180。[37] S. Ponnusamy 和 S. K. Sahoo, 《强星形函数子类函数的前施瓦茨范数估计》, *Mathematica (Cluj)* **52(75)** (2010年), 47–53。[38] G. M. Shah, 《单方向凸的全纯函数》, *J. Indian Math. Soc.* **37** (1973年), 257–276。
[39] J. Stankiewicz, 《星形扇形函数类中的若干极值问题》, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A.* **20** (1966年), 59–75。[40] T. Sugawa, 《强星形函数的前施瓦茨导数范数》, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A* **52** 2 1988 149 157 ( ) ( ), –。[41] T. Umezawa, 《单方向凸的解析函数》, *J. Math. Soc. Japan* **4** (1952年), 194–202。[42] B. A. Uralegaddi、M. D. Ganigi 和 S. M. Sarangi, 《具有正系数的单叶函数》, *Tamkang J. Math.* **25(3)** (1994年), 225–230。

[43] S. Yamashita, 《几乎局部单叶函数》, *Monatsh. Math.* **81** (1976), 235–240。

[44] S. Yamashita,

*Hokkaido Math. J.* 星形

**28** 1 1999 217 230
或凸阶为 alpha 的函数的范数估计, ( ) ( ), –。

Vasudevarao Allu Department of Mathematics School of Basic Science Indian Insti- , , , , , tute of Technology Bhubaneswar Bhubaneswar-752050 Odisha India.
*Email address*: avrao@iitbbs.ac.in

Raju Biswas Department of Mathematics Raiganj University Raiganj West Bengal- , , , , , 733134 India.
*Email address*: rajubiswasjanu02@gmail.com

Rajib Mandal Department of Mathematics Raiganj University Raiganj West Bengal- , , , , , 733134 India.
*Email address*: rajibmathresearch@gmail.com