禁区引导的拓扑简化

Jakub Leśkiewicz、Bartosz Furmanek、Michał Lipiński、Dmitriy Morozov

2026年3月18日

arXiv:2603.16416v1 [math.AT] 17 Mar 2026

摘要

拓扑简化 是指在保留函数本质特征的同时降低其复杂度的过程。其目标是找到一个新的滤函数，以重新排列输入复形中的胞腔，从而消除部分持久同调特征，同时不影响其余特征。我们提出了一种基于禁区 和组合动力学概念的简化新方法。该方法能够重新排列并消去临界值，即使使用现有方法时，由于这些临界值在全序中并不相邻而无法将其消去，也能实现消去。每次此类消去在最坏情况下需要 $O(c \cdot n)$ 时间，其中 c 是生灭对的数量， n 是输入复形的大小。

1 引言

实值函数的简化是 Morse理论的核心主题之一。在经典（光滑）情形下，此类简化最显著的例子之一贯穿于 h-余边界定理的证明过程之中 [24, 23]。在离散情形下，Forman理论 [19, 18] 将两个临界点之间一条唯一的组合路径反向，作为减少临界点总数、进而简化 Morse复形的一种方法。

近年来，人们开始在持久同调的背景下研究简化。 [15]的作者提出了持久性敏感简化问题——即简化所有持久性低于给定阈值的配对——并针对二维流形给出了一种算法。随后，该方案被改进至线性时间 [1]。 [3]提出了另一种基于 Forman组合向量场的方法。这项工作通过指出，当唯一路径连接两个函数值之差在局部最低的临界点时，对它们进行消去不会影响持久性图的其余部分，从而与消去过程建立了联系

[0]关键词与短语。持久同调、拓扑简化、深度偏序集。*Jakub Leśkiewicz*：本研究部分由波兰国家科学中心 Opus资助项目编号2019/35/B/ST1/00874 和 Opus资助项目2025/57/B/ST1/00550资助。*Bartosz Furmanek*：本研究部分由波兰国家科学中心 Opus资助项目编号2019/35/B/ST1/00874 和 Opus资助项目 2025/57/B/ST1/00550资助。*Michał Lipiński*：本项目获得欧盟Horizon 2020研究与创新计划资助，资助依据为 Marie Skłodowska-Curie资助协议编号101034413。*Dmitriy Morozov*：本研究部分得到美国能源部科学办公室高级科学计算研究办公室的支持，合同编号为 DE-AC02- 05CH11231。

中的持久性图 [3]。这些表观对 也被称为紧邻对 [10] 和浅对 [16]。

这一观察进一步推动了（持久）同调计算 [2] 和形状重建 [4]的优化。遵循 Forman 的方法，对临界胞腔配对进行剪枝的思想已在数据可视化领域 [7, 8, 11, 17, 21, 22, 26]得到广泛研究。近期关于拓扑优化 [5, 25] 的工作为简化提供了另一种方法，尽管其可控性较差。

但仍存在一个关键缺口。能够严格控制持久同调变化的工作 [15, 1, 3] ，只能简化0维持久同调（根据对偶性，也包括余维1的情形）。与此同时，中间维度——例如3维流形上的1维同调——在实际应用中十分重要。

在这项工作中，我们研究如何利用标准懒约简算法 [12, 6]计算出的持久对之间的关系，来指导离散Morse函数 h的简化，同时控制其持久性图在任意维度上的变化以及整体梯度结构。这些关系将持久对组织成一种称为深度偏序集 [13]的层次结构。正如 [14, 25], 中所观察到的，这些关系描述了在不改变函数持久性图的情况下修改函数所面临的障碍。

具体而言，对于给定的持久对 α，我们为其死亡胞腔和出生胞腔定义禁区，以描述持久性图中在不改变持久配对的情况下 α 无法移入的部分。反之，如果禁区之间留有空隙——即存在一条从 α 通向对角线的路径——我们便可以构造一个同伦，在不改变其余持久对和梯度结构的情况下将 α 移至对角线。这使我们能够识别出范围更广的一类持久对，并可安全、有选择地将其移除，其中也可能包括持久性较高的持久对。我们在以下定理中概述主要贡献，其中 BD(h) 表示由离散Morse函数 h诱导的生灭对集合，而 Crit($\mathcal{V}_h$) 表示 h的临界胞腔集合。

定理 1。 设 h 是 *Lefschetz* 复形 X上的离散*Morse*函数。如果 $\alpha \in \mathrm{BD}(h)$ 是一个持久对，且其死亡胞腔和出生胞腔的禁区互不相交，并且这两个配对临界胞腔之间恰有一条梯度路径，那么存在 X上的离散*Morse*函数 h'，使得$\mathrm{BD}(h') = \mathrm{BD}(h) \setminus \{\alpha\}$，且对于所有 $x \in \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_{h'})$， $h(x) = h'(x)$。

我们给出该定理的一个构造性证明，并提供一种算法，明确追踪同伦过程中以及最终路径反转时关系的所有变化。因此，我们已经获得 BD(h') 中各配对之间的关系，这使得迭代简化成为可能。

2 预备知识

定义 *2*。*Lefschetz* 复形是一个三元组 $(X, \dim\ D)$，其中 X 是一个称为胞腔的有限元素集，$\dim: X \to \mathbb{N}$ 是一个为每个胞腔指定维数的映射，而 $D: X \times X \to \mathbb{Z}_2$ 是边界系数，使得 $D(x, y) \neq 0$ 蕴含 $\dim\ x + 1 = \dim\ y$；此时我们称 x 是 y 的面。此外，我们要求对任意 $x, y \in X$，都有 $\sum_{z \in X} D(x, z) \cdot D(z, y) = 0$。我们还将余边界系数定义为 $D^{\perp}(y, x) := D(x, y)$。

Lefschetz 复形推广了单纯复形、立方复形和胞腔复形，同时仍足够具体，能够定义持久同调。

当不会引起混淆时，我们会缩写记法，并将胞腔集合 X 称为 Lefschetz 复形。我们经常将 D 和 $D^\perp$ 解释为矩阵，此时会将参数置于方括号中以示强调，例如 $D[x,y]$。我们用 X_n 表示 X 中 n 维胞腔的集合，用 D_n、$D_n^\perp$ 分别表示第 n 个边界矩阵和余边界矩阵。

定义 3.（离散 *Morse* 函数）设 X 是一个 *Lefschetz* 复形。若映射 $h: X \to \mathbb{R}$ 满足以下条件（对所有 x、$y \in X$），则称其为离散Morse函数（简称 *dMf*）。

（*i*）若 $D(x,y) = 1$，则 $h(x) \le h(y)$（弱单调性），

（*ii*）若 $h(x) = h(y)$，则 $D(x,y) = 1$ 或 $D(y,x) = 1$（配对），

（*iii*）对每个 $y \in \mathbb{R}$，都有 $\#h^{-1}(y) \le 2$（近似单射）。

特别地，我们称 X 由 h 过滤。它还在 X 上诱导出一个 h-序 $\prec$：

$$x \prec_h y \iff \big(h(x) < h(y)\big) \text{ or } \big(h(x) = h(y) \text{ and } \dim x < \dim y\big).$$

若 X 由 dMf h 过滤，则默认 D_n 的行和列按 h-序排列，而 $D_n^\perp$ 的行和列则按反向的 h-序排列。

为了计算持久同调，我们使用持久性算法的原始版本 [12]，称为惰性归约算法，其所需形式见 [25]。该算法依赖于辅助函数 low：对于给定的一列，它返回该列中最低非零项所在行的索引。对于给定的（余）边界矩阵 D_n，算法1通过连续的列加法得到分解 $D_n = R_n U_n$，其中 U_n是可逆的上三角矩阵。此外，如果 $x \neq y$ 且 $U_n[x,y] \neq 0$，那么算法将列 $R_n[:x]$加到列 $R_n[:y]$ 上。注意，在 D_n 中，行由（$n-1$）维胞腔索引，列由 n维胞腔索引。R_n也同样如此；然而，U_n 的行和列都由 n维胞腔索引。类似地，对该算法应用 $D^\perp$，即可得到 $D^\perp = R^\perp U^\perp$ 分解。

算法1： 对 $\mathbb{Z}_2$上的矩阵进行惰性约化。

```
1 R_n=D_n, U_n=I2 对 y 的各列（从左到右）执行 3 当 R_n[:y] ≠ 0 且存在一个前置列 x，使得 low(R_n[:x]) = low(R_n[:y]) 时, 执行4 R_n[:y] ← R_n[:y] + R_n[:x]5 U_n[x,:] ← U_n[x,:] + U_n[y,:]
```

如果 α° 是 $R_{n+1}[:\alpha^\times]$ 中的最低非零项，我们就称 $\alpha = (\alpha^\circ, \alpha^\times)$ 为一个（n 维）生灭对。当且仅当 $\alpha^\times$ 是 $R_n^\perp[:\alpha^\circ]$ [9] 中的最低非零项时，α 才是一个（n 维）生灭对。我们分别将 α° 和 $\alpha^\times$ 称为出生和死亡胞腔。生灭对的维数就是其出生单元的维数。我们用 BD(h) 表示所有生灭对的集合，用 BD$_n$(h) 表示所有 n 维生灭对的集合。在维数 n 中，完全没有配对的胞腔——它们在 R_n 中的列为零，且 R_{n+1} 中没有任何列以它们为最低非零项——是 n维同调生成元。假设

这些生成元也属于某个生灭对是方便的，即使其第二个分量未定义。

设 $x, y \in X_n$。如果 $U_n[x, y] = 1$，我们称 x 与 y 之间存在<style id='6'>同调关系，并用 $x \overset{\times}{\to} y$表示这一事实。对偶地，如果 $U_n^{\perp}[x, y] = 1$，我们写作 $x \overset{\circ}{\to} y$，表示存在<style id='13'>上同调关系。如果关系类型并不重要，我们就简单写作 $x \to y$。如果 x 与 y 彼此无关，我们写作 $x \nrightarrow y$，并添加上标以指定缺失的关系类型，例如，如果$U[x, y] = 0$，则写作 $x \overset{\times}{\not\to} y$。注意，如果 $x \overset{\times}{\to} y$，那么 x必定是死亡单元，而 y可能是死亡单元，也可能是出生单元。同样，如果 $x \overset{\circ}{\to} y$，那么 x 必须是出生单元，而 y的类型仍未指定。

我们将这些概念扩展到生灭对：当 $\beta^{\times}$ 与 α的任一分量存在同调关系时，$\beta \overset{\times}{\to} \alpha$；其他类型的箭头也类似。由于 D_n 和 $D_n^{\perp}$的行与列分别按照 h-序和反向的 h-序排列，因此 R_n、$R_n^{\perp}$、U_n和 $U_n^{\perp}$也按照相应顺序排列。我们强调，$R_n^{\perp}$ 和 $U_n^{\perp}$并不是转置矩阵 R_n 和 U_n，而是惰性分解 $D_n^{\perp} = R_n^{\perp} U_n^{\perp}$的分量。

持久性图是一个由二维点组成的集合 $(h(\alpha^{\circ}), h(\alpha^{\times}))$，对应于 $\alpha \in \mathrm{BD}(h)$。可视化持久性图时（见图2），添加对角线很方便，即所有点 (x, x)，其中 $x \in \mathbb{R}$，并在箭头上标注关系类型。由于 dMf 通常不是单射，它可能会在持久性图的对角线上生成生灭对。我们用 $\mathrm{BD}(h)$ 表示这些对角对的集合，并用 $\mathrm{BD}(h)$ 表示对角线上方的配对。

观察 4。如果配对 $\alpha, \beta \in$ 生灭对$_n(h)$ 以及 $\beta \to \alpha$，那么 $h(\beta^{\circ}) > h(\alpha^{\circ})$ 以及 $h(\beta^{\times}) < h(\alpha^{\times})$。（见 *[25, 引理 2.1]*）

前面的观察意味着，如果我们在持久性图中用箭头表示同一维数的生灭对之间的每种关系，那么每个这样的箭头都指向左上方。

定义5。设 X 是一个 ***Lefschetz*** 复形，且 $h\colon X \to \mathbb{R}$ 是一个 ***dMf***。h 的拓扑ˆ ˆ简化是一个离散***Morse***函数 h'，满足 生灭对$(h') \subset$ 生灭对(h) 且 $h'(\alpha^{\circ}) = h(\alpha^{\circ})$ ˆ且 $h'(\alpha^{\times}) = h(\alpha^{\times})$，只要 $\alpha \in$生灭对(h')。

换言之，拓扑简化会移除一些非对角线持久对，并保留其余持久对。

定义6。***Lefschetz*** 复形X 上的组合向量场（简称向量场）是将 X 划分为 $\mathcal{V}$ 的一种划分，其中单元素集合称为临界胞腔，面–余面配对称为向量。临界集$(\mathcal{V})$表示 $\mathcal{V}$ 的所有临界胞腔构成的族；$\mathrm{Vec}(\mathcal{V})$表示所有向量构成的族。按照约定，向量的维数是其两个分量中较小者的维数。

组合向量场 $\mathcal{V}$ 诱导出有向图 $G_{\mathcal{V}} = (X, E)$。每条边 $(x, y) \in E$ 要么是显式弧（当 $(x, y) \in \mathcal{V}$ 时），要么是隐式弧（当 $D(y, x) = 1$ 且 $(x, y) \notin \mathcal{V}$时）。若路径 ρ仅由维数为 k 和 $k+1$ 的胞腔组成，则其维数为 k。特别地，任何从 y到 x的路径，其中 $x, y \in \mathrm{Crit}(\mathcal{V})$ 且 $k = \dim(x) = \dim(y) - 1$，维数均为 k，并在 k 维和 $k+1$ 维胞腔之间交替。

组合向量场 $\mathcal{V}$ 若 $G_{\mathcal{V}}$ 是无环的，则称为梯度。如果顶点 y 和 x之间存在路径，则记作 $y \overset{\mathcal{V}}{\rightsquigarrow} x$；当向量场的含义明确时，省略上标

。 $\mathcal{V}^k$ 表示所有 k维向量以及维数为 k 和 $k+1$的临界胞腔的并集。最后请注意，对于给定的离散Morse函数 h，非空原像 $\mathcal{V}_h := \{h^{-1}(a) \mid a \in \mathbb{R},\ \ h^{-1}(a) \neq \emptyset\}$ 构成一个组合梯度向量场。

Morse 复形连接了标量函数的同调视角与动力学视角。虽然进行我们所需的推理并不需要它，但它会使推理大为简化。

定义*7*（*Morse*复形）。设 $\mathcal{V}$ 是 X上的一个组合梯度向量场。$\mathcal{V}$ 的*Morse*复形是一个 *Lefschetz* 复形，记作 $\mathcal{M}(\mathcal{V})$，由 $\mathcal{V}$ 的临界胞腔集合及 *dim* 的限制组成。边界系数 $D_{\mathcal{M}}(x, y)$ 等于 $G_{\mathcal{V}}$ 中从 y 到 x 的路径数量（模 *2*），前提是 $\dim y = \dim x + 1$；否则为 *0*。

Morse 复形对我们的研究最有用的性质是，它们描述了非对角生灭对。事实上，如果 $\mathcal{V}_h$ 是某个 dMf h的梯度向量场，那么它在 $\mathcal{M}(\mathcal{V}_h)$上的限制（记作 $h_{\mathcal{M}}$）是一个单射离散Morse函数。下一个观察由 [16,定理4.3]得出。

推论 8. 设 X 由 *dMf* h过滤。那么 $\mathrm{BD}(h_{\mathcal{M}}) = \hat{}\mathrm{BD}(h)$ 以及 $U_{\mathcal{M}}, U_{\mathcal{M}}^{\perp}$ 分别是 U 和 $U^{\perp}$ 在临界单元上的限制。

ˆ由此可知，我们可以将 BD(h) 中配对的分量与 $\overline{\mathrm{Crit}}(\mathcal{V}_h)$ 的元素对应起来，而向量则是对角对，Vec($\mathcal{V}_h$) = BD(h)。这一观点使我们能够应用以下经典定理。

定理 9 ([20, 定理 9.1])**.** 设 x 是一个 k 维临界单元，y 是梯度向量场 $\mathcal{V}$的一个 $k+1$ 维临界单元。若存在一条从 y 到 x的唯一路径 ρ，则在 $\mathcal{V}$ 中将其反转会生成另一个梯度向量场，记作 $\mathcal{V}^{-\rho}$。$\mathcal{V}^{-\rho}$ 的临界单元恰好是 $\mathcal{V}$ 的临界单元，除去 x 和 y。

ˆ如果 $\alpha \in$BD(h) 中 $\alpha^{\times}$ 与 α° 之间恰好存在一条路径，我们就称它是可逆的 。然而，仅凭该定理无法保证消去一对临界单元不会 ˆ影响 BD(h) 中其余的配对。因此，识别哪些配对可以安全地移除，是一项关键挑战。

定义10. 设 X 是由 *dMf* h过滤的 *Lefschetz* 复形。若一对 $(x, y) \in X \times X$ 满足 $D(x, y) = 1$，则称其为浅对，当且仅当 $h(x)$ 是 y 的面中最大的，而 $h(y)$ 是 x的余面中最小的。

注意，每个浅对都是一个生灭对。浅对最初以表观对的名称在 [2] 中引入，也以紧邻对的名称在 [10]中引入。由于关于它们的理论后来是在深度偏序集 [14], 的框架下发展起来的，我们沿用该框架中的名称。浅对与一种称为*Lefschetz* 消去的代数运算密切相关。

定义*11.* 设 $(s, t) \in X \times X$ 是 *Lefschetz* 复形中的一对，且 s 是 t的面。ˆˆˆ对 (s, t) 进行消去会得到一个商，即另一个 *Lefschetz* 复形 $(X, \mathit{dim}\ D)$，其中 ˆˆˆˆ$X = X \setminus \{s, t\}$, *dim* 是 *dim* 在 X上的限制，且 $D(x, y) = D(x, y) + D(s, y) \cdot D(x, t)$。

ˆ 商中的边界映射可以写成矩阵形式：如果 $\dim t = n$ and D_n is the ˆˆn-th boundary matrix of X，那么 $D_n[:, y] = D_n[:, y] + D_n[s, y] \cdot D_n[:, t]$，删除第 s 行和第 t 列后即可。本文中，我们经常会基于矩阵的先前状态对其进行小幅修改。在这种情况下，修改后的任意矩阵 M 记作 M。

定理 12 ([13, 定理 3.2])**.** 设 X 由 *dMf* h过滤。固定一个浅对 α。对 X进行 α 的 *Lefschetz* 消去后，其商中的生灭对恰为 $\mathrm{BD}(h) \setminus \{\alpha\}$；并且，$h$ 中所有不同于 α 的浅对在商中仍是浅对，而商中还可能出现新的浅对

这些浅对在 X中并不存在。

换言之，对一个浅对执行 Lefschetz 消去不会改变其余胞腔之间的配对。用胞腔间关系来刻画浅对是很方便的。

观察 13。 一个 n 维生灭对 α 是浅对，当且仅当 $U_{n+1}[:\ \alpha^{\times}]$ 和 $U_n^{\perp}[:\ \alpha^{\circ}]$ 除 $U_{n+1}[\alpha^{\times},\alpha^{\times}]$ 和 $U_n^{\perp}[\alpha^{\circ},\alpha^{\circ}]$ 外均为零。等价地，对于任意生灭对 β， α 是浅对当且仅当 $\beta \nrightarrow \alpha$。

需要注意的是，Lefschetz 消去不仅保持配对不变，也保持胞腔间关系不变。

ˆ定理 14。 设 D_n 为一个边界矩阵， D_n 为在消去 ˆ ˆ$(n-1)$ 维浅对 α 后所得商的边界矩阵。设 R_nU_n 和 R_nU_n 分别为通过惰性约化得到的相应 ˆ分解。则，对所有不同于 $\alpha^{\times}$ 的 x、 y，有 $U_n[x,y] = U_n[x,y]$。此外，对称地，对所有不同于 α° 的 x、 y，有 $U_{n-1}^{\perp}[x,y] = \hat{U}_{n-1}^{\perp}[x,y]$。

证明见附录。

上述定理可改述如下。

观察 15. 设 X 由 *dMf* 过滤，且 α 是一个浅生灭对。若 $\beta \to \gamma$ 属于ˆX，则对所有$\beta \neq \alpha$，消去 α后得到的商 X 中也成立相同的关系。

根据上述观察 13，我们引入临界浅对。若不存在离对角线的生灭对 β 使得 $\beta \to \alpha$，则离对角线的生灭对 α 称为临界浅对。容易看出，临界浅对恰好是 Morse复形的浅对，尽管它们在原复形中未必是浅对。等价地，若对每个 $\beta \to \alpha$，配对 β 都是 $\mathcal{V}_h$中的一个向量，则配对 α 称为临界浅。

定理 16. 设 $\mathcal{V}$ 是 X 上的一个组合向量场，并设 s、 $t \in$ 临界集$(\mathcal{V})$ 满足维数$\,s+1 =$维数 t。假设存在一条从 t到 s的唯一路径 ρ。则 $\mathcal{M}(\mathcal{V}^{-\rho})$ 同构于 $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ 消去配对$(s$、 $t)$后所得的商。（示例见图 *1*。）

证明见附录。

因此，要找到 h 的拓扑简化，可以找到一个可逆的临界浅对 α。然后，必须反转 $\alpha^{\times}$ 与 α° 之间的唯一路径 ρ，并找到满足以下性质的 h'： $\mathcal{V}^{-\rho} = \mathcal{V}_{h'}$ 和 $h_{|\,\mathrm{Crit}(\mathcal{V}^{-\rho})} = h'_{|\,\mathrm{Crit}(\mathcal{V}^{-\rho})}$。遗憾的是，可能不存在同时满足浅和可逆条件的对。本文的目标之一就是解决这一问题。

3 滤子中的同调与上同调关系

要理解 dMf 变化过程中生灭对及其相互关系如何变化，必须研究边界矩阵中两个相邻胞腔换位时它们如何变化。这个问题已有深入研究；参见 [6] 和 [14]。注意到深度偏序集可以由生灭对之间的同调关系与上同调关系的并集构造而成

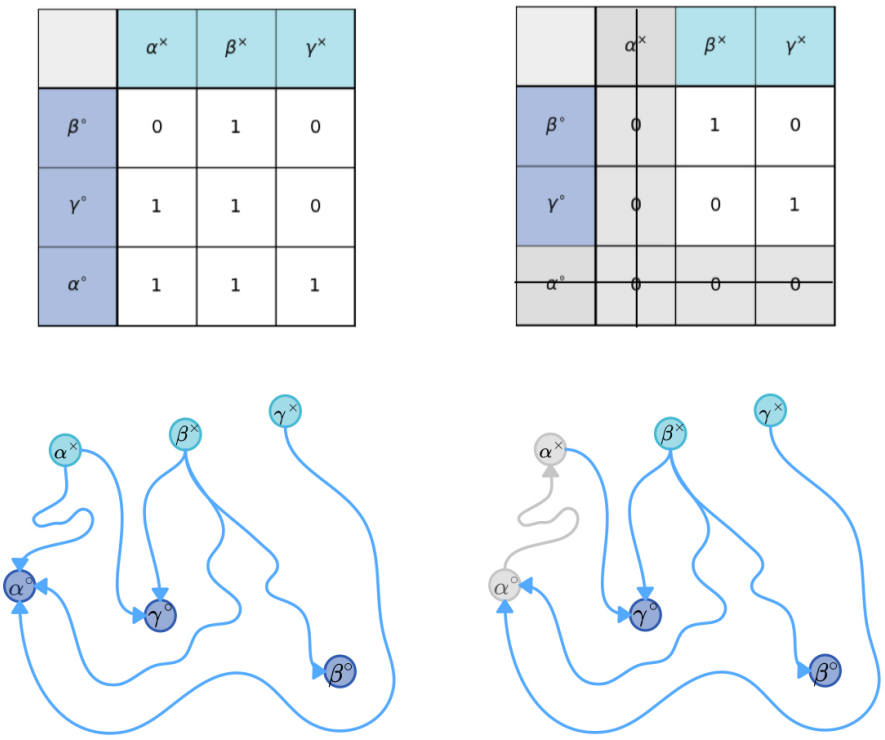

图 1： 两个向量场仅在生灭对 α 各分量之间的路径方向上不同。临界胞腔以彩色节点表示，节点之间的箭头表示由向量生成的路径。每个向量场上方是相应 Morse复形的边界矩阵。反转 α 各分量之间的路径，得到的边界矩阵与执行 Lefschetz 消去得到的相同。

（参见 [13] 中的定理 4.8），我们用本文的术语重新表述 [14] 中的结果。首先，我们引入另外两个对象。

引理 17. *[14, 引理 3。2]* 固定一个生灭对 $\alpha \in \mathrm{BD}(h)$。如果我们通过迭代消去浅对，移除 α 下方和右侧的所有生灭对——即区域 $(h(\alpha^\circ) + \infty] \times [-\infty, h(\alpha^\times)]$ 中的生灭对——那么无论消去顺序如何，得到的边界矩阵都相同。

引理 17 证明了以下定义是明确无歧义的。

定义 18. 固定 $\alpha, \beta \in$ 生灭对$_n(h)$，使得这些配对的分量在 D_{n+1} 或 $D_n^\perp$ 中是相邻的列。定义 $D^{\alpha,\beta}_{n+1}$ 为如下矩阵：对 α 的右下象限内的所有配对（若 β 最终落入该区域，则将其排除）以及 β 的右下象限内的所有配对（若 α 最终落入该区域，则将其排除），执行 *Lefschetz* 消去，并始终消去浅对。

注意，在上述定义中，我们可以消去右下象限中的所有配对，因为根据观察 4，不存在满足 $\beta \to \gamma \to \alpha$ 的 $\gamma \in \mathrm{BD}_n(h)$。消去后，我们有以下三种情况之一：**(i)** α 和 β 都是浅的；**(ii)** $\beta \to \alpha$ 和 β 是浅的；或 **(iii)** $\alpha \to \beta$ 和 α是浅的。

现在，我们可以在一系列定理中运用来自 [14] 的结果了。

定理 19 (死亡胞腔换位的结果 [14, 引理 3。4])。设 α, β 是 n 维的生灭对，且 $h(\alpha^\circ) < h(\beta^\circ)$。那么 $\alpha^\times$ 和 $\beta^\times$ 的换位不会改变

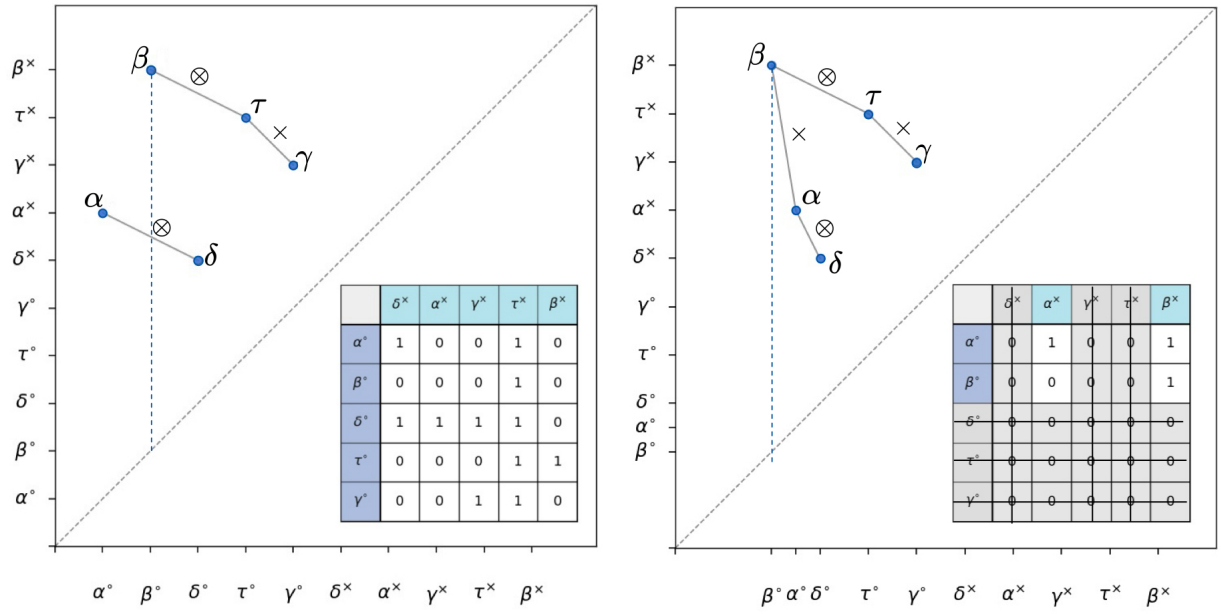

图2： 左：某个复形 X 的 $(n-1)$ 阶持久性图，其中 D_n 位于右下角。在图中，我们用 $\times$表示配对之间的同调关系，用 $\otimes$ 表示同时具有同调和上同调性质的关系。要判断将 β° 移过 α° 是否会改变胞腔间关系（由定理 20 中的公式 (1) 确定），我们需要计算 $D^{\alpha,\ \beta}_{n}$。右：将 α° 和 β°换位后，关系更新后的持久性图。右下角显示换位前的 $D^{\alpha,\ \beta}_{n}$。Lefschetz 消去所删除的胞腔以叉号标出。

U_{n+1} 中的值，而 $U_n^\perp$ 中的变化遵循以下规则：

(1) 如果 $\beta \overset{\times}{\not\to} \alpha$ 和 $\left(\beta \overset{\circ}{\to} \alpha \text{ 或 } D^{\alpha,\ \beta}_{n+1}[\alpha^\circ, \beta^\times] = 1\right)$，则配对不受影响，矩阵 $U_n^\perp$ 的第 β° 行按照以下公式变化：

$$\hat{U}_n^\perp[\beta^\circ, :] = U_n^\perp[\beta^\circ, :] + U_n^\perp[\alpha^\circ, :], \tag{1}$$

(2) 如果 $\beta \overset{\times}{\to} \alpha$，那么配对 $(\alpha^\circ, \alpha^\times)$、$(\beta^\circ, \beta^\times)$ 会变为 $(\alpha^\circ, \beta^\times)$ 和 $(\beta^\circ, \alpha^\times)$，并且 $U_n^\perp$按照 (1) 中的方式变化。

(3) 否则，$U_n^\perp$保持不变，配对也保持不变。

定理 20 (生胞腔换位的结果 [14, 引理 3。3])。设 α 和 β 是 n 维的生灭对，满足 $h(\beta^\times) < h(\alpha^\times)$。那么，$\alpha^\circ$ 和 β° 的换位不会改变 $U_n^\perp$ 中的值，而 U_{n+1} 中的变化遵循以下规则：

(1) 如果 $\beta \overset{\circ}{\not\to} \alpha$ 和 $\left(\beta \overset{\times}{\to} \alpha\text{，或者 } D^{\alpha,\ \beta}_{n+1}[\beta^\circ, \alpha^\times] = 1\right)$，那么配对不受影响，矩阵 U_{n+1} 的第 $\beta^\times$ 行按照以下公式变化：

$$\hat{U}_{n+1}[\beta^\times, :] = U_{n+1}[\beta^\times, :] + U_{n+1}[\alpha^\times, :] \tag{2}$$

(2) 如果 $\beta \overset{\circ}{\to} \alpha$，那么 U_{n+1} 会如 (2) 所示发生变化，配对 $(\alpha^\circ, \alpha^\times)$、$(\beta^\circ, \beta^\times)$ 变为 $(\beta^\circ, \alpha^\times)$ 和$(\alpha^\circ, \beta^\times)$。

(3) 否则， U_{n+1} 和配对保持不变。

定理 21 (生灭转置的结果 $[14,$ 引理 3.5$]$)。由增加出生或减少死亡所导致的出生单元与死亡单元之间的换位，不会影响生灭对之间的配对或关系。

图2展示了一个换位如何影响生灭对之间关系的示例。现在我们介绍自己的命题，它们将在后文中发挥作用。

命题 22。 固定一对 $\alpha \in$生灭对$^{(n-1)}(h)$。增加 α° 的值或减少 $\alpha^\times$ 的值且不引起切换的换位，不会为任何配对 β 产生关系 $\beta \to \alpha$ 。

请注意，在绕过一个组- 合向量时，换位可能涉及跳过两列和两行。以下命题有助于降低最终算法的复杂度。

命题 23。 设 h、h' 是两个离散 *Morse* 函数，使得 $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_{h'}$，且 h-序与 h'-序之间的差异是一个临界单元与一个向量之间的换位。则 h 和 h' 生成相同的非对角生灭对及其之间的关系。

证明。 由于此过程不会改变 $\mathcal{M}(\mathcal{V}_h)$ 的（余）边界矩阵，因此不会改变临界胞腔之间的配对或关系。 □

最后，下面两个推论使我们能够在构造下文的同伦时，仅关注特定情形。

推论 24。 取一对 $\alpha \in$生灭对$_n(h)$。若 x 是一个满足 $\alpha^\circ <_h x$ 且 $x \xrightarrow{\circ} \alpha^\circ$ 的胞腔，则 x 是一个 n 维出生单元。类似地，若 $y <_h \alpha^\times$ 且 $y \xrightarrow{\times} \alpha^\times$，则 y 是一个$(n+1)$维死亡单元。

证明。 由于 $y \xrightarrow{\times} \alpha^\times$，在矩阵 D_{n+1} 的惰性约化过程中，索引为 y 的列被加到了列 $\alpha^\times$ 上。由于惰性约化从不添加零列， R_{n+1} 中的列 y 有唯一的最低非零项，因此它是一个死亡单元。类似地，若 $x \xrightarrow{\circ} \alpha^\circ$，则在 $D_n^\perp$ 中，列 x 被加到了列 α° 上，因此 x 是一个出生单元。 □

4 构造同伦

4.1 同伦

回顾一下，两个映射 f_0 和 f_1 之间的线性同伦是一族映射 $f_t(x) := H(t,x) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$，其中 $t \in [0,1]$。

我们称 $A \subset X$ 是连通的，如果其哈斯图——即以A 的胞腔为顶点、每个边界关系对应一条边的图——是连通的。 f-诱导划分是将 X 划分为$\mathcal{A}$ 中的极大子集 A（按包含关系而言），使得 f 在 A上为常数，且每个A均连通。

定理 25。设 f_0 和 f_1 是定义在 X 上的两个离散 *Morse* 函数，满足 $\mathcal{V}_{f_0} = \mathcal{V}_{f_1}$。设 $f_t(x) := H(t, x)$是 f_0 与 f_1之间的线性同伦。令 $\mathcal{V}_{f_t}$ 表示 X的 f_t-诱导划分。那么，对每个 $t \in [0, 1]$，都有$\mathcal{V}_{f_t} = \mathcal{V}_{f_0}$ 。

证明见附录。

利用这个定理，我们可以将同伦表示为一系列有限的换位，从而只需分析有限个时间步。事实上，在同伦 $(f_t)_{t\in[0,1]}$ 中，只有有限个参数 t 会使 f_t 不再是 dMf。在任意两个这样的参数之间的每个开区间上，诱导的 f_t序都是良定义的，并且保持不变（特别是，它不依赖于 t）。因此，对于足够精细的 $[0, 1]$, 离散化，f_t相邻的序之间恰好相差一次换位。

4.2 走向对角线

考虑图 3 中的一个例子，并假设我们的目标是在不改变配对或向量场的情况下，使配对 α的寿命任意小。为了缩短寿命，我们可以增大 α° 的值并减小 $\alpha^\times$的值，同时调整一组向量。我们可以将此过程实现为一系列“移动”，使生灭对在持久性图中向右下方移动。

遗憾的是，我们的操作受到限制：如果我们想保留原始向量场，就不能将 $\alpha^\times$ 降到低于 β° 的位置，因为 $\alpha^\times \rightsquigarrow \beta^\circ$；同样， α° 也不能升到高于 $\gamma^\times$的位置。此外，正如 $\beta^\times \xrightarrow{\times} \alpha^\times$ 和 $\gamma^\times \xrightarrow{\times} \alpha^\times$所示，在不切换配对的情况下，我们也不能将 $\alpha^\times$ 降到低于这些水平。更糟的是，由于 $\xi^\circ \xrightarrow{\circ} \alpha^\circ$， α° 不能升到高于 ξ° 的位置，除非再次切换。

这似乎是一个严重的障碍。然而，当我们检查持久性图（见图 3 下半部分）时，根据观察 4，我们注意到，将 α° 升到高于β° 的位置，会在不改变配对的情况下破坏 $\alpha^\times$ 的两种同调关系。此后，我们便可以将 $\alpha^\times$ 降到尽可能接近 α° 的位置。这促使我们提出禁区这一核心概念，用以描述持久性图中允许的“操作”。

定义 26（禁区）。对于一个非对角线对 $\alpha \in \mathrm{BD}(h)$，我们称：

(1) $\alpha^\times$ 的禁区定义为

$$\mathcal{R}_h^{\ulcorner}(\alpha) := \bigcup_{\substack{\beta \xrightarrow{\times} \alpha \\ \beta \in \hat{\mathrm{BD}}_n(h)}} [-\infty, h(\beta^\circ)] \times [-\infty, h(\beta^\times)] \;\cup \bigcup_{\substack{\alpha^\times \rightsquigarrow x \\ x \in \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h)}} [-\infty, h(x)] \times [-\infty, h(x)].$$

(2) α° 的禁区定义为

$$\mathcal{R}_h^{\llcorner}(\alpha) := \bigcup_{\substack{\beta \xrightarrow{\circ} \alpha \\ \beta \in \hat{\mathrm{BD}}_n(h)}} [h(\beta^\circ), +\infty] \times [h(\beta^\times), +\infty] \;\cup \bigcup_{\substack{y \rightsquigarrow \alpha^\circ \\ y \in \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h)}} [h(y), +\infty] \times [h(y), +\infty].$$

一旦我们有了禁区的概念，就可以定义一组安全变换，称为允许的移动。

ˆ**定义27** (允许的移动)。 设 h 为一个 ***dMf***， $\alpha \in$生灭对(h) 且 $c \in \alpha$。 α 的一次预允许移动是一个新的 ***dMf*** h' ，满足:

(1) $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_{h'}$ 并且对于所有 $x \in$ 临界集$(\mathcal{V}_h) \setminus \{c\}$ ，我们有 $h(x) = h'(x)$,

(2) 如果 c 是出生单元，那么 $h'(c) > h(c)$；如果 c 是死亡单元，那么 $h'(c) < h(c)$,

(3) 将 h-序和 h'-序限制在 临界集$(\mathcal{V}_h)$ 上，二者至多相差一次换位。

如果预允许移动 h' 满足 生灭对(h) =生灭对(h')，那么我们称 h' 为一次允许移动。

预允许移动会将包含 c 的配对 α 推向对角线，方法是增加出生时间或递减死亡，同时不影响向量场。一次预允许移动至多绕过另一个临界单元。我们注意到，只要梯度结构得以保留，多个向量的值和位置都可以在 h'-序中改变。我们将使用允许的移动来构造同伦，将一个持久配对带到对角线上。

推论 28. 如果 h' 是针对 h的预允许移动，那么持久配对的变化只能由临界胞腔的换位引起。

证明. 从 h到 h' 的线性同伦可表示为一系列按h顺序进行的换位，由特定时刻 $t \in [0,1]$ 和 h_t 顺序给出。根据定理 25，这些换位不会改变向量场，因而也不会改变对角对。因此，根据命题 23，持久配对的变化只能由临界胞腔的换位引起。 □

注意，对于一个由 dMf h过滤的 X，对每个胞腔 x 和区间 $[a,b]$，只要满足 $h(x) \in [a,b]$，就能找到 $t \in [0,1]$，使得 $h(x) = at + (1-t)b$。我们称其为在$[a,b]$上的线性系数。现在我们说明，对于固定的 h，可以构造一个预允许移动，将选定的生灭对向右推移；还可以构造另一个预允许移动，将其向下推移。

命题 *29*（出生值增加——向右移动）。设 X 由 ***dMf*** h过滤。设 $\alpha \in$ ˆ***BD(h)***$_k$ 为一对非对角线对，且 δ、ξ 为实数值，满足 $h(\alpha^\circ) < \delta < \xi < h(\alpha^\times)$，并且至多存在一个 $e \in Crit(\mathcal{V}_h)$，使得 $h(e) \in (h(\alpha^\circ)\ \delta)$。此外，假设 $e \not\rightsquigarrow \alpha^\circ$且 $h^{-1}([\delta,\xi]) = \emptyset$。定义

$$h'(x) = \begin{cases} t_x\delta + (1-t_x)\xi & when\ h(x) \in [h(\alpha^\circ), \xi]\ and\ x \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} \alpha^\circ\ and\ x \notin \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h) \setminus \{\alpha^\circ\}, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

其中 t_x 是 x 在区间 $[h$（α°） $\xi]$上的线性系数。则 h' 是关于 h对 α 的一次预允许移动。

证明见附录。

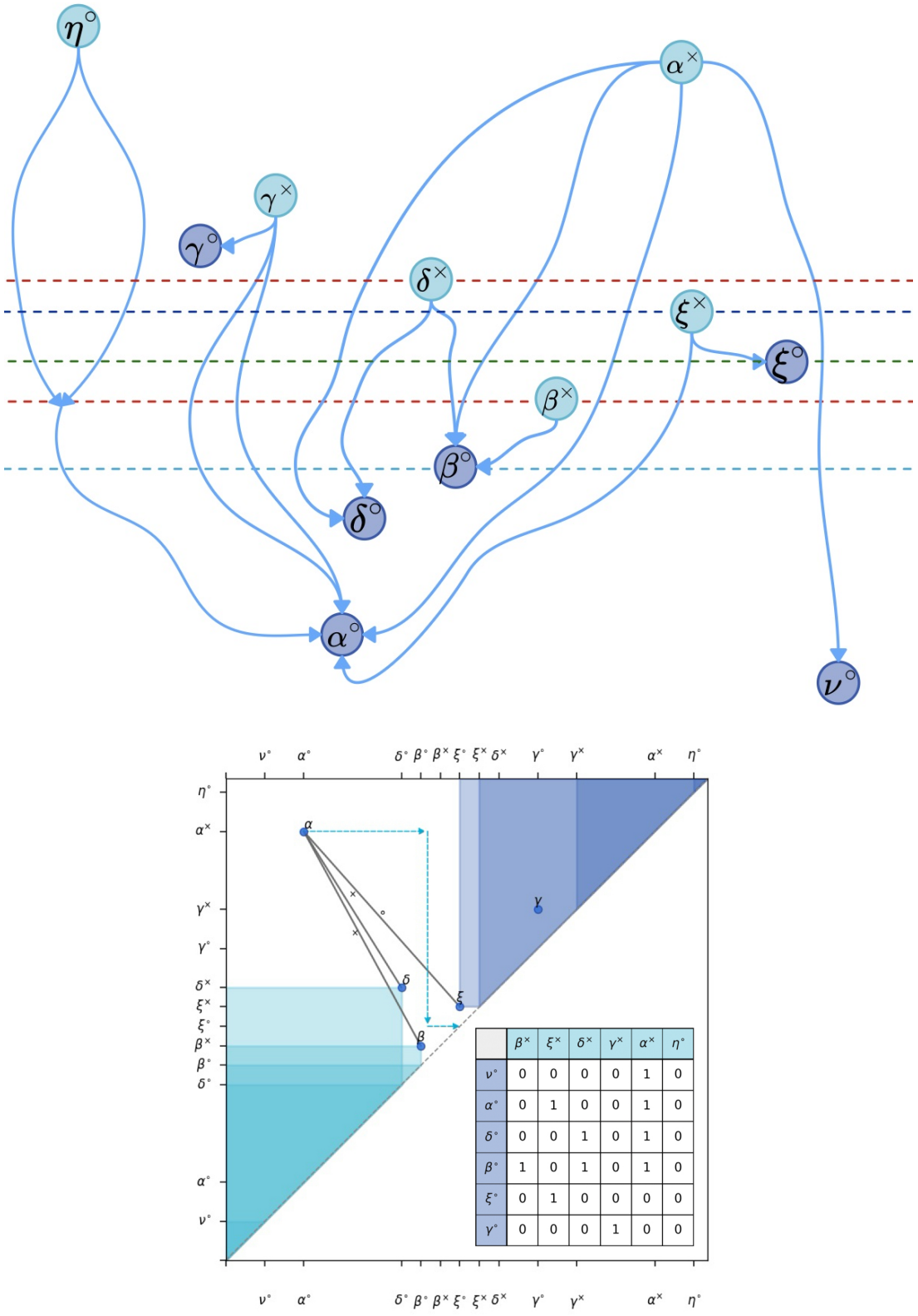

图 3： 上： $\mathcal{V}_h^k$的示意图。节点高度表示 dMf 的值，临界胞腔以带上标的希腊字母标记。若干重要的子水平集以虚线突出显示。下：由 $\mathcal{V}_h^k$ 诱导的 Morse 复形的边界矩阵和持久性图，其中突出显示了两类禁区，并以边表示涉及生灭对 α 的关系。 $\alpha^\times$ 的禁区以浅蓝色显示； α°的禁区以深蓝色显示。虚线箭头表示一种可能的同伦，它将该点移至对角线。

命题 *30*（递减消亡——向下移动）。设 X 由 ***dMf*** h过滤。设 $\alpha \in \hat{}BD(h)_k$ 为一个非对角线对，且 ξ、δ 为实数值，满足 $h(\alpha^\circ) < \xi < \delta < h(\alpha^\times)$，并且至多存在一个 $e \in Crit(\mathcal{V}_h)$ 使得 $h(e) \in (\delta, h(\alpha^\times))$。此外，假设 $\alpha^\times \not\rightsquigarrow e$且同时 $h^{-1}([\xi, \delta]) = \emptyset$。定义

$$h'(x) = \begin{cases} t_x\xi + (1-t_x)\delta & when\ h(x) \in [\xi, h(\alpha^\times)]\ and\ \alpha^\times \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} x\ and\ x \notin \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h) \setminus \{\alpha^\times\}, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

其中 t_x 是 x 在区间 $[\xi, h(\alpha^\times)]$上的线性系数。那么， h' 是相对于 h的 α 的预允许移动。

证明见附录。

Now 注意， α 的允许移动不会引入新的禁区 .

引理 31。 设 h' 是 $\alpha \in \hat{}\mathrm{BD}(h)$的允许移动。那么 $\mathcal{R}^\urcorner_{h'}(\alpha) \subset \mathcal{R}^\urcorner_h(\alpha)$ 且 $\mathcal{R}^\llcorner_{h'}(\alpha) \subset \mathcal{R}^\llcorner_h(\alpha)$。

证明。 该陈述直接由命题 22 以及以下事实得出： $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_{h'}$，且我们只改变了 α 的一个分量的值。 □

由此可知，如果我们知道初始禁区，就可以设计一系列允许的移动，使 α 任意接近对角线。

定理 32。 设 X 由 ***dMf*** h_1 过滤，且 $\alpha \in \hat{}\mathrm{BD}_k(h)$满足 $\mathcal{R}^\llcorner_{h_1}(\alpha) \cap \mathcal{R}^\urcorner_{h_1}(\alpha) = \emptyset$，则存在一系列 ***dMf*** $h_1, h_2, \ldots, h_n$，使得 h_{i+1} 是 $\alpha \in \mathrm{BD}(h_i)$ 的一次允许移动，并且 $h_n(\alpha^\times) - h_n(\alpha^\circ)$ 任意小。

证明。 我们首先说明，能够从 h_i 构造一次允许移动 h_{i+1}，使得 α° 和 $\alpha^\times$ 在 h_{i+1}-序中的距离小于它们在 h_i-序中的距离，其中两个序都限制在临界胞腔上。根据推论 28，为了证明 BD(h_i) =BD(h_{i+1})，我们只需关注临界胞腔之间的换位。定义 x 和 y 为临界胞腔，使得在 h_i-序中有 $\alpha^\circ <_{h_i} x <_{h_i} \ldots <_{h_i} y <_{h_i} \alpha^\times$。

若 $x \not\rightsquigarrow \alpha^\circ$，则如果 x 是死亡单元或 $x \overset{\circ}{\not\to} \alpha^\circ$，我们使用命题 29 构造 h_{i+1}，使 α° 的值增加，同时命题中 δ 和 ξ 的值大于 $h_i(x)$。类似地，若 $\alpha^\times \not\rightsquigarrow y$，则如果 y 是出生单元或 $y \overset{\times}{\not\to} \alpha^\times$，便使用命题 30 构造 h_{i+1}，使 $\alpha^\times$ 的值减小，从而绕过 y。由定理 19、20 和 21 可知，这些确实是允许的移动。

若 $x \rightsquigarrow \alpha^\circ$ 和 $\alpha^\times \rightsquigarrow y$，则 x 会生成由垂直线界定的禁区，而 y 会生成由水平线界定的禁区。由于 $x <_{h_i} y$，它们相交。若 $x \rightsquigarrow \alpha^\circ$ 和 $y \overset{\times}{\to} \alpha^\times$，或 $\alpha^\times \rightsquigarrow y$ 和 $x \overset{\circ}{\to} \alpha^\circ$，同样可以作出上述论证。若 $x \overset{\circ}{\to} \alpha^\circ$ 和 $y \overset{\times}{\to} \alpha^\times$，则根据推论 24，必定存在 $(x, \beta^\times)$，$(\gamma^\circ, y) \in$ 生灭对$_k(h_i)$。由观察 4 可知，它们位于一对 α 的右下象限。因此，它们会生成禁区 $\alpha^\times$ 和 α°，且这两个区域相交。

由引理 31 可知，如果 $\mathcal{R}^\urcorner_{h_i}(\alpha) \cap \mathcal{R}^\llcorner_{h_i}(\alpha) \neq \emptyset$，那么 $\mathcal{R}^\urcorner_{h_1}(\alpha) \cap \mathcal{R}^\llcorner_{h_1}(\alpha) \neq \emptyset$。

因此，我们可以构造一系列允许的移动，使得 h_j 是最后一个，并且 α°和 $\alpha^\times$ 在限制于临界胞腔的 h_j-序中相邻。然后，根据命题 29，我们构造最后一个预允许移动，使得 α 的胞腔之间的值差可以任意小。由于在此变形过程中没有绕过任何临界胞腔，因此该移动是允许的。 □

4.3 反转路径

在上一小节中，我们证明了：如果某个（可逆）对 α 的出生单元与死亡单元的禁区不相交，那么我们就可以将其寿命任意缩短至接近零。特别是，我们可以使其成为一个临界浅对。由定理 16 可知，我们可以安全地反转 α各分量之间的路径，也就是说，不会改变配对或关系。反转路径是构造的最后一步，对应于 α 进入对角线。为了明确给出同伦，我们构造最终的 dMf，使其诱导出具有反转路径的向量场。

命题 33. 设 $\alpha \in$生灭对$_n(h)$ 是一个可逆对，且 $\alpha^\times$与 α° 之间的唯一路径为 ρ。若 $h^{-1}([h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)]) = \rho = (\alpha^\circ = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = \alpha^\times)$，则函数 h'定义为

$$h'(x) = \begin{cases} h(x_{m-2\lfloor i/2 \rfloor}) & when\ x \in \rho\ and\ x = x_i, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

是一个生成 $\mathcal{V}^{-\rho}$ 的 *dMf*，且不会改变 α 各分量以外的临界胞腔的值。

5 最终算法与总结

5.1 最终算法

我们将整个构造总结为一个算法，该算法为给定的 dMf 生成拓扑简化。

输入： 由 dMf h 过滤的 Lefschetz 复形 X；组合向量场 $\mathcal{V}_h$；生灭对集合 BD(h)；非对角对之间的所有同调/上同调关系；以及一个可逆的 k 维生灭对 α，使得 $\mathcal{R}_h^{\ulcorner}(\alpha) \cap \mathcal{R}_h^{\llcorner}(\alpha) = \emptyset$.

(1) 按照定理 32 中描述的过程，将 α 移至足够靠近对角线的位置，使得 $h^{-1}((h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)) = \rho$，其中 ρ 是连接 α 各分量的唯一路径。在此过程中，使用定理 19 、 20 更新 $\mathcal{V}_h$ 临界胞腔之间的关系。(2) 在向量场中反转 $\alpha^\times$ 与 α° 之间的路径 ρ，按照命题 33 中的描述构造新的 dMf。

输出： 由 adMf h'过滤的 Lefschetz 复形 X；组合向量场 $\mathcal{V}_{h'}$；生灭对集合 BD(h')；所有非对角对之间的同调/上同调关系。

图 4 展示了通过该过程获得的拓扑简化示例。

定理 34. 上述算法返回一个 *dMf* h 的拓扑简化 h'。此外，算法的输出包含更新后的向量场，以及关于 h' 的同调/上同调关系。

^^证明. 我们首先证明 BD(h') = BD(h) $\setminus \{\alpha\}$。根据定理 32，步骤（1）不会导致配对发生任何变化。根据定理 16 和定理 12，在步骤（2）中构造的 dMf 与前一个 dMf 具有相同的非对角对，除了 α。

命题 23 和定理 16 表明，只需在步骤（1）中换位临界胞腔时应用更新模式并检查其条件。这样，算法结束时即可得到临界胞腔之间更新后的关系。

更新后，新的向量场 $\mathcal{V}_{h'} = \mathcal{V}^{-\rho}$，其中 ρ 是一条唯一路径。我们知道生灭对 BD(h')，以及应用更新模式后临界胞腔之间的所有关系。

□

定理 34 的证明也证明了定理 1。对于算法的迭代执行，我们可以将其输出作为下一次运行的输入；只需提供下一个符合条件的配对即可。最后，我们考察新构造的 dMf h' 与原 dMf 之间的差异有多大。

命题 35. 设 X 由 *dMf* h过滤，h' 是通过我们的算法构造的其拓扑简化，该算法移除了配对 α。那么，h' 与 h 之间的差异不超过 α的寿命，即 $\max_{x \in X} |h(x) - h'(x)| \leq (h(\alpha^\times) - h(\alpha^\circ))$。

证明. 这直接源于命题 29、30 和 33 中我们只更改了 $h(\alpha^\circ)$ 与 $h(\alpha^\times)$ 之间胞腔的取值这一事实；若 dMf 在 x 上的取值发生变化，则所得取值也落在 $h(\alpha^\circ)$ 与 $h(\alpha^\times)$ 之间。

□

5.2 复杂度

我们注意到，检查配对 α 是否可作为算法的输入需要 $\mathcal{O}(n \log n)$ 时间，参见附录 B；最多有 c 个这样的配对需要检查。算法的复杂度主要取决于检查移动配对 α 越过配对 β 时是否需要更新生灭对之间关系的代价，条件是 $\beta \nrightarrow \alpha$。显然，计算 $D^{\alpha, \beta}_{n+1}$ 可在 $\mathcal{O}(n^2)$ 时间内完成；不过，我们在附录 B 中证明，可将其降至 $\mathcal{O}(n)$。因此，最坏情况下的运行时间为 $\mathcal{O}(c \cdot n)$，其中 c 是生灭对的数量，n 是复形中的胞腔数量。

5.3 总结

我们提出了一种消去固定生灭对的新判据。我们还证明，对于每个满足该判据的配对，都可以构造一个同伦，将该配对移至对角线。这篇论文引出了许多问题。

(1) 消去的顺序如何影响其余配对能否被消去？是否存在最佳顺序？能否依据这一顺序建立消去层级？(2) 该判据是否穷尽了所有情况？也就是说，是否存在该判据未能涵盖的其他可移除配对？(3) 是否可以通过适当调整生成禁区的配对来放宽该判据？例如，如果 α° 的禁区与 $\alpha^{\times}$的禁区相交，是否可以调整其他胞腔，为 α清出一条通往对角线的路径，并在消去后恢复它们的值？

(4) 消去过程是否可以并行化？如果可以，适用于哪些配对 ？

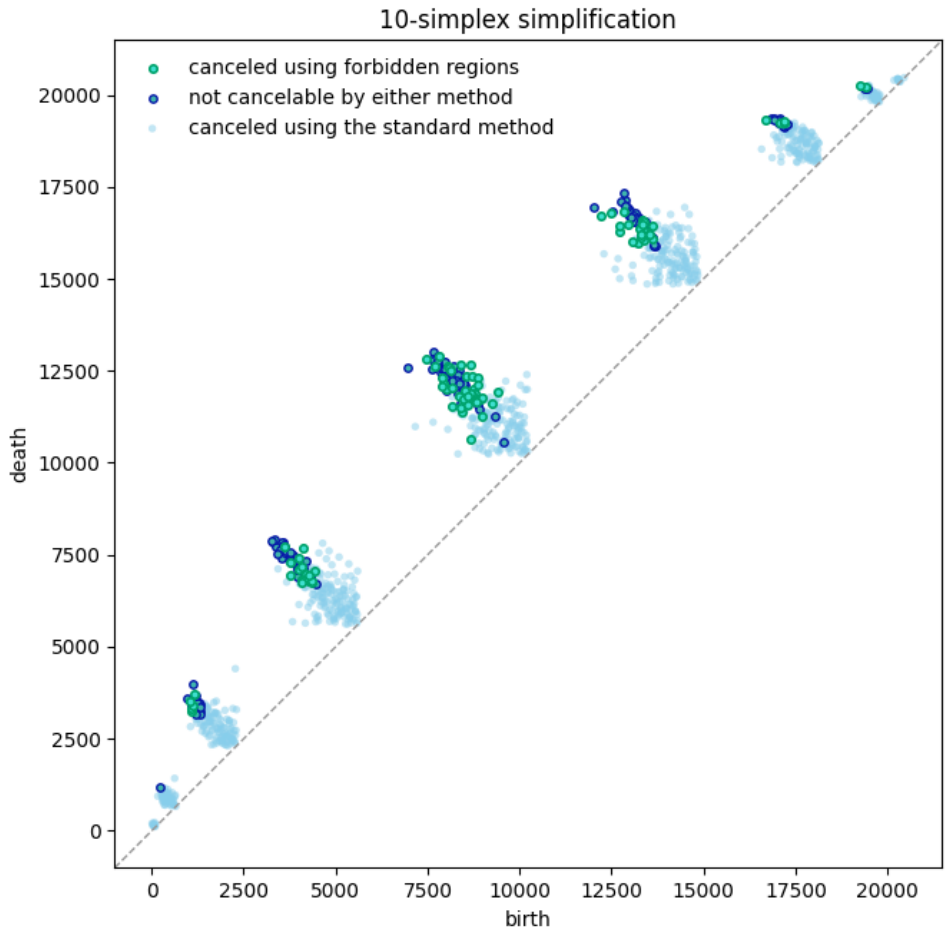

图 4： 10-单纯形在随机单射 dMf 下的持久性图，其中每个维数为 n 的生灭对都与维数为 $n+1$ 和 $n-1$ 的配对分离。我们采用一种过程，先用标准方法简化 dMf，即在浅对之间进行路径反转。当不再有可逆浅对时，我们继续使用本文所述的算法。我们多次遍历，取消所有满足该算法假设的配对。当不存在路径连接禁区的可逆对时，我们停止。不同类型的配对（由标准方法取消、利用禁区取消、不可取消）用不同颜色表示。图 5 放大展示了 4 维中的配对。

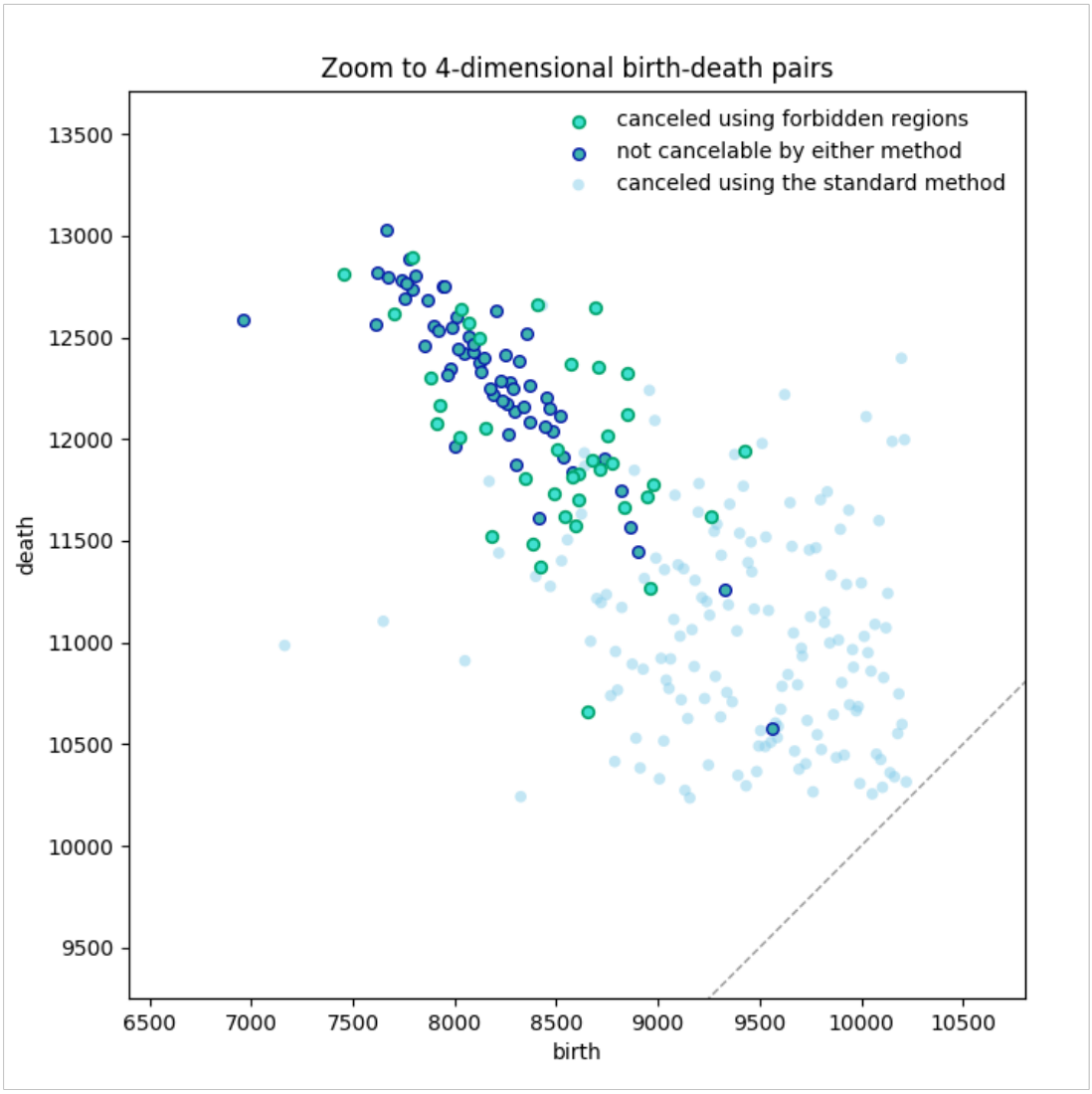

图 5： 图 4 中 4 维的生灭对。

5.4 致谢

Jakub Leśkiewicz 感谢他的导师 Marian Mrozek 教授给予的科学指导、耐心，以及在撰写本作品期间允许他推迟处理其他事务。作者还向全家人、Zuzanna Świątek，以及提供工程学学士和理学硕士学位的 Mikołaj Kardyś 致谢，感谢他们在工作最繁忙的时期为他提供餐食。

参考文献

[1] Dominique Attali、Marc Glisse、Samuel Hornus、Francis Lazarus 和 Dmitriy Morozov。在 线性时间内对曲面上的函数进行持久性敏感简化。提交于 *TOPOINVIS* 的手稿，9:23–24，2009年。

[2]Ulrich Bauer。Ripser：Vietoris–Rips 持久条形码的高效计算。应用与计算拓扑学杂志，5(3)：391–423，2021年。doi:10.1007/ s41468-021-00071-5。[3] Ulrich Bauer、Carsten Lange 和 Max Wardetzky。曲面上离散函数的最优拓扑简化。《离散与计算几何》，47(2)：347–377，2012年。doi:10.1007/s00454-011-9350-z。[4] Ulrich Bauer 和 Fabian Roll。德劳内复形中的环绕循环：连接持久同调与离散 Morse 理论。载于 Wolfgang Mulzer 和 Jeff M. Phillips（编），第*40*届国际计算几何研讨会（*SoCG 2024*），莱布尼茨国际信息学会议论文集（*LIPIcs*）第293卷，第15:1–15:16页，德国 Dagstuhl，2024年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。[5]Rickard Brüel-Gabrielsson、Vignesh Ganapathi-Subramanian、Primoz Skraba 和 Leonidas J. Guibas。面向点云的拓扑感知曲面重建。计算机与图形，39(5)：197–207，2020年。doi:10.1111/cgf.14079。[6]David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 Dmitriy Morozov。通过在线性时间内更新持久性来研究藤及藤园。载于第二十二届计算几何年度研讨会论文集（*SoCG'06*），第119–126页。ACM，2006年。doi:10.1145/1137856.1137877。[7] Lidija Čomić 和 Leila De Floriani。二维和三维 Morse 复形及 Morse–Smale 复形中临界点的消去。载于 David Coeurjolly、Isabelle Sivignon、Laure Tougne 和 Florent Dupont（编），计算机图像离散几何，第117–128页，柏林、海德堡，2008年。Springer Berlin Heidelberg。[8] Lidija Čomić、Leila De Floriani、Federico Iuricich 和 Paola Magillo。从分水岭分解计算离散 Morse 梯度。计算机与图形，58：43–52，2016年。doi:10.1016/j.cag.2016.05.020。[9]Vin de Silva、Dmitriy Morozov 和 Mikael Vejdemo-Johansson。持久（上）同调中的对偶性。反问题，27(12)：124003，2011年11月。URL：http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/27/12/124003/meta，doi：10.1088/0266-5611/27/12/124003。[10] Olaf Delgado-Friedrichs、Vanessa Robins 和 Adrian Sheppard。使用离散 Morse 理论对数字图像进行骨架化与分区。*IEEE* 模式分析与机器智能汇刊，37(3)：654–666，2015年3月。doi:10.1109/TPAMI.2014.2346172。[11] Tamal K. Dey、Jiayuan Wang 和 Yusu Wang。使用离散 Morse 理论改进道路网络重建。载于第*25*届 *ACM SIGSPATIAL* 地理信息系统进展国际会议论文集（*SIGSPATIAL '17*），第58:1–58:4页，纽约，NY，美国，2017年。ACM。doi:10.1145/3139958.3140031。[12] Herbert Edelsbrunner、David Letscher 和 Afra Zomorodian。拓扑持久性与简化。《离散与计算几何》，28(4)：511–533，2002年。doi:10.1007/ s00454-002-2885-2。[13] Herbert Edelsbrunner、Michał Lipiński、Marian Mrozek 和 Manuel Soriano Trigueros。过滤复形中的消去偏序集。arXiv:2311.14364v3，2024年。arXiv:2311.14364。

[14] Herbert Edelsbrunner、Michał Lipiński、Marian Mrozek、Manuel Soriano Trigueros 和 Fedor Zimin。《滤子中换位下的深度偏序集》。arXiv:2511.21961，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2511.21961，arXiv:2511.21961。[15] Herbert Edelsbrunner、Dmitriy Morozov 和 Valerio Pascucci。《二维流形上的持久性敏感简化函数》。载于第二十二届计算几何年度研讨会论文集，SCG '06，第127–134页，美国纽约州纽约市，2006年。ACM。网址：http://doi.acm.org/10.1145/1137856.1137878，doi:10.1145/1137856. 1137878。[16] Herbert Edelsbrunner 和 Marian Mrozek。《过滤的Lefschetz复形的深度偏序集》。arXiv:2311.14364v2，2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2311.14364v2，arXiv:2311. 14364。[17] Riccardo Fellegara、Federico luricich、Leila De Floriani 和 Kenneth Weiss。《三角剖分地形上离散Morse分解的高效计算与简化》。载于第*22*届*ACM SIGSPATIAL*地理信息系统国际会议论文集，SIGSPATIAL '14，第223–232页，美国纽约州纽约市，2014年。计算机协会。[18] Robin Forman。《组合向量场与动力系统》。《数学杂志》，228(4):629–681，1998年。doi:10.1007/PL00004638。[19] Robin Forman。《胞腔复形的Morse理论》。《数学进展》，134(1):90–145，1998年。doi:10.1006/aima.1997.1650。[20] Robin Forman。《离散Morse理论用户指南》。《组合数学洛塔林吉研讨会 /仅电子版/, 48:B48c，35页，仅电子版–B48c，35页，仅电子版，2002年。网址：http://eudml.org/doc/123837。[21] David Günther、Jan Reininghaus、Hubert Wagner 和 Ingrid Hotz。《使用离散Morse理论高效计算三维Morse–Smale复形与持久同调》。《视觉计算机》，28(10):959–969，2012年。doi:10.1007/s00371-012-0726-8。[22] Attila Gyulassy、Peer-Timo Bremer、Bernd Hamann 和 Valerio Pascucci。《Morse-Smale复形计算的实用方法：可扩展性与通用性》。《*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊》，14(6):1619–1626，2008年。doi:10.1109/TVCG.2008.110。[23] John Milnor。《*Morse*理论》。普林斯顿大学出版社，1963年。[24] John Milnor。《*h*-余边界定理讲义》。普林斯顿大学出版社，1965年。[25] Arnur Nigmetov 和 Dmitriy Morozov。《大步长拓扑优化》。《离散与计算几何》，72:310–344，2024年。doi:10.1007/s00454-023-00613-x。[26] Vanessa Robins、Peter John Wood 和 Adrian P. Sheppard。《从灰度数字图像构造离散Morse复形的理论与算法》。《*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，33(8):1646–1658，2011年。doi:10.1109/TPAMI.2011.95。

技术证明

ˆ**定理 14**。 设 D_n 为一个边界矩阵， D_n为消去ˆ ˆ第$n-1$)维浅对 α后所得商的边界矩阵。设 R_nU_n 和 R_nU_n 分别为通过惰性约化得到的它们的ˆ分解。那么，对于所有 x，只要 y不同于 $\alpha^{\times}$，便有 $U_n[x,y] = U_n[x,y]$。此外，对称地，对于所有 x，只要 y不同于 α°，便有 $U_{n-1}^{\perp}[x,y] = \hat{U}_{n-1}^{\perp}[x,y]$。

ˆ**观察 36**。 每一列 $R_n[:\ z]$ （分别地， $R_n[:\ z]$）都是列 $D_n[:\ z]$与其左侧列 z 的和，而这些列在相加时已经完成约化。此外，存在一些不需要进行任何约化的列，即 $D_n[:\ x] = R_n[:\ x]$。递归地，每一列 $R_n[:\ z]$ 都可以以一种明确的方式表示为 D_n 中各列的和。特别地，它由矩阵 $V_n = U_n^{-1}$直接给出，而该矩阵也可以在惰性约化过程中计算得到（见 *[6, 25]*）。

定理 14 的证明。在本证明中，我们假设对 γ 进行 Lefschetz 消去时，不会从矩阵 D 中移除行 γ° 或列 $\gamma^{\times}$。这一假设简化了计算；由于消去后， γ° 和 $\gamma^{\times}$ 分别对应于零行和零列，因此不会影响论证。我们只证明边界矩阵的情形，因为余边界矩阵的证明是类似的。假设 ˆ ˆ该断言不成立，并令 y 为 U_n 中满足 $U_n[:\ y] \neq U_n[:\ y]$的第一列。由于 $U_n[:\ y]$ ˆ 描述了一系列列加法， $U_n[:\ y] \neq U_n[:\ y]$ 的陈述意味着，在惰性约化过程中，加到 $D_n[:\ y]$ 与加到 $D_n[:\ y]$ 的列之间存在差异。令 x_1、x_2、$x_3 \ldots x_n$ 为一系列加到 $D_n[:\ y]$的列索引，并令 ˆx_1、ˆx_2、ˆ$x_3 \ldots \hat{x}_k$ 为一系列加到 $D_n[:\ y]$的列索引；两者均按加法顺序排列，即从最近的出生到最早的出生。我们的目标是证明，除了 $\alpha^{\times}$ 可能出现在 $(x_i)_{i=0}^{n}$ 中这一事实外，这两个序列必须完全相同。因此，反设它们不同，并令 j 为满足对于所有 $i \leq j$ 都有 $x_i = \hat{x}_i$ 的最大索引。

考虑两条序列分歧阶段中第 y 列的状态。特别地，记 $p :=$ 最低非零项 $\left(\sum_{i=1}^{j} R_n[:\ x_i] + D_n[:\ y]\right)$ 以及 $q :=$ 最低非零项 $\left(\sum_{i=1}^{j} \hat{R}_n[:,\ \hat{x}_i] + \hat{D}_n[:\ y]\right)$。

情形 1。 若 $x_{j+1} = \alpha^{\times}$，则 ˆ$x_{j+1}$ 不可能等于 $\alpha^{\times}$，因为该列在 ˆD_n 中为零列。然而，这意味着 $p = \alpha^{\circ}$。根据观察 36，我们可以找到一个集合 A，使得$\sum_{x \in A} D_n[:\ x] = \sum_{i=1}^{j} R_n[:\ x_i] + D_n[:\ y]$. 因此 $p =$最低非零项 $\left(\sum_{x \in A} D_n[:\ x]\right) = \alpha^{\circ}$，这意味着$\sum_{x \in A} D_n[\alpha^{\circ}, x] = 1$。

然而，由于 $x_i = \hat{x}_i$ 对 $i \leq j$而言由同一组索引描述，即 $q =$最低非零项 $\left(\sum_{x \in A} \hat{D}_n[:\ x]\right)$。由于 ˆ $D_n[:\ x] = D_n[:\ x] + D_n[\alpha^{\circ}, x] \cdot D_n[:\ \alpha^{\times}]$，这意味着：

$$
\begin{aligned}
q &= \operatorname{low}\left(\sum_{x\in A} D_n[:,x] + D_n[:,\alpha^{\times}]\sum_{x\in A} D_n[\alpha^{\circ},x]\right) = \operatorname{low}\left(\sum_{x\in A} D_n[:,x] + D_n[:,\alpha^{\times}]\right)\\
&= \operatorname{low}\left(\sum_{i=1}^{j} R_n[:,x_i] + D_n[:,y] + D_n[:,\alpha^{\times}]\right)\\
&= \operatorname{low}\left(\sum_{i=1}^{j+1} R_n[:,x_i] + D_n[:,y]\right),
\end{aligned}
$$

其中，最后一个等式成立，是因为 α 的浅度意味着 $D_n[:\,\alpha^{\times}] = R_n[:\,\alpha^{\times}]$。换言之，$\hat{}x_{j+1} = x_{j+2}$。事实上，对于所有 $i \in \{j+1,\dots,k\}$，$k+1=n$ 和 $\hat{}x_i = x_{j+1}$。这可通过对**情形 2**。的改编得出。特别是，由于这些级数仅相差 $\alpha^{\times}$，因此列 $U[:\,y]$ 和 $U[:\,y]$ 也恰好只相差对应于 $\alpha^{\times}$的项。为避免在假设**情形 1** 成立的情况下分析**情形 2**时产生混淆，我们在 $\hat{}x_j$ 和 $\hat{}x_{j+1}$之间插入一列零，并相应调整索引，使得 $\hat{}x_{j+1}=0$ 以及原来的 $\hat{}x_{j+1}$变为 $\hat{}x_{j+2}$。

情形 2。 假设 $x_{j+1} \neq \hat{}x_{j+1}$ 和 x_{j+1} 不同于 $\alpha^{\times}$。根据定理 12，$\hat{}R_n$ 和 R_n 中的配对保持不变，但 $x_{j+1} \neq \hat{}x_{j+1}$ 意味着 $p \neq q$。注意，消去 α 不会改变位于 α°下方的任何行。因此，由下方各行中的冲突引起的所有加法都必须保持不变。这意味着 p 和 q 是位于 α°上方的行，因为$p \neq \alpha^{\circ}$ 和 q 不可能等于 α°。使用典范表示构造索引集合 A，使得 $p=$最低非零项 $\left(\sum_{x\in A} D_n[:\,x]\right)$。由于两组列加法相同，$q=$最低非零项 $\left(\sum_{x\in A} \hat{}D_n[:\,x]\right)$。此外，由于:

$$
\hat{D}_n[:,x] = D_n[:,x] + D_n[\alpha^{\circ},x]\cdot D_n[:,\alpha^{\times}],
$$

我们有 $q=$最低非零项 $\left(\sum_{x\in A} D_n[:\,x] + D[:\,\alpha^{\times}]\sum_{x\in A} D_n[\alpha^{\circ},x]\right)$。然而，由于 p位于 α°之上，我们有$\sum_{x\in A} D_n[\alpha^{\circ},x]=0$，因此 $q=$最低非零项 $\left(\sum_{x\in A} D_n[:\,x]\right)=p$，矛盾。

□

定理 16. 设 $\mathcal{V}$ 是 X 上的组合向量场，且 $s,t \in$ 临界集$(\mathcal{V})$ 满足维数$s+1=$维数 t。假设存在一条从 t到 s的唯一路径 ρ。那么 $\mathcal{M}(\mathcal{V}^{-\rho})$ 同构于消去配对 (s,t)后得到的 $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ 的商。（参见图 *1* 中的示例。）

在给出定理 16 的证明之前，我们先固定一些记号。对于路径 ρin $G_{\mathcal{V}}$，我们将其起点记为 $\rho^{\sqsubset}$，端点记为 $\rho^{\sqsupset}$。若 $x,y \in \rho$，则用 $\rho[x,y]$ 定义 ρ 的子路径 ξ，使得 $\xi^{\sqsubset}=x$ and $\xi^{\sqsupset}=y$。若 η 和 ζ 是满足 $\eta^{\sqsupset}=\zeta^{\sqsubset}$的路径，则将它们的复合记为路径 $\eta\cdot\zeta := \eta\cup\zeta$。最后，若 $y,x\in X$，则用 $Path(y,x)$ 表示满足 $\theta^{\sqsubset}=y$ and $\theta^{\sqsupset}=x$的路径 $\theta\in G_{\mathcal{V}}$ 的集合。

定理 *16* 的证明。 根据定义7，$\mathcal{M}(\mathcal{V})$ 和 $\mathcal{M}(\mathcal{V}^{-\rho})$ 的边界系数均由连接临界胞腔的路径数量决定。因此，我们通过

比较反转 ρ 之前和之后 $x,\ y \in \mathcal{M}(\mathcal{V}) \setminus \{t, s\}$ 之间的路径集合来证明定理。注意，$\hat{}\ D(x,\ y)$ 的公式（定义11）仅当 $\dim\ y - \dim\ x = 1$、$\dim\ y = \dim\ t$ 和 $\dim\ x = \dim\ s$ 时才非平凡。因此，固定 $k := \dim s$。

令 $C = Path_{\mathcal{V}}(y, x)$、$C' := Path_{\mathcal{V}\text{-}\rho}(y, x)$，并令 $E := C \cap C'$，即不受 ϱ 反转影响的路径集合。注意，每个 $\xi \in C$ 都是一个 k-路径。我们断言，当且仅当 $\xi \cap \rho = \emptyset$ 时，$\xi \in E$ 成立。显然，若 $\xi \cap \rho = \emptyset$，则 $\xi \in E$。为证明反向蕴含，反设存在 $p \in \xi \cap \rho$。必有 $p \neq s$。事实上，若 $p = s$，由于 $x \neq s$，在 p 之后的 ξ 上存在一个胞腔。由于 $p = s$ 是一个临界单元，该胞腔必为 $(k-1)$ 维，这与 ξ 是一条 k-路径矛盾。类似地，若 $p = t$，则根据 $t \neq y$，在 p 之前的 ρ 上存在一个胞腔。该胞腔必为 $(k+2)$ 维，这与 ξ 是一条 k-路径矛盾。因此，p 属于一个向量 $v \in \mathcal{V}$，这也意味着 $p \neq x$、y。令 q 为向量 v 的第二个分量。我们断言 $q \in \xi$。若 $\dim\ p = k$，则 ρ 上 p 的后继必为 q；若 $\dim p = k+1$，则 q 必为 ξ 上 p 的前驱。然而，由于 $v \subset \rho$，该向量在 $\mathcal{V}'$ 中不再存在。因此 $\xi \notin C'$。

考虑另一个路径集 A，它由所有满足 $\alpha^{\sqsubset} = y$ 且 $\alpha \cap \rho = \{\alpha^{\sqsupset}\}$ 的路径 α 组成；也就是说，α 在 ρ 中的唯一元素是其端点。类似地，令 B 表示所有起点位于 ρ 上的路径 β 的集合，即 $\beta^{\sqsupset} = x$ 且 $\beta \cap \rho = \{\beta^{\sqsubset}\}$。对于任意 $\alpha \in A$，我们必然有 $\dim\ \alpha^{\sqsupset} = \dim s$；对于每个 $\beta \in B$，也有 $\dim\ \beta^{\sqsubset} = \dim\ t$。这意味着，$A$ 中路径的端点与 B 中路径的起点互不相交。

定义 $r\colon\ A \to \mathbb{N}$ 为 $r(\alpha) := \#\{\beta \in B \mid \alpha^{\sqsupset} \overset{\mathcal{V}}{\rightsquigarrow} \beta^{\sqsubset}\}$，也就是说，这是 B 中起点沿着 ρ 比 $\alpha^{\sqsupset}$更远的路径数量。我们声称

$$\#C = \#E + \sum_{\alpha \in A} r(\alpha). \tag{3}$$

事实上，对于满足 $\alpha^{\sqsupset} \overset{\mathcal{V}}{\rightsquigarrow} \beta^{\sqsubset}$ 的每一种 $\alpha \in A$ 和 $\beta \in B$ 的选取，我们都可以将其对应到从 y 到 x 的唯一路径 ξ；该路径由 α、ρ 上从 $\alpha^{\sqsupset}$ 到 $\beta^{\sqsubset}$ 的线段以及β 拼接而成。由于 $\xi \cap \rho \neq \emptyset$，因此有 $\xi \notin E$。这就证明了 (3) 中的“$\geq$”。要证明另一个不等式，只需注意，每个 $\xi \in C$ 要么属于 E，要么可分解为 $\alpha \in A$、$\beta \in B$ 和线段 $\rho[\alpha^{\sqsupset}, \beta^{\sqsubset}]$；也就是说，(3) 中的 ξ 计入了 $r(\alpha)$。

类似地定义 $r'\colon\ A \to \mathbb{N}$ as $r'(\alpha) := \#\{\beta \in B \mid \alpha^{\sqsupset} \overset{\mathcal{V}'}{\rightsquigarrow} \beta^{\sqsubset}\}$。通过与前面类似的论证，我们得到

$$\#C' = \#E + \sum_{\alpha \in A} r'(\alpha). \tag{4}$$

由于对于任意 $\alpha \in A$ 和 $\beta \in B$，我们都有 $\alpha^{\sqsupset} \neq \beta^{\sqsubset}$，并且 $\alpha^{\sqsupset} \overset{\mathcal{V}}{\rightsquigarrow} \beta^{\sqsubset}$ 或 $\alpha^{\sqsupset} \overset{\mathcal{V}'}{\rightsquigarrow} \beta^{\sqsubset}$二者必居其一，因此可得 $r(\alpha) + r'(\alpha) = \#B$。因此，我们有

$$\sum_{\alpha \in A} r(\alpha) + \sum_{\alpha \in A} r'(\alpha) = \sum_{\alpha \in A} \#B = \#A \cdot \#B.$$

这意味着

$$\#C + \#C' = 2 \cdot \#E + \#A \cdot \#B.$$

最后需要注意的是，每条路径 $\alpha \in A$ 都可以扩展为一条从 y 到 s的路径。更进一步地说，这些对 α的扩展生成了所有从 y到 s的路径。因此，我们有 $\#A = \#Path_{\mathcal{V}}(y, s)$。

类似地，$\#B = \#Path_{\mathcal{V}}(t,x)$。由于 $2\cdot\#E = 0$(模 2)，上式转化为以下同余式

$$\#Path_{\mathcal{V}^{-\rho}}(y,x) = \#Path_{\mathcal{V}}(y,x) + \#Path_{\mathcal{V}}(y,s)\cdot\#Path_{\mathcal{V}}(t,x) \pmod 2,$$

ˆ 这直接转化为 $D(x,\ y)$ 的公式（定义11）。证明至此结束。

□

命题 22。 固定一对 $\alpha \in$生灭对$^{(n-1)}(h)$。任何增加 α° 的值或降低 $\alpha^\times$ 的值且不会导致切换的换位，都不能为任何一对 β 创建关系 $\beta \to \alpha$ 。

证明。 假设我们对 β 的一个分量执行换位。根据定理 21，我们只需考虑出生–出生换位和死亡–死亡换位。

考虑出生–出生换位。由于 α 的入射关系箭头仅取决于$U[:\alpha^\times]$，只需检查换位如何影响列 $U[:\alpha^\times]$。如果 $\alpha^\times < \beta^\times$，那么更新操作就是将行 $\beta^\times$ 添加到 $\alpha^\times$。然而，由于 U_n 是上三角的，$U_n[\beta^\times,\alpha^\times] = 0$，因此我们不会修改 $U_n[:\alpha^\times]$。如果 $\beta^\times < \alpha^\times$，由于我们不切换配对，可以假设我们处于定理 20 的情形（1）。然而，由于 $\beta^\times < \alpha^\times$, $D^{\alpha,\ \beta}_{n}[\beta^\circ,\alpha^\times] = 1$ 意味着，根据观察 15，$\beta \xrightarrow{\times} \alpha$，因此更新模式给出：ˆ
$U_n[\beta^\times,\alpha^\times] = U_n[\beta^\times,\alpha^\times] + U_n[\alpha^\times,\alpha^\times] = 1+1 = 0$.死亡–死亡换位的情况证明类似。 □

定理 25。 设 X 上定义了两个离散 *Morse* 函数 f_0 和 f_1，满足 $\mathcal{V}_{f_0} = \mathcal{V}_{f_1}$。设 $f_t(x) := H(t,x)$ 为 f_0 与 f_1 之间的线性同伦。设 $\mathcal{V}_{f_t}$ 表示由 f_t 诱导的 X 的划分。那么，对于每个 $t\in[0,1]$, $\mathcal{V}_{f_t} = \mathcal{V}_{f_0}$ 。

定理 25 的证明。设 $t \in (0,1)$。我们先证明，对每个 $v_0 \in \mathcal{V}_{f_0}$，都存在 $v_t \in \mathcal{V}_{f_t}$ 使得 $v_0 \subseteq v_t$。固定 $v_0 \in \mathcal{V}_{f_0}$ 和 $a,b \in v_0$。若 $v_0 \in$ 属于临界集 $\mathrm{Crit}(\mathcal{V}_{f_0})$，则 a 等于 b；否则，其中一个是另一个的面。在这两种情况下，$f_0(a) = f_0(b)$ 且 $f_1(a) = f_1(b)$，因为 $\mathcal{V}_{f_0} = \mathcal{V}_{f_1}$。因此，$f_t(a) = f_t(b)$，这意味着对某个 $v_t \in \mathcal{V}_{f_t}$，有 $a,b \in v_t$。注意，这样的 v_t 是唯一的，因为 $\mathcal{V}_{f_t}$ 是一个划分。这定义了一个函数 $\Lambda: \mathcal{V}_{f_0} \to \mathcal{V}_{f_t}$，将 v_0 指派给 v_t。接下来，我们证明 Λ 是单射。设 $v_0, v_0' \in \mathcal{V}_{f_0}$ 互不相同，且令 $a \in v_0$ 和 $a' \in v_0'$。不失一般性，假设 $f_0(a) < f_0(a')$。若 $f_1(a) < f_1(a')$，则 $f_t(a) < f_t(a')$，因此 $v_t \neq v_t'$。否则，$f_0(a) < f_0(a')$ 且 $f_1(a) > f_1(a')$。这意味着 a' 与 a 在面关系下不可比较。注意，这意味着任意 $b \in v_0$ 都与任意 $b' \in v_0'$ 不可比较。由于 $\mathcal{V}_{f_t}$ 的元素连通，因此 $v_t \neq v_t'$。最后，由于 $v_0 \subseteq \Lambda(v_0)$,

$$\#X = \#\bigcup \mathcal{V}_{f_0} = \sum_{v_0\in\mathcal{V}_{f_0}} \#v_0 \le \sum_{v_0\in\mathcal{V}_{f_0}} \#\Lambda(v_0) \le \sum_{v_t\in\mathcal{V}_{f_t}} \#v_t = \#\bigcup \mathcal{V}_{f_t} = \#X.$$

由此可得 $\sum_{v_0\in\mathcal{V}_{f_0}} \#v_0 = \sum_{v_0\in\mathcal{V}_{f_0}} \#\Lambda(v_0)$。只有当 $\#v_0 = \#\Lambda(v_0)$ 对于$v_0 \in \mathcal{V}_{f_0}$ 成立时，这才可能；因此，$v_0 = \Lambda(v_0)$。

□

命题 *29*（出生值增加——向右移动）。设 X 由 ***dMf*** h过滤。设 $\alpha \in$ ˆ$BD(h)_k$ 为一个非对角线对，且 δ、ξ 为实数值，使得 $h(\alpha^\circ) < \delta < \xi < h(\alpha^\times)$，并且至多存在一个 $e \in Crit(\mathcal{V}_h)$，满足 $h(e) \in (h(\alpha^\circ)\ \delta)$。此外，假设 $e \not\rightsquigarrow \alpha^\circ$且 $h^{-1}([\delta,\xi]) = \emptyset$。定义

$$h'(x) = \begin{cases} t_x\delta + (1-t_x)\xi & when\ h(x)\in[h(\alpha^\circ),\xi]\ and\ x \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} \alpha^\circ\ and\ x \notin \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h)\setminus\{\alpha^\circ\}, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

其中 t_x 是 x 在区间 $[h(\alpha^\circ)\ \xi]$上的线性系数。则 h' 是相对于 h的 α 预允许移动。

命题 *29* 的证明。直接由构造可得，对于每个 $x \in X$： $h(x) \leq h'(x)$，并且每当 $h(x) \neq h'(x)$ 时，就有 $h(x) < \delta < h'(x) < \xi$。最后， $h'(x)$ 属于区间 $[\delta, \xi]$ 当且仅当 $h'(x) \neq h(x)$，而 $h'(x) \notin [\delta, \xi]$ 当且仅当 $h'(x) = h(x)$。

若 $h(x) = h(y)$，则 (x, y) 是一个向量，且 $x \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} a$ 当且仅当 $y \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} a$。这保证了 x 和 y 的值以相同方式改变，因此得到 $h'(x) = h'(y)$。反过来，若 $h'(x) = h'(y)$，则有两种情况。若 $h'(x) \in [\delta, \xi]$，那么两个值都以相同方式改变，且它们相等等价于 $t_x = t_y$。因此， $h(x) = h(y)$。否则，若 $h'(x) \notin [\delta, \xi]$ ，则 $h(x) = h'(x) = h'(y) = h(y)$。

因此，我们得到 $h(x) = h(y)$ 当且仅当 $h'(x) = h'(y)$。现在证明 h' 是一个 dMf。若 $D(x, y) = 1$，则分三种情况讨论。(1) 若 x 和 y 的值要么都被修改，要么都未被修改，则不等式成立。(2) 若 x 的值未被修改，而 y 的值被修改，则由 $h(y) \leq h'(y)$ 可得 $h'(x) \leq h'(y)$。(3) 若 x 的值被修改，而 y 未被修改，则 $D(x, y) = 1$ 推出 $y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow \alpha^\circ$。由于 y 未被修改，根据假设 $\xi < h(y)$，又因为 $h'(x) < \xi$，我们便得到所需的不等式。

配对性质和几乎单射性直接由如下事实得出： $h(x) = h(y)$ 当且仅当$h'(x) = h'(y)$。因此， h' 确实是一个 dMf，且 $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_{h'}$。此外，从构造中可以看出，除 α°外， h'在临界胞腔上等于 h。因此， h' 是预允许移动。 □

命题 *30*（递减消亡——向下移动）。令 X 由 *dMf* h 过滤。令 $\alpha \in$ 生灭对$(h)_k$ 为一个非对角线对，并令 ξ、δ 为实数值，使得 $h(\alpha^\circ) < \xi < \delta < h(\alpha^\times)$，且至多存在一个 $e \in$ 临界集$(\mathcal{V}_h)$，使得 $h(e) \in (\delta, h(\alpha^\times))$。此外，假设 $\alpha^\times \not\rightsquigarrow e$，同时 $h^{-1}([\xi, \delta]) = \emptyset$。定义

$$h'(x) = \begin{cases} t_x\xi + (1 - t_x)\delta & when\ h(x) \in [\xi, h(\alpha^\times)]\ and\ \alpha^\times \overset{\mathcal{V}_h}{\rightsquigarrow} x\ and\ x \notin \mathrm{Crit}(\mathcal{V}_h) \setminus \{\alpha^\times\}, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

其中， t_x 是 x 在区间 $[\xi, h(\alpha^\times)]$ 上的线性系数。于是， h' 是关于 h 的 α 的预允许移动。

命题 *30* 的证明。 证明与命题 29 的证明对偶 □

命题 33。 令 $\alpha \in$生灭对$_n(h)$ 为一个可逆对，使得 $\alpha^\times$ 与 α° 之间的唯一路径为 ρ。若 $h^{-1}([h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)]) = \rho = (\alpha^\circ = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m = \alpha^\times)$，则定义函数 h' 为

$$h'(x) = \begin{cases} h(x_{m-2\lfloor i/2 \rfloor}) & when\ x \in \rho\ and\ x = x_i, \\ h(x) & otherwise, \end{cases}$$

是一个生成 $\mathcal{V}^{-\rho}$ 且不会改变临界胞腔中除 α 的分量以外的其他临界胞腔取值的 *dMf*。

证明。 我们只需证明 h' 是一个 dMf；其余结论显然。配对性质和几乎单射性质都直接由构造得出，以下事实亦然：

$h^{-1}([h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)]) = \rho$。为证明弱单调性，取 x、$y \in X$，使得 $D(x,y) = 1$，并考虑三种情形。(1) 若两个胞腔都在路径上或都在路径外，则弱单调性由构造得出。(2) 若 x 在路径上而 y 不在路径上，则由假设可知 $h'(y) = h(y) > h(\alpha^\times)$，且由于 $h'(x) \in [h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)]$，，便得到所需的不等式。(3) 类似地，若 y 在路径上而 x 不在路径上，则 $h(y)\ h'(y) \in [h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)]$，并且$h'(x) = h(x) < h(\alpha^\circ)$ □

B 复杂度

B.1 优化

在计算算法的总复杂度之前，我们先说明，可以在线性时间内检验定理 20 中的条件$D^{\alpha,\ \beta}_{n+1}[\beta^\circ, \alpha^\times] = 1$。在本小节中，我们假设 α，β是n维生灭对；每当我们提到矩阵 D，R，U 时，读者应理解为我们指的是 $n+1$ 维矩阵。令 $V = U^{-1}$，则 $DV = R$。对偶地，矩阵 $D^\perp$，$R^\perp$，$V^\perp$，$U^\perp$是 n维的矩阵 D，R，U，V的对偶对应物。

观察 37. 如果 $h(\beta^\times) < h(\alpha^\times)$，$h(\alpha^\circ) < h(\beta^\circ)$ 且 $D^{\alpha,\ \beta}[\beta^\circ, \alpha^\times] = 1$，那么 $\beta^\circ \overset{\circ}{\to} \alpha^\circ$。

在对 $D^{\perp,\ \alpha,\ \beta}$进行惰性约化时，列 β° 将被加到列 α° 上；根据定理 14，$D^\perp$也同样如此。这保证了我们只需在以下时刻计算 $D^{\alpha,\ \beta}[\beta^\circ, \alpha^\times] = 1$：$\beta$ 位于 α 的左下象限，并且在向右移动时经过 α。

命题 38. 若 $h(\beta^\times) < h(\alpha^\times)$、$h(\beta^\circ) < h(\alpha^\circ)$ 以及 β° 和 α° 在 h序中相邻，则 $D^{\alpha,\ \beta}[\beta^\circ, \alpha^\times] = R[\beta^\circ, \alpha^\times]$。

证明. 在本证明中，我们采用与定理 14 的证明中相同的 Lefschetz 消去约定。用 D_γ 表示对出生-死亡配对 γ进行 Lefschetz 消去后的矩阵 D。注意，根据惰性约化可得 $R[:\ \alpha^\times] = \sum_{V[\xi^\times, \alpha^\times]=1, D[:\ \xi^\times]} V[\xi^\times, \alpha^\times]$由于 V在对角线上为正，因此我们可以定义 $A := \{\xi \mid V[\xi^\times, \alpha^\times] = 1\} \setminus \{\alpha\}$。注意，$A$ 中的所有配对都位于 α的右下象限。于是

$$R[:, \alpha^\times] = D[:, \alpha^\times] + \sum_{\xi \in A} D[:, \xi^\times].$$

因此我们有 $D[:\ \alpha^\times] = \sum D[:\ \xi^\times] + R[:\ \alpha^\times]$。设 γ是位于 α右下象限中的 D的任意浅对$\xi \in A$。那么，对 γ 进行 Lefschetz 消去后，我们得到：

$$
\begin{aligned}
D_\gamma[:,\alpha^\times] &= D[:,\alpha^\times] + D[\gamma^\circ,\alpha^\times]\cdot D[:,\gamma^\times] \\
&= \left(R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} D[:,\xi^\times]\right) + \left(R[\gamma^\circ,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} D[\gamma^\circ,\xi]\right)\cdot D[:,\gamma^\times] \\
&= \left(R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} D[:,\xi^\times]\right) + R[\gamma^\circ,\alpha^\times]\cdot D[:,\gamma^\times] + \sum_{\xi\in A} D[\gamma^\circ,\xi]\cdot D[:,\gamma^\times] \\
&= \left(R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} D[:,\xi^\times]\right) + 0 + \sum_{\xi\in A} D[\gamma^\circ,\xi]\cdot D[:,\gamma^\times] \\
&= R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A}\left(D[:,\xi^\times] + D[\gamma^\circ,\xi]\cdot D[:,\gamma^\times]\right) \\
&= R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} D_\gamma[:,\xi^\times]
\end{aligned}
$$

其中， $R[\gamma^\circ,\alpha^\times] = 0$ 是由持久性图中 γ 位于 α 的右下象限这一事实推得的。现在注意，每当被消去的配对 γ 位于 A中时，我们得到：

$$
\begin{aligned}
R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A} \hat{D}_\gamma[:,\xi^\times] &= R[:,\alpha^\times] + \hat{D}_\gamma[:,\gamma^\times] + \sum_{\xi\in A\setminus\{\gamma\}} \hat{D}_\gamma[:,\xi^\times] \\
&= R[:,\alpha^\times] + \sum_{\xi\in A\setminus\{\gamma\}} \hat{D}_\gamma[:,\xi^\times],
\end{aligned}
$$

ˆ术语 $D_\gamma[:\gamma^\times]$ 消失，因为：

$$
\hat{D}_\gamma[:,\gamma^\times] = \hat{D}[:,\gamma^\times] + \hat{D}[\gamma^\circ,\gamma^\times]\cdot\hat{D}[:,\gamma^\times] = \hat{D}[:,\gamma^\times] + \hat{D}[:,\gamma^\times] = 0,
$$

ˆ ˆ 其中， $D[\gamma^\circ,\gamma^\times] = 1$ 由 D 中 γ 的浅度可知。因此，从 α 的右下象限中消去一个浅对，可使 A 的大小减一（若该浅对来自 A），或保持不变。

我们可以反复应用上述推理，消去 α 的右下象限中的配对。记 α 的右下象限中所有配对均被删除后的边界矩阵为 D^α 。特别地， A 中的每个配对都会被消去。因此，最终我们有 $D^\alpha[:\alpha^\times] = R[:\alpha^\times]$。

最后，注意到由于 β° 和 α° 在 h 序中相邻，所有位于 β 右下象限中的配对构成了位于 α 右下象限中的配对集合的子集。这说明 $D^{\alpha,\,\beta}[:\alpha^\times] = D^\alpha[:\alpha^\times] = R[:\alpha^\times]$.

□

当然，仅检查 R 中的一个条目这一事实，并不能解决所有难题。在向对角线推进的过程中，我们只更新矩阵 U，但仍需要一种高效的方法，以便在不对更新后的边界矩阵进行惰性约化的情况下，快速计算 $R[\beta^\circ,\alpha^\times]$ 。因此，我们证明，先前已知的针对 U 的更新模式会导出针对 V的更新模式。

命题 39. 假设 $\alpha^\circ, \beta^\circ$ 是 D 中的相邻两行，并且 $h(\beta^\times) < h(\alpha^\times)$。那么， β° 与 α° 之间的换位仅当 U 要求更新时，才会导致 V 更新。更新模式由以下公式给出：

$$\hat{V}[:, \alpha^\times] = V[:, \alpha^\times] - V[:, \beta^\times]$$

ˆ证明。 令 U表示换位前的同调关系矩阵， U表示换位后的同调关系矩阵。同理，记 $V = U^{-1}$和 ˆV =ˆU^{-1}。显然，若 $U = U$，则 ˆ ˆ ˆ ˆ $V = V$。根据定理 20，只要 $U \neq U$，就有 $U[\beta^\times, :] = U[\beta^\times, :] + U[\alpha^\times, :]$。ˆ 然而，这意味着$U = A_{\beta,\ \alpha}U$ ，其中 $A_{\beta,\ \alpha}$ 是一个将第 α 行加到第 β 行的初等矩阵。然后 ˆU^{-1} =$(A_{\beta,\ \alpha}U)^{-1} = U^{-1}A^{-1}_{\beta,\ \alpha} = VA^{-1}_{\beta\alpha,}$ 。注意，初等矩阵$A_{\beta,\ \alpha}$ 的逆矩阵也是一个初等矩阵。特别地，从左侧相乘时，结果是从第 α 列中减去第 β 列。由于我们在 $\mathbb{Z}_2$ 上运算，减法等同于加法。 □

因此，每次移动之后，我们不仅能够在线性时间内更新矩阵 U ，还能够更新 V。这使我们有机会运用以下定理。

命题 40。 若已知矩阵 V ，则可以在线性时间内计算更新后的条目 $R[\beta^\circ, \alpha^\times]$ 。

证明。 由于 $R[:\ \alpha^\times] = \sum_{V[x,\alpha^\times]=1} D[:\ x]$，因此 $R[\beta^\circ, \alpha^\times] = \sum_{V[x,\alpha^\times]=1} D[\beta^\circ, x]$。判断 V 中的条目 $V[x,\alpha^\times]=1$ 是否非空需要 $\mathcal{O}$(1) 时间，因为只需遍历行 $D[\beta^\circ,:]$。 □

这确实为我们提供了一种技术，可以在线性时间内决定是否根据定理 20 更新 U 和 V。此外，我们还可以针对定理 19 提出对偶命题。

命题 41。 假设已知矩阵 $V^\perp$ 中的信息，则可以在线性时间内确定是否需要执行定理 *19* 所述的更新。

证明。 与命题 38、39、40 的证明对偶地类似。 □

现在我们可以估计算法的复杂度了。

B.2 估计

分别记 n, c 为 $\mathcal{V}^k_h$ 中的胞腔数量以及 $\mathrm{BD}_k(h)$ 中配对的数量。假设 $\mathcal{V}^k_h$ 由图 $G_k := (X_k, E_k)$ 给出，即图 $G_\mathcal{V}$ 的一个限制。此外，对于固定的生灭对 α，定义 $m(\alpha)$ 为持久性图中区域 $[h(\alpha^\circ)\ h(\alpha^\times)] \times [-\infty, \infty] \cup [-\infty, h(\alpha^\circ)] \times [-\infty, h(\alpha^\times)]$ 内生灭对的数量。现在注意到：

(1) 对图进行拓扑排序需要 $\mathcal{O}(n+\#E_k)$，求一对点之间的路径数量的复杂度为 $\mathcal{O}(n+\#E_k)$。因此，最坏情况下，寻找可逆对需要 $\mathcal{O}(c \cdot (n + \#E_k))$。

(2) 每对 α 至多有 $m(\alpha)$ 个生成禁区的点；因此，沿相应坐标轴对这些区域排序需要 $\mathcal{O}(m(\alpha) \log m(\alpha))$；排序完成后，检验两类区域是否相交需要 $\mathcal{O}(m(\alpha))$ 时间。(3) 对于固定的生灭对 α，我们至多执行 $m(\alpha)$ 次允许的移动。(4) 每次允许移动之后，都要计算新的过滤值，这需要 $\mathcal{O}(n)$；这可由命题29和命题30推出。(5) 允许移动需要根据定理20和定理19检验更新判据；这需要 $\mathcal{O}(n)$（见命题38和命题41）。(6) 每次更新 U，V，$U^{\perp}$，$V^{\perp}$ 都需要 $\mathcal{O}(c)$ 时间，因为要添加相应的列或行。(7) 根据(4)、(5)和(6)，步骤（1）的复杂度为 $\mathcal{O}(m(\alpha) \cdot n)$。(8) 从步骤（2）逆转一条路径 ρ需要 $\mathcal{O}(\#\rho)$ 时间

最终的最坏情况为 $\mathcal{O}(c \cdot n)$，因为 $m(\alpha)$ 可能等于 $(c-1)$。不过，在许多情况下，观察到的复杂度可能会小得多（当我们只需遍历少数几个配对时），并接近线性。