arXiv:2603.16488v1 [math.MG] 17 Mar 2026

刚性连接三维框架的完整图形静力学。第三部分：用于运动学的回路

Allan McRobie，fam20@cam.ac.uk 工程系，剑桥大学，CB2 1PZ https://orcid.org/0000-0002-6610-5927

2026年3月18日

摘要

在本系列论文的第三部分中，本文采用第二部分提出的环形式体系来描述三维框架结构的运动学行为；第二部分中，该体系用于描述平衡。在第二部分中，作为图解静力学几何工具箱基础的多边形、多面体和多胞体概念，被代数同调中的更一般概念——CW复形——所取代。刚性连接框架中作用于杆任一切割面的应力合力的六个分量，以四维空间中一个回路的六个投影所对应的定向双向量面积表示，其中三个分量表示力，另外三个分量表示力矩。本文将以四维空间中回路的投影面积表示运动学变量，其中三个投影面积表示框架上一点的位移，另外三个投影面积则表示结构在该点的转动。

该理论的四维设定由物理空间中常见的三个维度和用于应力函数的第四个维度组成。在这一四维设定中，虚功表现为一种顶形式（定向四维体积），即在整个结构上对表示局部平衡和运动学变量的双向量的楔积进行积分。

1 引言

本系列论文的前几篇 [4, 5] 探讨了结构框架中力与力矩的平衡。本文将考察这类结构的运动学，并将 McRobie 等人 [6] 对铰接桁架运动学的描述扩展到抗弯框架。

出发点是认识到描述刚体平衡与其无穷小运动的方程之间显而易见的相似性。例如，受端部力 $\mathbf{F}$ 和力矩$\mathbf{M}_1$ 及$\mathbf{M}_2$ 作用的杆（见图 1）要达到平衡，必须满足

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{X} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

同样，对于发生包含转动 $\boldsymbol{\theta}$ 的无穷小位移的刚体，任意两点处的位移 $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$ 可以（再次采用传统向量记法）写成

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{X} \times \boldsymbol{\theta} \tag{2}$$

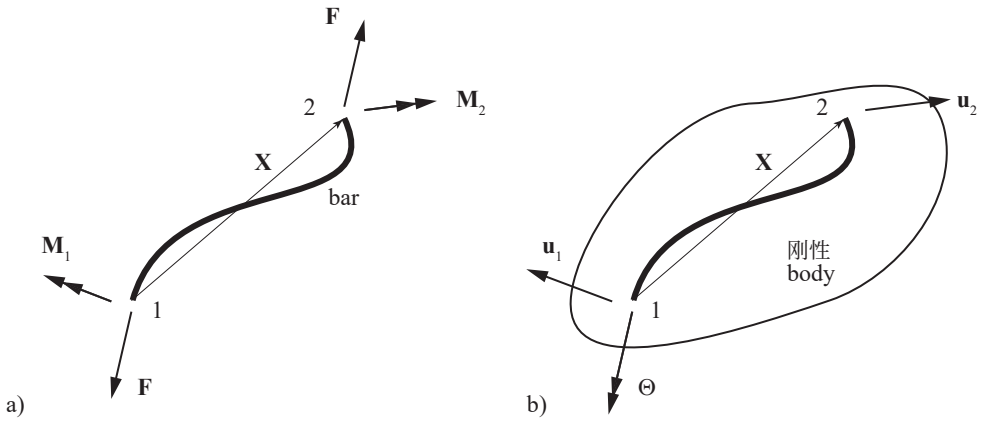

图1：a）承受端部力和力矩的杆。b）刚体运动。

尽管我们将要研究的参考系可能更一般地属于柔性体，但很明显，力矩与位移的处理方式存在某种相似性，力与转动也是如此。起初这可能有些违反直觉，因为人们或许会怀疑，转动与力矩在某种意义上更为相似，而位移与力彼此更为接近。现在，我们将这些思想从三维描述推广到此前论文中建立的四维勒让德变换描述 [4, 5], ，其中增加了一个维度，用于承载各种形式的应力函数。

1.1 符号说明

由于向量叉积在四维中没有定义，我们改用外代数中的楔积，它适用于任意维度。向量$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{v}$ 的楔积是双向量$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$，对应于向量$\mathbf{v}$ 沿$\mathbf{u}$ 扫掠时扫过的平行四边形的有向面积（见图2a）。方向的定义方式是：先沿$\mathbf{u}$ 这一边，再沿扫掠$\mathbf{v}$所形成的边遍历边界。在物体空间和应力空间中，我们都将选取一组正交归一的基向量$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3,$ ，其中$\mathbf{e}_0$ 方向与两个空间之间勒让德变换的应力函数 F 和 Φ 相关联。

为方便符号表达，当$\mathbf{e}_i$ 和$\mathbf{e}j$ 不同时，我们可以将基向量的楔积写成克利福德积$\mathbf{e}_i\mathbf{e}j$ 。这由克利福德积的定义$\mathbf{e}_i\mathbf{e}j = \mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}j$ 可知，其中点积因正交归一性而为零。我们并不使用

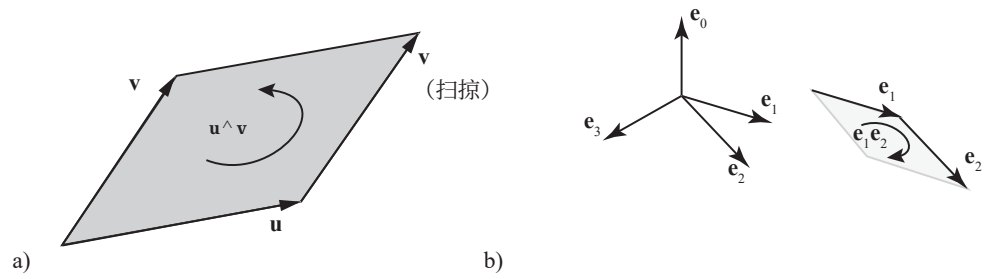

图2：a）一般向量$\mathbf{u}$ 与$\mathbf{v}$的楔积。b）单位双向量$\mathbf{e}_1\mathbf{e}$

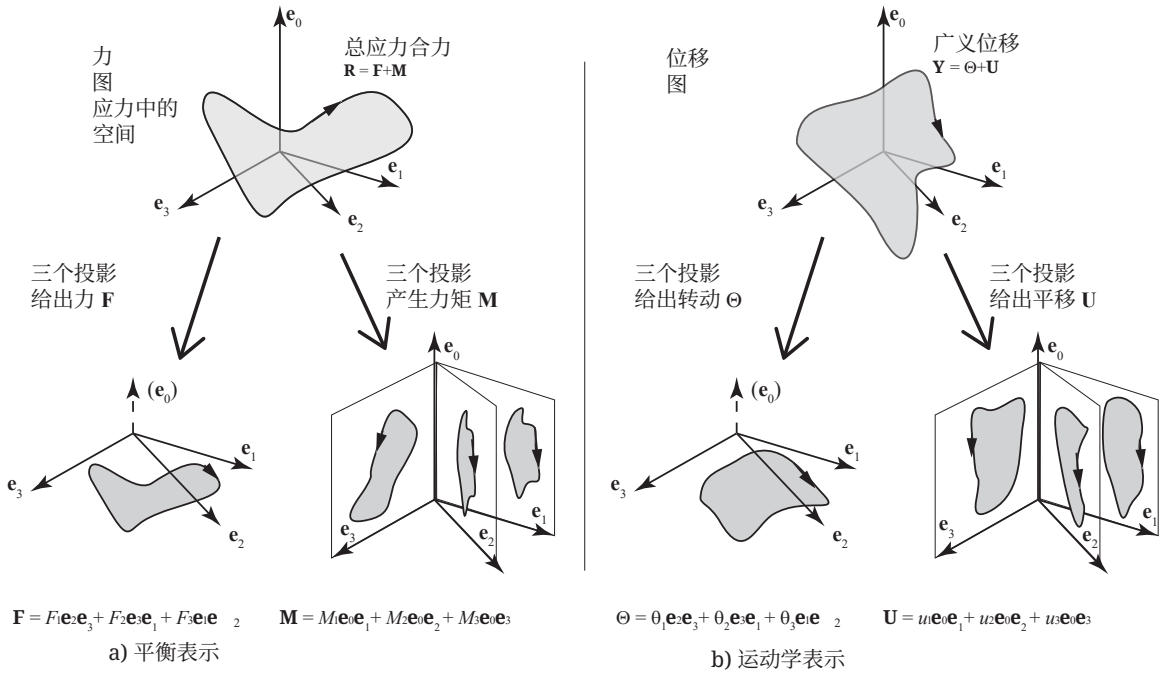

图 3：循环表示：a）平衡；b）运动学。

克利福德积的其他性质，只是为了省去书写楔积符号。

四维对象难以绘制。不过，单位双向量及其方向可以很容易地用图示表示，如图 2b 中$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$所示。

1.2 将四维环形式体系扩展至运动学

在框架结构平衡的四维描述中，杆件任意切割面上的一般应力合力$\mathbf{R}$ （即力和力矩）由四维应力空间中一般循环或循环集合的定向双向量面积的六个独立正交分量表示（见图 3a）。也就是说，我们写作

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F} + \mathbf{M} = \mathbf{F} + \mathbf{e}_0\mathbf{m} && (3)\\ \text{where}\quad \mathbf{F} &= F_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + F_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + F_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 && (4)\\ \text{and}\quad \mathbf{M} &= M_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 && (5) \end{aligned}$$

这里，$\mathbf{R}$、$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{M}$ 是双向量。之后我们可能希望使用（或许更为熟悉的）三向量$\mathbf{m} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{f} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$。

类似地，可以将框架上任意点的广义无穷小位移 $\mathbf{Y}$ 表示为一般循环或一组循环的六个双向量分量，从而得到运动学描述，使用

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \Theta + \mathbf{U} = \Theta + \mathbf{e}_0\mathbf{u} && (6)\\ \text{where}\quad \Theta &= \theta_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \theta_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \theta_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 && (7)\\ \text{and}\quad \mathbf{U} &= u_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 && (8) \end{aligned}$$

与平衡描述类似，$\mathbf{Y}$、 Θ 和$\mathbf{U}$都是双向量。同样，更熟悉的三维向量是$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ 和 $\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$。这些对象位于四维位移空间中，该空间可以与物体空间对应起来。

这与 Felix Klein 的观察一致：“所有适用于作用于刚体的力的考量，都可以以完全类似的形式应用于刚体所进行的无穷小转动，反之亦然” [1]。不过，在这里，我们将这一思想扩展到非刚体，并在力矩与平移之间建立类似的类比。如前所述，这与看似更自然的做法恰好相反——后者会将力矩与转动、力与位移相配对。

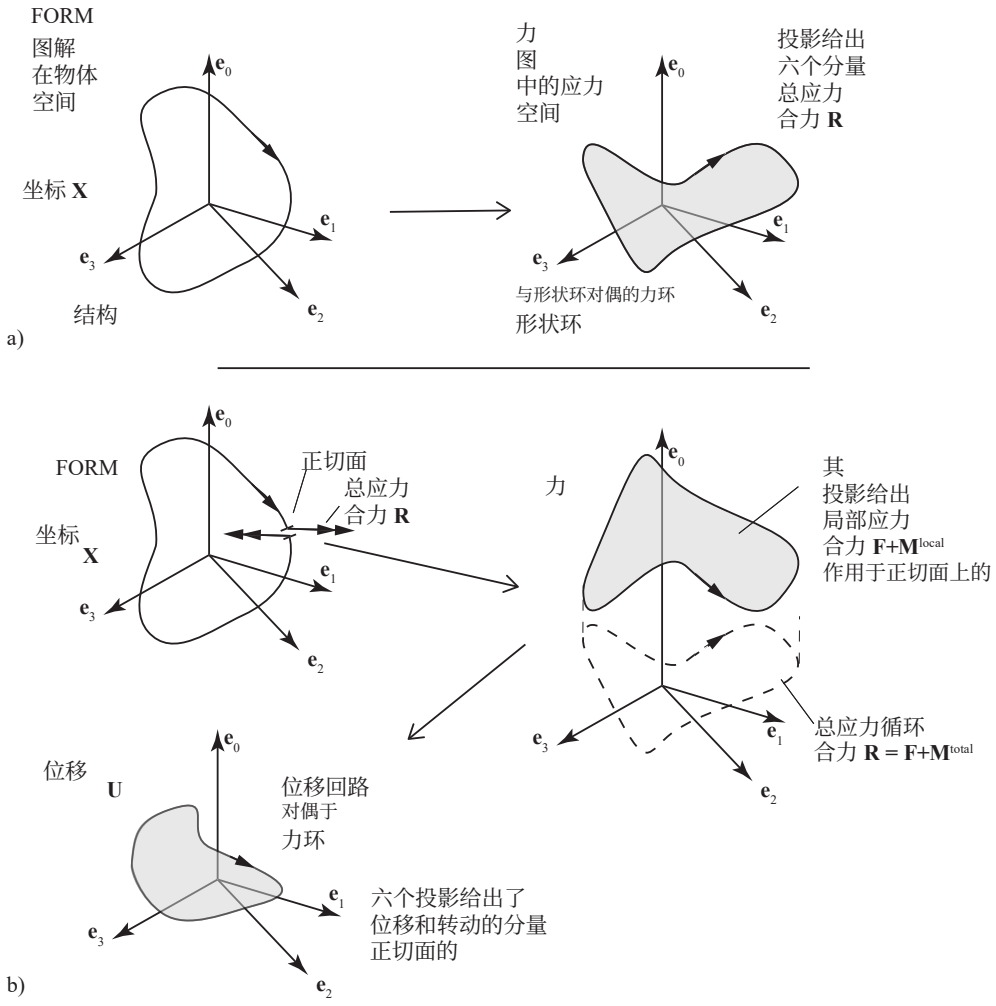

图 4：a）简单抗弯框架结构的一个回路及其对偶力回路，其六个投影给出作用于结构回路任意切割面上的总应力合力**R** 的分量。总力矩包括力绕原点作用于力臂所产生的贡献。根据基本平衡，这一结果在所有正切面上都相同。b）给定结构回路上的一个正切面，可以定义一个经过调整的力环，其投影给出局部应力合力，其中力矩是切割面处的局部弯矩和扭矩。这些力矩沿结构回路变化。对于任何这样的局部力环，都可定义一个与之对偶的广义位移回路**U**，其六个投影给出结构在切口处的转动和位移。

图4展示了各种几何对象。如 McRobie [4], 所述，框架结构被分解为一组定向回路，其中一个回路如图4a所示。与这个形状环对偶的是应力空间中的一个力环，它定义了形状环上任意正切面处的应力状态

。形状环上任意正切面处的力环的六个独立投影，定义了该处应力合力的六个分量。这样表示的力矩是总力矩，其中包括力及其相对于原点的力臂所产生的贡献。由于没有外部力作用于杆，根据基本平衡可知，形状环上任意正切面处的总力矩都相同，因此每个形状环仅对应一个对偶力环。McRobie [4, 5] 解释了如何用应力空间中一系列相关回路的投影来表示局部弯矩和扭矩。这些回路是通过在应力空间 $\xi\mathbf{e}_0$ 方向上绘制原始 Maxwell-Rankine应力函数 F ， η， ζ而得到的，而不是绘制勒让德对偶应力函数 Φ。如图4b所示，每个形状环的切割面都对应这样一个调整后的力环。不同于在任意截面处表示力和总力矩的唯一回路，调整后的力环有连续无穷多个，可体现弯矩和扭矩沿环变化的情况。

每个调整后的力环都有一个与之对偶的位移环，其投影给出结构回路上切割面的平移与转动。图4b 展示了这样一个位移环。该结构不是刚体，因此与调整后的力环类似，位移环构成一个无限集合，每一个可能穿过形状环的截面对应一个位移环。这些环不一定形成连续体：位移和转动可能存在不连续性。尽管如此，每个截面都对应这样一个环。

现在，我们已经具备了对虚功进行几何处理所需的全部要素。虚功原理可以说是结构分析中的基本对象，下面我们将说明它如何在环形式体系中体现出来。

2 虚功

四维应力空间中的一个定向环 $\mathbf{R}$ 表示结构回路上任意截面处力和力矩的一般应力合力的六个分量。我们还可以在物体空间中关联一个定向环 $\mathbf{Y}$ ，以表示广义无穷小平移与转动的六个独立分量。应力合力在进行该无穷小运动时所对应的虚功 $\mathbf{W}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{R} \wedge \mathbf{Y} = (\mathbf{F} + \mathbf{M}) \wedge (\Theta + \mathbf{U}) \\ &= W \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ \text{where} \quad W &= \mathbf{f}.\mathbf{u} + \mathbf{m}.\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{9}$$

也就是说，虚功是一个顶形式，即四维区域的定向体积。该体积的大小由以下三向量点积之和给出：$\mathbf{f}.\mathbf{u} + \mathbf{m}.\boldsymbol{\theta}$。这在传统结构力学中是一个熟悉的量，但在这里，它被赋予了一种新的诠释：定向四维体积。交叉项$\mathbf{F} \wedge \Theta$ 和$\mathbf{M} \wedge \mathbf{U}$ 消失的方式，以及其余各项都产生一个四维体积$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 、且其大小由熟悉的向量点积给出的方式，都相当简洁巧妙。具体推导如下：多向量 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_p}$ 与 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{j_q}$ 的楔积 $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$ 为

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{j_q}$$

当指标 $i_1, \ldots i_p, j_1, \ldots j_q$ 互不相同时，该值非零；否则为零（因为重新排序后会出现形如 $\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_k = 0$ 的项）。由此可知，广义力分量 $F_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 的楔积与广义位移 $\mathbf{Y}$ 的所有分量均为零，唯独与分量 $u_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1$的楔积不为零。这对虚功的贡献为 $F_1 u_1 \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 。其他广义力分量也同样只与广义位移中各自的共轭分量相乘，从而得到方程（9）。由于四个基向量互不相同且彼此正交，方程（9）使用克利福德积记号 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j$ 作为楔积 $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}^j$的简写。

2.1 与桁架图的闵可夫斯基和的关系

闵可夫斯基和 [3] 已被证明是一种有用的可视化工具，可用于阐释图解静力学中的一系列重要主题。在最简单的形式下，它可以将二维桁架的形状图和力图组合起来，从而直观呈现荷载路径。每个图中的多边形元素由一组连接其间的矩形相连。由于矩形的边长分别为拉力 T 和长度 L，其面积表示该杆对结构荷载路径的贡献 $T.L$。从构造几何关系可直接得知，所有矩形的有向面积总和必为零，这与麦克斯韦荷载路径定理 [2]相对应。此概念可直接推广至三维桁架及其兰金互易图 [3], ；此时，荷载路径由长度为 L 、截面积为 T 的直棱柱表示，这些直棱柱分隔形状图中的多面体单元与兰金互易力图中的多面体单元。

在 McRobie 等人 [6] 的研究中，这一理念得到了扩展，使虚功原理能够以可视化方式应用于二维和三维桁架。他们定义了一种新对象，即力图与矢量位移图 （而非形状图）中对应分量的闵可夫斯基和的集合。位移图的图形与结构形状图具有相同的拓扑结构，但节点位置由节点位移矢量$\mathbf{u}$ 而非结构坐标$\mathbf{X}$给出。由于节点位移与杆件拉力不正交，在二维情形下，位移图与力图的分量由平行四边形而非矩形隔开；在三维情形下，则由斜棱柱隔开。这些倾斜对象的面积（二维）或体积（三维）代表相应杆件对系统内虚功的贡献。在这一设想中，不存在外虚功，因为没有外力；任何外力都已由一组沿其作用线布置的附加杆件取代，因此外力现已纳入更大系统的自应力状态中。由构造的几何关系可直接得出，分隔两个图形的有向面积（二维）或有向体积（三维）之和必为零；这便是桁架虚功原理的几何表示。

这里我们将探讨如何在环形式体系中体现这种虚功的可视化方法。起初，用环的有向面积来表示转动，似乎不是一个寻常的切入点。然而，正如我们将要说明的，一种可行的方法是考虑线弹性材料行为，并将（按比例缩放的）弯矩图（BMD）解释为一个环。弯矩图除以抗弯刚度后，得到的是表示弯曲所致曲率的图形。该图形下方的面积对应于梁因弯曲而产生的斜率变化。也就是说，梁端转角与环（缩放后的弯矩图）的有向面积自然相关。这就是转动与环面积之间的联系。

接下来只是运用环形式体系，对力法这一结构分析中广为人知且不可或缺的方法，作另一种几何描述；在力法中，虚功原理用于将真实位移系统与虚拟平衡系统作点积。

2.2 梁弯曲的虚功：分部积分的几何表述（2018年12月）

我们将推导的虚功表达式将包含如下形式的项

$$\int M\kappa \, ds \tag{10}$$

其中， M 是平衡系统中的某个弯矩， κ 是协调系统中的某个共轭曲率。我们通过一些简单的示例说明如何在新范式中重现这一点，首先从发生小幅侧向变形的欧拉-伯努利梁的二维情形开始。

2.2.1 结构与平衡系统

考虑一根沿 $\mathbf{e}_1$ 轴定向的直梁，其坐标参数为 x，从起始节点 J 处的 $x = 0$ 到末端节点 K处的 $x = L$ 。该梁承受端弯矩和端

剪力，如图 5a 所示。形状图的环表示如图 5b 所示，其中在梁端之间添加了一条任意的返回路径，以形成闭合环路。选择该环路上的截面位置，使其紧邻节点 J 处的梁，该节点同时也是坐标系的原点。选择朝向节点 K、沿 $\mathbf{e}_1$，方向的一面作为正面。这就定义了形状环的方向。

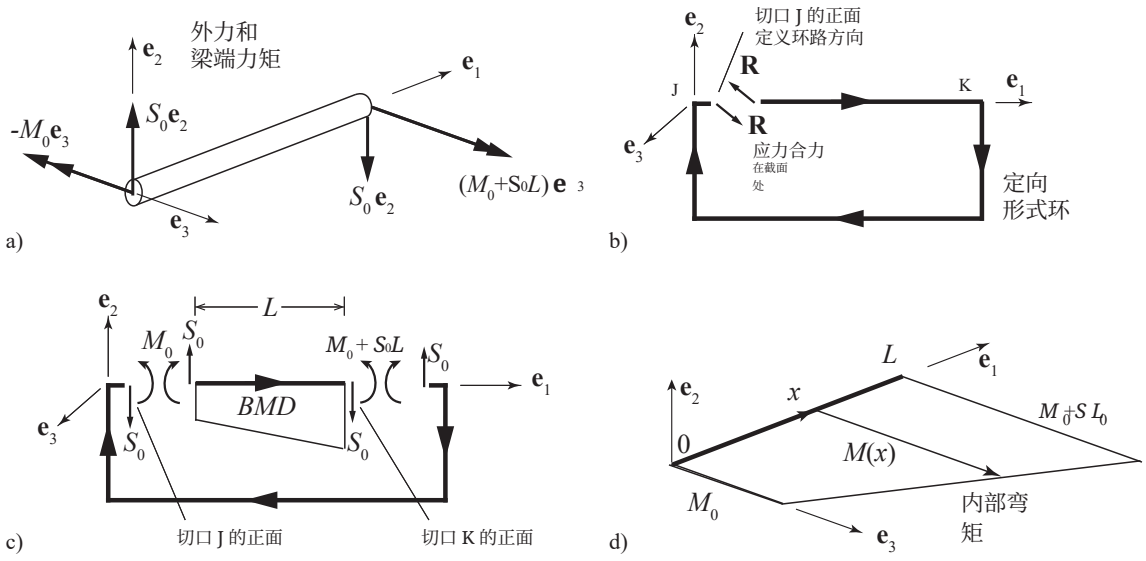

图 5：a) 承受施加的端剪力和端弯矩的梁。b) 形状图是通过用任意返回路径连接梁端而形成的定向环路。切口 J 的正面选择定义了环路方向。c) 传统上，弯矩图（BMD）绘制在弯曲平面内，**即**$_1$**此**$_2$ 处。d) 内弯矩 $M(x)$ 沿梁变化，并作为沿**垂直于**$_3$ 框架平面方向的向量绘制。这与传统弯矩图表示法垂直，但符合通常的力矩向量记法。

对于力图，我们需要选择一个力环，以表示作用在节点 J 处正切面上的应力关于原点的总力和总力矩。在无穷多个可能性中，我们选择图6a所示的简单三角形环路。其坐标由 S_0、M_0 和 u 的值定义，其中 u 是一个具有力的单位的量；此处我们选择 $u = 2$ 个单位，以便通过与三角形面积公式中的前导二分之一相消来简化计算。

根据 McRobie [4],，局部弯矩由混合环（F，ξ，η，ζ）的投影给出，该混合环使用原始应力函数 F，而非对偶应力函数 ϕ。图6b详细展示了这一点：投影到$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 平面上的面积沿着从 M_0 处的 J 到 K处的 $M_0 + S_0L$ 逐渐增大。

这就是平衡状态的几何图景：力和力矩由四维空间中的一个三角形环路表示；对于局部力矩，则有一个沿杆长度方向面积逐渐增大的三角形。量化所有信息所需的记录工作或许有些繁复，但最终呈现的三角形演变几何图景其实相当简单。

在下一节引入运动学时，我们需要完整的四维图景。为简化问题并使图示易于理解，我们将任意一点处的弯矩 x 视为向量 $(M_0 + S_0x)\mathbf{e}_3$,；这仅仅是一个便于使用的替代物，代表投影到$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 平面上的较大几何三角形对象。从本质上说，图5d中的简单梯形弯矩图是图6完整几何图景的简写。楔形

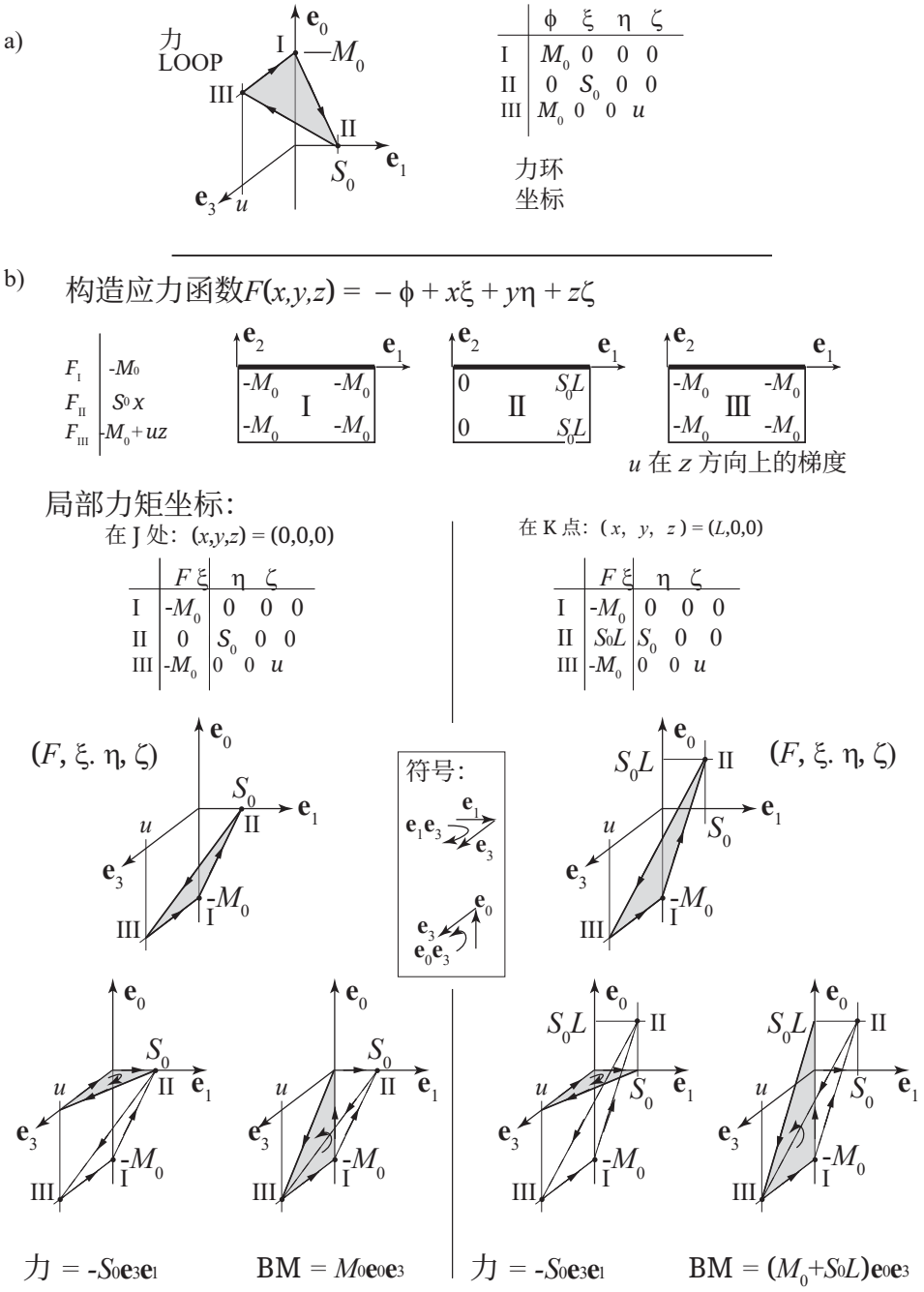

图 6：a）力图是应力空间（ϕ, ξ, η, ζ）中的任意定向环路，其六个投影给出了 J 点处的总应力合力。这里我们选取一个简单的三角形环路。环路上所有点的坐标 η 均为零，因此省略了$\mathbf{e}_2$ 维，从而简化了图示。b）局部弯矩由混合（F, ξ, η, ζ）空间中各环路在$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 平面上的投影面积给出。相应的投影面积按要求从 M_0 （ J处）变化到 $M_0 + S_0 L$ （ K处）。

$\mathbf{e}_0$ 与更简单示意图的乘积，得出的向量和双向量量与完整图示相同（见图7）。

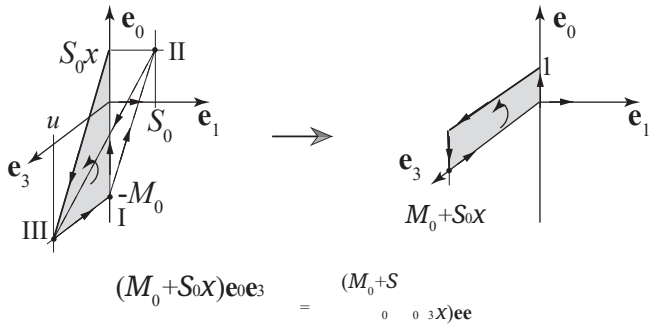

图7: 旗形双向量 $\mathbf{e}_0 \wedge (M_0 + S_0 x)\mathbf{e}_3$，将用作弯矩的简写 .

2.2.2 协调系统

现在考虑以下协调系统。设梁具有微小的横向位移$v(x)\mathbf{e}_2$, ，使变形后的梁成为一条位于 xy 平面内的曲线，其基底为$\mathbf{e}_1$ 和$\mathbf{e}_2$。

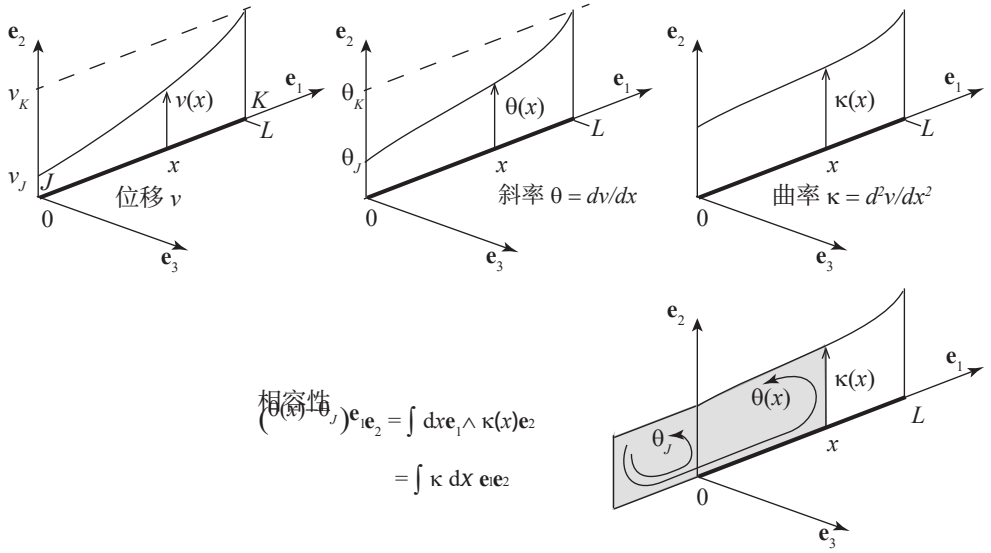

图8：沿梁绘出的位移、斜率和曲率运动学变量图。斜率 θ 也可表示为曲率图下方的有向面积。端点 I 处的初始斜率θ_I 可表示为原点左侧的有向面积 $\theta_I \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 。

我们可以在 xy 平面上将曲率 $\kappa(x) = d^2v/dx^2$ 绘制成图，如图8所示。设梁的斜率为 $dv/dx = \theta(x)$，且梁在左侧节点 J处的斜率为 $\theta(0) = \theta_J$，其中 $x = 0$。我们用几何方式将这一初始斜率表示为 xy 平面上的一个有向面积为 $\mathbf{\Theta}_J = \theta_J \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$的矩形，位置紧邻原点左侧。在图8中，该矩形绘制得恰好与 $\kappa(x)$图在 $x = 0$处相接，尽管并不需要如此整齐。

梁上任意一般点 x 处的斜率 $\theta(x)$，等于曲率图 $\kappa = d^2v/dx^2$的积分加上初始斜率 θ_J。其作为双向量的几何表示

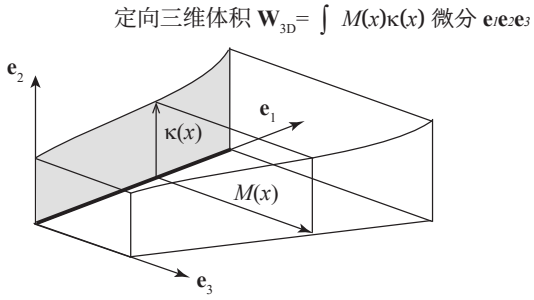

图 9：功积分 $\int_0^L M(x)\kappa(x)dx$ 表示为沿梁分布的三维体积。

$\mathbf{\Theta}(x)=\theta(x)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 如图 8 所示，即曲率图下方的有向面积与相邻的初始矩形。因而，梁的斜率将用一个 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 双向量表示。符号约定在陈述中定义

$$\mathbf{\Theta}(x)-\mathbf{\Theta}_J=\int_0^x\{dx'\mathbf{e}_1\wedge\kappa(x')\mathbf{e}_2\}=\int_0^x\kappa(x')dx'\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \tag{11}$$

对于平衡系统，关于z 轴存在弯矩$\mathbf{m}(x)\ =M(x)\mathbf{e}_3=(M_0+S_0x)\mathbf{e}_3$。如上一节所述，在完整的环表示中，这将由$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 平面上的双向量表示；但此处为简洁起见，我们使用沿$\mathbf{e}_3$ 方向的向量（图 7）。

2.2.3 虚功

图 9 展示了如何通过对具有边长 $M(x)$ 和 $\kappa(x)$、厚度为 dx 的矩形薄片求和，来构造弯矩-曲率积分。沿梁的积分 $\int M\kappa dx$ 因此由图 9 所示的三维空间中的定向体积给出。我们可以将虚功这一三维体积表示的方向定义为

$$\mathbf{W}_{3D}=\int_0^L\{dx\mathbf{e}_1\wedge\kappa(x)\mathbf{e}_2\wedge M(x)\mathbf{e}_3\}=\int_0^L M(x)\kappa(x)dx\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{12}$$

这个三维体积构成了梁弯曲所产生的虚功几何实现的一部分。不过严格来说，这里缺少一个维度。力矩 $M(x)$ 在此表示为向量 $M\mathbf{e}_3$，这是更基本对象——四维循环中的双向量分量 $M\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$——的一种简写。如果我们用简单的旗形双向量 $\mathbf{e}_0\wedge M\mathbf{e}_3$, 表示这一分量，那么三维体积积分可以左乘 $\mathbf{e}_0$ ，从而得到虚功作为定向四维体积的完整表示：

$$\mathbf{W}_{4D}=\int_0^L\{dx\mathbf{e}_1\wedge\kappa(x)\mathbf{e}_2\wedge[\mathbf{e}_0\wedge M(x)\mathbf{e}_3]\}=\int_0^L M(x)\kappa(x)dx\ \mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{13}$$

目前，我们仍采用虚功的三维体积描述。图 10 展示了最外层的三维体积 $M_K\theta_K\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 如何分解为三个子体积；该三维体积对应于涉及节点 K 处端弯矩和转动的外虚功。其中一个子体积的定向体积为 $-M_J\theta_J\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ，与节点 J处的初始（外部）端弯矩和转动相关；另一个与（内部）弯矩-曲率积分 $\int M\kappa dx$ 相关；第三个则可表明涉及剪切力与横向位移之间的相互作用。

图 11 展示，第三个子体积可以通过累加厚度为$-Sdx$ 、面积为 $\theta(x)$ 的切片来确定，因此定向体积为 $-S(v_K-v_J)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$。

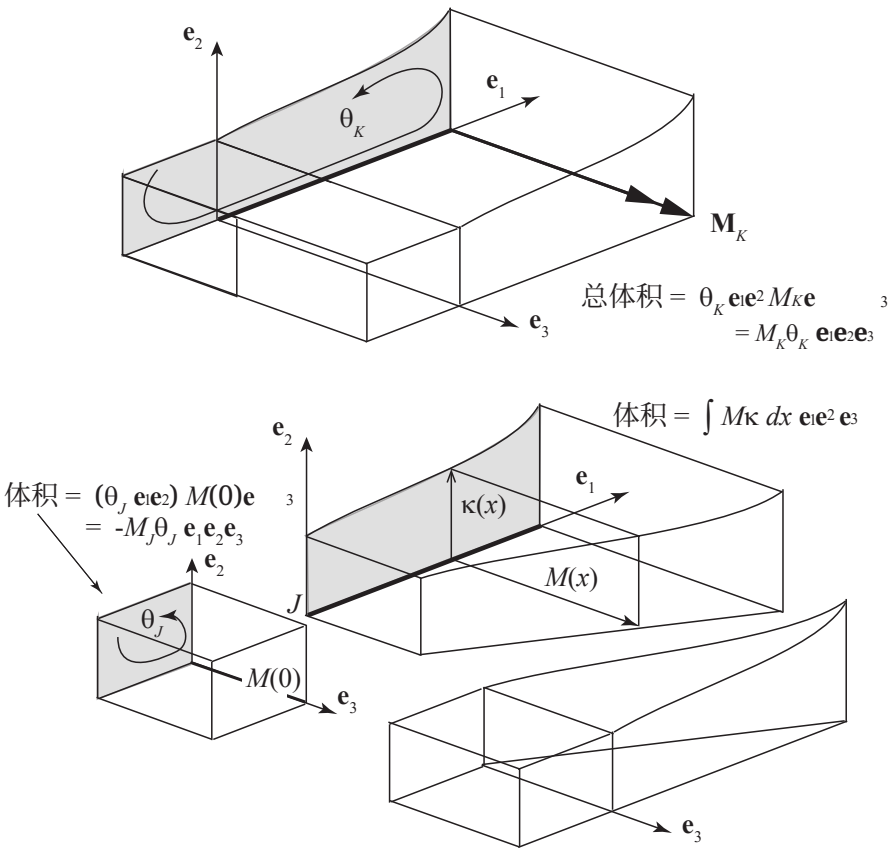

图1 0：功积分的几何分解。总体积表示外虚功 $M_K\theta_K$，该虚功由梁右端的力矩和转动产生。下方各图将其分解为三个子体积：其中一个表示外虚功 $M_J\theta_J$，该虚功由梁左端的力矩和转动产生。另一个是由弯曲产生的内虚功，由沿梁的弯矩-曲率积分 $\int_0^L M(x)\kappa(x)dx$ 给出。第三个体积表示由梁端的剪力和横向位移产生的外虚功，后文将对此进行说明。

将总体积（以其四维体积形式表示）等同于三个子体积之和，由此可得

$$M_K\theta_K\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \left(-M_J\theta_J \; + \; \int_0^L M(x)\kappa(x)dx \; - \; S(v_K - v_J)\right)\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{14}$$

整理后可得

$$(M_K\theta_K + M_J\theta_J + S_Kv_K + S_Jv_J)\,\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \int_0^L M(x)\kappa(x)dx\;\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \tag{15}$$

左边对应外力作用，右边对应内力作用。这当然是熟悉的梁端受载时的虚功原理，但在这里，我们用几何形式表达了通常仅以代数形式书写的这一原理。

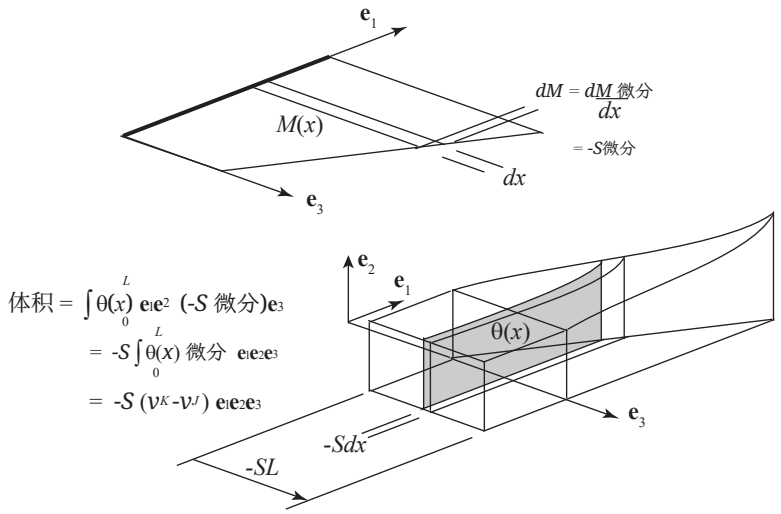

图11：第三个子体积表示梁端剪力和横向位移所产生的外虚功。这是通过取平行于$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 平面的薄切片得到的。这些切片的面积为 $\theta(x)$，厚度为 $dM = -Sdx$。由于梁的跨内没有施加任何力，剪力保持恒定。因此，体积分为 $-S\int \theta dx = -S(v_K - v_J)$，其中 v_J和 v_K 分别是端点 J 和 K沿$\mathbf{e}_2$ 方向的横向位移。

当然，这也只是分部积分的几何表述。

$$\begin{aligned}\int_0^L M(x)\kappa(x)dx \;=\; \int_0^L M\frac{d\theta}{dx}dx \;&=\; [M\theta]_0^L - \int_0^L \frac{dM}{dx}\theta dx \\ &=\; [M\theta]_0^L + S\int_0^L \theta dx \\ &=\; M_K\theta_K + M_J\theta_J + S_K v_K + S_J v_J \end{aligned} \tag{16}$$

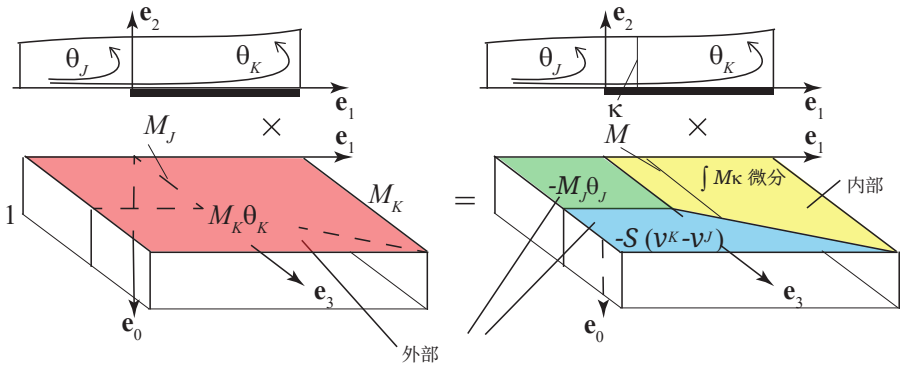

图12：梁弯曲的虚功几何表述，以四维体积的等价性表示。梁最初沿$\mathbf{e}_1$ 轴延伸，并弯曲至$\mathbf{e}_2$ 方向。协调系统的关键是曲率图，该图沿$\mathbf{e}_2$ 方向绘制，其积分给出形如 $\theta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$的旋转双向量。平衡系统的关键是力矩，它们表示为$\mathbf{e}_3$ 方向上大小为 M 的向量，但预先与单位向量$\mathbf{e}_0$ 相乘，从而形成形如 $M\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 的力矩双向量。虚功的各个要素以颜色编码：外部贡献用红色、绿色和蓝色表示，内部虚功用黄色表示。必须注意符号。在此，内部（黄色）等于外部（红色减绿色减蓝色）。12

这表明内虚功必须等于外虚功，并且不要求平衡系统 $M(x)$ 产生相容性系统的曲率 $\kappa(x)$。

二维梁弯曲的虚功原理几何图示概括于图12中。与内虚功积分相关的体积以黄色表示，而外虚功的各种正、负贡献则以红色、绿色和蓝色表示。这些$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$四维体积由表示力矩的$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 双向量与表示转动的$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$双向量的楔积构成。

2.3 弯曲的典型例子（2019年1月）

图13展示了与梁弯曲的两种典型构型相关的虚功几何图示——带端弯矩的悬臂梁和带端部荷载的悬臂梁。在每种情况下，都示意了虚功划分为各种外部和内部体积的情况。在这一阶段，与前一节一样，尚未采用特定的材料定律，定义相容性系统的曲率图完全是一般性的。

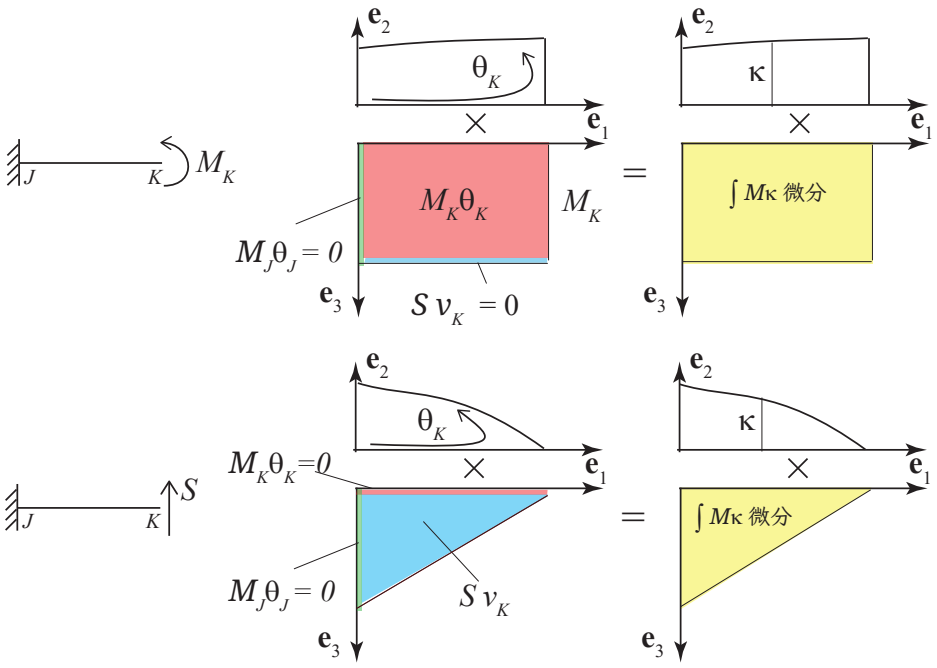

图13：虚功背后的几何原理，展示了梁弯曲的两种典型构型——施加端弯矩的悬臂梁和承受端部荷载的悬臂梁。

在图14中，假设材料遵循弹性材料定律，且梁的抗弯刚度 EI 处处恒定。现在，相容性系统与平衡系统相互关联，曲率由$\kappa = M/EI$给出。两种情况下，体积积分都显而易见。对于施加的端弯矩（图14a），内虚功形成一个长方体，其边长为（M/EI）$\times M \times L$。这必须等于外虚功长方体的体积 $M_K\theta_K$，由此立即得到熟知结果：$\theta_K = M_K L/EI$。

对于带端部荷载的悬臂梁（图14b），其体积呈棱锥形。因此，内部虚功等于边长为（SL/EI）$\times SL \times L$的包围长方体体积的三分之一。这必须等于外虚功体积 Sv_K，从而得到端部挠度 $v_K = SL^3/EI$。

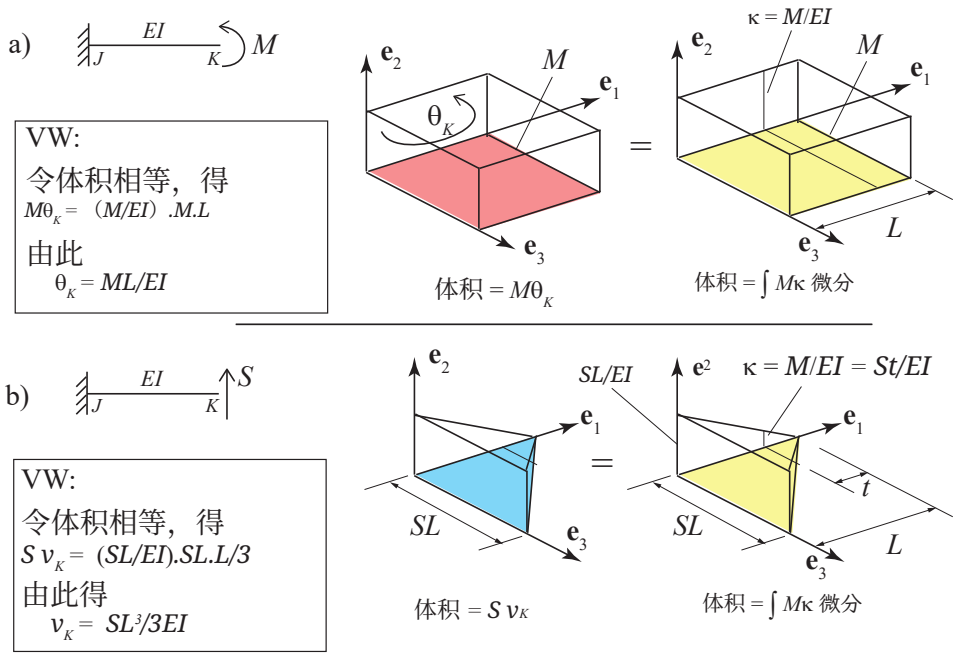

图14：均匀弹性梁弯曲的两种熟悉的典型构型。a）显示一根承受端弯矩的悬臂梁，b）显示一根承受横向端载荷的悬臂梁。在这两种情况下，力法都令内部虚功和外部虚功的四维体积相等，且平衡系统与协调系统相同。两种情况下，弯矩双向量中的（平凡）$\mathbf{e}_0$ 分量均未显示。

在这些图示中，为简洁起见，弯矩双向量中的因子 $\mathbf{e}_0$ 被省略了。因此，我们得到一种简化的（三维）几何描述，更易于直观理解，但不具备完整四维描述的更广泛表达能力；在完整的四维描述中，力矩由某种更一般的定向双向量表示。

2.4 Γ Γ框架

受载的 Γ 框架（可能是一台简易起重机）提供了一个简单的弯曲示例（见图15a）。一个典型问题是：已知顶端的竖向载荷 F，求该处挠度的竖向分量 δ。按照力法的惯例，设想一个虚拟系统，在顶端施加单位竖向载荷，以提取该处的位移分量。虚功积分如图15c所示。实际曲率图绘制在$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ 平面上。图15b显示了虚弯矩的传统弯矩图；而对于图15c中的体积积分，该图已旋转，使虚弯矩沿$\mathbf{e}_3$ 方向绘制为向量。这是对$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3$ 平面上虚弯矩回路的一种符号简写。与前面的图14一样，外功体积与内功体积重合，将两者相等可得

$$\delta_C = \frac{FL^2}{EI}\left(H + \frac{L}{3}\right)$$

这是通过更传统的方法通常会得到的结果，但在这里，我们还将虚功的各种贡献以完整空间中的四维体积形式进行了图形表示 $\mathbf{W} = W\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$。

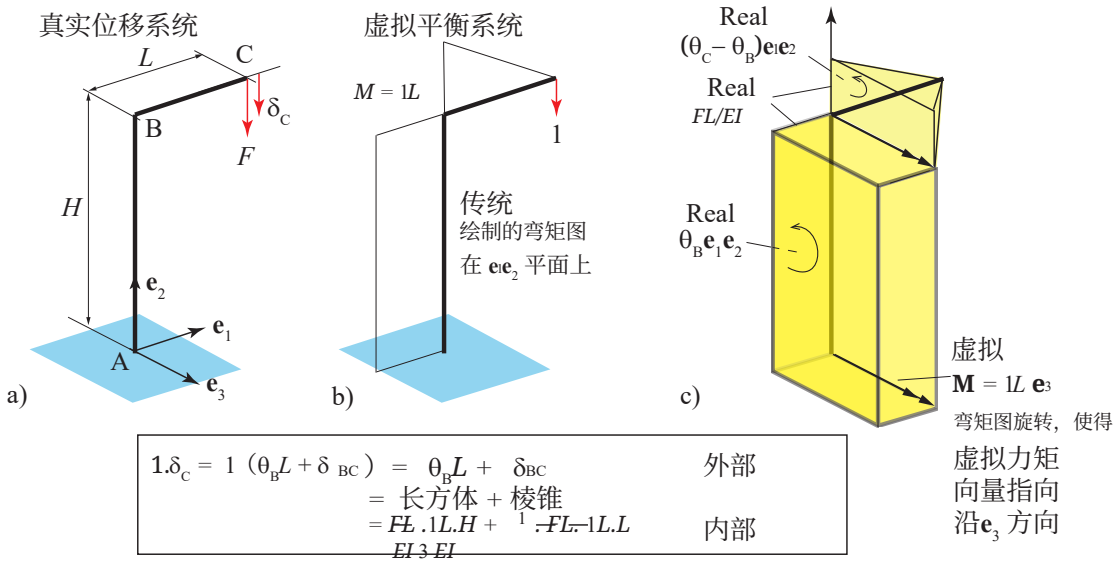

图15：用于计算受载框架端部挠度的虚功计算所依据的几何关系。a)、b)分别展示了实际位移系统和虚拟平衡系统。c)展示了得出结果的体积分。表示虚拟力矩的循环在$\mathbf{e}_0$ 方向上的单位向量未显示在$\mathbf{e}_0$ $\mathbf{e}_3$上。

3 总结与结论

文中展示了，先前用于描述三维刚接框架结构中力与力矩平衡的环形式体系 [4, 5]，也可以用类似的方式来描述其位移与转动。此时，结构状态由四维空间中的三组环给出：形环、力环和位移环。虽然起初用四维空间中一个环的投影双向量面积来描述转动，似乎有些不同寻常，甚至显得笨拙，但文中说明了这种描述如何对应于常用做法：对梁曲率图进行积分，以求得端部转角的变化。对于采用线弹性材料定律的梁结构，弯矩图可以解释为一个环，而梁曲率则是其按比例缩放的形式。虚功原理由此体现为一种四维体积等价关系，该体积由力环与位移环的楔积给出。

参考文献

[1] F. Klein。关于直线几何与刚体力学之间联系的札记。《数学年鉴》，4:226–238，1871。[2] J. C. Maxwell。关于互反图形、参考系和力图。《爱丁堡皇家学会会刊》，XXVI，第1部分：1–40，1870。[3] A. McRobie。通过闵可夫斯基和分析受载二维和三维桁架的 Maxwell 与 Rankine 互反图。《国际空间结构期刊》，31(2-4):203–216，2016。[4] A. McRobie。刚性连接三维框架的完整图形静力学。第1部分：力矩的勒让德变换。*arXiv*，(2411.05719)，2024。[5] A. McRobie。刚性连接三维框架的完整图形静力学。第2部分：环的同调。*arXiv*，(2603.12093)，2026。

[6]A. McRobie、M. Konstantatou、G. Athanasopoulos 和 L. Hannigan。图解运动学、可视化虚功与弹性图学。*R Soc Open Science*，4，170202，2017。doi：https://doi.org/10.1098/rsos.170202。