arXiv:2603.16498v1 [math.GR] 17 Mar 2026

# 有限$p$群的非循环子群数量 [1]

Jia Liu[a]，Li Ma[b]，Wei Meng[a]*a. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院，中国广西桂林，541002。b. 曲靖师范学院数学与统计学院，中国云南曲靖，655000。电子邮箱：3542414643@qq.com，821962782@qq.com，mlwhappyhappy@163.com，

**摘要**

设$G$ 为有限$p$群， $\delta(G)$表示$G$的所有非循环子群的数量。本文给出了 $\delta(G)$的一个上界。此外，我们证明，对于阶为$p^n$的任意非初等阿贝尔$p$群$G$，有 $\delta(G) \leq \delta(M_p(1,1,1) \times C_p^{n-3})$（若$p = 2$，则 $\delta(G) \leq \delta(D_8 \times C_2^{n-3})$）。

关键词：$p$-群、非循环子群、特异 2 群，数学主题分类（2020）：20D15，20D30

## 1 引言

本文中，所考虑的群均为有限 p 群，其中 p 是素数。子群计数是有限 p 群研究中的一个重要方面。设 G 是一个阶为 $p^n$ 的有限群，并令 $s_m(G)$ 表示阶为 $p^m$ 的子群的个数。众所周知，若对所有 $1 \leq m \leq n$，均有 $s_m(G) = 1$，则 G 是循环群（见 [3]）。Kulakoff [9] 证明，当 $p > 2$ 时，$s_m(G) \equiv 1$ 或 $1 + p \pmod{p^2}$。Hua 和 Tuan 研究了 p 群 G 的子群数 $s_m(G)$ 模 $p^3$ 的可能情况及其他计数问题，并得到了许多重要的计数定理（见 [7, 8, 18]）。后来，许多学者研究了 $s_m(G)$ 模 $p^3$，的情形，例如 Djubjuk [5], 、Berkovich [2], 、Zhang 和 Qu [13, 19, 20]。

另一方面，Fan [6]研究了有限$p$-群中$s_m(G)$的上界。他证明了$s_1(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor_p$，等号成立当且仅当 $\exp(G) = p$；对于 $2 \leq m < n$，有$s_m(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor_p$，等号成立当且仅当$G$ 是初等阿贝尔$p$群。Fan 的结果表明，在$p$-群中，每个阶的子群数量最多的是初等阿贝尔$p$群。由此自然产生一个问题：除了初等阿贝尔$p$群之外，哪些$p$-群在每个阶上也拥有最多的子群?

[1]* 通讯作者：W. Meng（mlwhappyhappy@163.com）。W. Meng 获得广西自然科学基金项目（2025JJA110017）、国家自然科学基金（12161021）、广西应用数学中心（桂林电子科技大学）和广西高校数据分析与计算重点实验室的资助。Jia Liu 获得桂林电子科技大学研究生教育创新项目（2025YCXS124）的资助。

2013年，Qu [14] 回答了上述关于 $p > 2$的问题。他证明，若 G 是阶为 $p^n$ 的群，且 N 是 G 的阶为 p 的正规子群，则对所有 $1 \le k \le n$，都有 $s_k(G) \le s_k(G/N \times C_p)$。此外，设 $\widetilde{G} = M_p(1,1,1) \times C_p^{n-3}$，其中 $M_p(1,1,1)$ 是一个阶为 $p^3$、指数为 p 的非阿贝尔群。Qu [14] 还证明$\widetilde{\ }$，若 G 是非初等阿贝尔 p 群，则对所有 $1 \le k \le n$，都有 $s_k(G) \le s_k(G)$。令 s(G) 表示 G 的所有子群的数量。Qu 的结果表明，对于所有非阿贝尔 p-群，不等式 $s(G) \le s(M_p(1,1,1) \times C_p^{n-3})$ 成立。作为上述研究的延续，T$\check{\text{a}}$rn$\check{\text{a}}$ucean [17] 证明，若 G 是阶为 $2^n$的非初等阿贝尔2群，则 $s(G) \le s(D_8 \times C_2^{n-3})$。与之对偶的是，Aivazidis 和 M¨uller [1] 得出了有限非循环 p 群的 s(G) 下界。Meng 和 Lu [12] 将 Aivazidis 和 MM¨uller 的结果推广到了具有特定阶的所有有限非循环幂零群。

最近，Lazorec、Shen 和 T$\check{\text{a}}$rn$\check{\text{a}}$uceanu [10] 研究了有限$p$群的循环子群数量的次小值（或次大值）。令$c(G)$表示$G$ 的所有循环子群的数量，$c_m(G)$表示 $G$ 中阶为$p^m$的循环子群数量。他们 [10] 证明了$c(G) \le \frac{p^n+p^2-p-1+(p-1)^2c_1(G)\,p^2-p}{}$。此外，Meng 和 Lu 还确定了有限非循环幂零群的$c(G)$的下界。

鉴于上述研究，本文考察有限$p$群的非循环子群数量。为方便起见，记 $\delta_m(G)$为$G$ 中阶为$p^m$ 的非循环子群数量，记 $\delta(G)$为$G$的所有非循环子群数量。我们的首要目标是给出有限$p$群$G$的 $\delta(G)$的上界。我们证明以下结果。

**定理1.1** 设群 $G$ 的阶为 $p^n$。那么

$$\delta(G) \le \sum_{k=2}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p,$$

且等号成立当且仅当 $G$ 是阶为 $p^n$ 的初等阿贝尔 $p$ 群。

此外，我们研究有限非初等阿贝尔$p$-群$G$的 $\delta(G)$ 上界。与 Qu [14], 的结果类似，我们得到以下结果。

**定理1.2** 设 $G$ 是一个阶为 $p^n$ 的群，其中 $p$ 是奇素数。若 $G$ 不是初等阿贝尔群，则

$$\delta(G) \le \delta(M_p(1,1,1) \times C_p^{n-3}).$$

最后，对于有限非初等阿贝尔2-群，我们得到以下结果。

**定理 1.3** 设 $G$ 是一个阶为 $2^n$ 的群。若 $G$ 不是初等阿贝尔群，则

$$\delta(G) \le \delta(D_8 \times C_2^{n-3}).$$

所有未加说明的符号和术语均为标准用法，可参见 [3,15]。此外，$C_n$ 表示阶为$n$的循环群；$A \times B$ 表示$A$ 与$B$的直积；$T_d$ 表示$T$的$d$个群的直积；$A * B$ 表示具有同构中心的$A$ 与$B$的（ amalgamated）中心积；$X^{*r}$ 表示$X$的$r$ 个拷贝的中心积。

## 2 预备知识

本节汇集一些将在主要结果证明中用到的结论。为方便起见，我们列出一些关于阶为$p^m$ 的初等阿贝尔 p 群（阶为$p^n$）的$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p$ 个子群数量的已知结果。

**引理 2.1** *[3]*(1)

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p = \begin{cases} \frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p^{n-m+1}-1)}{(p^m-1)(p^{m-1}-1)\cdots(p-1)}, & n > m > 0 \\ 1, & m < 0 \end{cases}$$

(2) *If* $n \geq m$, *then* $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_p$

(3) *For n and m,* $\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_p + p^{n-m+1}\begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}_p$

**引理 2.2** *[3]* 设 $|G| = p^n$, $1 < m < n$。若 $s_m(G) = 1$，则 $G$ 是循环的。

**引理 2.3** *[3, 6]* 设 $G$ 是一个阶为 $p^n$ 的群。那么
*(1)* $s_1(G) \leq \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_p$，特别地，当且仅当 $\exp(G) = p$ 时等号成立。*(2)* 若 $1 < k < n$，则 $s_k(G) \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p$，当且仅当 $G$ 是初等阿贝尔 $p$-群时等号成立。

**引理 2.4** *[14]* 设 $G$ 是一个阶为 $p^n$ 的群，其中 $p$ 是奇素数，且$\tilde{G} = M_p(1,1,1)\times C_p^{n-3}$。若 $G$ 是非初等阿贝尔群，则 $\forall 1 \leq k \leq n$，$s_k(G) \leq s_k(\tilde{G})$.特别地，若 $2 \leq k \leq n-2$，则 $s_k(G) < s_k(G)$。

**引理 2。5** *[17]* 设 $G$ 是一个阶为 $2^n(n \geq 3)$ 的有限非初等阿贝尔2-群。那么 $s_k(G) \leq s_k(D_8 \times C_2^{n-3})$，$\forall 0 \leq k \leq n$。

回顾一下，有限2群称为：- 超特殊群，当$Z(G) = G' = \Phi(G)$的阶为 2；- 近超特殊群，当$G' = \Phi(G)$ 的阶为 2 且 $Z(G) \leq C_4$；- 广义超特殊群，当$G' = \Phi(G)$ 的阶为 2 且$G' \leq Z(G)$。这些群的结构如下所述，众所周知。

**引理 2。6** *[4, 16]* 设 $G$ 是一个有限2-群。
*(1)* 若 $G$ 是超特殊群，则 $|G| = 2^{2r+1}$，其中 $r$ 为某个正整数，并且 $G \cong D_8^{*r}$ 或 $G \cong Q_8 * D_8^{*(r-1)}$。
(2) 若 $G$ 是近超特殊群，则对某个正整数 $r$，有 $|G| = 2^{2r+2}$，且 $G \cong D_8^{*r} * C_4$。

*(3)* 若 $G$ 是广义超特殊群，则 $G \cong E \times A$ 或 $G \cong (E * C_4) \times A$，其中 $E$ 是超特殊 2 群，$A$ 是初等阿贝尔 2 群。

**引理 2**。**7** *[17]* 给定一个2群 $G$，记 $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(G)$ 为 $G$ 的所有初等阿贝尔截面 $H_2/H_1 \cong C_2^{\alpha}$ 的集合，其中 $|H_1| = 2^{\beta}$。若 $G$ 是（几乎）超特殊群，且其阶为$2^n$，则

$$|\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(G)| \leq |\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(D_8 \times C_2^{n-3})|, \textit{ for all } \alpha \textit{ and } \beta.$$

**引理2.8** 若 $G$ 是阶为 $2^n$ 的（几乎）超特殊群，则

$$\delta_2(G) \leq \delta_2(D_8 \times C_2^{n-3}).$$

**证明**。令 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 0$，由引理2.7即可得出此结论。□

引理*2.9* *[15]* 设 $A$ 和 $B$ 是两个有限群。那么，直积 $A \times B$ 的每个子群 $H$ 都由五元组 $(A_1, A_2, B_1, B2, \varphi)$ 完全确定，其中 $A_1 \trianglelefteq A_2 \leq A$，$B_1 \trianglelefteq B_2 \leq B$，且 $\varphi : A_2/A_1 \longrightarrow B_2/B_1$ 是一个同构，更确切地说，$H = \{(a,b) \in A_2 \times B_2 | \varphi(aA_1) = bB_1\}$。此外，我们有 $|H| = |A_1||B_2| = |A_2||B_1|$。

# 3 主要结果的证明

**命题3.1** 设 $p$ 为奇素数，$G$ 是一个阶为 $p^n$ 的群，且 $\exp(G) = p^m$。则

$$\delta(G) \leq \frac{p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + s(G) - s_1(G) - 1,$$

**证明**。由于 $|G| = p^n$ 且 $\exp(G) = p^m$，我们有

$$\begin{aligned} p^n &= 1 + (p-1)c_1(G) + (p^2-p)c_2(G) + \cdots + (p^m - p^{m-1})c_m(G) \\ &= 1 + (p-1)c_1(G) + (p^2-p)(s_2(G) - \delta_2(G)) + \cdots + (p^m - p^{m-1})(s_m(G) - c_m(G)) \\ &\leq 1 + (p-1)c_1(G) + (p^m - p^{m-1})[(s_2(G) + \cdots + s_m(G)) - (\delta_2(G) + \cdots \delta_m(G))]. \end{aligned}$$

这意味着

$$\delta_2(G) + \cdots + \delta_m(G) \leq \frac{1-p^n}{p^m-p^{m-1}} + \frac{p-1}{p^m-p^{m-1}}c_1(G) + s_2(G) + \cdots + s_m(G).$$

注意，若 $\exp(G) = p^m$，则对于$k = m+1, \cdots, n$，有 $\delta_k(G) = s_k(G)$。显然，$s_1(G) = c_1(G)$。因此我们有

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \delta_2(G) + \cdots + \delta_m(G) + \delta_{m+1}(G) + \cdots + \delta_n(G) \\ &\leq \frac{1-p^n}{p^m-p^{m-1}} + \frac{p-1}{p^m-p^{m-1}}s_1(G) + s_2(G) + \cdots + s_m(G) + \delta_{m+1} + \cdots + \delta_n(G) \\ &= \frac{1-p^n}{p^m-p^{m-1}} + \frac{p-1}{p^m-p^{m-1}}s_1(G) + (s_2(G) + \cdots + s_m(G) + s_{m+1}(G) + \cdots + s_n(G)) \\ &= \frac{1-p^{n-m+1}+p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + \frac{p-1}{p^m-p^{m-1}}s_1(G) + (s(G) - s_1(G) - 1). \end{aligned}$$

再次应用条件 $\exp(G) = p^m$，我们可以看到秩 $\text{rank}(G) \leq n-m+1$。由引理2.3(1)，我们有

$$s_1(G) \le \begin{bmatrix} n-m+1 \\ 1 \end{bmatrix}_p = \frac{p^{n-m+1}-1}{p-1}.$$

这就得到 $1-p^{n-m+1} \le (1-p)s_1(G)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\delta(G) &\le \frac{1-p^{n-m+1}+p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + \frac{p-1}{p^m-p^{m-1}}s_1(G) + (s(G)-s_1(G)-1) \\ &\le \frac{p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + s(G) - s_1(G) - 1.\end{aligned}$$

因此，命题的证明完成。 □

**定理1.1的证明**。设$G$ 是一个阶为$p^n$ 且 $\exp(G) = p^m$的群。首先，应用命题3.1，得到

$$\delta(G) \le \frac{p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + s(G) - s_1(G) - 1.$$

此外，注意到$p^{n-m+1}-p^n \; p^m-p_{m+1} \le 0$，并结合引理2.3(2)，可得

$$\delta(G) \le s(G) - s_1(G) - 1 = \sum_{k=2}^{n} s_k(G) \le \sum_{k=2}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_p.$$

这表明只有当$m = 1$时等号成立。最后，再次应用引理2.3(2)，可得等号成立当且仅当$G$ 是初等阿贝尔$p$群。定理的证明完成。 □

**定理1.2的证明**。设$G$ 是一个阶为$p^n$ 且 $\exp(G) = p^m$的群。首先，应用命题3.1，得到

$$\delta(G) \le \frac{p^{n-m+1}-p^n}{p^m-p^{m-1}} + s(G) - s_1(G) - 1.$$

此外，注意到$p^{n-m+1}-p^n \; p^m-p_{m+1} \le 0$，并结合引理2.3(2)，可得

$$\delta(G) \le s(G) - s_1(G) - 1 = \sum_{k=2}^{n} s_k(G).$$

这意味着等式成立必然有$m = 1$。由引理2.4，我们有$s_k(G) \le s_k(\widetilde{G})$，其中对于 $\forall 1 \le k \le n$，有 $\widetilde{G} = M_p(1,1,1) \times C_p^{n-3}$。因此我们得到 $\delta_c(G) \le \delta_c(\widetilde{G})$。定理得证。 □

**命题3.2** 设$G$是一个阶为$p^n$ 的群，$N$是$G$的一个阶为$p$的正规子群，则 $\delta_k(G) \le \delta_k(G/N \times C_p)$ 对于 $1 \le k \le n$。

**证明**。 我们的证明将对 $|G|$ 使用归纳法。若 $|G| = p$ 或 $p^2$，结论显然。设 $\widetilde{G} = \widetilde{G/N \times N}$，其中 $|N| = p$。由归纳法可假设，对于满足 $N \le H$ 的任意子群 $H$，都有 $\delta_k(H) \le \delta_k(H/N \times N)$。现在，令

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{H \le G \mid N \le H, |H| = p^k \text{ and } H \text{ is non-cyclic }\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{H \le G \mid N \not\subset H, |H| = p^k \text{ and } H \text{ is non-cyclic }\}.\end{aligned}$$

于是我们有 $\delta_k(G) = |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2|$。另一方面，令

$$\mathcal{T}_1 = \{\widetilde{H} \leq \widetilde{G} \mid \widetilde{N} \leq \widetilde{H}, |\widetilde{H}| = p^k\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\widetilde{H} \leq \widetilde{G} \mid \widetilde{N} \nleq \widetilde{H}, |\widetilde{H}| = p^k \text{ and } \widetilde{H} \text{ is non-cyclic}\}.$$

因此，$\delta_k(\widetilde{G}) = |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2|$。显然，对于$G$的任意一个阶为$p^k$的子群$H$，若$N \leq H$，令$\widetilde{H} = H/N \times N$，则$\widetilde{H} \in \mathcal{T}_1$，因此$|\mathcal{S}_1| \leq |\mathcal{T}_1|$。

下文中，我们只需证明 $|\mathcal{S}_2| \leq |\mathcal{T}_2|$。令 $\mathcal{S}$ 表示$G/N$中所有阶为$p^k$ 的非循环子群构成的集合，令 $\mathcal{M}(\widetilde{H})$（分别地，$\mathcal{M}(H)$）表示$\widetilde{H}$（分别地，$H$）中所有不包含$N$（分别地，$N$）的非循环极大子群构成的集合。记 $\mathcal{S}_3 = \{H \leq G | H/N \in \mathcal{S}\}$ 且 $\mathcal{T}_3 = \{H \leq G | H/N \in \mathcal{S}\}$。我们断言 $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{\widetilde{H} \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(\widetilde{H})$ 和 $\mathcal{T}_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{T}_3} \mathcal{M}(H)$。我们只证明 $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H)$，并且 $\mathcal{T}_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{T}_3} \mathcal{M}(\widetilde{H})$ 可以通过类似的方法得到。

首先，我们证明 $\mathcal{M}(H_1) \bigcap \mathcal{M}(H_2) = \varnothing$ 当 $H_1, H_2 \in \mathcal{S}_3$ 时，其中 $H_1 \neq H_2$。若非如此，设 $L \in \mathcal{M}(H_1) \bigcap \mathcal{M}(H_2)$。那么很容易看出 $H_1 = LN = H_2$，，这就产生了矛盾。

其次，我们可以证明 $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H)$。显然，$\bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H) \subseteq \mathcal{S}_2$。$H$ 另一方面，设 $L \in \mathcal{S}_2$。那么 $LN \in \mathcal{S}_3$ 且 $L \lessdot LN$。因此 $L \in \bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H)$。这意味着 $\mathcal{S}_2 \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H)$，从而 $\mathcal{S}_2 = \bigcup_{H \in \mathcal{S}_3} \mathcal{M}(H)$。

最后，我们需要证明，对于每个$\widetilde{H} \in \mathcal{S}_3$，都有 $|\mathcal{M}(\widetilde{H})| \leq |\mathcal{M}(H)|$，其中$H = \widetilde{H}/N \times N$，因此 $|\mathcal{S}_2| \leq |\mathcal{T}_2|$。事实上，我们知道

$$|\mathcal{M}(H)| = \delta_k(H) - (\delta_{k-1}(H/N) + |\nu_{k-1}(H/N)|) \text{ and } |\mathcal{M}(\widetilde{H})| = \delta_k(\widetilde{H}) - s_{k-1}(H/N),$$

其中集合 $\nu_{k-1} = \{L/N \leq H/N \| L| = p^k$，$L/N$ 是循环的，但$L$ 是非循环的$\}$。因此，我们只需证明 $\delta_k(\widetilde{H}) \leq \delta_k(H)$。注意到$\widetilde{H}$ 是$G$的真子群，由归纳法，我们已假设 $\delta_k(\widetilde{H}) \leq \delta_k(H)$。定理的证明至此完成。 □

接下来，我们指出，定理 3.2 可以很容易地推广如下。

**定理 3.3** 设 $G$ 是一个阶为 $p^n$ 的有限 $p$ 群，$M$ 是一个阶为 $p^r$ 的正规子群。则

$$\delta_k(G) \leq \delta_k(G/M \times C_p^r), \text{ for any } 0 \leq k \leq n.$$

**证明**。 取一个包含$M$ 的$G$ 的主列，并对$r$使用归纳法。 □

**定理 3.4** 设 $G$ 是一个阶为 $2^n$、具有 $n \geq 3$ 的有限阿贝尔2群。若 $G$ 不是初等阿贝尔群，则

$$\delta(G) \leq \delta(D_8 \times C_2^{n-3}).$$

**证明**。 由于$G$ 不是初等阿贝尔群，因此

$$\delta_k(G) \leq \delta_k(C_4 \times C_2^{n-2}), \text{ for all } 0 \leq k \leq n,$$

反复应用定理 3.2。因此，只需证明

$$\delta_k(G_1 \times C_{2^{n-3}}) \le \delta_k(D_8 \times C_{2^{n-3}}), \text{ for all } 2 \le k \le n.$$

其中 $G_1 = C_4 \times C_2$。注意到 $\exp(D_8 \times C_{2^{n-3}}) = \exp(G_1 \times C_{2^{n-3}}) = 2^2$，并应用引理 2.5，若 $3 \le k \le n$，则有

$$\delta_k(G_1 \times C_{2^{n-3}}) = s_k(G_1 \times C_{2^{n-3}})) \le s_k(D_8 \times C_{2^{n-3}}) = \delta_k(D_8 \times C_{2^{n-3}}).$$

因此，我们只需证明 $\delta_2(G_1 \times C_{2^{n-3}}) \le \delta_2(D_8 \times C_{2^{n-3}})$。

容易计算得出 $\delta_2(G_1 \times C_{2^{n-3}}) = \left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right]_2$，并且

$$\delta_2(D_8 \times C_{2^{n-3}}) = 2 \cdot \left[ \begin{matrix} n-1 \\ 2 \end{matrix} \right]_2 - \left[ \begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix} \right]_2.$$

因此，我们有 $\delta_2(G_1 \times C_{2^{n-3}}) \le \delta_2(D_8 \times C_{2^{n-3}})$，从而 $\delta(G_1 \times C_{2^{n-3}}) \le \delta(D_8 \times C_{2^{n-3}})$。定理的证明完成。 □

**定理 1.3 的证明**。设$G$ 是一个阶为 $2^n$ 的非初等阿贝尔群，且 $|G'| = 2^m$。若 $m = 0$，则$G$ 是阿贝尔群，结论由定理 3.4 得出。因此我们可以假设 $m \ge 1$。

首先，假设$G/G'$ 不是初等阿贝尔群。应用定理 3.3，可得

$$\delta_k(G) \le \delta_k(G/G' \times C_2^m), \text{ for any } 2 \le k \le n.$$

此外，根据定理 3.4，我们得到 $\delta(G) \le \delta(D_8 \times C_{2^{n-3}})$。

其次，假设$G/G'$ 是初等阿贝尔群，则$G' = \Phi(G)$。令$M$ 为$G$ 的正规子群，使得$M \le G'$ 且 $|G' : M| = 2$。再次应用定理 3.3，可得

$$\delta_k(G) \le \delta_k(G/M \times C_2^{m-1}), \text{ for any } 2 \le k \le n.$$

记$G_1 = G/M$，则$G_1' = \Phi(G_1) \le Z(G_1)$且 $|G_1'| = 2$。因此$G_1$ 是一个广义特异2群。由此，根据引理 2.6，可得

$$G_1 \cong E \times A \text{ or } (E * C_4) \times A.$$

其中$E$ 是一个特异 2 群，而$A$是一个初等阿贝尔2群。换言之，$G_1$ 是一个（几乎）特异 2 群与一个初等阿贝尔2群的直积。因此，只需证明：若$G_2$ 是一个阶为 $2^q$ 的（几乎）特异 2 群，则

$$\delta_k(G_2 \times C_2^{n-q}) \le \delta_k((D_8 \times C_2^{q-3}) \times C_2^{n-q}).$$

注意到 $\exp((D_8 \times C_2^{q-3}) \times C_2^{n-q}) = \exp(G_2 \times C_2^{n-q}) = 2^2$，应用引理 2.5，可得

$$\begin{aligned} \delta_k(G_2 \times C_2^{n-q}) &= s_k(G_2 \times C_2^{n-q}) \\ &\le s_k((D_8 \times C_2^{q-3}) \times C_2^{n-q}) \\ &= \delta_k((D_8 \times C_2^{q-3}) \times C_2^{n-q}), \end{aligned}$$

对于 $3 \le k \le n$。因此，我们只需证明 $\delta_2(G_2 \times C_2^{n-q}) \le \delta_2((D_8 \times C_2^{q-3}) \times C_2^{n-q})$。

下文中，令 A 为群 $G_2$ 或 $D_8 \times C_2^{q-3}$ 中的一个。由引理 2.9 可知，$A \times C_2^{n-q}$ 的一个阶为 $2^2$ 的初等阿贝尔子群 H 完全由一个五元组 $(A_1, A_2, B_1, B2, \varphi)$ 确定，其中 $A_1 \trianglelefteq A_2 \le A$，$B_1 \trianglelefteq B_2 \le C_2^{n-q}$，$\varphi : A_2/A_1 \longrightarrow B_2/B_1$ 是一个同构，且 $|A_2||B_1| = |A_1||B_2| = 2^2$。我们的证明将分为以下三种情况:

情况 I: $A_2 = 1$。

在此情况下，我们有 $A_1 = 1$，并且 $B_1 = B_2$ 是 $\left[ \frac{n-q}{2} \right]_2$ 个阶为 $2^2$ 的 $C_2^{n-q}$ 的子群之一。显然，这些子群确定了 $\left[ \frac{n-q}{2} \right]_2$ 个彼此不同的、与 $C_2^2$ 同构的 $A \times C_2^{n-q}$ 的子群。

情况 II: $A_2 \cong C_2$。

注意，$|A_2||B_1| = 2^2$，$B_1$ 的阶为 2，并且可以有 $\left[ \frac{n-q}{1} \right]_2$ 种选取方式。如果 $A_1 = A_2$，那么 $B_2 = B_1$,；而如果 $A_1 = 1$，则 $B_2$ 是 $C_2^{n-q}$ 中包含 $B_1$的、阶为 $2^2$ 的 $2^{n-q-1} - 1$ 子群之一。因此，我们得到 $s_1(A) \cdot 2^{n-q-1} \cdot \left[ \frac{n-q}{1} \right]_2$ 个彼此不同的子群，这些子群是 $A \times C_2^{n-q}$ 的子群，并且同构于 $C_2^2$。

情况 III: $A_2 \cong C_2^2$。

在这种情况下，$B_1 = 1$。如果 $A_1 = A_2$,，那么 $B_2 = B_1 = 1$。如果 $|A_1| = 2$，那么 $B_2$ 是 $C_2^{n-q}$ 的 $2^{n-q} - 1$ 个阶为 2 的子群之一。如果 $A_1 = 1$，那么 $B_2$ 是 $\left[ \frac{n-q}{2} \right]_2$ 个阶为 $2^2$ 的、属于 $C_2^{n-q}$ 的子群之一。因此我们得到

$$\delta_2(A) \cdot \left( (2^{n-q} - 1) + \left[ \frac{n-q}{2} \right]_2 \right)$$

与 $A \times C_2^{n-q}$ 同构的不同 $C_2^2$ 子群。

由上述论证可得

$$\delta_2(A \times C_2^{n-q}) = \left[ \frac{n-q}{2} \right]_2 + s_1(A) \cdot 2^{n-q-1} \cdot \left[ \frac{n-q}{1} \right]_2 + \delta_2(A) \cdot \left( (2^{n-q} - 1) + \left[ \frac{n-q}{2} \right]_2 \right).$$

最后，由引理 2.5 和 2.8 可知

$$s_1(G_2) \le s_1(D_8 \times C_2^{q-3}) \text{ and } \delta_2(G_2) \le \delta_2(D_8 \times C_2^{q-3}).$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\delta_2(G_2 \times C_2^{n-q}) &= \left[\begin{array}{c} n-q \\ 2 \end{array}\right]_2 + s_1(G_2)\cdot 2^{n-q-1}\cdot \left[\begin{array}{c} n-q \\ 1 \end{array}\right]_2 + \delta_2(G_2)\cdot\left((2^{n-q}-1)+\left[\begin{array}{c} n-q \\ 2 \end{array}\right]_2\right) \\ &\leq \left[\begin{array}{c} n-q \\ 2 \end{array}\right]_2 + s_1(D_8 \times C_2^{q-3})\cdot 2^{n-q-1}\cdot \left[\begin{array}{c} n-q \\ 1 \end{array}\right]_2 \\ &+ \delta_2(D_8 \times C_2^{q-3})\cdot\left((2^{n-q}-1)+\left[\begin{array}{c} n-q \\ 2 \end{array}\right]_2\right) \\ &= \delta_2((D_8 \times C_{q-3}) \times C_2^{n-q}).\end{aligned}$$

现在我们已经证明了 $\delta(G) \leq \delta(D_8 \times C_2^{n-3})$。定理得证。 □

**数据和材料的可用性**

本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

**声明 竞争利益**

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

# 参考文献

[1] S. Aivazidis, T. M¨uller, 《子群数最少的有限非循环 $p$-群》。《数学档案》2020年，114：13-17。[2] Y. Berkovich, 《指数为 $p$ 的有限 $p$-群中给定阶的子群数》。《美国数学会会刊》1990年，109(4)：875-879。[3] Y. Berkovich, 《素数幂阶群 I》。Walter de Gruyter，柏林—纽约，2008年。[4] S. Bouc, N. Mazza, 《（几乎）超特殊 $p$-群的 Dade 群》。《纯粹与应用代数杂志》2004年，192：21-51。[5] P. E. Djubjuk, 《关于若干类有限 $p$-群的子群数》。《数学文集》新辑，1952年，20(72)：575-580。[6] Y. Fan, 《通过计数子群刻画初等阿贝尔 p 群》。《数学的实践与认识》1988年，1：63-64。[7] L. K. Hua, H. F. Tuan, 《素数幂阶群的一些 Anzahl 定理》。《中国数学会杂志》1940年，2：313-319。[8] L. K. Hua, 《关于素数幂阶群的一些 Anzahal 定理》。《国立清华大学科学报告》1947年，4：313-327。.. [9] A. Kulakoff, 《关于 p 群中真子群的数量及给定阶元素的数量》。《数学年刊》1931年，104(1)：778-793。

[10] M. S. Lazorec, R. Shen, M. Tˇarnˇauceanu, 《有限群循环子群数的第二小值/最大值》。澳大利亚数学会通报2021年，103：96-103。[11] W. Meng, J. K. Lu, 《有限非循环幂零群中循环子群数的下界》。数学研究杂志2023年，56(1)：93-102。[12] W. Meng, J. K. Lu, 《子群数最少的有限非循环幂零群》。数学研究2024年，73：191-198[13] H. Qu, Y. Sun, Q. H. Zhang, 《子群数不超过 $p^3$ 的可能阶的有限 $p$-群》。Chin. Ann. Mtha. 2010年，31B(4)：497-506。[14] H. Qu, 《子群数最大的有限非初等阿贝尔 $p$-群》。《以色列数学杂志》2013年，195：773-781。[15] M. Suzuki, 《群论 I》。施普林格出版社，柏林，1982年。[16] R. Stancu, 《几乎所有广义超特殊 $p$-群都是抗性的》。代数杂志2002年，249：120-126。[17] M. Tˇarnˇauceanu, 《关于 Haipeng Qu 的一个猜想》。群论杂志2019年，22(3)：505-514。[18] H. F. Tuan, 《p 群的 Kulakoff 型 Anzahl 定理》。《国立清华大学科学报告》A辑，1948年，5：182-189。[19] Q. H. Zhang, H. P. Qu, 《关于华-段猜想》。《中国科学：数学》2009年，52(2)：389-393。[20] Q. H. Zhang, H. P. Qu, 《关于华-段猜想 II》。《中国科学：数学》2011年，54(1)：65-74。