分类 化 E（4, 4)

NICOLETTA CANTARINI、FABRIZIO CASELLI 和 VICTOR KAC

ABSTRACT. 本文对 E（4，4）上的退化 Verma 模进行了分类。这完成了对例外线性紧李超代数上 Verma 模的描述。与其他情形一样，所有退化模及其间的态射都会产生无限双边复形，这些复形可视为 de Rham 复形的推广。

arXiv:2603.16507v1 [math.RT] 17 Mar 2026

1. INTRODUCTION

设 $\Omega^0(n)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的形式幂级数线性紧代数，其中变量为 x_1，……，x_n；设 $\Omega(n)$ 是系数取自 $\Omega^0(n)$ 的微分形式超代数。回顾一下，$\Omega(n)$ 是 $\Omega^0(n)$ 的偶子代数上的含单位（超）交换结合超代数，其奇生成元为 dx_1，……，dx_n。超代数 $\Omega(n)$ 带有一个奇平方为零导子 d，定义为

$$d(x_i) = dx_i,\ d(dx_i) = 0,\ i = 1, \dots, n,$$

以及一个 $\mathbb{Z}$-分次

$$\Omega(n) = \bigoplus_{j=0}^{n} \Omega^j(n), \tag{1}$$

定义为

$$\deg x_i = 0,\ \deg(dx_i) = 1.$$

形式德拉姆复形是如下由 $\mathbb{C}$ 上的线性紧向量空间构成的正合序列：

$$\Omega^0(n) \xrightarrow{d} \Omega^1(n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(n) \xrightarrow{d} \Omega^n(n). \tag{2}$$

形式向量场的（线性紧）李代数 $W(n) := \{\sum_{i=1}^n P_i\partial_i \mid P_i \in \Omega^0(n)\}$通过李导数连续地作用于超代数 $\Omega(n)$，此作用保持分次 (1)，因此作用于序列 (2) 的每一项，并与 d 交换。序列 (2) 称为形式德拉姆复形，而 d 称为德拉姆微分。

对 (2) 中的线性紧项取对偶，我们得到如下具有离散拓扑的向量空间正合序列：

$$\Omega^0(n)^* \xleftarrow{d^*} \Omega^1(n)^* \xleftarrow{d^*} \cdots \xleftarrow{d^*} \Omega^{n-1}(n)^* \xleftarrow{d^*} \Omega^n(n)^*, \tag{3}$$

具有李代数 $W(n)$ 的连续作用。

2010 数学主题分类。17B15, 17B25（主要），17B65, 17B70（次要）。关键词和短语。李超代数、Verma 模、奇异向量、例外 de Rham 复形。

更具体地说， $W(n)$-模 $\Omega^j(n)^*$ 可以表示为以下诱导模：

$$M(\bigwedge^j(\mathbb{C}^{n^*})) := \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(n)}^{W(n)} \bigwedge^j(\mathbb{C}^{n^*}), \tag{4}$$

其中，我们使用由 $\deg x_i = -\deg \partial_i = 1$ 定义的 $\mathbb{Z}$-分次 $W(n) = \prod_{j\geq -1} W_j(n)$，而 $W_0(n)$-模 $\bigwedge^j(\mathbb{C}^{n^*})$ 由 $W_0(n) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ 的通常作用定义，其中 $W_j(n)$ 的作用平凡。容易看出，(3) 中的微分 d^* 为

$$d^* = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \otimes \iota_k, \tag{5}$$

其中， $\iota_k : \bigwedge(\mathbb{C}^{n^*}) \to \bigwedge(\mathbb{C}^{n^*})$ 是奇导子，定义为 $\iota_k(x_j^*) = \delta_{kj}$ (对 x_k 的收缩)，其中 $\{x_i\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基，而 $\{x_i^*\}$ 是 $\mathbb{C}^{n*}$ 的对偶基。

令 F b e 为一个不可约的 $W_0(n) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$-模，将其平凡延拓到 $W_{>0}(n)$，并令

$$M(F) := \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(n)}^{W(n)} F$$

为相应的诱导 $W(n)$-模。Rudakov 的著名定理 [20] 指出， $W(n)$-模 $M(F)$ 不可约，当且仅当它不是 (3) 中出现的模之一（最后一项除外）；此外， $W(n)$-模 $M(F)$ 之间所有非平凡的态射都出现在 (3) 中。

Cartan 分类中的另外三个单无限维线性紧李代数 $S(n)$、 $H(n)$ 和 $K(n)$ 也有类似结果。对于 $S(n)$ 和 $H(n)$，这可由 [21] 和 [12], 得出；对于 $K(n)$，则可由 [19], 得出，其中找到了所有奇异向量；而 Rumin 的论文 [22], 则为接触流形构造了一个 de Rham 复形的类似物。

复数域 $\mathbb{C}$ 上单无限维线性紧李超代数的分类远比李代数的情形丰富。它由 10 个无限级数和 5 个例外实例组成，分别记为 $E(1,6)$、 $E(3,6)$、 $E(3,8)$、 $E(4,4)$ 和 $E(5,10)$ [14]。所有这些李超代数中的极大开子代数已在 [9]中完成分类。不同于只有一个极大开子代数的李代数情形，单无限维线性紧李超代数可能包含多个极大开子代数；然而，它们中的每一个（记作 L）都实质上包含一个唯一的极大开子代数 $L_{\geq 0}$，且该子代数在 L的所有内自同构下保持不变。此外，其中大多数，包括全部 5 个例外实例，都允许按有限维子空间进行 $\mathbb{Z}$-分次

$$L = \prod_{j=-d}^{\infty} L_j, \ \text{where}\, d = 1, 2 \,\text{or}\, 3, \tag{6}$$

由有限维子空间构成。

如上所述，给定一个有限维不可约的 L_0-模 F，我们考虑诱导的 L-模

$$M(F) = \mathrm{Ind}_{L_{\geq 0}}^{L} F, \tag{7}$$

其中， $L_{\geq 0}$模 F 是通过令 L_j 在 F上对 $j > 0$平凡作用而从 L_0模得到的。我们将 L模 $M(F)$ 称为一个*Verma* 模。第一个基本问题是对所有 F进行分类，使得 L模 $M(F)$ 不可约；这样的 Verma 模称为退化的。事实上，每个 L 上的连续不可约局部有限模都是某个商模的

唯一 Verma 模的商模。我们所说的局部有限模 V，是指这样一个模：对于每个 $v \in V$， $L_{\geq 0}v$ 都具有有限维数。

上文描述了 $L = W(n)$ 上退化 Verma 模的 Rudakov 分类。分类方法是在 $M(F)$ 中寻找所有正次数的奇异向量。注意， $\mathbb{Z}$分次 (6) 在 $M(F)$ 上诱导出 $\mathbb{Z}$分次

$$M(F) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M(F)_{-j}, \text{ where } M(F)_0 = F. \tag{8}$$

若 $v \in M(F)_{-s}$，我们称 v的次数为 s。非零向量 $v \in M(F)$ 称为 奇异i f

$$L_j v = 0 \text{ for } j > 0.$$

显然，分次 (8) 中奇异向量的所有非零齐次分量也都是奇异向量，并且 $M(F)$ 退化，当且仅当它具有一个正次数的奇异向量。

沿着这一路径（ [20] 和 [21], 中也采用了这种方法）， [15, 16, 18], [17], [3, 1], 和 [6] 分别对 $E(3, 6)$、 $E(3, 8)$、 $E(1, 6)$ 和 $E(5, 10)$ 的所有退化 Verma 模进行了分类。所有这些情形中，简化问题的性质是 L_0 为约化李代数，而本论文研究的其余李超代数 $L = E(4, 4)$ 并不具备这一性质。在这种情况下， $L_0 = \hat{\mathfrak{p}}(4)$ 是单李超代数 $\mathfrak{p}(4)$ 的非平凡中心扩张。众所周知，“奇异”系列的单李超代数 $\mathfrak{p}(n)$ [13]当且仅当 $n = 4$ 时才存在非平凡中心扩张。

关于$\hat{\mathfrak{p}}(4)$上不可约模的分类已在 [23], 中得到，本文第 3 节对此作了介绍。在第 4 节，我们回顾了 [20] 和 [21], 中关于 $W(4)$和 $S(4)$上 Verma 模奇异向量的分类。由于 $E(4, 4)$的偶部与 $W(4)$同构，这使我们能够证明 $E(4, 4)$上 Verma 模中的奇异向量次数不超过 5（命题 5.5）。

在第 6–9 节中，我们描述了所有 1、2、3 和 4 次奇异向量（定理 6.9、7.6、8.7 和 9.1）。借助计算机证明了不存在 5 次奇异向量。

当然，Verma 模 M 中的每个奇异向量都会导出一个从另一个 Verma 模到 M的态射。在命题 6.14 中，我们明确描述了 1 次态射。

一个引人注目但至今仍未得到解释的观察是，所有例外 L 的退化 Verma 模都可以排列成一幅精美的图，其中包含无穷多个模序列；我们还证明，对于 $L = E(4, 4)$，这一结论同样成立（见图 6）。

在少数情况下，两个连续映射的复合

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$$

在 Verma 模之间并非零，但用 $M_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} M_3$ 替换后，我们可以使连续映射的复合为零，从而得到我们称为与 L 相关的例外 ***de Rham*** 复形。对于 $L = E(4, 4)$，该复形见图 7 和图 8。一个有趣的开放问题是计算该复形的上同调。

2. The Lie superalgebra $E(4, 4)$

李超代数 $L = E(4,4)$ 定义如下（[11, §5.3]）。其偶部 $L_{\bar{0}}$ 是四个偶不定元 x_1, x_2, x_3, x_4 上的向量场李代数 $W(4)$，系数取自 $\Omega^0(4)$，即 $\mathbb{C}$上的形式幂级数代数；其奇部 $L_{\bar{1}}$ 是 $\Omega^1(4)$ 中所有

一形式，变量为 x_1, x_2, x_3, x_4，系数取自 $\Omega^0(4)$，其 $L_{\bar{0}}$作用如下：对于$X \in L_{\bar{0}}$, $\omega \in L_{\bar{1}}$,

$$[X, \omega] = L_X(\omega) - \frac{1}{2}\operatorname{div}(X)\omega,$$

其中， $L_X(\omega)$ 表示微分一形式 ω 沿向量场 X的李导数。此外，对于 ω_1， $\omega_2 \in L_{\bar{1}}$ 交换子为

$$[\omega_1, \omega_2] = d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

其中，右端的微分三形式通过与标准体积形式收缩而与向量场对应。

我们将使用记号 ∂_i 表示向量场 $\frac{\partial}{\partial x_i}$，并将微分一形式$dx_i$记为 d_i 。

李超代数 L 具有一个在共轭意义下唯一的不可约 $\mathbb{Z}$-分次 $L = \coprod_{j \geq -1} L_j$，称为主分次，其定义为令 $\deg(x_i) = 1$ 以及 $\deg d = -2$ ([9, 推论 9.8])。子代数 L_0 同构于奇异李超代数 $\mathfrak{p}(4)$ 的唯一非平凡中心扩张 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$ [13, §2.1.3] （其中记作 $\mathfrak{p}(3)$）。这是一个有限维单李超代数，具有如下相容的不可约 $\mathbb{Z}$-分次:

$$\mathfrak{p}(4) = \mathfrak{p}(4)_{-1} \oplus \mathfrak{p}(4)_0 \oplus \mathfrak{p}(4)_1$$

其中 $\mathfrak{p}(4)_0 \cong \mathfrak{sl}_4$ ，并且作为 $\mathfrak{sl}_4$-模， $\mathfrak{p}(4)_{-1} \cong \bigwedge^2(\mathbb{C}^{4^*})$ 和 $\mathfrak{p}(4)_1 \cong S^2(\mathbb{C}^4)$。注意， $\bigwedge^2(\mathbb{C}^{4^*})$ 同构于标准的 $\mathfrak{so}_6$-模，其标量积为 $(\cdot, \cdot)$；定义φ： $\bigwedge^2(\mathfrak{p}(4)) \to \mathbb{C}$ ，令对任意 $x \in \mathfrak{p}(4)_i$， $y \in \mathfrak{p}(4)_j$,

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} (x, y) & \text{if } i = j = -1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是，$\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$ 是由此余循环定义的 $\mathfrak{p}(4)$ 的中心扩张（例 3.6], [23]）。因此有如下 $\mathbb{Z}$-分次李超代数

$$\hat{\mathfrak{p}}(4) = \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-2} \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1} \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_0 \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_1,$$

其中 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)_{-2} = \mathbb{C}C$ 是中心的。元素 C 在 L 上的作用是相对于主分次的分次元，即对于 $a \in L_j$, 有 $[C, a] = ja$ 。

在同构 $L_0 \cong \hat{}\mathfrak{p}(4)$ 中，$\hat{}\,\mathfrak{p}(4)_1$ 由闭微分一形式张成

$$b_{ij} = x_i d_j + x_j d_i$$

（其中 $i, j = 1, 2, 3, 4$），$\hat{}\,\mathfrak{p}(4)_0 \cong \mathfrak{sl}_4$由向量场 $x_i\partial_j$和 $h_{ij} = x_i\partial_i - x_j\partial_j$张成（其中 $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i \neq j$），$\hat{}\,\mathfrak{p}(4)_{-1}$由微分一形式张成

$$a_{ij} = x_i d_j - x_j d_i$$

（其中 $i, j = 1, 2, 3, 4$），且 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)_{-2}$由 $C = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4$张成。注意，$\hat{}\mathfrak{p}(4)_0 \oplus \hat{}\mathfrak{p}(4)_{-2} \cong \mathfrak{gl}_4$。

本文中，我们将使用以下括号运算的显式公式。首先，$[b_{ij}, b_{lm}] = 0$。其次，元素 $b_{ij} \in \hat{}\mathfrak{p}(4)_1$ 与 $a_{lm} \in \hat{}\mathfrak{p}(4)_{-1}$ 之间的括号运算由以下规则给出:

- $[b_{ij}, a_{lm}] = 0$ 若 $|\{i, j, l, m\}| \leq 2$
- $[b_{ij}, a_{lm}] = 2\epsilon_{ijlm}h_{ij}$如果 $|\{i, j, l, m\}| = 4$;

- $[b_{jj}, a_{lm}] = 4\epsilon_{ijlm} x_j \partial_i$;
- $[b_{ij}, a_{im}] = -2\epsilon_{ijlm} x_i \partial_l$.

这里我们用 ϵ_{ijlm} 表示置换 $ijlm$的符号，其中约定当两个指标相同时， $\epsilon_{ijlm} = 0$。特别地，我们有

- $[b_{44}, a_{12}] = 4x_4\partial_3$;
- $[b_{44}, a_{13}] = -4x_4\partial_2$;
- $[b_{44}, a_{23}] = 4x_4\partial_1$。

最后， $[a_{ij}, a_{lm}] = 2\epsilon_{ijlm} C$。

固定 $\hat{\mathfrak{p}}(4)_0 = \mathfrak{sl}_4$ 的 Borel 子代数 $B = \langle x_i\partial_j, h_{ij} \mid i < j \rangle$ ，并考虑相应根系的一组标准简单根，记作 $\{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}\}$。令 Λ 为 $\mathfrak{sl}_4$ 的权格，并用基本权 ω_{12}、ω_{23}、ω_{34} 的坐标表示 $\mathfrak{sl}_4$ 的所有权；也就是说，对于 $\lambda \in \Lambda$ ，我们写作 $\lambda = (\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{34})$，其中$\lambda_{ii+1} \in \mathbb{Z}$表示 $\lambda = \lambda_{12}\omega_{12} + \lambda_{23}\omega_{23} + \lambda_{34}\omega_{34}$。若 $\lambda = (a, b, c) \in \Lambda$是一个支配权，即$a$、$b$、$c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$且 $t \in \mathbb{C}$，则记 $F_t(a, b, c)$ 为最高权为 (a, b, c) 的不可约 $\mathfrak{gl}_4$-模，其中中心元 C的作用为乘以 t。

分量 L_{-1} 的超维数为（$4|4$），是一个不可约的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模，由 ∂_1，∂_2，∂_3，∂_4，d_1，d_2，d_3，d_4张成；作为 $\mathfrak{gl}_4$-模，它与 $F_{-1}(1, 0, 0) \oplus F_{-1}(0, 0, 1)$ 同构。分量 L_1 也是一个不可约的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模，并且作为 $\mathfrak{gl}_4$-模，它分解如下： $L_1 \cong F_1(2, 0, 1) \oplus F_1(1, 0, 0) \oplus F_1(3, 0, 0) \oplus F_1(1, 1, 0)$。

回顾一下，根据 Weyl维数公式，我们有

$$\dim F_t(a, b, c) = \frac{1}{12}(a+1)(b+1)(c+1)(a+b+2)(b+c+2)(a+b+c+3).$$

令 $\mathfrak{p}^+ = \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-2} \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_0 \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$ ，并将 $\mathfrak{gl}_4 = \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-2} + \hat{\mathfrak{p}}(4)_0$ 在 $F_t(a, b, c)$ 上的作用扩展到 $\mathfrak{p}^+$，令 $\hat{\mathfrak{p}}(4)_1$ 作用平凡。令

$$K_t(a, b, c) = \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{p}}(4)) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}^+)} F_t(a, b, c)$$

即相应的（薄）Kac 模。这是一个有限维向量超空间，其中$F_t(a, b, c)$ 是偶子空间，并且作为 $\mathfrak{sl}_4$- 模，我们有

$$K_t(a, b, c) \cong \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1}) \otimes_{\mathbb{C}} F_t(a, b, c). \tag{9}$$

每个不可约有限维 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模都是 Kac 模 $K_t(a, b, c)$ 的商模。下一节将专门描述这些模。

3. Irreducible $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-modules

本节将明确描述 [2] 中关于 $t = 0$以及 [23] 中关于 $t \neq 0$的一些结果。详细内容请参阅上述论文，尽管我们将使用略有不同的记号。

显然，如果 $t = 0$，Kac 模 $K_0(a, b, c)$ 有唯一的不可约商模，我们将其记为 $W_0(a, b, c)$。然而，如果 $t \neq 0$，情况则有所不同，正如下述命题所描述的那样；该命题可由 [23, §4] 推出。

命题 3.1。若 $t \neq 0$ *Kac* 模 $K_t(a, b, c)$，则除非$a = c = 0$且 $b \geq 1$，否则它有唯一的不可约商模。此外，对于所有 $b \geq 2$, $K_t(0, b, 0)$ 都是两个不可约子模的直和，而 $K_t(0, 1, 0)$ 是两个子模的直和，其中一个是不可约的。

当不可约商模唯一时，我们将 $K_t(a,b,c)$ 的不可约商模记为 $W_t(a,b,c)$。对于 $b \geq 2$，Kac 模 $K_t(0,b-1,0)$ 和 $K_t(0,b,0)$ 有一个共同的不可约分量，我们将其记为 $W_t(0,b,0)$，因此对于 $b \geq 2$,

$$K_t(0,b,0) \cong W_t(0,b,0) \oplus W_t(0,b+1,0).$$

最后， $K_t(0，1，0)$ 是 $W_t(0，2，0)$ 与一个并非不可约的子模 S 的直和。我们将 S 的唯一不可约商模记为 $W_t(0，1，0)$。

例 3.2。 对于 $d=-1$ 和 $d>0$，在主分次中， $E(4，4)$ 的齐次分量 $E(4，4)_d$ 是不可约的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模 $W_d(d+2，0，0)$。

对于 $d=0$，伴随模 $E(4，4)_0$ 并非不可约：尽管如此，我们有 $[E(4，4)_0，\ E(4，4)_0] \cong W_0(2，0，0)$，因此 $E(4，4)_0 \cong W_0(2，0，0) \oplus W_0(0，0，0)$。

例 3.3 （$\hat{\mathfrak{p}}(4)$ 的标准表示）。 不可约表示 $W_t(1，0，0)$ 对所有 $t \in \mathbb{C}$都可以很容易地描述如下。根据前面的例子，回想一下$W_{-1}(1，0，0) \cong E(4，4)_{-1}$。现在我们要将 $W_t(1，0，0)$ 实现为它的一个变形。因此，我们令 $W_t(1，0，0)$ 作为向量超空间为 $E(4，4)_{-1}$。$\hat{\mathfrak{p}}(4)$ 在 $W_t(1，0，0)$（此处记为 $\cdot$）上的作用由以下简单规则给出：

- $C \cdot v = tv$ 对所有 $v \in E(4，4)_{-1}$;
- $a \cdot v = -t[a,v]$ 对所有 $a \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1}$ 以及所有偶向量 $v \in E(4，4)_{-1}$;
- $a \cdot v = [a,v]$ 对于所有 $a \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1}$，以及所有奇向量 $v \in E(4，4)_{-1}$;
- $b \cdot v = [b,v]$ 对于所有 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{\geq 0}$ 以及所有 $v \in E(4，4)_{-1}$。

例3.4。 例3.2和例3.3可以同时推广如下：对于 $d=-1$或 $d>0$，不可约表示 $W_t(d+2，0，0)$ 是 $E(4，4)_d$ 的一种变形，其定义规则如下：

- $C \cdot v = tv$ 对于所有 $v \in E(4，4)_d$;
- $a \cdot v = \frac{t}{d}[a,v]$ 对于所有 $a \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1}$，以及所有偶向量 $v \in E(4，4)_d$;
- $a \cdot v = [a,v]$ 对所有 $a \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-1}$，以及所有奇向量 $v \in E(4，4)_d$;
- $b \cdot v = [b,v]$ 对所有 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{\geq 0}$ 以及所有 $v \in E(4，4)_d$。

例3.5。 对于 $t \neq 0$，特殊情形 $W_t(2，0，0)$ 也可以通过将 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$ 的伴随表示$E(4，4)_0$, 变形得到，不过我们提醒读者，后者并非不可约。为了定义这种变形，我们回顾 [8] 中关于 k-形式的积分的定义：若 $\omega \in \Omega^k(4)$ 是一个 k-形式，其系数是次数为 d 的齐次多项式，则令

$$\int \omega = \frac{1}{d+k} \iota_C \omega,$$

其中 $\iota_C(\omega)$ 表示沿向量场 C 对 ω 的收缩。事实证明， $\int$与 $\mathfrak{sl}_4$ 在 $\Omega(4)$ 上对 $\int^2 = 0$ 和 $d\int + \int d = id$ 的作用可交换。特别地，可以验证，对于所有 $i，\ j = 1，\ldots\ldots，4$，均有 $\int b_{ij} = x_i x_j$ 和 $\int a_{ij} = 0$。不可约表示$W_t(2，0，0)$ 对于 $t \neq 0$ 可以通过以下方式由 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$ 变形得到：对于所有$X \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{\bar{0}}$，使得 $\operatorname{div} X = 0, \omega，\ \omega' \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{\bar{1}}$，以及 $v \in \hat{\mathfrak{p}}(4)$，令

- $C \cdot v = tv$;
- $X \cdot v = [X,v]$;
- $\omega \cdot X = [\omega, X] - \frac{t}{2} d\iota_X(\int d\omega)$;
- $\omega \cdot C = \frac{t}{2} \int d\omega - \frac{t}{2} d \int \omega$;

- $\omega \cdot \omega' = [\omega, \omega'] + \frac{t}{4}\int d\omega \wedge d\omega' - \frac{t}{4} d\omega \wedge \int d\omega'$.

证明示例 3.4 和 3.5 中给出的定义确实构成 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-表示，是一个冗长而繁琐但初等的验证过程。

注3.6。若 $t, s \neq 0$，不可约模 $W_s(a,b,c)$也可以通过变形由$W_t(a,b,c)$得到。具体而言，令 $u \in \mathbb{C}$为 t/s的平方根。那么对所有 $v \in W_t(a,b,c)$和 $x \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_d$，我们有

$$\phi_s(x)v = u^d \phi_t(x)v,$$

其中 ϕ_t和 ϕ_s分别表示$\hat{\mathfrak{p}}(4)$在 $W_t(a,b,c)$和 $W_s(a,b,c)$上的作用。

沿用Serganova [23], 的记法，我们令 $\mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{p}}(4)^{\leq 0}$，并令 $Rep^t_{\mathfrak{h}}$ 表示有限维$\mathfrak{h}$-模范畴，其中 C 的作用为乘以 t。结果表明，若 $t \neq 0$，则 $Rep^t_{\mathfrak{h}}$ 是半单的（[23]）。令 V_t为标准$\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模 $W_t(1,0,0)$在 $\mathfrak{h}$上的限制，并令$\tilde{}$ $F_t(a,b,c) = F(a,b,c) \otimes V_t$，其中 $\mathfrak{sl}_4$在 $F(a,b,c)$上的作用被平凡地扩展到$\mathfrak{h}$。那么，若 $t \neq 0$，$F_t(a,b,c)$是不可约 $\mathfrak{h}$-模，并且每个不可约 $\mathfrak{h}$-模都$\tilde{}$同构于唯一的 $F_t(a,b,c)$（[23]）。

现在我们要定义 Kac 模之间的一些态射，这些态射将有助于描述它们的合成列和不可约商模（另见 [23, §4,5]）。我们指出，态射 $f: K_t(\lambda) \to K_t(\mu)$ 完全由 $F_t(\lambda)$ 的最高权向量 v_λ 的像确定。我们注意到 $f(v_\lambda)$ 满足以下性质：

- $(x_i\partial_{i+1})w = 0$ 对所有 $i = 1、2、3$；
- $bw = 0$ 对所有 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$。

我们称这样的向量为 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量。反过来，$\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模 M 中任意一个权为λ 的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量 w，若满足 $Cw = tw$ （其中某个 $t \in \mathbb{C}$），则可导出一个$\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模之间的态射 $K_t(\lambda) \to M$。

回忆一下，$K_t(a,b,c)^* \cong K_{-t}(c,b,a)$（见 [23, 引理4.4]）。

定义3.7. 设 $\{x_1, \ldots, x_4\}$ 为不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模 $\mathbb{C}^4$的标准基，$\{x_1^*, \ldots, x_4^*\}$ 为其对偶基，且 $x_{ij} = x_i \wedge x_j \in \bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$。以下向量是 Kac 模中的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量：

i) $a_{12}v$属于 $K_t(a, b-1, 0)$，其中 $a \geq 0, b \geq 1$，且 $v = x_1^a x_{12}^{b-1}$是 $F_t(a, b-1, 0)$中的最高权向量；ii) $a_{12}a_{13}a_{14}v$ 属于 $K_t(a-2, 0, 0)$，其中 $a \geq 2$，且 $v = x_1^{a-2}$是 $F_t(a-2, 0, 0)$中的最高权向量；iii) $a_{14}x_1^{a-1}(x_4^*)^{c+1} + a_{13}x_1^{a-1}x_3^*(x_4^*)^c + a_{12}x_1^{a-1}x_2^*(x_4^*)^c$ 属于 $K_t(a-1, 0, c+1)$，其中 $a \geq 1, c \geq 0$。

因此，我们得到以下态射列表：

a) $\theta_{a,b}$：$K_t(a,b,0) \to K_t(a,b-1,0)$，其中 $a \geq 0, b \geq 1$ 由 i) 中的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量确定；
b) φ_a：$K_t(a,0,0) \to K_t(a-2,0,0)$，其中 $a \geq 2$ 由 ii) 中的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量确定；
c) $\eta_{a,c}$：$K_t(a,0,c) \to K_t(a-1,0,c+1)$，其中 $a \geq 1, c \geq 0$ 由 iii) 中的 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量确定；d) $\xi_{b,c}$：$K_t(0,b,c) \to K_t(0,b+1,c)$，其中 $b, c \geq 0$ 是 $\theta_{c,b+1}$ 的对偶；

e) $\psi_c : K_t(0,0,c) \to K_t(0,0,c+2)$, with $c \geq 0$, dual of φ_{c+2}.

命题 3.8. 以下描述了所有 $t \neq 0$ 的 ***Kac*** 模的不可约商模:

1) $W_t(a,b-1,0) \cong K_t(a,b-1,0)/Im(\theta_{a,b})$，适用于 $b \geq 3$ 或 $a \geq 1$ 以及 $b = 1$；2) $W_t(0,1,0) \cong K_t(0,1,0)/\ker(\psi_0\theta_{0,1})$；3) $W_t(a,1,0) \cong K_t(a,1,0)/\ker(\eta_{a,0}\theta_{a,1})$，适用于 $a \geq 1$；4) $W_t(0,0,0) \cong K_t(0,0,0)/Im(\varphi_2)$；5) $W_t(a,0,c) \cong K_t(a,0,c)/Im(\eta_{a+1,c-1})$，适用于 $a \neq 1$ 和 $c \geq 1$；6) $W_t(1,0,c) \cong K_t(1,0,c)/\ker(\xi_{0,c+1}\eta_{1,c})$；7) $W_t(0,b,c) \cong K_t(0,b,c)/Im(\xi_{b-1,c})$，适用于 $b \geq 1$ 和 $c \geq 1$。

˜证明。除第 4) 种情形外，其余所有情形均已在 [23] 中给出。在这种情形下，作为 $\mathfrak{h}$-模，我们有 $K_t(0,0,0) = F_t(1,0,0) \oplus$ ˜$F_t(0,0,1)$。由于 $F_t(0,0,1)$ 不是 $K_t(2,0,0)$ 的一个 $\mathfrak{h}$-子模，˜φ_2 的像必然是 $F_t(1,0,0)$，因此 $K_t(0,0,0)/Im(\varphi_2)$ 作为一个 $\mathfrak{h}$-模同构于 ˜$F_t(1,0,0)$，故其作为 ˆ $\mathfrak{p}(4)$-模也是不可约的。注意，根据命题 3.1，$Im(\varphi_2)$ 是 $K_t(0,0,0)$ 的唯一极大 ˆ $\mathfrak{p}(4)$-子模。□

借助 Kac 模分解为不可约 $\mathfrak{h}$-子模的直和这一结果，以及对 Kac 模之间态射的描述，可以推导出以下分解。

命题 3.9. 对于 $t \neq 0$，在ˆ $\mathfrak{p}(4)$的有限维表示的格罗滕迪克群中，以下等式成立:

(1) $[K_t(0,0,0)] = [W_t(0,0,0)] + [W_t(2,0,0)]$; (2) $[K_t(0,1,0)] = [W_t(0,1,0)] + [W_t(2,0,0)] + [W_t(0,2,0)]$; (3) $[K_t(a,0,0)] = [W_t(a,0,0)] + [W_t(a,1,0)] + [W_t(a+2,0,0)]$ 对于 $a \geq 1$; (4) $[K_t(0,0,1)] = [W_t(0,0,1)] + [W_t(1,0,0)] + [W_t(1,1,0)]$; (5) $[K_t(0,0,c)] = [W_t(0,0,c)] + [W_t(1,0,c-1)] + [W_t(0,0,c-2)]$ 对于 $c \geq 2$; (6) $[K_t(0,1,1)] = [W_t(0,1,1)] + [W_t(1,1,0)] + [W_t(0,0,1)]$; (7) $[K_t(1,0,1)] = [W_t(1,0,1)] + [W_t(2,0,0)] + [W_t(2,1,0)] + [W_t(0,0,0)]$; (8) $[K_t(1,0,c)] = [W_t(1,0,c)] + [W_t(2,0,c-1)] + [W_t(0,0,c-1)]$ 对于 $c \geq 2$; (9) $[K_t(a,0,1)] = [W_t(a,0,1)] + [W_t(a+1,0,0)] + [W_t(a+1,1,0)]$ 对于 $a \geq 2$；(10) $[K_t(0,1,c)] = [W_t(0,1,c)] + [W_t(0,0,c)] + [W_t(1,0,c-1)]$ 对于 $c \geq 2$; (11) $[K_t(a,1,0)] = [W_t(a,1,0)] + [W_t(a,2,0)] + [W_t(a+2,0,0)]$ 对于 $a \geq 0$; (12) $[K_t(a,b,0)] = [W_t(a,b,0)] + [W_t(a,b+1,0)]$ 对于 $a \geq 0$, $b \geq 2$; (13) $[K_t(a,0,c)] = [W_t(a,0,c)] + [W_t(a+1,0,c-1)]$ 对于 $a \geq 2$, $c \geq 2$; (14) $[K_t(0,b,c)] = [W_t(0,b,c)] + [W_t(0,b-1,c)]$ 对于 $b \geq 2$, $c \geq 1$; (15) $[K_t(a,b,c)] = [W_t(a,b,c)]$ 对于 $abc \neq 0$。

注记 3.10。 $K_0(a,\ b,\ c)$ 在格罗滕迪克群中的分解见 [23,第 367 页，方程 1–19]。注意，在 [23]中使用了同构 ˆ $\mathfrak{p}(4)_0 \cong \mathfrak{so}(6)$ 来描述权重，因此 $K_t(a,\ b,\ c)$ 在 [23]中记作 $K_t(c,\ b,\ a)$。此外，$W_0(a,\ b,\ c)$ 记作 $V_0(c,\ b,\ a)$。我们还指出，[23] 中的方程 14.、15. 和 18. 应修正如下（采用我们的记号）：

14. $[K_0(0,0,1)] = [W_0(0,0,1)] + 2[W_0(1,0,0)] + [W_0(1,1,0)]$;
15. $[K_0(1,0,0)] = 2[W_0(1,0,0)] + [W_0(1,1,0)] + [W_0(3,0,0)]$;

18. $[K_0(0,\ 1,\ 0)] = 2[W_0(0,\ 1,\ 0)] + [W_0(0,\ 2,\ 0)] + 2[W_0(0,\ 0,\ 0)] + 2[W_0(2,\ 0,\ 0)]$;

命题 3.11。 对于 $t \neq 0$ 不可约的 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-模 $W_t(a,b,c)$ 分解为以下不可约 $\mathfrak{h}$-模的直和：

- $W_t(a,\ 0,\ 0) = \tilde{F_t}(a-1,\ 0,\ 0)$ 对所有 $a \geq 1$；
- $W_t(0,\ 0,\ c) = F_t(0,\ 0,\ c+1)$ 对所有 $c \geq 0$；
- $W_t(a,\ 1,\ 0) = F_t(a-1,\ 1,\ 0) + F_t(a,\ 0,\ 1)$ 对所有 $a \geq 1$；
- $W_t(1,\ 0,\ c) = F_t(1,\ 0,\ c+1) + F_t(0,\ 1,\ c)$ 对所有 $c \geq 1$；
- $W_t(a,b,0) = F_t(a+1,b-1,0) + F_t(a-1,b,0) + F_t(a,b-1,1)$ 对所有 $a \geq 0$ 和 $b \geq 2$；
- $W_t(a,0,c) = F_t(a-1,1,c) + F_t(a-1,0,c) + F_t(a,0,c+1)$ 对所有 $a \geq 2$ 和 $c \geq 1$；
- $W_t(0,b,c) = F_t(1,b,c) + F_t(0,b+1,c-1) + F_t(0,b,c+1)$ 对所有 $b,c \geq 1$。

证明。该结果已在 [23, §5] 中以不同记号证明。具体而言，有 $V_t(0,b,a) = W_t(a,b,0)$ $(b \geq 2,\ a \geq 1)$，$W_t(0,b,c) = V_t(c,b+1,0)$ $(b,c \geq 1)$，$W_t(a,0,c) = V_t(c,0,a-1)$ $(a \geq 2, c \geq 1)$，$W_t(0,0,c) = V_t(c+1,0,0)$ $(c \geq 0)$，$W_t(a,0,0) = V_t(0,0,a-1)$ $(a \geq 1)$，$W_t(a,1,0) = V_t(0,1,a)$ $(a \geq 1)$，$W_t(1,0,c) = V_t(c+1,1,0)$ $(c \geq 1)$，$W_t(0,b,0) = V_t(0,b-1,0)$，$\tilde{}$ $(b \geq 2)$。此外，对于所有 $a,b,c \geq 0$，模 $F_t(a,b,c)$ 在 [23] 中记作 $L_t(c,b,a)$。□

我们之所以倾向于更改记号，是因为这样一来，不可约模 $W_t(a,\ b,\ c)$ 就是 Kac 模 $K_t(a,\ b,\ c)$ 的商模，因此它有一个权为 $(a,\ b,\ c)$ 的 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-奇异向量。这个奇异向量是唯一的，只有一种例外：对于 $t \neq 0$，不可约 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-模 $W_t(0,\ 0,\ 0)$ 还有另一个权为 $(0,\ 1,\ 0)$ 的 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-奇异向量。事实上，除唯一的例外 $W_t(0,\ 0,\ 0) \cong W_t(0,\ 1,\ 0)$ 外，模 $W_t(a,\ b,\ c)$ 两两不同构，对所有 $t \neq 0$ 都成立。这可由命题 3.11 中给出的分解以及以下观察得出。

注 3.12. 根据定义3.7，若 $t \neq 0$，则 $W_t(0,\ 0,\ 0)$ 有一个非零奇异向量 $a_{12}v$。事实上，该向量生成 $W_t(0,\ 0,\ 0)$，因为向量 $a_{34}v$ 是由 $a_{12}v$ 和 $(a_{12}a_{34} + a_{34}a_{12})v = 2tv$ 生成的。因此，我们有一个满射 $K_t(0,\ 1,\ 0) \to W_t(0,\ 0,\ 0)$，并且 $W_t(0,\ 1,\ 0)$ 与 $W_t(0,\ 0,\ 0)$ 同构，因为 $W_t(0,\ 1,\ 0)$ 是 $K_t(0,\ 1,\ 0)$ 的唯一不可约商模。

Kac 模的不可约商模、它们作为 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-模在格罗滕迪克群中的分解，以及 Kac 模之间的态射，均总结于图1中。

注3.13。 这里明确描述 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-模 $K_0(0,\ 0,\ 0)$。该模包含以下三个 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-奇异向量：$z_1 = a_{12}$、$z_2 = a_{12}a_{13}a_{14}$ 和 $z_3 = a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34}$。分别用 M_1、M_2 和 M_3 表示由 z_1、z_2 和 z_3 生成的子模。我们有以下同构：

a) $K_0(0,\ 0,\ 0)/M_1 \cong M_3 \cong W_0(0,\ 0,\ 0)$（平凡模）；
b) $M_1/M_2 \cong W_0(0,\ 1,\ 0)$；c) $M_2/M_3 \cong W_0(2,\ 0,\ 0)$。

Kac 模 $K_0(a,b,c) = \mathcal{U}(\hat{}\mathfrak{p}(4)_{-1}) \otimes F(a,b,c)$ 关于 $\mathcal{U}(\hat{}\mathfrak{p}(4)_{-1})$ 的分次，在 $W_0(a,b,c)$ 上诱导出一个分次。现在给出不可约模 $W_0(a,b,c)$ 按不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模的分次分解。在此描述中，术语 $F(a,b,c)q^d$ 表示一个次数为 d 的不可约子模 $F(a,b,c)$。

命题 3.14。 不可约 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-模 $W_0(a,b,c)$ 分解为不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模的直和，如下所示：

$W_0(a,0,0) = F(a,0,0) + F(a-1,0,1)q + F(a-2,1,0)q^2 + F(a-2,0,0)q^3$, 对于 $a \neq 2$;$W_0(2,0,0) = F(2,0,0) + F(1,0,1)q + F(0,1,0)q^2$;$W_0(0,b,0) = F(0,b,0) + F(1,b-1,1)q + (F(2,b-1,0) + F(0,b-1,2))q^2 + F(1,b-1,1)q^3 + F(0,b,0)q^4$, 对于 $b \geq 2$;$W_0(0,1,0) = F(0,1,0) + F(1,0,1)q + F(0,0,2)q^2$;$W_0(0,0,c) = F(0,0,c) + F(0,1,c)q + F(1,0,c+1)q^2 + F(0,0,c+2)q^3$, 对于 $c \geq 1$;$W_0(a,b,0) = F(a,b,0) + (F(a+1,b-1,1) + F(a-1,b,1) + F(a,b-1,0))q + (F(a+2,b-1,0) + F(a,b,0) + F(a+1,b-2,1) + F(a,b-1,2) + F(a-2,b+1,0) + F(a-1,b-1,1))q^2 + (F(a,b-2,2) + F(a+1,b-1,1) + F(a+2,b-2,0) + F(a-1,b,1) + F(a-2,b,0) + F(a,b-1,0))q^3 + (F(a,b,0) + F(a+1,b-2,1) + F(a-1,b-1,1))q^4 + F(a,b-1,0)$, 对于 $a \geq 1, b \geq 2$;$W_0(a,1,0) = F(a,1,0) + (F(a+1,0,1) + F(a-1,1,1) + F(a,0,0))q + (F(a,1,0) + F(a,0,2) + F(a-2,2,0) + F(a-1,0,1))q^2 + (F(a-1,1,1) + F(a-2,1,0) + F(a,0,0))q^3 + F(a-1,0,1))q^4$, 对于 $a \geq 2$;$W_0(1,1,0) = F(1,1,0) + (F(2,0,1) + F(0,1,1) + F(1,0,0))q + (F(1,1,0) + F(1,0,2) + F(0,0,1))q^2 + F(0,1,1)q^3 W_0(0,b,c) = F(0,b,c) + (F(0,b+1,c) + F(1,b-1,c+1) + F(1,b,c-1))q + (F(1,b,c+1) + F(1,b+1,c-1) + F(2,b-1,c) + F(0,b-1,c+2) + F(0,b,c) + F(0,b+1,c-2))q^2 + (F(2,b,c) + F(1,b-1,c+1) + F(1,b,c-1) + F(0,b,c+2) + F(0,b+2,c-2) + F(0,b+1,c))q^3 + (F(1,b,c+1) + F(1,b+1,c-1) + F(0,b,c))q^4 + F(0,b+1,c)q^5$, 对于 $b, c \geq 1$;$W_0(1,0,c) = F(1,0,c) + (F(1,1,c) + F(0,1,c-1) + F(0,0,c+1))q + (F(2,0,c+1) + F(0,1,c+1) + F(0,2,c-1) + F(1,0,c))q^2 = (F(1,0,c+2) + F(1,1,c) + F(0,0,c+1))q^3 + F(0,1,c+1)q^4$, 对于 $c \geq 1$;$W_0(a,0,c) = F(a,0,c) + (F(a,1,c) + F(a-1,1,c-1) + F(a-1,0,c+1))q + (F(a+1,0,c+1) + F(a-1,1,c+1) + F(a-1,2,c-1) + F(a,0,c) + F(a-2,1,c) + F(a-1,0,c-1))q^2 + (F(a-2,2,c) + F(a,0,c+2) + F(a,1,c) + F(a-1,1,c-1) + F(a-1,0,c+1) + F(a-2,0,c))q^3 + (F(a-1,1,c+1) + F(a,0,c) + F(a-2,1,c))q^4 + F(a-1,0,c+1)q^5$, 对于 $a \geq 2$, $c \geq 1$

.

证明。 利用 Littlewood–Richardson 规则，可以将 $K_0(a,b,c) = \mathcal{U}(\hat{}\mathfrak{p}(4)_{-1}) \otimes F(a,b,c)$ 分解为复数域上的不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模的直和。根据 [23, 定理 4, $W_0(a,b,c)$ 这些模的分解由 $K_0(a,b,c)$ 的分解唯一确定。□

推论 3.15。 对于每个 $t \in \mathbb{C}$，以下同构成立。

- $W_t(1,0,0)^* = W_{-t}(1,0,0)$;
- $W_t(2,0,0)^* = W_{-t}(0,1,0)$;
- $W_t(a,0,0)^* = W_{-t}(0,0,a-2)$ 对所有 $a \geq 3$;
- $W_t(0,b,0)^* = W_{-t}(0,b,0)$ 对所有 $b \geq 2$;
- $W_t(1,1,0)^* = W_{-t}(1,1,0)$;
- $W_t(a,1,0)^* = W_{-t}(1,0,a-1)$ 对所有 $a \geq 2$;
- $W_t(a,b,0)^* = W_{-t}(0,b-1,a)$ 对所有 $a \geq 1$, $b \geq 2$;
- $W_t(a,0,c)^* = W_{-t}(c+1,0,a-1)$ 对所有 $a \geq 2$, $c \geq 1$。

证明。 $t = 0$ 的对偶性由命题 3.14 得出，这是由于它与将 $W_0(a,b,c)$ 分解为不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模的直和相容；而 $t \neq 0$ 的对偶性由命题 3.11 得出，这是由于它与将 $W_t(a,b,c)$ 分解为不可约 $\mathfrak{h}$-模的直和相容。□

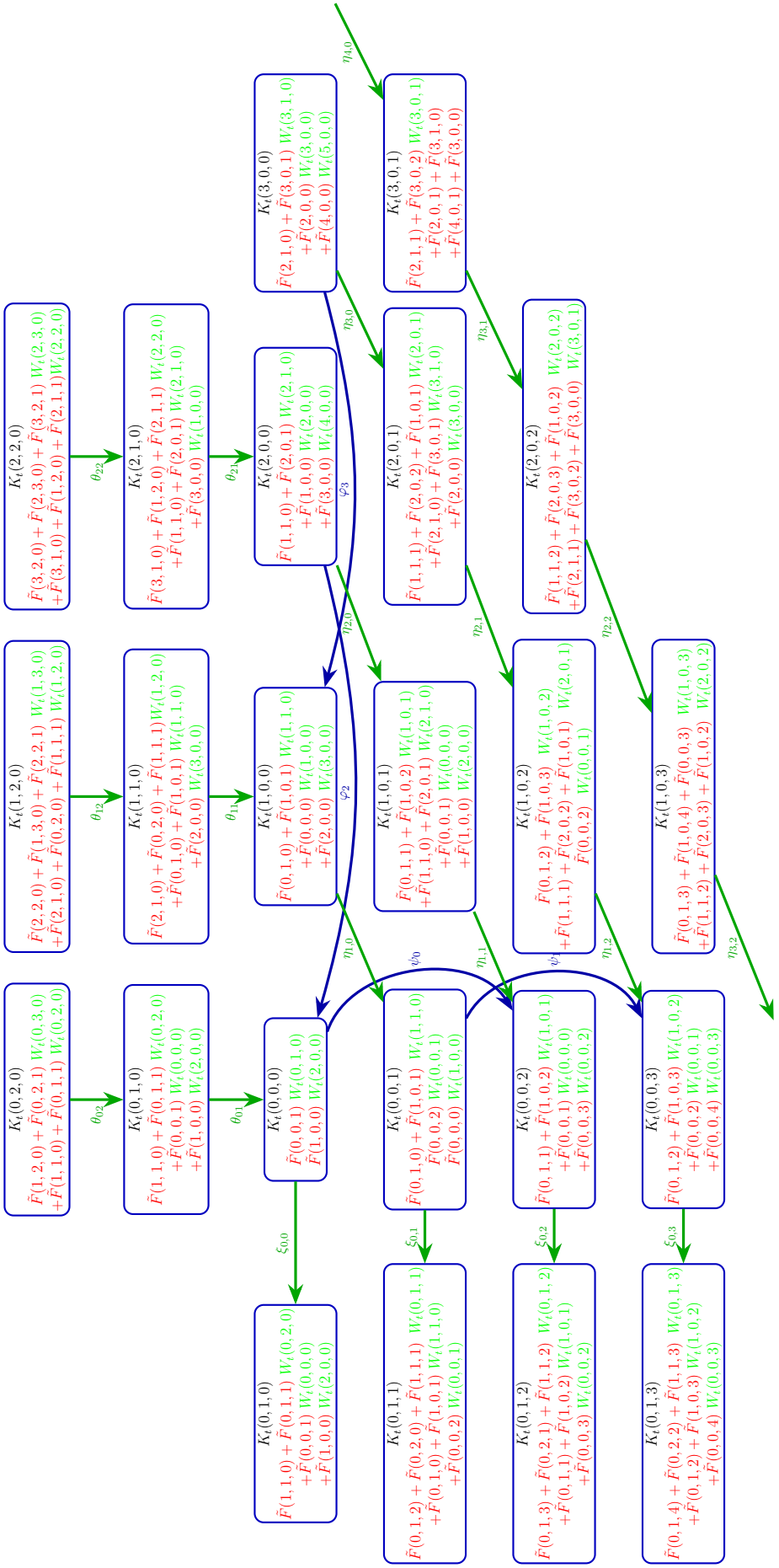

FIGURE 1. Morphisms between Kac modules

4. Singular vectors of $W(4)$ 和 and $S(4)$ 的奇异向量

本节回顾李代数 $W(4)$ 和 $S(4)$ 的 Verma 模中的奇异向量分类（ $S(4)$ 是 $W(4)$ 中由零散度向量场构成的李子代数）。我们回顾一下， $F(a,\ b,\ c)$ 表示最高权为 $(a,\ b,\ c)$ 的不可约 $\mathfrak{sl}_4$- 模，而 $F_t(a,\ b,\ c)$ 表示最高权为 $(a,\ b,\ c)$ 、中心荷为 t 的不可约 $\mathfrak{gl}_4$- 模（即 $\sum x_i\partial_i$ 的作用是乘以 t）。我们考虑 $W(4)$ 的主分次及其在 $S(4)$ 上的诱导分次，并定义以下 Verma 模：

$$\mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(4)}^{W(4)}(F_t(a,b,c)) = \mathcal{U}(W(4)) \otimes_{\mathcal{U}(W_{\geq 0}(4))} \otimes F_t(a,b,c)$$

其中 $W_{>0}(4)$ 在 $F_t(a,\ b,\ c)$ 上平凡作用。

类似地，我们定义 Verma 模

$$\mathrm{Ind}_{S_{\geq 0}(4)}^{S(4)}(F(a,b,c)) = \mathcal{U}(S(4)) \otimes_{\mathcal{U}(S_{\geq 0}(4))} \otimes F(a,b,c)$$

其中 $S_{>0}(4)$ 在 $F(a,\ b,\ c)$ 上平凡作用。在 [20] 和 [21] 中，Rudakov 对 $W(4)$ 和 $S(4)$ 的 Verma 模中的奇异向量给出了完整分类。

回想一下， $W(4)$ 上的 Verma 模中的向量若是子代数 $\mathcal{B} + W_{>0}(4)$ 的特征向量，则称其为奇异向量，其中 $\mathcal{B}$ 是 $W_0(4)$ 的 Borel 子代数；对 $S(4)$ 也有类似定义。

定理 4.1. 以下给出了 $W(4)$ 的 *Verma* 模中奇异向量（相差一个标量）的完整分类：

- $\partial_4 \otimes 1 \in \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(4)}^{W(4)}(F_0(0,0,0))$;
- $\partial_3 \otimes x_4^* - \partial_4 \otimes x_3^* \in \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(4)}^{W(4)}(F_{-1}(0,0,1))$;
- $\partial_2 \otimes x_1 \wedge x_2 + \partial_3 \otimes x_1 \wedge x_3 + \partial_4 \otimes x_1 \wedge x_4 \in \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(4)}^{W(4)}(F_{-2}(0,1,0))$;
- $\partial_1 \otimes x_1 + \partial_2 \otimes x_2 + \partial_3 \otimes x_3 + \partial_4 \otimes x_4 \in \mathrm{Ind}_{W_{\geq 0}(4)}^{W(4)}(F_{-3}(1,0,0))$.

特别地，不存在次数为 > 1 的奇异向量。因此，我们得到如下态射复形（参见(3)）：

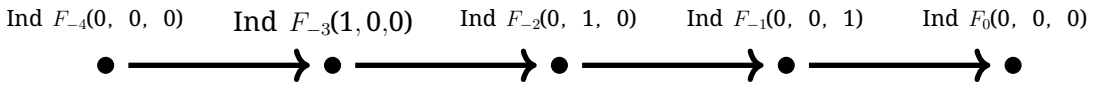

FIGURE 2. $W(4)$ 的 Verma 模之间的所有非零态射。

定理4.2。 以下给出了 $S(4)$ 的奇异向量的完整分类

- $\partial_4 \otimes 1 \in \mathrm{Ind}^{S}{}_{(4)\,S_{\geq 0}(4)}(F(0,\ 0,\ 0))$;
- $\partial_3 \otimes x_4^* - \partial_4 \otimes x_3^* \in \mathrm{Ind}^{S}{}_{(4)\,S_{\geq 0}(4)}(F(0,\ 0,\ 1))$;
- $\partial_2 \otimes x_1 \wedge x_2 + \partial_3 \otimes x_1 \wedge x_3 + \partial_4 \otimes x_1 \wedge x_4 \in \mathrm{Ind}^{S}{}_{(4)\,S_{\geq 0}(4)}(F(0,1,0))$;
- $\partial_1 \otimes x_1 + \partial_2 \otimes x_2 + \partial_3 \otimes x_3 + \partial_4 \otimes x_4 \in \mathrm{Ind}^{S}{}_{(4)\,S_{\geq 0}(4)}(F(1,0,0))$;
- $\partial_4(\partial_1 \otimes x_1 + \partial_2 \otimes x_2 + \partial_3 \otimes x_3 + \partial_4 \otimes x_4) \in \mathrm{Ind}^{S}{}_{(4)\,S_{\geq 0}(4)}(F(1,0,0))$.

我们有 t 因此，以下是 $S(4)$ 的 *Verma* 模之间的态射图：

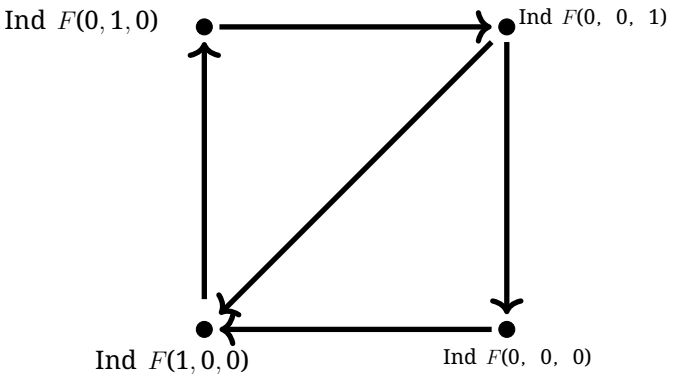

FIGURE 3. 关于 $S(4)$的 Verma 模之间的所有非零态射。外部态射的次数为 1，而“对角”态射的次数为 2。

5. $E(4,4)$-VERMA MODULES AND THEIR SINGULAR VECTORS

设 W 是一个有限维 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-模，并考虑由 W 诱导的 $E(4,\ 4)$-Verma 模：

$$M(W) = \mathrm{Ind}_{E(4,4)_{\geq 0}}^{E(4,4)} W$$

其中， $E(4,\ 4)_{>0}$ 在 W 上平凡作用。在 [7] 中证明了以下结果：

定理 5.1。 在具有离散拓扑的连续$E(4,\ 4)$-模范畴上存在一个反变对偶函子，将 $M\ (W^*)$ 对应到 $M\ (W)$ 。

注 5.2。 我们曾在任意李超代数及其在 [5] 中的有限余维子代数的框架下猜想过这种对偶性。Michel Duflo 指出，该猜想早已由 Sophie Chemla 在 [10]中证明。

这一结果与推论 3.15 中给出的 $W_t(a,\ b,\ c)^*$ 模的描述，将是分类退化的（即，可约的） $E(4,\ 4)$-Verma 模的基础。我们还回顾一下， $K_t(a,\ b,\ c)^* \cong K_{-t}(c,\ b,\ a)$（见 [23, 引理 4.4]）。

现在记 $M_t(a,\ b,\ c)$ 为由 $E(4,\ 4)_0 = \hat{\mathfrak{p}}(4)$-模 $W_t(a,\ b,\ c)$ 诱导的广义 Verma 模，并将其平凡地扩张为 $E(4,\ 4)_{>0}$，即

$$M_t(a,b,c) = \mathrm{Ind}_{E(4,4)_{\geq 0}}^{E(4,4)} W_t(a,b,c),$$

~类似地，将 $M_t(a,\ b,\ c)$ 定义为由 Kac 模 $K_t(a,\ b,\ c)$ 诱导的 Verma 模。

定义5.3。 设 $0 \neq w \in M_t(a,\ b,\ c)$。若 w 是一个 $E(4,\ 4)$-奇异向量，则称之为

- $(x_i\partial_{i+1})w = 0$ 对所有 $i = 1,\ 2,\ 3$ 均成立；
- $bw = 0$ 对所有 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$ 均成立；
- $Xw = 0$ 对所有 $X \in E(4,\ 4)_{>0}$ 均成立。

我们总是假设奇异向量是齐次向量，且是 $\mathfrak{sl}_4$的权向量。

引理5.4。 令 $0 \neq w \in M_t(a,b,c)$。那么，当且仅当 w 是 $E(4、4)$-奇异向量时，

- $(x_i\partial_{i+1})w = 0$ 对所有 $i = 1,\ 2、3$；

- $b_{44}w = 0$;
- $E\,w = 0$，其中 $E = x_4^2 d_3 - x_3 x_4 d_4$;
- $(x_4 C)\ w = 0$，其中 $C = \sum_i x_i \partial_i$ 是$\hat{}$ $\mathfrak{p}$（4）中的中心元。

证明。 这是以下事实的推论：

- b_{44} 是$\hat{}$ $\mathfrak{p}$(4)$_1$中的最低权向量，而后者是一个不可约 $\mathfrak{sl}_4$-模；
- 元素 E 和 $x_4 C$ 生成 Borel 子代数上的 $E(4,\ 4)_1$ ，该 Borel 子代数由$\hat{}$ $\mathfrak{p}$(4)中由$x_i\partial_j$ （其中 $i < j$）和$\hat{}$ $\mathfrak{p}$(4)$_1$生成；
- $E(4,\ 4)_{>0}$ 由 $E(4,\ 4)_1$生成。

□

本文的主要结果是对 Verma 模$M_t(a, b, c)$中的 $E(4,4)$-奇异向量进行分类。我们将一般向量 $w \in M_t(a, b, c)$ 表示为以下形式

$$w = \sum_{I,J} \partial_I d_J \otimes v_{I,J},\ v_{I,J} \in W_t(a, b, c),$$

其中 I是一个元素取自 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的多重集， J是 $\{1, 2, 3, 4\}$的有序子集。有时我们会省略 w中的符号 $\otimes$ 。在此记号下，例如有 $\partial_{1,2,2} d_{1,3,2} = -\partial_1 \partial_2^2 d_1 d_2 d_3$。我们的首要目标是证明奇异向量次数的一个上界。回想一下，若 $v \in L^d_{-1} \otimes W$，则称 v 的次数为 d。

命题 5.5。 设 w 是 $M_t(a, b, c)$中的一个奇异向量。那么 w 的次数至多为 *5*。

证明。 令 $V = F_t(a, b, c)$，并考虑 $M_t(a, b, c)$ 的以下子空间

$$M(k) = \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_4] \otimes \sum_{j \le k} \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \mathbb{C} d_{i_1} \cdots d_{i_j} \otimes V,$$

其中 $k = 0, \ldots, 4$。子空间 $M(k)$ 不是 $E(4, 4)$-子模，但我们可以看到，它确实是 $M_t(a, b, c)$ 的一个 $W(4)$-子模。因此，我们得到 M 到$W(4)$-子模的以下滤过

$$M(0) = \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_4] \otimes V \subseteq M(1) \subseteq \cdots \subseteq M(4) = M.$$

我们还令 $N(k) = M(k)/M(k-1)$，其中 $k = 0, \ldots, 4$，且 $M(-1) = 0$。令

$$F(k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbb{C} d_{i_1} \cdots d_{i_k} \otimes V$$

并注意到，作为向量空间，我们有

$$N(k) \cong \mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_4] \otimes F(k).$$

另请注意， $F(k)$ 在 $N(k)$ 中被 $W_{>0}(4)$ 消灭。由此可得

$$N(k) \cong \mathrm{Ind}_{W_{\ge 0}(4)}^{W(4)} F(k).$$

现在考虑奇异向量 $w \in M_t(a,\ b,\ c)$，并令 k 为使 $w \in M(k)$ 成立的最小值。那么， w 在商模 $N(k)$ 中的投影必然是 $W(4)$ 的奇异向量。由定理 4.1， $W(4)$ 的奇异向量的次数至多为 1，因此向量 w 在 $N(k)$ 中的次数至多为 5，结论得证。□

令 $N = N(\hat{\mathfrak{p}}(4)) = N(\mathfrak{sl}_4) \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$ 为 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$ 的一个极大幂零子代数，并令 $B = B(\hat{\mathfrak{p}}(4)) = B(\mathfrak{sl}_4) \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$ 为包含 N 的 Borel 子代数。假设

$$w = \sum_{I,J} \partial_I d_J \otimes v_{I,J}$$

是一个次数为 d 的奇异向量。令 $U_d = \bigoplus_{|I|+|J|=d} \mathbb{C}\partial_I d_J$，并以 $(\partial_I d_J)^*$ 表示 U_d^* 的对偶基。由于 N 在 w 上作用平凡，我们可推得映射 $U_d^* \to F_t(a, b, c)$ 为

$$(\partial_I d_J)^* \mapsto v_{I,J} \tag{10}$$

是一个 N-模态射。此观察显著简化了 B 中元素对向量 $v_{I,J}$ 的作用。特别地，我们可以看到，只有当 4 是 J 中的一个条目时，$b_{44} v_{I,J} \neq 0$。

$S(4)$ 的奇异向量分类使我们能够进一步简化 $E(4, 4)$ 中可能出现的奇异向量。

引理5.6。 设 $w = \sum_{I,J} \partial_I d_J \otimes v_{I,J}$ 是 $M_t(a, b, c)$ 中次数为 k 的奇异向量。则

$$\bar{w} = \sum_{|I|=k} \partial_I \otimes v_{I,\emptyset}$$

是 $S(4)$ 的奇异向量。特别地，若 $k \geq 3$ 我们有 $\bar{w} = 0$，而若 $k = 1,2$ 则 $\bar{w}$必须与定理*4.2*中的分类相容。

证明。 回顾一下， $S_1(4)$ 是一个不可约的 $\mathfrak{sl}_4$-模，其最高权为 $(2,0,1)$。向量场 $x_4^2\partial_1$ 是一个最低权向量，并且 $\bar{w}$ 是 $S(4)$-奇异向量，当且仅当它被 $x_i\partial_{i+1}$ (对 $i = 1, 2, 3$) 以及 $x_4^2\partial_1$ 湮灭。显然，$(x_i\partial_{i+1})(\bar{w})$ 和 $(x_i\partial_{i+1})(w - \bar{w})$ 若非零，则线性无关，因此 $(x_i\partial_{i+1})(\bar{w}) = 0$。我们还声称，$(x_4^2\partial_1)(\bar{w})$ 和 $(x_4^2\partial_1)(w - \bar{w})$ 若非零，也线性无关。事实上，令

$$M(i, j) = \bigoplus_{|I|=i, |J|=j} \mathbb{C}\partial_I d_J \otimes F_t(a, b, c).$$

只需证明 $(x_4^2\partial_1)\,\bar{w} \in M(k-1, 0)$ 和 $(x_4^2\partial_1)(w - \bar{w}) \in \bigoplus_{i=0}^{k-2} M(i, k-1-i)$ 即可。第一部分显然。至于第二部分，我们注意到，可能对 $M(k-1, 0)$ 有贡献的项只有 $\partial_I d_1 \otimes v_{I,1}$ 这种形式，因为 $[x_4^2\partial_1, d_i] = \delta_{i,1} b_{44}$。但在这种情况下，我们有 $b_{44} v_{I,1} = 0$ ，结论随即成立。□

6. Singular vectors of degree 1

令 $M_t(a, b, c)$ 为由 $W_t(a, b, c)$ 诱导的广义 $E(4, 4)$-Verma 模。我们在 $M_t(a, b, c)$ 中寻找次数为 1 的可能奇异向量 w。我们简化上一节引入的记号，令 $v_i = v_{i,\emptyset}$ 且 $z_i = v_{\emptyset,i}$ ，于是任意奇异向量w 均具有如下形式:

$$w = \partial_1 \otimes v_1 + \partial_2 \otimes v_2 + \partial_3 \otimes v_3 + \partial_4 \otimes v_4 + d_4 \otimes z_4 + d_3 \otimes z_3 + d_2 \otimes z_2 + d_1 \otimes z_1, \tag{11}$$

其中 $v_i, z_i \in W_t(a, b, c)$, $i = 1, 2, 3, 4$。我们依次考虑这八个向量 $v_1, v_2, v_3, v_4, z_4, z_3, z_2, z_1$。我们注意到，如果其中一个为 0，那么它左侧的其他所有向量也都为 0；如果其中一个非零，那么它右侧的其他所有向量也都非零。这是因为 $(x_1\partial_2)z_1 = -z_2$, $(x_2\partial_3)z_2 = -z_3$, $(x_3\partial_4)z_3 = -z_4$, $b_{44}z_4 = -2v_4$, $(x_3\partial_4)v_4 = v_3$,

$(x_2\partial_3)v_3 = v_2$ 以及 $(x_1\partial_2)v_2 = v_1$。事实上，在这种情况下，可以如下利用 (10) 中给出的态射：对于所有 $i < j$

$$(x_i\partial_j)v_k = \delta_{j,k}v_i, \tag{12}$$

$$(x_i\partial_j)z_k = -\delta_{ik}z_j, \tag{13}$$

并且对所有 r, s, k

$$b_{ij}v_k = 0 \tag{14}$$

and

$$b_{rs}z_j = -\delta_{rj}v_s - \delta_{sj}v_r. \tag{15}$$

此外，我们有

$$\frac{1}{3}Ew = \frac{1}{2}a_{34}v_4 - x_4\partial_1 z_2 + x_4\partial_2 z_1 = 0 \tag{16}$$

and

$$(x_4C)w = -(x_4\partial_1)v_1 - (x_4\partial_2)v_2 - (x_4\partial_3)v_3 + \frac{1}{4}(h_{14}+h_{24}+h_{34}-5t+5)v_4 + \frac{5}{4}(a_{14}z_1+a_{24}z_2+a_{34}z_3) = 0. \tag{17}$$

由关系 (12)–(15)，(11) 中从左到右第一个非零向量必定是一个 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量，其中 v_1, v_2, v_3, v_4, z_4, z_3, z_2, z_1

给定一个权向量 v，我们用 $\lambda(v)$ 表示其 $\mathfrak{sl}_4$-权。令 $\lambda(w) = (\alpha, \beta, \gamma)$。因此，对于奇异向量 (11)，我们必须有：

- $\lambda(v_1) = (\alpha + 1, \beta, \gamma)$;
- $\lambda(v_2) = (\alpha - 1, \beta + 1, \gamma)$;
- $\lambda(v_3) = (\alpha, \beta - 1, \gamma + 1)$;
- $\lambda(v_4) = (\alpha, \beta, \gamma - 1)$;
- $\lambda(z_4) = (\alpha, \beta, \gamma + 1)$;
- $\lambda(z_3) = (\alpha, \beta + 1, \gamma - 1)$;
- $\lambda(z_2) = (\alpha + 1, \beta - 1, \gamma)$;
- $\lambda(z_1) = (\alpha - 1, \beta, \gamma)$.

引理 6.1. 设 W 是一个有限维 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-模，且 $w \in \mathrm{Ind}_E^{E(4,4)}{}_{(4,4)\geq 0}(W)$ 是一个 $E(4, 4)$-奇异向量，满足 $\lambda(w) = (\alpha, \beta, \gamma)$。设 w 如 (11) 中所示。

(a) 若 $v_1 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$，且 v_1 是一个权为 $\lambda(v_1) = (1, 0, 0)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量；*(b)* 若 $v_1 = 0$ 且 $v_2 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$，且 v_2 是一个权为 $\lambda(v_2) = (0, 1, 0)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量；*(c)* 若 $v_1 = v_2 = 0$ 且 $v_3 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \gamma + 1, \gamma)$，且 v_3 是一个权为 $\lambda(v_3) = (0, \gamma, \gamma + 1)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量；*(d)* 若 $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ 且 $v_4 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \gamma)$，且 v_4 是一个权为 $\lambda(v_4) = (0, 0, \gamma - 1)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量；*(e)* 若 $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ 且 $z_4 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, \gamma)$，且 z_4 是一个权为 $\lambda(z_4) = (0, 0, \gamma + 1)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量；*(f)* 若 $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = z_4 = 0$，则 $z_3 = z_2 = 0$；此外，若 $z_1 \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, 0, 0)$，且 z_1 是一个权为 $\lambda(z_1) = (\alpha - 1, 0, 0)$ 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量。

证明。 将 b_{12} 作用于 (16)，得到

$$\alpha v_4 + (x_4\partial_1)v_1 - (x_4\partial_2)v_2 = 0, \tag{18}$$

对该等式应用 $x_1\partial_4$，可推出（$2\alpha+\beta+\gamma$）$v_1=0$。由于 w 是有限维 $\mathfrak{sl}_4$-模中的最高权向量，故情形 (a) 得证。因此，我们可以假设 $v_1=0$。对 (18) 应用 $x_2\partial_4$，得到（$\alpha-\beta-\gamma-1$）$v_2=0$。接下来，对 (17) 应用 $x_1\partial_4$，得到

$$a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + a_{14}z_4 = 0, \tag{19}$$

对 (19) 应用 b_{23}，得到

$$a_{12}v_3 + a_{13}v_2 + 2\beta z_4 = 0. \tag{20}$$

若对该等式应用 b_{24}，可推出（$2\beta+\gamma$）$v_2=0$。特别地，若 $v_2\neq 0$，则有 $\beta=\gamma=0$ 和 $\alpha=1$。情形 (b) 得证，因此我们可以假设 $v_1=v_2=0$。

由方程 (18) 得到 $\alpha v_4=0$，并将 b_{34} 应用于 (20)，可得 $(\gamma+1-\beta)v_3=0$。情形 (c) 得证，因此我们可以假设 $v_1=v_2=v_3=0$。

由 (20) 可得 $2\beta z_4=0$，因此情形 (d) 得证。

我们可以假设对所有 $i=1,\dots,4$，都有 $v_i=0$。将 $x_1\partial_4$ 应用于 (16)，可得

$$(\alpha+\beta+\gamma+1)z_2 + (x_4\partial_2)z_4 = 0 \tag{21}$$

并将 $x_2\partial_4$ 应用于此方程，可得 $\alpha z_4=0$。由 (20) 还可得 $2\beta z_4=0$，因此情形 (e) 得证。现在我们还可以假设 $z_4=0$。由 (21) 得到 $(\alpha+\beta+\gamma+1)z_2=0$，这迫使 $z_2=0$ 成立，因为 α,β,γ 都是非负整数。因此 $z_3=-(x_2\partial_3)z_2=0$。最后，我们可以将 $x_2\partial_4$ 应用于 (16)，得到 $(\beta+\gamma)z_1=0$，证明完毕。□

命题 6.2。 假设我们处于引理 *6.1* 的情形 *(a)*，其中对某些a、b、$c\geq 0$，有 $W=W_t(a、b、c)$。则 $a=t=1$、$b=c=0$，因此我们处于标准模中，该标准模在例 *3.3* 中已有描述，并且

$$w=\partial_1\otimes d_1+\partial_2\otimes d_2+\partial_3\otimes d_3+\partial_4\otimes d_4+d_1\otimes\partial_1+d_2\otimes\partial_2+d_3\otimes\partial_3+d_4\otimes\partial_4$$

确实是一个 $E(4,4)$-奇异向量。它在相差一个标量因子的意义下是唯一的。

证明。 由引理 6.1，$M_t(a、b、c)=M_t(1、0、0)$。根据权重理由以及方程 (12)、(13)、(14) 和 (15)，奇异向量 w 必然就是陈述中所显示的向量。事实上，z_1 是标准模 $W_t(1、0、0)$ 中权为 $(-1、0、0)$ 的非零向量，因此除相差一个标量因子外，它就是 ∂_1。方程 (13) 给出 $z_i=-(x_1\partial_i)z_1=\partial_i$，而方程 (15) 给出 $-2v_i=b_{ii}z_i=[b_{ii},\partial_i]=-2d_i$。

下面验证：当且仅当 $t=1$ 时，w 是一个 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量。对于每个 $t\in\mathbb{C}$，条件（$x_i\partial_{i+1}$）$w=0$都很容易验证。我们还有

$$Ew = 3(x_4\partial_2)\otimes\partial_1 - 3(x_4\partial_1)\otimes\partial_2 + \frac{1}{2}b_{44}\otimes d_3 + (-\frac{1}{2}b_{34}+\frac{3}{2}a_{34})\otimes d_4 = 0$$

对于每个 $t \in \mathbb{C}$。最后我们计算

$$\begin{aligned}(x_4C)w &= (-\frac{1}{4}b_{14} + \frac{5}{4}a_{14}]) \otimes \partial_1 + (-\frac{1}{4}b_{24} + \frac{5}{4}a_{24}]) \otimes \partial_2 + (-\frac{1}{4}b_{34} + \frac{5}{4}a_{34}]) \otimes \partial_3 - \frac{1}{4}b_{44} \otimes \partial_4 \\ &\quad - x_4\partial_1 \otimes d_1 - x_4\partial_2 \otimes d_2 - x_4\partial_3 \otimes d_3 + \frac{1}{4}(x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 - 3x_4\partial_4 - 5t) \otimes d_4 \\ &= \frac{1}{4}d_4 + \frac{5}{4}td_4 + \frac{1}{4}d_4 + \frac{5}{4}td_4 + \frac{1}{4}d_4 + \frac{5}{4}td_4 + \frac{1}{2}d_4 - d_4 - d_4 - d_4 - \frac{3}{4}d_4 - \frac{5}{4}td_4 \\ &= (-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}t)d_4.\end{aligned}$$

特别地，$(x_4C)w = 0$ 当且仅当 $t = 1$，证明完毕。 □

命题 6.3. 设我们处于引理 *6.1* 的情形 *(f)*，其中 $W = W_t(a, b, c)$。那么$b = c = 0$，且 $a = t = 0$ 或 $a \geq 1$。此外，在相差一个标量因子的意义下，$w = d_1 \otimes z_1$，其中z_1是 $W_t(a, 0,0)$中的权为$(a, 0, 0)$ 的$\hat{}$ $\mathfrak{p}(4)$-奇异向量，是一个 $E(4, 4)$-奇异向量。

证明。由引理 6.1 可得 $b = c = 0$和 $w = d_1 \otimes z_1$，其中 $z_1 = x_1^a \in F_t(a, 0,0)$。我们证明，向量 $d_1 \otimes z_1$ 是一个 $E(4,4)$-奇异向量，当且仅当 $a = t = 0$ 或 $a \geq 1$。显然，向量 w 被 $x_i\partial_{i+1}$湮灭。此外，由式 (16) 可得 $Ew = 0$。由式 (17) 还可得

$$(x_4C)w = \frac{5}{4}a_{14}z_1.$$

若 $a = 0$且 $t \neq 0$, $a_{14}z_1$ 是 $W_t(0, 0, 0)$ 中的非零向量，由注 3.12 可知。在所有其他情况下，$a_{14}z_1 = 0$ 属于 $W_t(a, 0, 0)$。事实上，若 $a = t = 0$，这显然成立，因为 $W_0(0, 0, 0)$ 是平凡模。若 $a \geq 1$，根据命题 3.8，$W_t(a, 0, 0) = K_t(a, 0, 0)/Im(\theta_a,1)$，特别地，$a_{12}z_1 = 0$ 属于 $W_t(a, 0, 0)$，因为 $a_{12}z_1$ 属于 $Im(\theta_a,1)$；由此可得 $a_{14}z_1 = (x_4\partial_2)a_{12}z_1 = 0$，因此 w 是 $E(4, 4)$ 的奇异向量。□

推论 6.4. 命题 *6.3* 中描述的 $E(4,4)$-奇异向量给出了一个非零态射

$$M_{t-1}(a + 1, 0, 0) \to M_t(a, 0, 0)$$

当且仅当 $a = t = 0$，或 $a = 1$ 和 $t \neq 1$，或 $a \geq 2$。

证明。奇异向量 $w = d_1 \otimes z_1$ 的存在给出了一个态射

$$K_{t-1}(a + 1, 0, 0) \to M_t(a, 0, 0).$$

若 $t \neq 1$或 $a \neq 1$，则此映射经由商模 $W_{t-1}(a+1, 0, 0)$ 分解，当且仅当 $a_{12}x_1^{a+1}$映射为 0（见命题 3.8）。但 $a_{12}x_1^{a+1}$的像是 $a_{12}d_1 \otimes z_1 = -d_1 \otimes a_{12}z_1 = 0$。

若 $t = 1$且 $a = 1$，则 $K_0(2, 0,0)$ 的极大子模不是由 $a_{12}x_1^2$生成的。在此情形下，我们有映射 ϕ：$K_0(2, 0, 0) \to K_0(0, 0,0)$，其定义为 $x_1^2 \mapsto a_{12}a_{13}a_{14}$。$Im(\phi)$ 有一个维数为 1 的子模 M，由 $a_{12}a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}a_{34} \otimes 1$ 张成，其商模同构于 $W_0(2, 0, 0)$。由此可得，原映射经由 $W_0(2, 0,0)$ 分解，当且仅当 $a_{23}a_{24}a_{34}d_1 \otimes d_1$在 $M_1(1, 0, 0)$ 中为 0。事实上，可以在 $\mathcal{U}(E(4, 4)_{<0})$ 中计算

$$a_{23}a_{24}a_{34}d_1 = 2d_3a_{34} - 2\partial_2a_{23}a_{34} - 2d_2a_{34} - 2\partial_3a_{23}a_{34} - 2\partial_4a_{24}a_{34} - d_1a_{23}a_{24}a_{34},$$

并得出 $a_{23}a_{24}a_{34}d_1 \otimes d_1 \neq 0$，因为例如 $2d_3 \otimes a_{34}d_1 \neq 0$。 □

命题 6.5。 设我们处于引理 *6.1* 中的情形 *(b)*，其中 $W = W_t(a,b,c)$。那么$t \neq 0$。此外，若将 $M_t(0,1,0) \cong M_t(0,0,0)$ 中权为 $(0,0,0)$的 $\hat{}$ $\mathfrak{p}(4)$-奇异向量记为 *1*，则有

$$w = 4\sum_{i=2}^{4} \partial_i \otimes a_{1i} - 2(d_4 \otimes a_{12}a_{13} + d_3 \otimes a_{14}a_{12} + d_2 \otimes a_{13}a_{14}) - d_1 \otimes (a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23} - 4)$$

是一个 $E(4,4)$-奇异向量。它在相差一个标量因子的意义下唯一。

证明。 根据推论 6.4，对于 $a = 1$ 和 $t \neq 1$，我们有一个态射

$$M_{t-1}(2,0,0) \to M_t(1,0,0).$$

根据定理 5.1 和推论 3.15，我们有一个态射

$$M_{-t}(1,0,0) \to M_{1-t}(0,1,0).$$

因此，对于所有 $t \neq 0$，情形 (b) 中描述的奇异向量都存在。我们还可以显式地描述这一族奇异向量。事实上，考虑陈述中所展示的向量 w 。我们回顾一下， $W_t(0,0,0)$ 定义为 $K_t(0,0,0)$ 对极大子模 $Im(\varphi_2)$ 取商模。特别地，对于 $t \neq 0$，有 $a_{12}a_{13}a_{14} = 0$ 属于 $W_t(0,0,0)$。我们有

$$\begin{aligned}
(x_1\partial_2)w &= -2d_1a_{13}a_{14} + d_1(a_{13}a_{14} - a_{14}a_{13}) = 0,\\
(x_2\partial_3)w &= -4\partial_3a_{12} + 4\partial_3a_{12} + 2d_2a_{12}a_{14} - 2d_2a_{12}a_{14} + d_1(-a_{12}a_{24} + a_{12}a_{24}) = 0,\\
(x_3\partial_4)w &= -4\partial_4a_{13} + 4\partial_4a_{13} - 2d_3a_{12}a_{13} + 2d_3a_{12}a_{13} + d_1(a_{13}a_{23} - a_{13}a_{23}) = 0,\\
b_{44}w &= -8d_4 \otimes a_{14} + 8d_4 \otimes a_{14} = 0.
\end{aligned}$$

根据（16），我们还有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}Ew =& \frac{1}{2}a_{34}(4a_{14}) - (x_4\partial_1)(-2a_{13}a_{14}) - (x_4\partial_2)(a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23} - 4)\\
=& 2a_{34}a_{14} + 2a_{43}a_{14} - a_{14}a_{34} - a_{14}a_{43} = 0,
\end{aligned}$$

最后，根据（17），我们有

$$\begin{aligned}
(x_4C)w =& -4(x_4\partial_2)a_{12} - 4(x_4\partial_3)a_{13} + (h_{14} + h_{24} + h_{34} - 5t + 5)a_{14}\\
&- \frac{5}{4}\Big(a_{14}(a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23} - 4) + 2a_{24}a_{13}a_{14} + 2a_{34}a_{14}a_{12}\Big).
\end{aligned}$$

现在注意到，在 $W_t(0,0,0)$ 中，我们有 $(x_4\partial_1)(a_{12}a_{13}a_{14}) = 0$，因此 $a_{12}a_{34}a_{14} = -a_{24}a_{13}a_{14}$。作此代换后，我们得到

$$(x_4C)w = (-5 - 5t)a_{14} + 5a_{14} + \frac{5}{2}a_{14}a_{12}a_{34} - \frac{5}{2}a_{34}a_{14}a_{12} = 0,$$

回顾 $a_{12}a_{34} + a_{34}a_{12} = 2C$。

还需证明不会出现 $t = 0$ 的情形。证明如下。反设我们在 $M_0(0,1,0)$ 中有一个次数为 1 且权为 $(1,0,0)$ 的奇异向量；那么我们有一个态射

$$\tilde{M}_{-1}(1,0,0) \to M_0(0,1,0),$$

因此，根据对偶性（见推论 3.15），我们也有一个态射

$$M_0(2,0,0) \to \tilde{M}_1(0,0,1).$$

根据引理 6.1，该态射必然属于此引理的情形 (f)，因为它蕴含˜存在一个次数为 1、权为 (2，0，0) 的奇异向量，位于 M_1(0，0，1) 中。特别地，存在一个权为 (1，0，0) 的 ˆ p (4)-奇异向量 $z_1 \in K_1$(0，0，1)，使得 $w = d_1 \otimes z_1$。事实上，除一个常数因子外，

$$z_1 = a_{14}x_4^* + a_{13}x_3^* + a_{12}x_2^* = \eta_{1,0}(x_1),$$

根据命题 3.9，这是 K_1(0，0，1) 中权为 (1，0，0) 的唯一 ˆ p(4)-奇异向量。按照推论 6.4 的证明，我们还需要使用附加条件$a_{23}a_{24}a_{34}d_1 \otimes z_1 = 0$，并且可以验证事实上 $a_{23}a_{24}a_{34}d_1 \otimes z_1 \neq 0$。

□

命题 6.6. 假设我们处于引理 *6.1* 中的情形 *(c)*，其中 $W = W_t(a, b, c)$。那么$W_t(a, b, c) = W_t(0,$ $0,\ 1)$，并且除一个标量因子外，

$$w = 2\partial_3 \otimes x_4^* - 2\partial_4 \otimes x_3^* - d_4 \otimes a_{12}x_4^* - d_3 \otimes a_{12}x_3^* - d_2 \otimes a_{12}x_2^* - d_1 \otimes a_{12}x_1^*.$$

向量 w 确实是一个 $E(4,\ 4)$-奇异向量。

证明。 根据命题 6.1，我们在M_t(0，γ，$\gamma + 1$) 中有一个次数为 1、权为 (0，$\gamma + 1$，γ) 的奇异向量，特别地，我们有一个态射

$$\tilde{M}_{t-1}(0, \gamma + 1, \gamma) \to M_t(0, \gamma, \gamma + 1).$$

若 $\gamma \geq 1$，由对偶性可得一个态射

$$M_{-t}(\gamma + 1, \gamma + 1, 0) \to \tilde{M}_{1-t}(\gamma, \gamma + 1, 0),$$

这迫使存在一个权为 $(\gamma+1, \gamma+1, 0)$ 的奇异向量，这与引理 6.1 矛盾。因此，我们必有 $\gamma = 0$。由推论 6.4 可得一个态射

$$M_{-t}(3, 0, 0) \to M_{-t+1}(2, 0, 0)$$

对所有 $t \in \mathbb{C}$，因此由对偶性可得一个态射

$$M_{t-1}(0, 1, 0) \to M_t(0, 0, 1),$$

这意味着存在 $E(4, 4)$ 奇异向量 $w \in M_t$(0, 0,1)。同样在这种情况下，我们可以验证所显示的向量 w 正是这样的奇异向量。注意，$a_{14}x_4^*+a_{13}x_3^*+a_{12}x_2^*$ =0 属于 W_t(0, 0,1)，因为 $a_{14}x_4^* + a_{13}x_3^* + a_{12}x_2^*$ 生成 $Im(\eta_{1,0})$。我们有

$(x_1\partial_2)w = -d_1 \otimes a_{12}x_2^* + d_1 \otimes a_{12}x_2^* = 0(x_2\partial_3)w = -d_2 \otimes a_{12}x_3^* + d_2 \otimes a_{12}x_3^* = 0(x_3\partial_4)$
$w = -2\partial_4 \otimes x_4^* + 2\partial_4 \otimes x_4^* - d_3 \otimes a_{12}x_4^* + d_3 \otimes a_{12}x_4^* = 0, b_{44}w = 4d_4 \otimes x_3^* + 4d_4 \otimes (x_4\partial_3)$
$x_4^* + 4d_3 \otimes (x_4\partial_3)x_3^* + 4d_2 \otimes (x_4\partial_3)x_2^* + 4d_1 \otimes (x_4\partial_3)x_1^* = 0.$

由（16）可得

$$\frac{1}{3}Ew = -a_{34}x_3^* + (x_4\partial_1)a_{12}x_2^* - (x_4\partial_2)a_{12}x_1^* = -(a_{14}x_1^* + a_{24}x_2^* + a_{34}x_3^*) = 0,$$

最后，由（17）可得

$$(x_4C)w = -2(x_4\partial_3)x_4^* - \frac{1}{2}(h_{14}+h_{24}+h_{34}-5t+5)x_3^* - \frac{5}{4}(a_{14}a_{12}x_1^* + a_{24}a_{12}x_2^* + a_{34}a_{12}x_3^*)$$
$$= \frac{5}{2}tx_3^* + \frac{5}{4}(a_{12}(a_{14}x_1^* + a_{24}x_2^* + a_{34}x_3^*) - a_{12}a_{34}x_3^* - a_{34}a_{12}x_3^*) = 0,$$

因为 $a_{14}x_1^* + a_{24}x_2^* + a_{34}x_3^* = -(x_4\partial_1)(a_{14}x_4^* + a_{13}x_3^* + a_{12}x_2^*) = 0$ 和 $a_{12}a_{34} + a_{34}a_{12} = C$。□

命题 6.7. 引理 *6.1* 中的情形 *(d)* 对于 $W = W_t(a,b,c)$ 不会出现 .

证明. 如果 $\gamma = 1$，那么 $M_t(0,0,0)$ 中恰好有一个次数为 1、权为 $(0,0,1)$ 的向量（相差一个标量因子），即向量 $\partial_4 \otimes 1$，但它不被 b_{44} 消去，因此不是奇异向量。

如果 $\gamma \neq 1$，并且存在这样的奇异向量，那么我们有一个态射

$$\tilde{M}_{t-1}(0,0,\gamma) \to M_t(0,0,\gamma-1).$$

由对偶性可知，我们会有一个态射

$$M_{-t}(\gamma+1,0,0) \to \tilde{M}_{1-t}(\gamma,0,0)$$

因此，我们会得到一个情形 (f) 中所示的奇异向量，即形如 $d_1 \otimes z_1$ 的向量，其中 $z_1 = x_1^\gamma$。由于命题 3.9 和注记 3.10，这将是唯一的可能性。按照命题 6.3 的证明进行推导可知，$d_1 \otimes z_1$ 是奇异向量当且仅当 $a_{14}z_1 = 0$，而这显然在 $K_{1-t}(\gamma,0,0)$ 中不成立。□

命题 6.8。 假设我们处于引理 *6.1* 的情形 *(e)*，且 $W = W_t(a,b,c)$。那么$a = b = 0$ 且 $c \geq 1$。在这种情况下，向量

$$w = d_4 \otimes (x_4^*)^c + d_3 \otimes x_3^*(x_4^*)^{c-1} + d_2 \otimes x_2^*(x_4^*)^{c-1} + d_1 \otimes x_1^*(x_4^*)^{c-1}$$

是一个 $E(4,4)$-奇异向量。这个奇异向量诱导出一个态射 $M_{t-1}(0,0,c-1) \to M_t(0,0,c)$ 当且仅当 $(c,t) \neq (1,1)$。

证明。 由引理 6.1，$a = b = 0$ 和 $c \geq 1$。由推论 6.4，对于每个 $c \geq 1$ 和每个 t，我们有一个态射

$$M_{-t}(c+2,0,0) \to M_{-t+1}(c+1,0,0),$$

因此，由对偶性，对于 $(c,t) \neq (1,1)$，我们有一个态射

$$M_{t-1}(0,0,c-1) \to M_t(0,0,c),$$

因为对于每个 $s \neq 0$，$M_s(0,0,0) \cong M_s(0,1,0)$。由此可知，在 $M_t(0,0,c)$ 中，$(c,t) \neq (1,1)$ 存在一个权为 $(0,0,c-1)$、次数为 1 的奇异向量。我们将在下文证明，陈述中的向量 w 对所有 $c \geq 1$ 和 $t \in \mathbb{C}$ 都是奇异向量。

事实上，很容易验证 w 被 $x_1\partial_2$，$x_2\partial_3$，$x_3\partial_4$，b_{44} 消去。此外，由方程（16）可立即得出 $Ew = 0$。因此，我们只需验证 $(x_4C)w = 0$。根据方程（17），我们只需证明

$$a_{14}x_1^*(x_4^*)^{c-1} + a_{24}x_2^*(x_4^*)^{c-1} + a_{34}x_3^*(x_4^*)^{c-1} = 0 \text{ in } W_t(0,0,c).$$

若 $c = 1$，这是由 $a_{14}x_4^* + a_{13}x_3^* + a_{12}x_2^* = 0$ 在 $W_t(0,0,1)$ 中直接推出的；根据 $W_t(0,0,1)$ 的定义，应用 $x_4\partial_1$ 于此等式即可。

因此，设 $c \geq 2$。令 $u_{ij} = \sum_k a_{ik} x_k^* x_j^* (x_4^*)^{c-2}$ 对所有 i，$j = 1$，.....，4 成立，并注意到 $u_{11} + u_{22} + u_{33} + u_{44} = 0$，而我们需要证明 $u_{44} = 0$。回想一下，u_{14} 是 $\eta_{1,\ c-1}$ 像中的一个 $\hat{}$ p(4)-奇异向量，因此 $u_{14} = 0$ 属于 $W_t(0, 0, c)$。注意到

$$(x_4\partial_1)u_{14} = u_{44} - (c-1)u_{11},$$

类似地 $(x_4\partial_2)(x_2\partial_1)u_{14} = u_{44} - (c-1)u_{22}$ 和 $(x_4\partial_3)(x_3\partial_1)u_{14} = u_{44} - (c-1)u_{33}$；因此 $(c+2)u_{44} = 0$ 属于 $W_t(0, 0, c)$。

接下来只需证明诱导态射

$$f : \tilde{M}_0(0,0,0) \to M_1(0,0,1)$$

不能通过商模 $M_0(0, 0, 0)$ 分解。注意，根据注3.13，$a_{12} = 0$ 属于$M_0(0, 0, 0)$，因为 $W_0(0, 0, 0)$ 是平凡模，因此应有 $f(a_{12}) = a_{12}w = 0$。直接计算可验证，事实上 $a_{12}w \neq 0$。□

我们将本节的结果总结为以下定理。

定理 6.9. 以下给出了 *Verma* 模 $M_t(a, b, c)$中所有 $E(4,4)$-奇异向量（次数为 *1*）的完整列表，精确到标量因子：

- $w[1_A] = d_1 \otimes x_1^a \in M_t(a, 0,0)$ 其中 $a = t = 0$ 或 $a \geq 1$;
- $w[1_B] = \sum_{i=1}^4 d_i \otimes x_i^*(x_4^*)^{c-1} \in M_t(0, 0, c)$ 对所有 $c \geq 1$;
- $w[1_C] = 2\partial_3 \otimes x_4^* - 2\partial_4 \otimes x_3^* - \sum_{i=1}^4 d_i \otimes a_{12}(x_i^*) \in M_t(0, 0, 1)$ 对所有 t;
- $w[1_D] = 4\sum_{i=2}^4 \partial_i \otimes a_{1i} - 2(d_4 \otimes a_{12}a_{13} + d_3 \otimes a_{14}a_{12} + d_2 \otimes a_{13}a_{14}) - d_1 \otimes (a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23} - 4) \in M_t(0, 0, 0)$ 对所有 $t \neq 0$;
- $w[1_E] = \sum_{i=1}^4 (\partial_i \otimes d_i + d_i \otimes \partial_i) \in M_1(1, 0, 0)$。

由 1 次奇异向量诱导的态射，在 $E(4, 4)$-Verma 模 $M_t(a, b, c)$ 之间的情形，如图 4 所示。在本图及其他所有图中，仅绘出了对应于 t 整数值的模，而对偶性 $M(W) \mapsto M(W^*)$ 由关于原点的对称性给出。另请注意，在图 4 中，由标准模诱导的 Verma 模 $M_t(1, 0, 0)$ 为了图示方便而出现了两次。

推论 6.10. 以下列出所有非零态射（相差标量因子）：

- $\varphi_{[1_A]}$：$M_{t-1}(a+1, 0, 0) \to M_t(a, 0, 0)$ 其中 $a = t = 0$，或 $a = 1$ 和 $t \neq 1$，或 $a \geq 2$且所有 t；~
- $\tilde{\varphi}_{[1_A]}$：$M_0(2, 0, 0) \to M_1(1, 0, 0)$;
- $\varphi_{[1_B]}$：$M_{t-1}(0, 0, c-1) \to M_t(0, 0, c)$ 对所有 $c \geq 1$ 和$(c, t) \neq (1, 1)$;
- $\varphi_{[1_C]}$：$M_{t-1}(0, 1, 0) \to M_t(0, 0, 1)$ 对所有 t。
- $\varphi_{[1_D]}$：$M_{t-1}(1, 0, 0) \to M_t(0, 0, 0)$ 对所有 $t \neq 0$; ~
- $\tilde{\varphi}_{[1_D]}$：$M_{-1}(1, 0, 0) \to M_0(0, 1, 0)$;
- $\varphi_{[1_E]}$：$M_0(0, 0, 0) \to M_1(1, 0, 0)$

态射 $\tilde{\varphi}_{[1_A]}$ 和 $\tilde{\varphi}_{[1_D]}$ 在图 4 中以虚线箭头表示。

注记 6.11. 对于 $c = 1$ 和 $t \neq 1$，在相差标量因子的意义下，我们有：$\varphi_{[1_B]} = \varphi_{[1_C]}$。事实上，根据注 3.12，$W_{t-1}(0, 0, 0) \cong W_{t-1}(0, 1, 0)$，且 $\varphi_{[1_B]}(a_{12}) = a_{12}\varphi_{[1_B]}(1) = a_{12}w[1_B] = w[1_C]$。

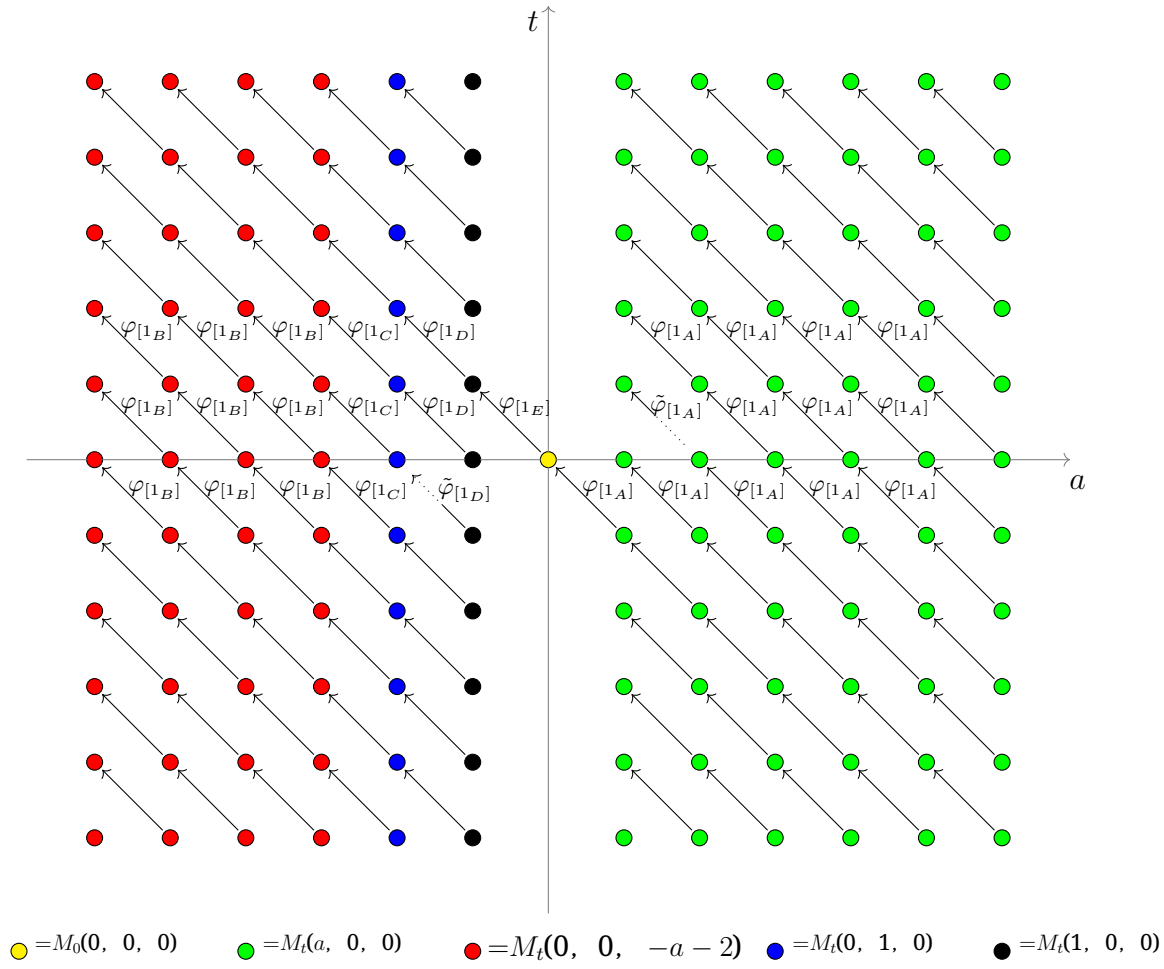

FIGURE 4. Verma 模之间的 1 次非零态射。

注6.12. 我们注意到，态射 $\varphi_{[1_A]}$：$M_{t-1}(a+1,0,0) \to M_t(a,0,0)$ 是.....的对偶

- $\varphi_{[1_B]}$：$M_{-t}(0,\ 0,\ a-1) \to M_{-t+1}(0,\ 0,\ a)$，当 $a \geq 3$ 时；
- $\varphi_{[1_C]}$：$M_{-t}(0,\ 1,\ 0) \to M_{-t+1}(0,\ 0,\ 1)$，当 $a = 2$ 时；
- $\varphi_{[1_D]}$：$M_{-t}(1,\ 0,\ 0) \to M_{-t+1}(0,\ 0,\ 0)$，当 $a = 1$ 和 $t \neq 1$ 时；
- $\varphi_{[1_E]}$：$M_0(0,\ 0,\ 0) \to M_1(1,\ 0,\ 0)$，当 $a = t = 0$ 时。

寻找这些态射的显式表达式是很自然的。在这些表达式中，我们倾向于将生成 $K_t(\lambda)$ 的奇异向量视为偶的，从而所有态射$\varphi_{[1_A]}$，...，$\varphi_{[1_E]}$ 都是奇的。一个奇线性映射 φ：$M_{t-1}(\lambda) \to M_t(\sigma)$，其次数为 1，总可以与一个奇元素 $\Phi \in L_{-1} \otimes \mathrm{Hom}(W_{t-1}(\lambda)\ W_t(\sigma))$ 关联起来，具体如下：对于 $u \in \mathcal{U}(L_{-1})$ 和 $v \in W_{t-1}(\lambda)$，令

$$\varphi(u \otimes v) = (-1)^{p(u)} u\varphi(v)$$

其中，若 $\Phi = \sum_i d_i \otimes \theta_i + \sum_i \partial_i \otimes \psi_i$ 满足 $\theta_i,\ \psi_i \in \mathrm{Hom}(W_{t-1}(\lambda)\ W_t(\sigma))$，则令 $\varphi(v) = \sum_i d_i \otimes \theta_i(v) + \sum_i \partial_i \otimes \psi_i(v)$。这里 $p(u)$ 表示元素 u 的奇偶性。

很容易验证 Verma 模之间的态射具有如下刻画。

命题 6.13。（参见 [17, 命题 2。1]）设 $\varphi: M_{t-1}(\lambda) \to M_t(\sigma)$ 是与元素 $\Phi \in L_{-1} \otimes \mathrm{Hom}(W_{t-1}(\lambda)\ W_t(\sigma))$相关联的线性映射。那么，$\varphi$ 是L-模的态射，当且仅当满足以下条件:

(a) $L_0.\Phi = 0$; (b) $x\varphi(v) = 0$ 对每个 $x \in L_1$ 以及每个 $v \in W_{t-1}(\lambda)$都成立。

为在我们的情形下构造映射 θ_i 和 ψ_i，我们按如下方式进行。首先定义一个 $E(4,\ 4)_0 = \hat{\mathfrak{p}}(4)$-模的偶态射

$$\rho : E(4,4)^*_{-1} \to \mathrm{Hom}(K_{t-1}(\lambda), K_t(\sigma))$$

（其中，$E(4,\ 4)^*_{-1} \cong W_1(1,\ 0,\ 0)$ 被视为标准模，其 $t = 1$ 如例 3.3 所示）。

反过来，要构造这样的映射 ρ，只需确定一个映射

$$\rho : E(4,4)^*_{-1} \to \mathrm{Hom}(F_{t-1}(\lambda), K_t(\sigma))$$

它是 $\mathfrak{p}^+$-模之间的态射。回忆一下，$\mathfrak{p}^+ = \hat{\mathfrak{p}}(4)_{-2} \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_0 \oplus \hat{\mathfrak{p}}(4)_1$,，也就是说，对每个 $b \in \mathfrak{p}^+$，都有

$$(-1)^{p(b)p(x)}(-(b.x)(v) + bx(v)) = x(bv). \tag{22}$$

随后，$\rho(x)$ 到 $K_{t-1}(\lambda)$ 的扩张便由下述方式唯一确定。为简化记号，我们将 $E(4,4)^*_{-1}$ 中的元素 x 与其像 $\rho(x)$ 等同；对于 $x \in E(4,4)^*_{-1}$ 和 $v \in F_{t-1}(\lambda)$，我们递归地定义

$$x(a \otimes v) = (-1)^{p(a)p(x)}(-(a.x)(v) + ax(v))$$

对所有 $a \in \hat{\mathfrak{p}}(4)$，以及对 $k \geq 2$, $a_1, \ldots, a_k \in \hat{\mathfrak{p}}(4)$，令

$$x(a_1 \ldots a_k \otimes v) = (-1)^{p(a_1)p(x)}(-(a_1.x)(a_2 \ldots a_k \otimes v) + a_1 x(a_2 \ldots a_k \otimes v).$$

注意，(22) 等价于 $\rho(x)$ 是平衡映射，即对所有 $u \in \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{p}}(4))$、$b \in \mathfrak{p}^+$, $x \in E(4,4)^*_{-1}$ 和 $v \in F_{t-1}(\lambda)$，都有 $x(ub \otimes v) = x(u \otimes bv)$。还要注意，$\rho(x)$ 的递归定义立即推出 $\rho: E(4,4)^*_{-1} \to \mathrm{Hom}(K_{t-1}(\lambda)\ K_t(\sigma))$ 确实是 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$- 等变的。

接下来，我们将逐一证明，在每种情况下，$\rho(x)$ 都诱导出一个映射 $W_{t-1}(\lambda) \to W_t(\sigma)$, 该映射仍记作 x，并令 $\theta_i = \rho(\partial_i)$ 和 $\psi_i = \rho(d_i)$，从而自动满足命题 6.13 中的条件 (a)。

下文中，我们用 $\{x_1, \ldots, x_4\}$ 表示 $\mathbb{C}^4$ 的标准基，用 $\{x_1^*, \ldots, x_4^*\}$ 表示 $(\mathbb{C}^4)^*$ 的相应对偶基，并用 $\{x_i \wedge x_j \,|\, 1 \leq i < j \leq 4\}$ 表示$\bigwedge^2(\mathbb{C}^4)$ 的标准基。此外，与上文一样，d_i 表示 dx_i, ∂_i 表示 $\partial/\partial x_i$, a_{ij} 表示 $x_i dx_j - x_j dx_i$。我们有$F_t(a,\ 0,\ 0) \cong S^a\mathbb{C}^4$, $F_t(0,\ 0,\ c) \cong S^c\mathbb{C}^{4^*}$。为了定义一个态射 $\varphi: M_{t-1}(\lambda) \to M_t(\sigma)$，只需定义它在 $F_{t-1}(\lambda)$ 上的限制。

命题 6.14。以下给出了李超代数 $E(4,4)$上 *Verma* 模之间 *1* 次态射的显式描述，并将其限制到相应的$F_{t-1}(\lambda)$:

- $\varphi_{[1_A]}$：$F_{t-1}(a,0,0) \to M_t(a-1,0,0)$ 由下式给出

$$\varphi_{[1_A]}(f) = \sum_i d_i \otimes \partial_i(f);$$

- $\varphi_{[1_B]}$：$F_{t-1}(0,\ 0,\ c-1) \to M_t(0,\ 0,\ c)$ 定义为

$$\varphi_{[1_B]}(f) = \sum_i d_i \otimes x_i^* f;$$

- $\varphi_{[1_C]}$：$F_{t-1}(0,\ 1,\ 0) \to M_t(0,\ 0,\ 1)$ 定义为

$$\varphi_{[1_C]}(x_h \wedge x_k) = \sum_i (d_i \otimes a_{hk}(x_i^*) + 2\partial_i \otimes x_i \wedge x_h \wedge x_k),$$

其中，按照惯例，$\bigwedge^3(\mathbb{C}^4)$ 通过与标准体积形式作收缩而与 $\mathbb{C}^{4^*}$ 相对应；

- $\varphi_{[1_D]}$：$F_{t-1}(1,\ 0,\ 0) \to M_t(0,\ 0,\ 0)$ 定义为

$$\varphi_{[1_D]}(x_r) = \sum_i (d_i \otimes \theta_i(x_r) + 4\partial_i \otimes a_{ri}),$$

其中

$$\theta_i(x_r) = \begin{cases} -\varepsilon_{ijhk}(a_{ij}a_{hk} + a_{ih}a_{kj} + a_{ik}a_{jh}) + 4 + 2t & \text{if } r = i, \\ 2\varepsilon_{irhk}a_{rh}a_{rk} & \text{if } r \neq i \end{cases}$$

对于任意满足 ε 的指标互不相同的 j、h、k；

- $\varphi_{[1_E]}$：$F_0(0,\ 0,\ 0) \to M_1(1,\ 0,\ 0)$ 由下式给出

$$\varphi_{[1_E]}(1) = \sum_i (d_i \otimes \partial_i + \partial_i \otimes d_i).$$

证明。首先注意到，对于 $b = C$，条件（22）总是自动满足，因为 $C.x = x$、$bx(v) = tx(v)$ 和 $bv = (t-1)v$。

我们来验证态射 $\varphi_{[1_A]}$ 和 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{\geq 0}$是否满足条件（22）。若 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_{>0}$，则（22）中的三项均为零。事实上，$\hat{\mathfrak{p}}(4)_{>0}$ 在 $F_{t-1}(a,0,0)$ 和 $F_t(a-1,0,0)$ 上作用平凡；此外，若 x 为偶数，则 $b.x$ 是 $E(4,4)^*_{-1}$中的奇元素，因此它在 $F_{t-1}(a,0,0)$ 上作用为零；若 x 为奇数，则 $b.x = 0$。若 $b \in \hat{\mathfrak{p}}(4)_0 = \mathfrak{sl}_4$ 且 x 为偶数，则 $-[b,x] + bx = xb$；若 x 为奇数，则它在 $F_{t-1}(a,0,0)$ 上作用平凡，而 $b.x$ 是 $E(4,4)^*_{-1}$中的奇元素，因此它在 $F_{t-1}(a,0,0)$ 上作用为零。

现在回顾一下，对于每个 t和 $a \geq 1$或 $t = a = 0$，模 $W_t(a,0,0)$ 是 $K_t(a,0,0)$ 关于由奇异向量 $w = a_{12}x_1^a$ 生成的子模 $S_{t,a}$ 的商模。为了证明 x 诱导出一个从 $W_{t-1}(a,0,0)$ 到 $W_t(a-1,0,0)$ 的映射，我们需要证明 $xS_{t-1,a} \subset S_{t,a-1}$。我们有：$\theta_1(a_{12}x_1^a) = aa_{12}x_1^{a-1}$属于 $S_{t,a-1}$。此外，对于每个 $i \neq 1$，$\theta_i(a_{12}x_1^a) = 0$；对于每个 $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，$\psi_j(a_{12}x_1^a) = 0$。现在注意，若 $v \in K_{t-1}(a,0,0)$ 满足对每个 $x \in E(4,4)^*_{-1}$ 都有 $xv \in S_{t,a-1}$，那么对于每个 $u \in \hat{\mathfrak{p}}(4)$，我们也有 $xuv \in S_{t,a-1}$。因此，x：$W_{t-1}(a,0,0) \to W_t(a-1,0,0)$ 是定义良好的。

最后注意到 $\varphi_{[1_A]}(x_1^a) = d_1 \otimes ax_1^{a-1}$，因此根据定理 6.9，条件 (b) 得到满足，从而命题 6.13 成立。

对于其他态射，证明类似。

□

7. Singular vectors of degree 2

本节对 Verma 模 $M_t(a,b,c)$ 中次数为 2 的奇异向量进行分类。我们首先注意到，有限 Verma 模之间次数为 1 的态射可能存在的唯一非零复合为 $\varphi_{[1_D]}\circ\varphi_{[1_A]}$：$M_{t-2}(2,0,0) \to M_t(0,0,0)$（对于 $t\neq 0$）以及 $\varphi_{[1_E]}\circ\varphi_{[1_A]}$:$M_{-1}(1,0,0) \to M_1(1,0,0)$。事实上，其他可能的复合均为 $\varphi_{[1_A]}\circ\varphi_{[1_A]}=0$（因为 $\varphi_{[1_A]}$ 是由奇异向量 $d_1\otimes x_1^a$ 和 $d_1^2=0$ 诱导的）或它们的对偶。此外，以下结果表明 $\varphi_{[1_D]}\circ\varphi_{[1_A]}$ 和 $\varphi_{[1_E]}\circ\varphi_{[1_A]}$ 非零。

命题 7.1。 向量 $w[2_{EA}]:=d_1w[1_E]\in M_1(1,\ 0,\ 0)$ 是次数2的奇异向量，其权为$(1,\ 0,\ 0)$。向量 $w[2_{DA}]:=d_1w[1_D]\in M_t(0,\ 0,\ 0)$ 是次数2的奇异向量，其权为$(2,\ 0,\ 0)$，对所有 $t\neq 0$ 均成立。

证明。 利用定理 6.9 中给出的 $w[1_D]$和 $w[1_E]$的表达式，可以验证 $d_1w[1_D]\neq 0$ 和 $d_1w[1_E]\neq 0$。现在注意到 $d_1w[1_E]=\varphi_{[1_E]}(\varphi_{[1_A]}(x_1))$ 和 $d_1w[1_D]=\varphi_{[1_D]}(\varphi_{[1_A]}(x_1^2))$，即可立即得到结论。□

注 7.2。 我们将向量 $w[2_{DA}]$明确写出:

$$w[2_{DA}]=4\sum_{i=2}^{4}d_1\partial_i\otimes a_{1i}-2d_1(d_4\otimes a_{12}a_{13}+d_3\otimes a_{14}a_{12}+d_2\otimes a_{13}a_{14}).$$

这个向量属于 $M_0(0,\ 1,\ 0)$，根据注3.13，我们使用 $W_0(0,\ 1,\ 0)\cong M_1/M_2$，并且可以验证，它对于 $t=0$也确实是奇异的。

我们将在下文证明，不存在其他次数2的 $E(4,\ 4)$ 奇异向量。

在第 5 节中，我们为 $M_t(a,\ b,\ c)$ 中次数为 k的向量引入了记号。为简便起见，当 $k=2$ 时，我们写作

$$w=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\partial_i^2\otimes v_{ii}+\sum_{i<j}\partial_i\partial_j\otimes v_{ij}+\sum_{i,j}\partial_i d_j\otimes y_{ij}+\sum_{i<j}d_id_j\otimes z_{ij}. \tag{23}$$

我们假设 w是一个权为 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的 $E(4,\ 4)$ 奇异向量。为方便读者，我们在表1中列出了向量 v_{ij}、y_{ij} 和 z_{ij} 相应的权重。正如第 5 节所述，子代数 N 在 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$ 上对向量 v_{ij}，y_{ij} 和 z_{ij} 的作用如下:

$$(x_i\partial_j)v_{hk}=\delta_{jh}v_{ik}+\delta_{jk}v_{ih},$$

$$(x_i\partial_j)y_{hk}=\delta_{jh}y_{ik}-\delta_{ik}y_{hj},$$

$$(x_i\partial_j)z_{hk}=-\delta_{ih}z_{jk}-\delta_{ik}z_{hj},$$

其中 这意味着，如果 $i>j$，则对所有 i，都有 $v_{ij}=v_{ji}$、$z_{ij}=-z_{ji}$和 $z_{ii}=0$。此外es,

$$\begin{aligned}
&b_{ij}v_{hk}=0,\\
&b_{ij}y_{hk}=-\delta_{ik}v_{hj}-\delta_{jk}v_{ik},\\
&b_{ij}z_{hk}=-\delta_{ik}y_{jh}-\delta_{jk}y_{ih}+\delta_{ih}y_{jk}+\delta_{jh}y_{ik}.
\end{aligned}$$

引理 7.3. 若 w 如(23) 中所示，则对所有 i,j，$v_{ij}=0$。

TABLE 1. 向量的权重 v_{ij}， y_{ij}， z_{ij}。

v_{11}	$(\alpha+2,\beta,\gamma)$	y_{11}	(α,β,γ)	z_{12}	$(\alpha,\beta-1,\gamma)$
v_{12}	$(\alpha,\beta+1,\gamma)$	y_{12}	$(\alpha+2,\beta-1,\gamma)$	z_{13}	$(\alpha-1,\beta+1,\gamma-1)$
v_{13}	$(\alpha+1,\beta-1,\gamma+1)$	y_{13}	$(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1)$	z_{14}	$(\alpha-1,\beta,\gamma+1)$
v_{14}	$(\alpha+1,\beta,\gamma-1)$	y_{14}	$(\alpha+1,\beta,\gamma+1)$	z_{23}	$(\alpha+1,\beta,\gamma-1)$
v_{22}	$(\alpha-2,\beta+2,\gamma)$	y_{21}	$(\alpha-2,\beta+1,\gamma)$	z_{24}	$(\alpha+1,\beta-1,\gamma+1)$
v_{23}	$(\alpha-1,\beta,\gamma+1)$	y_{22}	(α,β,γ)	z_{34}	$(\alpha,\beta+1,\gamma)$
v_{24}	$(\alpha-1,\beta+1,\gamma-1)$	y_{23}	$(\alpha-1,\beta+2,\gamma-1)$		
v_{33}	$(\alpha,\beta-2,\gamma+2)$	y_{24}	$(\alpha-1,\beta+1,\gamma+1)$		
v_{34}	$(\alpha,\beta-1,\gamma)$	y_{31}	$(\alpha-1,\beta-1,\gamma+1)$		
v_{44}	$(\alpha,\beta,\gamma-2)$	y_{32}	$(\alpha+1,\beta-2,\gamma+1)$		
		y_{33}	(α,β,γ)		
		y_{34}	$(\alpha,\beta-1,\gamma+2)$		
		y_{41}	$(\alpha-1,\ \beta,\ \gamma-1)$		
		y_{42}	$(\alpha+1,\beta-1,\gamma-1)$		
		y_{43}	$(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma-2)$		
		y_{44}	(α,β,γ)		

证明. 由引理5.6可得

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\partial_i^2\otimes v_{ii}+\sum_{i<j}\partial_i\partial_j\otimes v_{ij}$$

是 $S(4)$ 的一个次数2奇异向量。若 $\bar{w}\neq 0$，则由定理4.2可知，$\bar{w}=\partial_4(\partial_1 v_{14}+\partial_2 v_{24}+\partial_3 v_{34}+\partial_4 v_{44})$ 中所有 $v_{i4}\neq 0$ 和 v_{14} 构成一个权为 $(1,0,0)$ 的 $\mathfrak{sl}_4$-最高权向量。因此， v_{14} 是一个 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$ 奇异向量，故 w 属于 $M_t(1,0,0)$。这是不可能的，因为 $v_{14}=-b_{24}y_{12}=-b_{24}b_{31}z_{32}=0$；在 $W_t(1,0,0)$（标准模）中，算子 $b_{24}b_{31}$ 恒等于零，这一点很容易验证。□

引理7.4。 设 w 如(23)所示。则对所有 $i<j$，均有 $y_{ij}=0$ 。此外， $y_{42}=y_{43}=y_{32}=0$且 $y_{22}=y_{33}=y_{44}$。

证明。 对于 $i<j$，我们计算得 $(x_i^2\partial_j)w=2d_i\otimes y_{ij}$，因为对所有 h，均有 $v_{hk}=0\,,k$，第一部分即得证。考察 $(x_4^2 d_3)w$ 中 d_1 的系数，可得条件

$$a_{34}y_{41}-2(x_4\partial_1)z_{12}=0.$$

将 b_{11} 应用于此方程，并回想由第一部分可知 $y_{12}=0$ ，可得 $y_{42}=0$。由于 $y_{32}=(x_3\partial_4)y_{42}$ 且 $y_{43}=-(x_2\partial_3)y_{42}$，结论成立。最后，我们有 $(x_2\partial_3)y_{32}=y_{22}-y_{33}$ ，因此 $y_{22}=y_{33}$。类似地， $y_{33}=y_{44}$。□

引理 7.5。 设 w 如(23)所示。则以下情形之一成立：

a) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(1,\ 0,\ 0)$ 以及 $y_{22}=y_{33}=y_{44}=0$；b) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(0,\ 0,\ 0)$ 以及 $y_{11}=y_{22}=y_{33}=y_{44}$；c) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\neq(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$ 以及 $y_{11}=y_{22}=y_{33}=y_{44}=0$。

证明。 我们来考虑条件 $Ew=0$。我们有：

- $E\partial_1 d_1 \otimes y_{11} = 3\partial_1 \otimes (x_4\partial_2) y_{11}$;
- $E\partial_2 d_1 \otimes y_{21} = 3\partial_2 \otimes (x_4\partial_2) y_{21}$;
- $E\partial_2 d_2 \otimes y_{22} = -3\partial_2 \otimes (x_4\partial_1) y_{22}$;
- $E\partial_3 d_1 \otimes y_{31} = 3\partial_3 \otimes (x_4\partial_2) y_{31}$;
- $E\partial_3 d_3 \otimes y_{33} = 0$;
- $E\partial_4 d_1 \otimes y_{41} = -3\partial_2 \otimes y_{41} + d_1 \otimes (-\frac{3}{2} a_{34} y_{41}) + 3\partial_4 \otimes (x_4\partial_2) y_{41}$
- $E\partial_4 d_4 \otimes y_{44} = -\frac{3}{2} d_4 \otimes a_{34} y_{44}$
- $E d_1 d_2 z_{12} = d_4 \otimes 3z_{12} + 3d_2 \otimes (x_4\partial_2) \otimes z_{12} + 3d_1 \otimes (x_4\partial_1) z_{12}$;
- $E d_1 d_3 \otimes z_{13} = 3d_3 \otimes (x_4\partial_2) z_{13}$;
- $E d_1 d_4 \otimes z_{14} = 3d_4 \otimes (x_4\partial_2) z_{14}$;
- $E d_2 d_3 \otimes z_{23} = -3d_3 \otimes (x_4\partial_1) z_{23}$;
- $E d_2 d_4 \otimes z_{24} = -3d_4 \otimes (x_4\partial_1) z_{24}$。

分别考察 Ew 中 ∂_1、∂_2、d_1、d_4 的系数，我们得到以下四个条件

$$(x_4\partial_2) y_{11} = 0 \tag{24}$$

$$(x_4\partial_2) y_{21} - (x_4\partial_1) y_{22} - y_{41} = 0 \tag{25}$$

$$-\frac{1}{2} a_{34} y_{41} + (x_4\partial_1) z_{12} = 0 \tag{26}$$

$$-\frac{1}{2} a_{34} y_{22} + z_{12} + (x_4\partial_2) z_{14} - (x_4\partial_1) z_{24} = 0. \tag{27}$$

如果将 b_{12} 应用于方程（27），我们得到:

$$\alpha y_{22} = 0. \tag{28}$$

现在，如果我们将 $x_1\partial_4$ 应用于（25），就得到:

$$(x_1\partial_2) y_{21} - h_{14} y_{22} - y_{11} + y_{22} = -(\alpha + \beta + \gamma) y_{22} = 0,$$

因为 $y_{24} = 0$，即

$$(\beta + \gamma) y_{22} = 0. \tag{29}$$

如果我们将 $x_2\partial_4$ 应用于（24），就得到

$$h_{24} y_{11} = 0$$

即,

$$(\beta + \gamma) y_{11} = 0. \tag{30}$$

现在我们将 b_{12} 应用于方程（26）:

$$\begin{aligned} -h_{12} y_{41} - b_{24} z_{12} + (x_4\partial_1)(y_{22} - y_{11}) = 0 \\ -(\alpha - 1) y_{41} + y_{41} + (x_4\partial_1)(y_{22} - y_{11}) = 0. \end{aligned}$$

如果我们应用 $x_1\partial_4$，则得到:

$$-(\alpha - 2)(y_{11} - y_{44}) + h_{14}(y_{22} - y_{11}) + (x_4\partial_1) y_{14} = 0$$

因此

$$(1-\alpha)(y_{11}-y_{22})=0. \tag{31}$$

因为 $y_{14}=0$。

因此我们得到了以下条件：

$$\begin{cases}(1-\alpha)(y_{11}-y_{22})=0\\(\beta+\gamma)y_{22}=0\\(\beta+\gamma)y_{11}=0\\\alpha y_{22}=0.\end{cases}$$

结论得证。 □

定理 7.6。 以下是 *Verma* 模中次数*2*的 $E(4,4)$-奇异向量的完整列表（相差一个标量倍数）：$M_t(a,b,c)$:

- $w[2_{DA}]=4\sum_{i=2}^4 d_1\partial_i\otimes a_{1i}-2d_1(d_4\otimes a_{12}a_{13}+d_3\otimes a_{14}a_{12}+d_2\otimes a_{13}a_{14})\in M_t(0,1,0)$其中，对于 $t\neq 0$，表示 $M_t(0,1,0)\cong M_t(0,0,0)$;
- $w[2_{EA}]=d_1w[1_E]\in M_1(1,0,0)$，其中 $w[1_E]$ 与定理 *6.9* 中相同。

证明。 首先假设 $y_{11}\neq 0$，因此我们必然处于引理 7.5 的情形 a) 或 b)。在情形 a) 中，存在唯一一个（相差一个标量因子）满足 $y_{11}\neq 0$ 且符合 $Ew=0$ 的向量 w，它为

$$w=\partial_1d_1\otimes d_1+\partial_2d_1\otimes d_2+\partial_3d_1\otimes d_3+\partial_4d_1\otimes d_4+d_1d_2\otimes\partial_2+d_1d_3\otimes\partial_3+d_1d_4\otimes\partial_4.$$

当且仅当 $t=1$ 时，该向量才是奇异向量；在这种情况下，它为 $d_1w[1_E]$。

在引理 7.5 的情形 b) 中， $y_{11}\neq 0$ 蕴含 $y_{21}=0$ （否则它将是一个权非支配的最高权向量）。同样，$y_{31}=0$ 也蕴含 $y_{41}=0$。在这些条件下，存在唯一一个（相差一个标量因子）满足 $Ew=0$ 的此类向量。该向量为

$$w=(\partial_1d_1+\partial_2d_2+\partial_3d_3+\partial_4d_4)\otimes 1$$

如果 $t=0$ 和

$$w=2(\partial_1d_1+\partial_2d_2+\partial_3d_3+\partial_4d_4)1-d_1d_2a_{34}+d_1d_3a_{24}-d_1d_3a_{23}-d_2d_3a_{14}+d_2d_4a_{13}-d_3d_4a_{12}$$

如果 $t\neq 0$。这些向量不是奇异向量，因为它们不满足 $(x_4C)w=0$。

因此我们可以假设 $y_{11}=0$，也就是说，根据引理 7.5， $y_{ii}=0$ 。于是我们有：

$$\begin{aligned}w=&\partial_2d_1y_{21}+\partial_3d_1y_{31}+\partial_4d_1y_{41}\\&+d_1d_2z_{12}+d_1d_3z_{13}+d_1d_4z_{14}+d_2d_3z_{23}+d_2d_4z_{24}+d_3d_4z_{34}.\end{aligned}$$

让我们来计算

- $4(x_4C)\partial_2d_1\otimes y_{21}=-4d_1\otimes(x_4\partial_2)y_{21}+5\partial_2\otimes a_{14}y_{21}$
- $4(x_4C)\partial_3d_1\otimes y_{31}=-4d_1\otimes(x_4\partial_3)y_{31}+5\partial_3\otimes a_{14}y_{31}$
- $4(x_4C)\partial_4d_1\otimes y_{41}=(\alpha+2\beta+3\gamma-5t+2)d_1\otimes y_{41}+5\partial_4\otimes a_{14}y_{41}$
- $4(x_4C)d_1d_2\otimes z_{12}=d_2\otimes y_{42}-10\partial_3\otimes z_{12}-5d_2\otimes a_{14}z_{12}+d_1\otimes y_{41}+5d_1\otimes a_{24}z_{12}$
- $4(x_4C)d_1d_3\otimes z_{13}=d_3\otimes y_{43}+10\partial_2\otimes z_{13}-5d_3\otimes a_{14}z_{13}+d_1\otimes y_{41}+5d_1\otimes a_{34}z_{13}$
- $4(x_4C)d_1d_4\otimes z_{14}=d_4\otimes(y_{44}-y_{11})-5d_4\otimes a_{14}z_{14}+2d_1\otimes y_{41}$
- $4(x_4C)d_2d_3\otimes z_{23}=d_3\otimes y_{43}-10\partial_1\otimes z_{23}-5d_3\otimes a_{24}z_{23}+d_2\otimes y_{42}+5d_2\otimes a_{34}z_{23}$

- $4(x_4C)d_2d_4 \otimes z_{24} = d_4 \otimes (y_{44} - y_{22}) - 5d_4 \otimes a_{24}z_{24} + 2d_2 \otimes y_{42}$
- $4(x_4C)d_3d_4 \otimes z_{34} = d_4 \otimes (y_{44} - y_{33}) - 5d_4 \otimes a_{34}z_{34} + 2d_3 \otimes y_{43}$

考察（x_4C）w 中 ∂_1 的系数，立即得到 $z_{23} = 0$；应用 $x_3\partial_4$和 $x_2\partial_3$，还可得到 $z_{24} = z_{34} = 0$。

（x_4C）w中 ∂_2、∂_3、∂_4、d_1、d_2、d_3、d_4的系数给出以下方程

$$a_{14}y_{21} + 2z_{13} = 0 \tag{32}$$

$$a_{14}y_{31} - 2z_{12} = 0, \tag{33}$$

$$a_{14}y_{41} = 0, \tag{34}$$

$$-4(x_4\partial_2)y_{21} - 4(x_4\partial_3)y_{31} + (\alpha + 2\beta + 3\gamma - 5t + 6)y_{41} + 5a_{24}z_{12} + 5a_{34}z_{13} = 0, \tag{35}$$

$$a_{14}z_{12} = 0, \tag{36}$$

$$a_{14}z_{13} = 0, \tag{37}$$

$$a_{14}z_{14} = 0. \tag{38}$$

将 b_{23} 应用于（32），得到

$$\beta y_{21} = 0. \tag{39}$$

将 b_{23} 应用于（38），得到 $h_{23}(z_{14}) = \beta z_{14} = 0$；类似地，利用（34）可得

$$\beta y_{41} = 0. \tag{40}$$

现在将 $x_2\partial_4$ 应用于（35），得到

$$-4(\gamma + 1)y_{21} - 4y_{21} + (\alpha + 3\gamma - 5t + 6)y_{21} - 5a_{24}z_{14} + 5a_{32}z_{13} = 0$$

$$(-\gamma - 2 + \alpha - 5t)y_{21} - 5a_{24}z_{14} + 5a_{32}z_{13} = 0.$$

应用 b_{13}，得到

$$10h_{13}z_{14} + 10x_3\partial_4 z_{13} = 0,$$

i.e.

$$(\alpha - 2)z_{14} = 0. \tag{41}$$

将 $x_2\partial_4$ 应用于 (25)，可推出

$$\gamma y_{21} = 0. \tag{42}$$

由公式 (39)–(42) 可推出，若 $y_{21} \neq 0$，则 $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 0)$（注意到$y_{21} = -b_{24}z_{14}$）。这种情形确实给出了奇异向量 $w_{1,7}$（利用 y_{21} 是权为 (0, 1, 0) 的 $\hat{}$ ₱(4) 奇异向量，且 z_{12}的权为 (2, −1, 0)）。

若 $y_{21} = 0$，则必有 $y_{31} = 0$。事实上，若 $y_{31} \neq 0$，则它是权为 $(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma + 1)$ 的最高权向量（见表1）。但 $y_{31} \neq 0$ 意味着 $y_{41} \neq 0$，因此 $\beta = 0$，然而这与 y_{31} 的权不是支配权矛盾。若 $y_{21} = y_{31} = 0$，则由 (25) 得$y_{41} = 0$。

因此，我们可以假设对所有 i，j 都有 $y_{ij} = 0$，并且 $z_{23} = z_{24} = z_{34} = 0$也成立。方程 (33) 给出 $z_{12} = 0$，因此应用 $x_2\partial_3$ 和 $x_2\partial_4$，我们得出 $z_{13} = z_{14} = 0$也成立。□

注记 7.7. 奇异向量 $w[2_{DA}]$ 对每个 $t \in \mathbb{C}$定义了如下从 $E(4,4)$-模出发的态射:

$$\varphi_{[2_{DA}]} : M_{t-2}(2,0,0) \to M_t(0,1,0).$$

事实上，如果 $t \neq 0$，2，则有 $\varphi_{[2_{DA}]} = \varphi_{[1_D]} \circ \varphi_{[1_A]}$。

如果 $t = 0$ 向量 $w[2_{DA}]$ 诱导一个态射

$$\tilde{\varphi}_{[2_{DA}]} : \tilde{M}_{-2}(2,0,0) \to M_0(0,1,0).$$

直接计算表明， $a_{12}w[2_{DA}] = 0$ 属于 $M_0(0,1,0)$，因此 $\tilde{\varphi}_{[2_{DA}]}$ 诱导该态射

$$M_{-2}(2,0,0) \to M_0(0,1,0).$$

由对偶性，我们也得到该态射

$$M_0(2,0,0) \to M_2(0,1,0).$$

8. Singular vectors of degree 3

本节将对 Verma 模 $M_t(a, b, c)$ 中的 $E(4,4)$ 3 次奇异向量进行分类。因此，设 w 为一个权为（α, β, γ）的奇异向量，并注意到根据引理5.6，它可以写成如下形式:

$$w = \sum_{i \leq j,k} \frac{1}{m_{ij}} \partial_i \partial_j d_k \otimes v_{ij,k} + \sum_{i,j<k} \partial_i d_j d_k \otimes y_{i,jk} + \sum_{i<j<k} d_i d_j d_k \otimes z_{ijk}, \tag{43}$$

其中，若 $i \neq j$, $m_{ii} = 2$, $y_{i,\,jk} = -y_{i,\,kj}$，则 $v_{ij,\,k} = v_{ji,\,k}$ 及 $m_{ij} = 1$ .....，且 z_{ijk} 关于 i, j, k是交错的。由（10）可知，应用满足 $i < j$的元素 $x_i\partial_j$ 以及元素 b_{ij} ，可得到以下关系:

$$\begin{aligned}
(x_i\partial_j)v_{rs,u} &= \delta_{jr}v_{is,u} + \delta_{js}v_{ri,u} - \delta_{iu}v_{rs,j};\\
(x_i\partial_j)y_{r,su} &= \delta_{jr}y_{i,su} - \delta_{is}y_{r,ju} - \delta_{iu}y_{r,sj};\\
(x_i\partial_j)z_{rsu} &= -\delta_{ir}z_{jsu} - \delta_{is}z_{rju} - \delta_{iu}z_{rsj};\\
b_{ij}v_{rs,u} &= 0;\\
b_{ij}y_{r,hk} &= -\delta_{ik}v_{rj,h} - \delta_{jk}v_{ri,h} + \delta_{ih}v_{rj,k} + \delta_{jh}v_{ri,k};\\
b_{ij}z_{rhk} &= -\delta_{ir}y_{j,hk} - \delta_{jr}y_{i,hk} - \delta_{ik}y_{j,rh} - \delta_{jk}y_{i,rh} + \delta_{ih}y_{j,rk} + \delta_{jh}y_{i,rk}.
\end{aligned}$$

引理 8.1。 (a) 设 i, j, k 互不相同，且 $k = \max\{i,j,k\}$。那么

$$y_{i,jk} = 0 \text{ and } y_{i,ik} = y_{j,jk}.$$

(b) 设 r, s, u 满足 $u \neq r$ 且 $u \neq s$ ，并且 $(r,s) \neq (4,4)$。那么

$$v_{rs,u} = 0.$$

(c) 令 $\{i,j,h,k\} = \{1,2,3,4\}$ 满足 $i \neq 4$。则

$$\frac{1}{2}v_{ii,i} = v_{ij,j} = v_{ih,h} = v_{ik,k}.$$

证明。将向量场 $P = x_i^2\partial_j$（满足 $i < j$）作用于 w 的各个加项，得到：对于 $k \neq j, h \neq i, k' \neq k$，$i$，$j$，

$$\begin{aligned}
P\frac{1}{2}\partial_i^2 d_k \otimes v_{ii,k} &= \partial_j d_k \otimes v_{ii,k} + 2\delta_{ik}\partial_i d_k \otimes v_{ii,j},\\
P\frac{1}{2}\partial_i^2 d_j \otimes v_{ii,j} &= \partial_j d_j \otimes v_{ii,j} - 2\partial_i d_i \otimes v_{ii,j},\\
P\partial_h\partial_i d_k \otimes v_{hi,k} &= -2\partial_h d_k \otimes (\delta_{jh}v_{ii,k} - \delta_{ik}v_{hi,j}),\\
P\partial_h\partial_i d_j \otimes v_{hi,j} &= -2\partial_h(d_i \otimes v_{hi,j} + \delta_{jh}d_j \otimes v_{ii,j}),\\
P\partial_i d_k d_{k'} \otimes y_{i,kk'} &= 2\delta_{ik}d_k d_{k'} \otimes y_{i,jk'},\\
P\partial_i d_k d_j \otimes y_{i,kj} &= -2d_k d_i \otimes y_{i,kj} + 2\delta_{ik}\partial_i d_k \otimes v_{ii,j},\\
P\partial_h d_k d_j \otimes y_{h,kj} &= 2\delta_{ik}\partial_h d_k \otimes v_{hi,j},\\
P d_k d_{k'} d_j \otimes z_{kk'j} &= -2\delta_{ik}d_k d_{k'} \otimes y_{i,k'j},
\end{aligned}$$

并且我们考虑 $d_i d_\ell$ 在 $\ell \neq i, j$ 时的系数。恰有 3 项对结果有贡献（$\partial_i d_i d_\ell y_{i,i\ell}$、$d_i d_j d_\ell z_{ij\ell}$ 和 $\partial_i d_j d_\ell y_{i,j\ell}$），由此可得 $y_{i,j\ell} = 0$。如有必要，交换 j 和 ℓ的角色，即可得到 $y_{i,jk} = 0$。

若 $j < i < k$，我们可以将 $x_j\partial_i$ 应用于 $y_{i,jk} = 0$，得到 $y_{i,ik} = y_{j,jk}$。将 $b_{jj}, b_{kk}, b_{ij}, b_{ik}$应用于 $y_{i,jk} = 0$，得到 $v_{ij,k} = v_{ik,j} = v_{ii,k} = v_{ii,j} = 0$。

若 $i \neq 4$、$k > i$ 和 $j < k$，我们可以将 b_{jk} 应用于 $y_{i,jk} = 0$，得到 $v_{ik,k} = v_{ij,j}$。最后，对于 $h < i < 4$，将 $x_h\partial_i$ 应用于 $v_{ii,h} = 0$，有 $2v_{ih,h} = v_{ii,i}$。

□

引理 8.2。我们有

$$v_{44,1} = v_{44,2} = v_{44,3} = 0,$$

and

$$\frac{1}{2}v_{44,4} = v_{41,1} = v_{42,2} = v_{43,3}.$$

若 $v_{14,\,4} = 0$，则 $v_{ij,\,k} = 0$ 对所有 i、j、k均成立。若 $v_{14,\,4} \neq 0$，则有 $w \in M_t(1,\,0,\,\mathbf{0})$，并且相差一个标量因子，

$$w = \sum_{i,j}\partial_i\partial_j d_i \otimes d_j + \partial_i d_i d_j \otimes \partial_j + \rho(d_1d_2d_3 \otimes d_4 - d_1d_2d_4 \otimes d_3 + d_1d_3d_4 \otimes d_2 - d_2d_3d_4 \otimes d_1)$$

对于某个标量 ρ。

证明。我们将 $x_4^2\partial_1$ 作用于 w，并考虑 $\partial_1 d_r$ 的系数，其中 $r \neq 1, 4$。只有一项对其有贡献，即 $\frac{1}{2}\partial_4^2 d_r \otimes v_{44,\,r}$，它给出 $v_{44,\,r} = 0$。同样地，通过考虑 $x_4^2\partial_2$ 的作用以及 $\partial_2 d_1$ 的系数，我们可以得到 $v_{44,\,1} = 0$。分别将 $x_1\partial_4$，$x_2\partial_4$，$x_3\partial_4$ 应用于 $v_{44,\,1}$、$v_{44,\,2}$、$v_{44,\,3}$，得到

$$\frac{1}{2}v_{44,4} = v_{41,1} = v_{42,2} = v_{43,3}.$$

注意，由所有 $v_{ij,k}$ 张成的空间维数至多为 4，且由$v_{11,1}$,$v_{21,1}$,$v_{31,1}$, $v_{41,1}$张成。现在我们考虑 $(x_4^2\partial_1)w$ 中 $\partial_1 d_4$ 的系数：这给出 $(x_4\partial_1)v_{14,4} = v_{41,1}$。因此，若 $v_{14,4} = 0$，则 $v_{41,1} = 0$，通过应用 $x_r\partial_4$，我们得到 $v_{r1,1} = 0$。

因此我们可以假设 $v_{14,4} \neq 0$，所以它是一个 $\hat{\mathfrak{p}}(4)$-奇异向量。将 $x_1\partial_4$ 应用于 $(x_4\partial_1)v_{14,4} - v_{41,1} = 0$；我们得到

$$h_{14}v_{14,4} - v_{11,1} + v_{14,4} = (\alpha+\beta+\gamma+1)v_{14,4} - v_{14,4} = (\alpha+\beta+\gamma)v_{14,4} = 0,$$

因为 $v_{11,4} = 0$ 和 $v_{11,1} = 2v_{14,4}$ 以及 $v_{14,4}$ 的权为 $(\alpha, \beta, \gamma+1)$。因此我们有 $\alpha = \beta = \gamma = 0$，而 $v_{14,4}$ 的权为 $(1, 0, 0)$，也就是说我们处于标准模中。

特别地，除一个非零标量因子外，$v_{14,4} = d_1$。由此可得

$$\frac{1}{2}v_{11,1} = v_{12,2} = v_{13,3} = v_{14,4} = d_1,$$

而与 $x_i\partial_j$ 和 b_{ij} 的作用相容这一条件迫使

$$w = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j d_i \otimes d_j + \partial_i d_i d_j \otimes \partial_j + \rho(d_1d_2d_3 \otimes d_4 - d_1d_2d_4 \otimes d_3 + d_1d_3d_4 \otimes d_2 - d_2d_3d_4 \otimes d_1). \tag{44}$$

□

命题 8.3. $(1, 0, 0)$ 中的向量 $w \in M_t$（见 (44)）是奇异向量，当且仅当 $\rho = 1$ 和 $t = 3$。

证明。将 $2x_4^2\partial_4$ 作用于 (44)，得到

$$\begin{aligned}2(x_4^2\partial_4)w =& (t-2\rho-1)(\partial_1 d_1 + \partial_2 d_2 + \partial_3 d_3) \otimes d_4 + (2\rho-2)d_4(\partial_1 \otimes d_1 + \partial_2 \otimes d_2 + \partial_3 \otimes d_3) \\ &+ (t-3)\partial_4 d_4 \otimes d_4 + (4\rho - t - 1)d_4(d_3 \otimes \partial_3 + d_2 \otimes \partial_2 + d_1 \otimes \partial_1).\end{aligned}$$

由此必然有 $\rho = 1$ 和 $t = 3$。直接计算可知，在这些假设下，w 确实是奇异的。□

现在我们可以假设所有 $v_{ij,k} = 0$，且 $y_{i,jk}$ 满足引理 8.1 中的条件。$x_4^2\partial_1$ 对 w 的作用给出了进一步的约束。

引理 8.4。 设对所有 i、j、k 和 $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$，$v_{ij,k} = 0$，且1。那么对所有 $j \neq 1$，$y_{i,ij} = 0$。

证明。我们来计算 $(x_4^2\partial_1)w$。有

$$\begin{aligned}(x_4^2\partial_1)w =& 2\partial_1 d_4 \otimes y_{14,1} - 2d_1d_2 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,12} - 2d_1d_3 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,13} \\ &- 2d_1d_4 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,14} - 2d_2d_3 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,23} - 2d_2d_4 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,24} - 2d_3d_4 \otimes (x_4\partial_1)y_{4,34}.\end{aligned}$$

$(x_4^2\partial_1)w$ 中 d_3d_4 的系数给出 $(x_4\partial_1)y_{4,43} = 0$，应用 $x_1\partial_4$ 后得到

$$(\alpha+\beta+\gamma)y_{4,43} = 0,$$

因为 $y_{4,43}$ 的权为 $(\alpha, \beta+1, \gamma-1)$，且由引理 8.1 可知 $y_{1,34} = 0$。

$(x_4^2\partial_1)w$ 中 d_2d_4 的系数给出 $(x_4\partial_1)y_{4,42} = 0$，应用 $x_1\partial_4$ 可得

$$(\alpha+\beta+\gamma)y_{4,42} = 0,$$

因为 $y_{4,42}$ 的权为 $(\alpha+1, \beta-1, \gamma)$，且 $y_{1,24} = 0$，由引理 8.1 得。

$(x_4^2\partial_1)w$ 中 d_2d_3 的系数给出 $(x_4\partial_1)y_{4,23} = 0$，应用 $x_1\partial_4$ 可得

$$(\alpha+\beta+\gamma-1)y_{4,23} = 0,$$

因为 $y_{4,23}$ 的权为 $(\alpha+1, \beta, \gamma-2)$，且由引理 8.1 可得 $y_{1,23} = 0$。将 $x_3\partial_4$ 应用于最后一个方程，得到

$$0 = (\alpha+\beta+\gamma-1)(y_{3,32} - y_{4,42}) = (\alpha+\beta+\gamma-1)y_{3,32} + y_{4,42}.$$

$(x_4^2\partial_1)w$ 中 d_1d_3 的系数给出 $(x_4\partial_1)y_{4,\ 13}=0$，再将 $x_1\partial_4$ 应用两次，得到

$$(\alpha+\beta+\gamma-1)y_{1,13}=y_{4,43},$$

由于 $y_{4,\ 13}$ 的权为（$\alpha-1,\ \beta+1,\ \gamma-2$），$y_{1,\ 34}=0$ 根据引理 8.1，而 $y_{1,\ 13}$ 的权为（$\alpha,\ \beta+1,\ \gamma-1$）。还要回忆，$y_{2,\ 23}=y_{1,\ 13}$根据引理 8.1。

d_1d_4 在（$x_4^2\partial_1$）w 中的系数给出（$x_4\partial_1$）$y_{4,\ 41}=0$，将 $x_1\partial_4$ 应用两次可得

$$(\alpha+\beta+\gamma)y_{1,14}=0,$$

由于 $y_{4,\ 41}$的权为（$\alpha-1,\ \beta,\ \gamma$），$y_{1,\ 14}$的权为（$\alpha,\ \beta,\ \gamma+1$）。根据引理 8.1，我们有$y_{1,\ 14}=y_{2,\ 24}=y_{3,\ 34}$。

最后，d_1d_2 在（$x_4^2\partial_1$）w 中的系数给出（$x_4\partial_1$）$y_{4,\ 12}=0$，将 $x_1\partial_4$ 应用两次可得

$$(\alpha+\beta+\gamma-1)y_{1,12}=y_{4,42},$$

由于 $y_{4,12}$的权为 $(\alpha,\beta-1,\gamma-1)$，$y_{1,12}-y_{4,42}$的权为 $(\alpha+1,\beta-1,\gamma)$，且根据引理 8.1 有 $y_{1,24}=0$。利用所有这些方程即可得出结论。□

引理 8.5. 假设对于所有 i、j、k 和 $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$，$v_{ij,k}=0$ 均满足$(43)\,1$。则 $w=0$。

证明. 我们考察 Ew 中 ∂_1d_1 的系数：由于根据引理 8.4，$y_{1,12}=0$，它给出 $y_{4,12}=0$，因此通过对具有 $i<j$ 的 $x_i\partial_j$ 作适当应用，还可得到 $y_{4,13}=y_{4,23}=y_{3,12}=0$。因此，根据引理 8.4，我们有

$$\begin{aligned}w=&\partial_2d_2d_1\otimes y_{2,21}+\partial_3d_3d_1\otimes y_{3,31}+\partial_4d_4d_1\otimes y_{4,41}\\&+d_1d_2d_3\otimes z_{123}+d_1d_2d_4\otimes z_{124}+d_1d_3d_4\otimes z_{134}+d_2d_3d_4\otimes z_{234}.\end{aligned}$$

∂_2d_1 在 Ew 中的系数给出（$x_4\partial_1$）$y_{2,\ 21}=0$ 并应用 $x_1\partial_4$ 可得（$\alpha+\beta+\gamma-1$）$y_{2,\ 21}=0$（因为$y_{2,\ 24}=0$），因此$y_{2,\ 21}=0$。

∂_2d_4 的系数给出$y_{4,\ 41}=y_{2,\ 21}$ 因此$y_{4,\ 41}=0$。

d_3d_4 的系数给出 $-z_{123}+$（$x_4\partial_2$）$z_{134}-$（$x_4\partial_1$）$z_{234}=0$。应用 $x_1\partial_4$ 可得（$\alpha+\beta+\gamma+1$）$z_{234}=0$，从而 $z_{234}=0$。

d_1d_3 的系数给出（$x_4\partial_1$）$z_{123}=0$，应用 $x_1\partial_4$ 可得（$\alpha+\beta+\gamma-1$）$z_{123}=0$，因此 $z_{123}=0$，从而所有 $z_{ijk}=0$ 以及$y_{3,\ 31}=-b_{23}z_{123}=0$。□

引理 8.6。若对于每个 i、j、k，$v_{ijk}=0$ 都属于(43)，则 $\alpha=1$、$\beta=\gamma=0$、$t=0$，以及$w=(\sum_{i=1}^4\partial_id_i)d_11$ 在相差一个标量因子的意义下，是唯一的次数为 *3* 的 $E(4,4)$-奇异向量。

证明。若 $\alpha+\beta+\gamma=0$，根据图 5 中显而易见的权重理由，对于每个 j,k，我们有 $y_{i,ij}=y_{k,\ kj}$；并且对于每个 i,j,k，只要它们彼此不同，就有 $y_{i,jk}=0$。因此我们有

$$w=\sum_{i\neq j}\partial_id_id_jy_{i,ij}+\sum_{i<j<k}d_id_jd_kz_{ijk}$$

其中 $y_{i,ij}=y_{k,kj}$。若 $y_{1,14}$不为零，则它是一个权为 $(0,0,1)$ 的 ˆ ℘(4)-奇异向量。接着我们计算 $Ew=0$ 并考察 ∂_1d_4 的系数。得到：

$$(x_4\partial_2)y_{1,14}=0,$$

这意味着 $y_{1,\ 14}=0$ 通过应用 $x_2\partial_4$ 得出。再次根据权重理由 $y_{1,\ 14}=0$ 可推出 $y_{i,\ jk}=0$，对每个 i，j，k 均成立。

现在假设 $\alpha+\beta+\gamma=1$。我们计算 $Ew=0$。 $\partial_1 d_4$ 的系数给出 $y_{1,\ 12}=0$，这意味着 $y_{1,\ 13}=0$ ，且 $y_{1,\ 14}=0$。现在， $Ew=0$ 中 $\partial_1 d_1$ 的系数给出 $y_{4,\ 12}=0$。由表 5 可知， $y_{2,\ 21}$ 是一个权为 (0，0，0) 的 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-奇异向量，并且$y_{2,\ 21}=y_{3,\ 31}=y_{4,\ 41}$。现在， $Ew=0$ 中 $d_1 d_4$ 的系数给出 $a_{34}y_{2,\ 21}=0$ ，这意味着$t=0$。该向量

$$w=(\sum_{i=1}^{4}\partial_i d_i)d_1 1$$

确实是一个次数为 3、权为 (1，0，0) 的奇异向量，属于 M_0(0，0，0)。

剩下需要证明的是，不存在满足 $y_{i,\ jk}=0$对每个 i， j， k 都成立的次数为 3 的 E(4，4)-奇异向量。假设 w 是这样的向量。那么，与引理 8.5 的证明一样， $d_3 d_4$ 在 $Ew=0$ 中的系数给出方程

$$-z_{123}+x_4\partial_2 z_{134}-x_4\partial_1 z_{234}=0, \tag{45}$$

由此，通过应用 $x_1\partial_4$，我们推得 $z_{234}=0$ 。根据权重理由，如果$\alpha+\beta+\gamma=0$，则对于每个 i， j， k 都有 $z_{ijk}=0$。现在令 $\alpha+\beta+\gamma=1$。如果 z_{134} 不为零，那么它就是一个权为 (1，0，0) 的 $\hat{}\ \mathfrak{p}(4)$-奇异向量。将 $x_2\partial_4$ 应用于方程（45），我们得到$z_{134}=0$，从而有 $z_{123}=0$。结论成立。□

我们将本节的结果总结为以下定理。

定理8.7。 *Verma* 模中所有次数为 *3* 的 $E(4,4)$-奇异向量$M_t(a,b,c)$ 的完整列表如下（相差一个标量因子）：

i) $w[3_F]=\sum_{i,j}\partial_i\partial_j d_i\otimes d_j+\partial_i d_i d_j\otimes\partial_j+d_1d_2d_3\otimes d_4-d_1d_2d_4\otimes d_3+d_1d_3d_4\otimes d_2-d_2d_3d_4\otimes d_1\in M_3(1,0,0)$;

ii) $w[3_G]=(\sum_{i=1}^{4}\partial_i d_i)d_1\otimes 1\in M_0(0,0,0)$.

注8.8。 奇异向量 $w[3_G]=(\sum_{i=1}^{4}\partial_i d_i)d_1\otimes 1\in M_0$(0,0,0) 给出了一个态射

$$K_{-3}(1,0,0)\to M_0(0,0,0).$$

将 x_1 映射到 w。回顾 W_{-3}(1,0,0) $\cong K_{-3}$(1,0,0)$/M$，其中 M 是由 $a_{12}x_1$生成的子模，并注意到 $a_{12}w=0$，我们得出上述态射可通过 W_{-3}(1,0,0) 分解，因此有一个态射

$$\varphi_{[3_G]}: M_{-3}(1,0,0)\to M_0(0,0,0).$$

由对偶性，奇异向量

$$w[3_F]=\sum_{i,j}\partial_i\partial_j d_i\otimes d_j+\partial_i d_i d_j\otimes\partial_j+d_1d_2d_3\otimes d_4-d_1d_2d_4\otimes d_3+d_1d_3d_4\otimes d_2-d_2d_3d_4\otimes d_1$$

在 M_3(1，0，0) 中诱导出一个态射

$$\varphi_{[3_F]}: M_0(0,0,0)\to M_3(1,0,0).$$

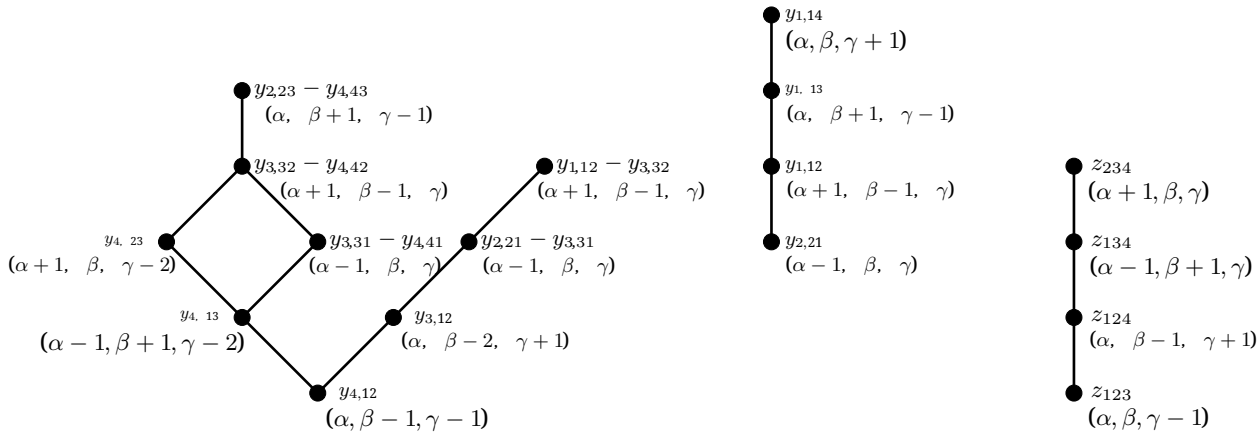

FIGURE 5. 元素 $y_{i,\ jk}$ 和 z_{ijk} 及其权重

9. SINGULAR VECTORS OF DEGREE 4 AND 5

考虑一个次数为 4 的奇异向量 w。根据引理5.6，这样的向量可以写成以下形式

$$w=\sum_{i\le j\le k,j}\frac{1}{m_{ijk}}\partial_i\partial_j\partial_k d_l\otimes v_{ijk,l}+\sum_{i\le j,k<l}\frac{1}{m_{ij}}\partial_i\partial_j d_k d_l\otimes y_{ij,kl}+\sum_{i,j<k<l}\partial_i d_j d_k d_l\otimes z_{i,jkl}+d_1d_2d_3d_4\otimes u,$$

其中，m_{ijk}是三元组 $\{i,j,k\}$ 在 S_3 中的稳定子的阶；同样地，当 $i\neq j$ 时为 $m_{ij}=1$，当 $i=j$ 时为 $m_{ij}=2$。由于大部分计算都是借助计算机完成的，我们仅概述证明。对 $x_i\partial_j$、$x_i^2\partial_j$（其中 $i<j$）、b_{rs}（对所有 $r,\ s$）$x_4^2\partial_4$ 以及 $x_i^2 d_j$（其中 $i\neq j$）在 w 上的作用进行计算，可得到关于变量 $v_{ijk,\ l}$，$y_{ij,\ kl}$，$z_{i,\ jkl}$ 的一组齐次线性方程。该方程组具有以下解：

- $v_{ijk,\ l}=0$ 对所有 $i,\ j,\ k,\ l$;
- $y_{ij,\ kl}=0$ 除非 $\{k,l\}=\{1,i\}$ 或 $\{k,l\}=\{1,j\}$;
- $z_{i,\ jkl}\neq 0$ 当且仅当 $1\neq i$ 且 $i\in\{j,k,l\}$。
- $y_{12,\ 12}=y_{13,\ 13}=y_{14,\ 14}=:\ y_1$;
- $\frac{1}{2}y_{22,\ 12}=y_{23,\ 13}=y_{24,\ 14}=:\ y_2$;
- $\frac{1}{2}y_{33,\ 13}=y_{23,\ 12}=y_{34,\ 14}=:\ y_3$;
- $\frac{1}{2}y_{44,\ 14}=y_{24,\ 12}=y_{34,\ 13}=:\ y_4$;
- $-z_{3,123}=-z_{4,124}=:z_2$;
- $z_{2,123}=-z_{4,134}=:z_3$;
- $z_{2,\ 124}=z_{3,\ 134}=:z_4$。

由此可知，向量 w 必须具有以下形式

$$w=\sum_{i=1}^{4}\partial_i d_1(\partial_2 d_2+\partial_3 d_3+\partial_4 d_4)\otimes y_i+\sum_{i=2}^{4}(\partial_2 d_2+\partial_3 d_3+\partial_4 d_4)d_i d_1\otimes z_i+d_1d_2d_3d_4\otimes u$$

对于某些 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ u\in W_t(a,\ b,\ c)$。注意，如果令 $\lambda(w)=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，则我们得到以下权重

- $\lambda(y_1)=(\alpha,\beta,\gamma)$;

- $\lambda(y_2) = (\alpha - 2,\ \beta + 1,\ \gamma + 1)$;
- $\lambda(y_3) = (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma + 1)$;
- $\lambda(y_4) = (\alpha - 1,\ \beta,\ \gamma - 1)$;
- $\lambda(z_4) = (\alpha - 1,\ \beta,\ \gamma + 1)$;
- $\lambda(z_3) = (\alpha - 1, \beta + 1, \gamma - 1)$;
- $\lambda(z_2) = (\alpha,\ \beta - 1,\ \gamma)$。

注意，应用适当的元素 $x_i\partial_j$ ，其中包含 $i < j$ 或 b_{44} ；如果元素y_1、y_2、y_3、y_4、z_4、z_3、z_2中有任意一个为零，那么它左边的其他元素也都为零。因此，我们可以假设 $z_2 \neq 0$。将 $x_4^2\partial_3$ 作用于 w，得到（ $d_1d_2d_4$的系数）（$x_4\partial_3$）$z_2 = 0$，这迫使 $\gamma = 0$成立。类似地，应用 $x_3^2\partial_1$ 并考察 $d_1d_2d_3$ 的系数，得到（$x_3\partial_1$）$z_2 = 0$ ，这迫使 $\alpha + \beta = 1$成立。如果还有 $z_3 \neq 0$，我们可以应用 $x_2^2\partial_1$ ，并考察 $d_1d_2d_3$ 的系数，得到（$x_2\partial_1$）$z_3 = 0$，这迫使 $\alpha = 1$成立。因此，我们有以下 3 种可能：

1) $z_3 = 0$ 且唯一的非零元素是 z_2 （以及 u）。在这种情况下， z_2 是一个权为 (0，0，0) 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量，而 w的权为 (0，1，0)；
2) $z_2 = 0$；3) $z_3 \neq 0$ 以及 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (1, 0, 0)$；

情形 1) 不会发生。事实上，作用于 $x_4^2d_3$ 并考察 $\partial_3d_3d_4$ 的系数，可得 $z_2 = 0$。情形 2) 也不会发生，因为方程 $(x_4^2\partial_4)w$ 将推出 $u = 0$。

因此，我们只需考虑情形 3)。若 $y_1 \neq 0$，它是一个权为 (1，0，0) 的 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$-奇异向量，因此 $w \in M_t(1, 0, 0)$，即由标准模诱导的 Verma 模。根据权重理由以及 $\hat{}\,\mathfrak{p}(4)$ 的子代数 N 的作用的相容性，迫使 w 具有以下形式

$$w = \sum_{i=1}^{4} \partial_i d_1(\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) \otimes d_i + \sum_{i=2}^{4} (\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) d_i d_1 \otimes \partial_i + d_1d_2d_3d_4 \otimes \rho d_1$$

对于某个 $\rho \in \mathbb{C}$。应用 $x_4^2\partial_4$ ，可推出 $\rho = \frac{1}{2}(1 - t)$，并且可以证明，采用这一选择后，我们实际上得到每个 $t \in \mathbb{C}$ 的一个奇异向量。因此我们证明了以下结论。

定理 9.1。 以下是次数为 *4* 的 $E(4,4)$-奇异向量的完整列表，精确到一个标量因子：

$$w[4_H] = \sum_{i=1}^{4} \partial_i d_1(\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) \otimes d_i + \sum_{i=2}^{4} (\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) d_i d_1 \otimes \partial_i + d_1d_2d_3d_4 \otimes \frac{1}{2}(1 - t)d_1$$

对于每个 $t \in \mathbb{C}$，均位于 $W_t(1, 0, 0)$ 中。

可以验证 $a_{12}w = 0$ ，这意味着对于所有 $t \in \mathbb{C}$ ，我们都有一个态射

$$\varphi_{[4_H]} : M_{t-4}(1, 0, 0) \to M_t(1, 0, 0).$$

次数为 5 的奇异向量可以按照我们处理次数为 4 的奇异向量的方法来处理。然而在本例中，相应的齐次线性方程组只有平凡解，因此我们得出结论：不存在次数为 5 的奇异向量。

现在我们可以给出$E(4, 4)$上 Verma 模中奇异向量的完整分类。

定理 9.2。 以下给出 $E(4,4)$-*Verma* 模中奇异向量及相应态射的分类（相差一个标量因子）。

(1) 在一阶中，我们有

- $w[1_A] = d_1 \otimes x_1^a \in M_t(a, 0, 0)$ 其中 $a = t = 0$ 或 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，从而给出态射
$$\varphi_{[1_A]} : M_{t-1}(a+1, 0, 0) \to M_t(a, 0, 0)$$
对于 $a = t = 0$，或者 $a = 1$ 和 $t \in \mathbb{C}$、$t \neq 1$，或者 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 和所有 $t \in \mathbb{C}$，以及
$$\tilde{\varphi}_{[1_A]} : \tilde{M}_0(2, 0, 0) \to M_1(1, 0, 0);$$
- $w[1_B] = \sum_{i=1}^4 d_i \otimes x_i^*(x_4^*)^{c-1} \in M_t(0, 0, c)$ 对于所有 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，从而给出态射
$$\varphi_{[1_B]} : M_{t-1}(0, 0, c-1) \to M_t(0, 0, c)$$
对于所有 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$、$t \in \mathbb{C}$ 和 $(c, t) \neq (1, 1)$;
- $w[1_C] = 2\partial_3 \otimes x_4^* - 2\partial_4 \otimes x_3^* - \sum_{i=1}^4 d_i \otimes a_{12} x_i^* \in M_t(0, 0, 1)$ 对所有 $t \in \mathbb{C}$，给出态射
$$\varphi_{[1_C]} : M_{t-1}(0, 1, 0) \to M_t(0, 0, 1)$$
对所有 $t \in \mathbb{C}$;
- $w[1_D] = 4\sum_{i=2}^4 \partial_i \otimes a_{1i} - 2(d_4 \otimes a_{12}a_{13} + d_3 \otimes a_{14}a_{12} + d_2 \otimes a_{13}a_{14}) - d_1 \otimes (a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} + a_{14}a_{23} - 4) \in M_t(0, 0, 0)$ 对所有 $t \in \mathbb{C}$、$t \neq 0$，给出态射
$$\varphi_{[1_D]} : M_{t-1}(1, 0, 0) \to M_t(0, 0, 0)$$
对所有 $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- $w[1_E] = \sum_{i=1}^4 (\partial_i \otimes d_i + d_i \otimes \partial_i) \in M_1(1, 0, 0)$ 给出了该态射
$$\varphi_{[1_E]} : M_0(0, 0, 0) \to M_1(1, 0, 0).$$

我们还有该态射
$$\tilde{\varphi}_{[1_D]} : M_{-1}(1, 0, 0) \to \tilde{M}_0(0, 1, 0).$$

(2) 在次数二时，我们有

- $w[2_{DA}] = 4\sum_{i=2}^4 d_1\partial_i \otimes a_{1i} - 2d_1(d_4 \otimes a_{12}a_{13} + d_3 \otimes a_{14}a_{12} + d_2 \otimes a_{13}a_{14}) \in M_t(0, 1, 0)$ *(where for $t \neq 0$ it is meant that $M_t(0, 1, 0) \cong M_t(0, 0, 0)$), giving the morphism*
$$\varphi_{[2_{DA}]} : M_{t-2}(2, 0, 0) \to M_t(0, 1, 0)$$
for every $t \in \mathbb{C}$;
- $w[2_{EA}] = d_1 w[1_E] \in M_1(1, 0, 0)$, *giving the morphism*
$$\varphi_{[2_{EA}]} : M_{-1}(1, 0, 0) \to M_1(1, 0, 0).$$

(3) 在次数三时，我们有

- $w[3_F] = \sum_{i,j} \partial_i\partial_j d_i \otimes d_j + \partial_i d_i d_j \otimes \partial_j + d_1d_2d_3 \otimes d_4 - d_1d_2d_4 \otimes d_3 + d_1d_3d_4 \otimes d_2 - d_2d_3d_4 \otimes d_1 \in M_3(1, 0, 0)$, *giving the morphism*
$$\varphi_{[3_F]} : M_0(0, 0, 0) \to M_3(1, 0, 0);$$
- $w[3_G] = (\sum_{i=1}^4 \partial_i d_i)d_1 \otimes 1 \in M_0(0, 0, 0)$, *giving the morphism*
$$\varphi_{[3_G]} : M_{-3}(1, 0, 0) \to M_0(0, 0, 0).$$

（4）在四次情形下，我们有

- $w[4_H] = \sum_{i=1}^{4} \partial_i d_1(\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) \otimes d_i + \sum_{i=2}^{4}(\partial_2 d_2 + \partial_3 d_3 + \partial_4 d_4) d_i d_1 \otimes \partial_i + d_1 d_2 d_3 d_4 \otimes \frac{1}{2}(1-t)d_1$ *in* $W_t(1,0,0)$ *for every* $t \in \mathbb{C}$*, giving the morphism*
$$\varphi_{[4_H]} : M_{t-4}(1,0,0) \to M_t(1,0,0)$$
for every $t \in \mathbb{C}$*.*

推论 9.3。李超代数 E（4,4）的退化 *Verma* 模完整列表如下：

- $M_t(a,\ 0,\ 0)$ 对每个 $t \in \mathbb{C}$ 和每个 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$；
- $M_t(0,\ 0,\ c)$ 对每个 $t \in \mathbb{C}$ 和每个 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$；
- $M_t(0,\ 1,\ 0)$ 对每个 $t \in \mathbb{C}$。

注记 9.4。请注意，在图 6 和图 8 中，模 M_t(1，0，0) 都出现了两次：一次是绿色，带有 $a = 1$；另一次是黑色。因此，图 6 显示有两支箭头指向 M_1(1，0，0)，即态射 $\varphi[1_E]$：M_0(0，0，0) $\to M_1$(1，0，0) 和 $\varphi[4_H]$：M_{-3}(1，0，0) $\to M_1$(1，0，0)。

注记 9.5. 对偶性使图 6 关于原点反射。

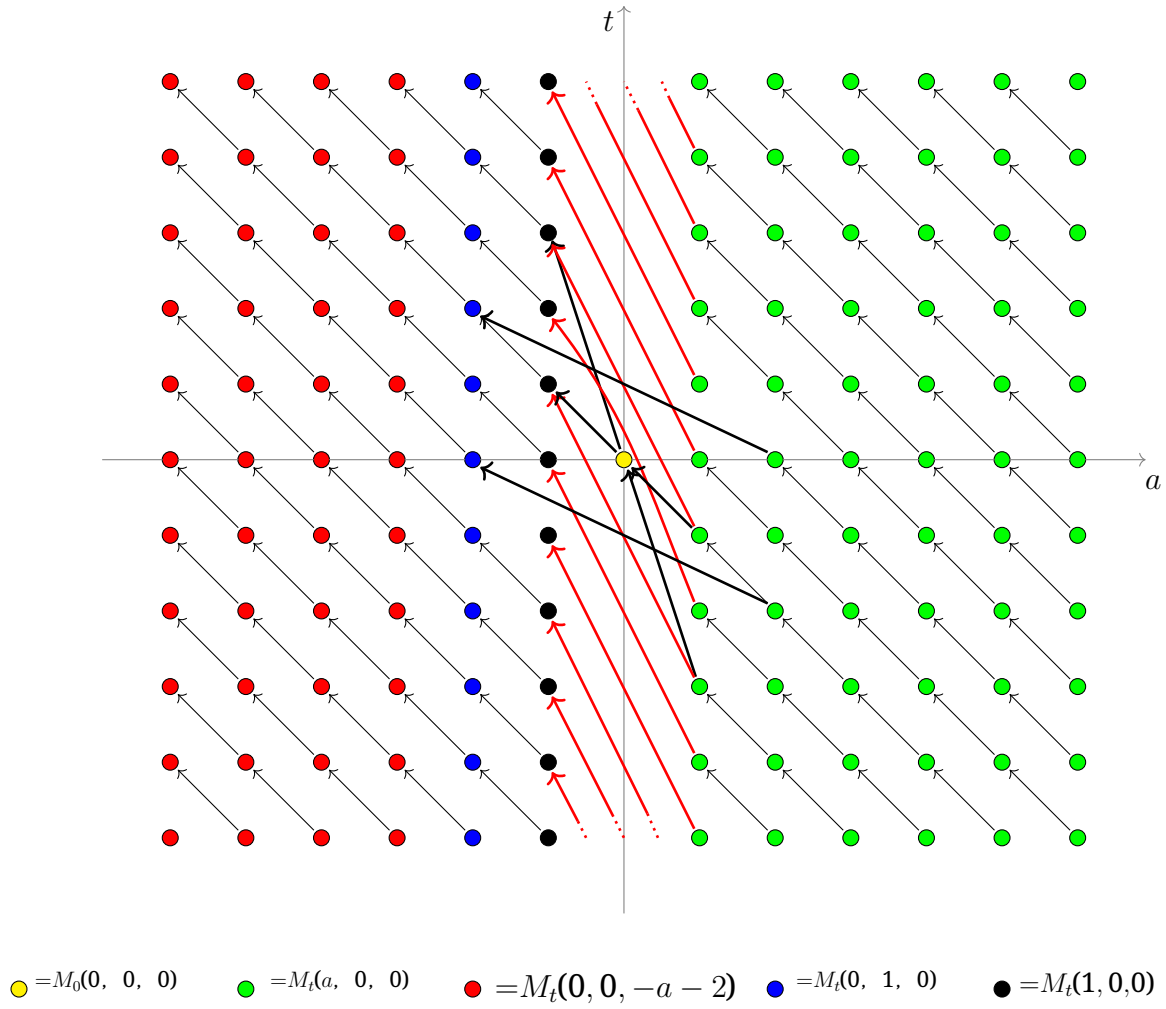

FIGURE 6. Verma 模之间的态射。

10. Exceptional de Rham complexes for E(4,4)

正如引言中所预期的，如果我们用次数为 2 的合成态射取代那些合成不为零的 1 次态射，就得到一个复形。我们在图 7 中描述的复形只涉及 1 次和次数2的态射；而图 8 中的复形则涉及 1 次、3 次和 4 次态射。

在第 7 节中，我们证明了有限 Verma 模之间 1 次态射的唯一非零复合为 $\varphi_{[1_D]} \circ \varphi_{[1_A]}$：$M_{t-2}(2,\ 0,\ 0) \to M_t(0,\ 0,\ 0)$（对于 $t \neq 0$）以及 $\varphi_{[1_E]} \circ \varphi_{[1_A]}$：$M_{-1}(1,\ 0,\ 0) \to M_1(1,\ 0,\ 0)$。其他非零复合只有 $\varphi_{[3_F]} \circ \varphi_{[1_A]}$：$M_{-1}(1,\ 0,\ 0) \to M_3(1,\ 0,\ 0)$ 和 $\varphi_{[1_E]} \circ \varphi_{[3_G]}$：$M_{-3}(1,\ 0,\ 0) \to M_1(1,\ 0,\ 0)$。可以验证 $\varphi_{[3_F]} \circ \varphi_{[1_A]} = \varphi_{[4_H]}$ 和 $\varphi_{[1_E]} \circ \varphi_{[3_G]} = \varphi_{[4_H]}$。态射分类表明，所有其他复合均为零。

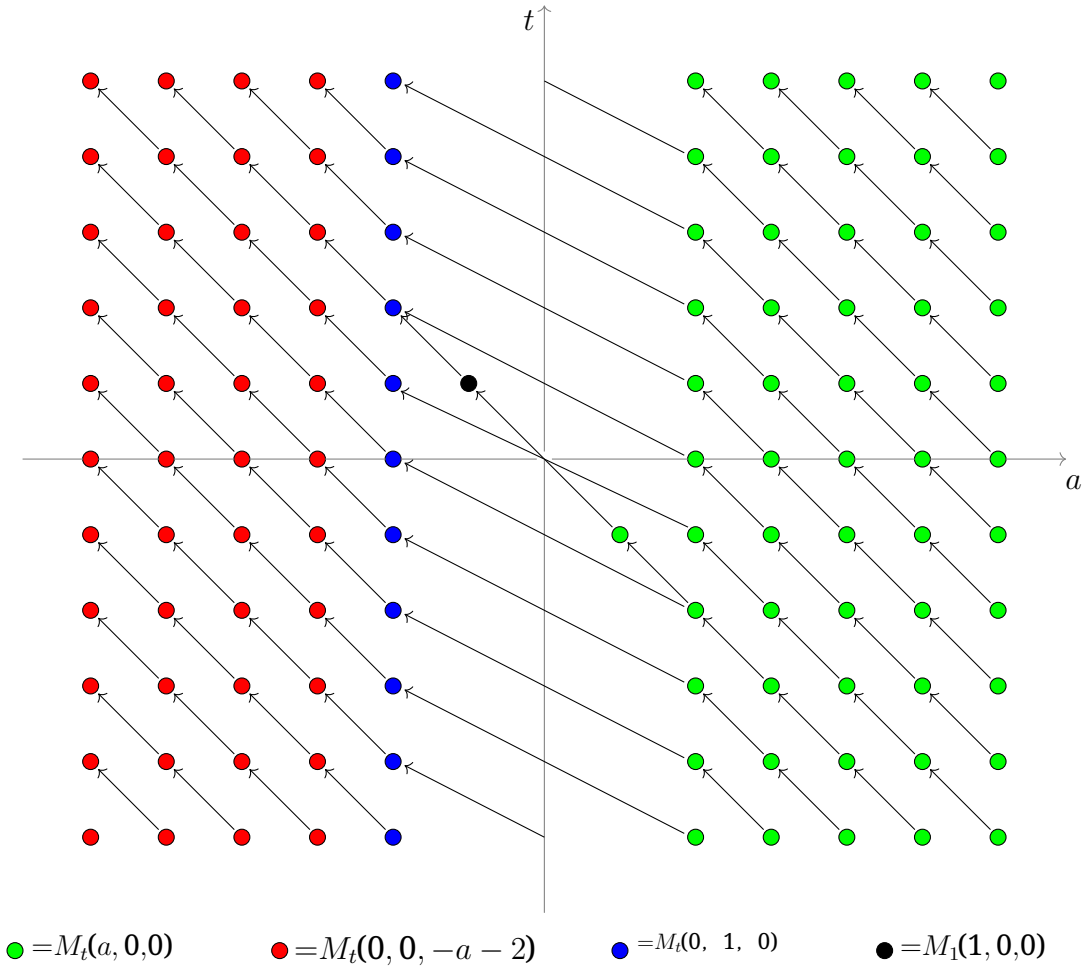

Figure 7. 带有 Verma 模之间 1 次和 2 次态射的例外 de Rham 复形。

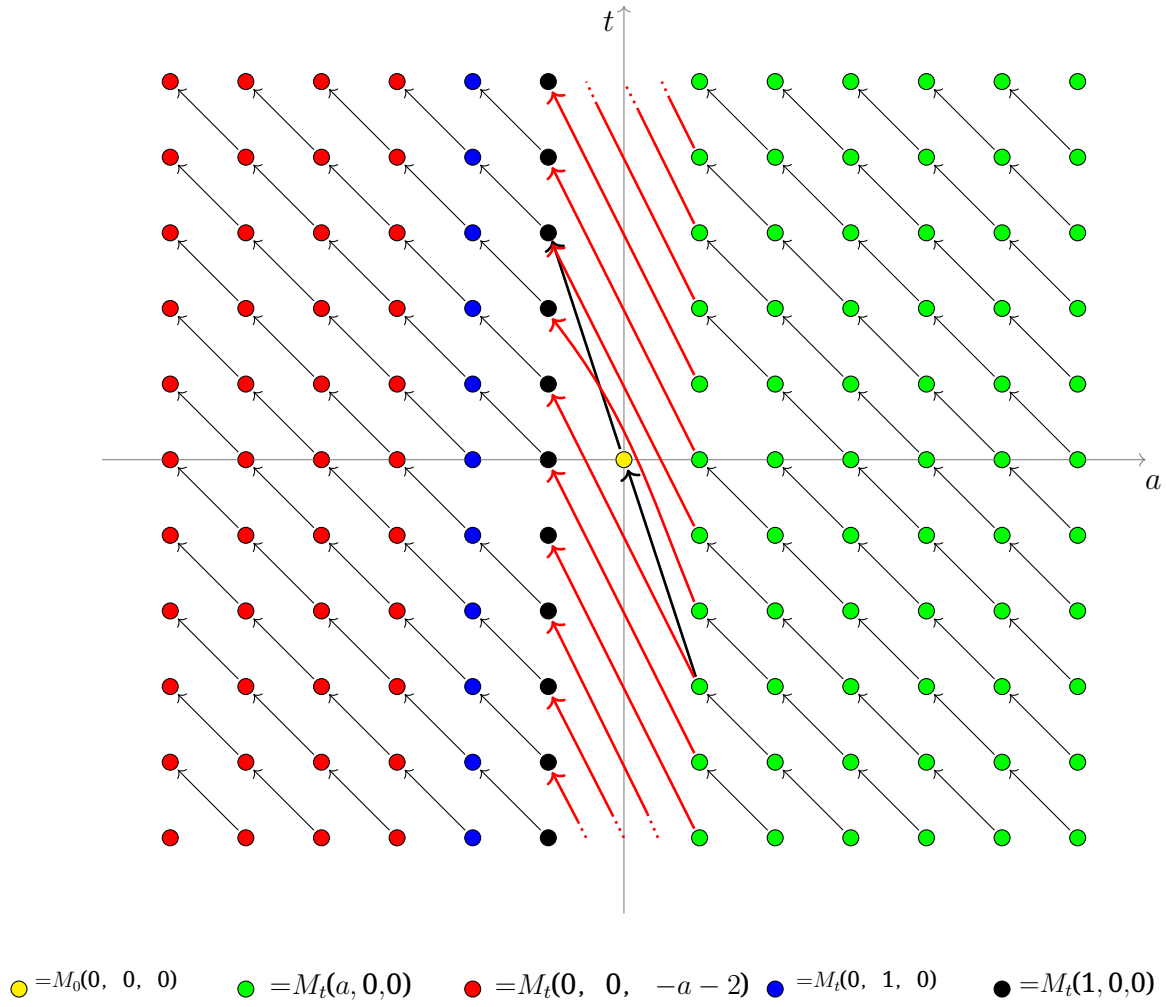

FIGURE 8. 涉及 Vermamodules 之间 1 次、3 次和 4 次态射的例外 de Rham 复形。

REFERENCES

[1] L. BAGNOLI，关于 *E(1, 6)* 奇异向量次数的一个上界，《*J. Algebra Appl.*》*23(9)*（*2024*年），*23*页。[2] M. BALAGOVIC, Z. DAUGHERTY, I. ENTOVA-AIZENBUD, I. HALACHEVA, J. HENNIG, M.S. IM, G. LETZTER, E. NORTON, V. SERGANOVA, C. STROPPEL围辛李超代数 $p(n)$ 的平移函子与分解数，《*Math. Rev. Lett.*》*26*（*2019*）*3*，*643–710*。[3] C. BOYALLIAN, V. G. KAC, J. I. LIBERATI, 李共形超代数 CK_6 上有限不可约模的分类，《*Comm. Math. Phys.*》*317*（*2013*年），*503–546*。[4] N. CANTARINI, F. CASELLI，*E(5, 10)*-广义 *Verma* 模的低阶态射，《*Alg. Rep. Theory*》*23*（*2020*），*2131–2165*。[5] N. CANTARINI, F. CASELLI, V. G. KAC, 李共形超代数与线性紧李超代数上模的对偶性，《*Adv. Math.*》*378*（*2021*），*107523*，*45*页。[6] N. CANTARINI, F, CASELLI, V. G. KAC，*E(5,10)* 的退化 *Verma* 模分类，《*Comm. Math. Phys.*》*385*（*2021*），*963–1005*。

[7] N. Cantarini, F, Caselli, V. G. Kac, 关于 *E(4, 4)* 的李共形超代数与表示的对偶性，《*Adv. Math.*》*437 (2024*年*), 109416, 21*页。[8] N. Cantarini, F, Caselli, V. G. Kac, *E(1, 6)* 到 *E(5, 10)* 和 *E(4, 4)* 的嵌入，《*Comm. Contemp. Math.*》*(2026*年*), https://doi.org/10.1142/S0219199725500828, 1–23*。[9] N. Cantarini, V. G. Kac, 无限维本原线性紧李超代数，《*Adv. Math.*》*207(1) (2006*年*), 328-419*。[10] S. Chemla, 李超代数余诱导表示中的对偶性性质，《*Annales de l'Inst. Fourier*》*44(4) (1994*年*), 1067–1090*。[11] S.-J. Cheng, V. G. Kac, 某些向量场的 $\mathbb{Z}$分次李超代数的结构，《*Transf. Groups*》*4 (1999*年*), 219–272*。[12] M. Eastwood, 余有效复形的扩张 *III*，《*J. Math.*》*57(2) (2013*年*), 373–381*。[13] V. G. Kac, 李超代数，《*Adv. Math.*》*26 (1977), 8–96*。[14] V. G. Kac, 无限维单线性紧李超代数的分类，《*Adv. Math.*》*139 (1998*年*), 1–55*。[15] V. G. Kac, A. Rudakov, 例外李超代数 *E(3, 6)* 的表示，*I.* 退化条件，《*J. Transf. Groups*》*7(1) (2002*年*), 67–86*。[16] V. G. Kac, A. Rudakov, 例外李超代数 *E(3, 6)* 的表示，*II.* 四系列退化模，《*J. Comm. Math. Phys.*》*222(3) (2001*年*), 611–661*。[17] V. G. Kac, A. Rudakov, 例外李超代数 *E(3, 8)* 和 *E(5, 10)* 上的模复形，《*Int. Math. Res. Not.*》*19 (2002), 1007-1025*。[18] V. G. Kac, A. Rudakov, 例外李超代数 *E(3, 6)* 的表示，*III.* 奇异向量分类，《*J. Algebra Appl.*》*4(1) (2005*年*), 15–57*。[19] I. A. Kostrikin, 级数 K_n中无限维李代数的高度为*1*的表示，《*Russian Math. Surveys*》*34(1) (1979*年*), 225–226*。[20] A. Rudakov, 嘉当型无限维李代数的不可约表示，《*Math. USSR Izv.*》*8 (1974*年*), 836–866*。[21] A. Rudakov, *S*型和*H*型无限维李代数的不可约表示，《*Math. USSR Izv.*》*9 (1975*年*), 465–480*。[22] M. Rumin, 接触流形上的微分形式，《*J. Diff. Geom.*》*39 (1994*年*), 281–330*。[23] V. Serganova, 单李超代数 p*(3)* 的中心扩张的表示，《*Sao Paulo J. of Math. Sciences*》*12(2) (2018*年*), 1–15*。

Nicoletta Cantarini and Fabrizio Caselli, Dipartimento di matematica, Università di Bologna,Piazza di Porta San Donato 5, 40126 Bologna, Italy; Victor Kac, Math. Department, MIT,Cambridge, MA02139电子邮件地址: nicoletta.cantarini@unibo.it电子邮件地址: fabrizio.caselli@unibo.it电子邮件地址: kac@math.mit.edu