arXiv:2603.16540v1 [math.DG] 17 Mar 2026

李代数的优美基

Jonas Der´e* Jeroen Gantois †

摘要

优基的概念最初是为了研究赋有左不变度量的幂零李群上的里奇曲率而引入的。尽管它在微分几何中有许多应用，例如用于构造爱因斯坦流形，但对于给定李代数上优基的存在性和数量，人们所知甚少。本文研究三类李代数中的这一问题，即直和、几乎阿贝尔李代数，以及与图相关联的幂零李代数。作为应用，我们计算了维数不超过 3 的李代数的优基数量，并证明对于一般的李代数，其优基是否存在取决于定义它的域。此外，对于每个自然数 n，我们给出一个不可分解李代数，使得其在等价意义下恰有 n 个优基。

1 引言

赋有左不变度量的连通李群的里奇曲率张量，可以用其相关的度量李代数来表示。尽管公式相当复杂，但李代数存在优基会大大简化计算。在 [11, 引理 3。9]优基的概念在此处首次提出，但当时尚未命名；这一名称是在后来才出现的。

定义 1.1。 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $\{X_1,\dots,X_n\}$ 称为**优基**，若其结构常数 c_{ij}^k 满足以下两个条件。

(1) 对所有 $i,\ j\in\{1,\dots,n\}$，至多存在一个 $k\in\{1,\dots,n\}$ 使得 $c_{ij}^k\neq 0$.

(2) 若对任意 $i,\ j,\ k,\ s,\ t\in\{1,\dots,n\}$，当 $c_{ij}^k\neq 0$ 且 $c_{st}^k\neq 0$ 时，则 $\{i,j\}=\{s,t\}$ 或 $\{i,j\}\cap\{s,t\}=\emptyset$.

论文 [11] 表明，幂零李代数的优基总是稳定里奇对角的，这意味着对于任何使该基正交的内积，其里奇张量都是对角的。在 [12] 中，反向结论得到了证明，即幂零李代数的任何稳定里奇对角基都必须是优基。优基的定义仅取决于李代数本身，因此确定哪些幂零李代数具有稳定里奇对角基就成为一个代数问题。注意，优基的定义可用于任意域上的李代数。除非另有说明，我们始终将域限定为 $\mathbb{R}$，因为优基的大多数应用都在该域上。

这种特殊基的存在性是文献中广泛运用的一种性质。例如，在 [15] 中，Milnor 利用任何 3维幺模李代数都具有稳定里奇对角基这一事实，对相关李群的里奇曲率可能具有的符号差进行了分类。稳定里奇对角基也用于研究里奇流（见 [11, 17], ）以及 [6, 13]中的里奇负李群。此外， [16, 定理 3] 为我们提供了一个易于检验的条件

*鲁汶大学 Kulak 校区，科特赖克，比利时。jonas.dere@kuleuven.be。

†鲁汶大学 Kulak 校区，科特赖克，比利时。jeroen.gantois@kuleuven.be。研究得到弗拉芒政府长期结构性资助 Methusalem 资助项目 METH/21/03 的支持。

判断具有优基的幂零李代数是否为爱因斯坦幂零根。这说明，对于给定李代数，优基的存在是一种非常有用的性质；然而，要分类哪些李代数具有这样的基并非易事。

许多幂零李代数都有一个自然的优基。例如，在维数不超过 6 的幂零李代数中，只有一个没有优基。这个首个不具有优基的幂零李代数示例见 [12, 命题 2。1]在 [1, 定理 3。11], 中给出了更多不具有优基的幂零李代数示例。注意，若 $\mathcal{B}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$的一个优基，那么将 $\mathcal{B}$ 中的元素分别乘以 $\mathcal{B}$ 非零倍数，就能构造出另一个优基。这启发我们在给定李代数 $\mathfrak{g}$的优基集合上定义等价关系，具体如下： [2]。

定义 1.2。若存在一个李代数自同构，将 $\mathcal{B}_1$ 中的元素映射为 $\mathcal{B}_2$中元素的倍数，则称李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个优基 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 等价。

上述定义的等价关系记为“$\sim$”，等价类的数量记为 $\nu_{\mathfrak{g}}$。这一切都引出了如下问题：描述一个李代数上的优良基在等价意义下的情况。

问题 1.3。 给定一个李代数 $\mathfrak{g}$， $\mathfrak{g}$ 在等价意义下有多少个优良基，即 $\nu_{\mathfrak{g}}$ 是什么?

在 [2] 中证明了，对于有限维实幂零李代数，这个数至多可数。后来在 [9] 中表明，对于这些李代数，该数是有限的。此外，在同一篇论文中还表明，通过论证

$$\bigoplus_{i=1}^{2k} \mathfrak{h}_3$$

在等价意义下至少有 $k+1$ 个优良基，其中 $\mathfrak{h}_3$ 为三维海森堡李代数。对于这些直和，优良基的确切数量一般尚不清楚。也有已知的具有多个优良基的不可分解幂零李代数的例子，见 [2, 命题 3.1]。这引出了如下问题：对于每个自然数 n，我们是否能够找到一个不可分解李代数，使其在等价意义下恰好有 n 个优良基；对此我们将给出肯定的答案。

在 [2] 中，我们介绍了一种算法，用于分类固定维数且拥有优良基的幂零李代数。输出以表格形式呈现，其中列出了由结构方程定义的、拥有优良基的 n 维幂零李代数。如果一个李代数拥有 k 个在等价意义下互不等价的优良基，该算法就会将这个李代数输出 k 次，每个优良基对应一次。因此，该算法给出的幂零李代数数量，并不等于拥有优良基的 n 维幂零李代数的数量。此外，若要确定某个特定的 n 维幂零李代数拥有多少个优良基，你应检查算法生成的表格中的每一项是否与你给定的李代数同构。随着维数增加，这些表格会变得越来越大，因此在高维情形下，这项工作会更加困难。此外，该算法无法用于研究幂零李代数的无限族。

本文将关注李代数的三个自然类别。第一类是可分解李代数。在 [1, 16] 中，提出了将预爱因斯坦导子与优良基联系起来的想法；我们将在第2 节运用这一想法，证明直和李代数存在优良基的相关结果。

在第3 节中，我们将考察几乎阿贝尔李代数这一类，它在 [9]中已有简要提及。由于每个阿贝尔李代数都有唯一的优基，因此这是对一个已知类的自然

扩展。我们将给出这类李代数存在优基的充要条件；若这样的基存在，我们还将确定其数量。结果表明，优基的存在与所用的域有关。在第4节中，我们将利用上一节得到的结果，概述所有三维李代数的优美基的数量。

最后，我们将在第5节讨论与图相关联的幂零李代数。最初，[3] 引入了与图相关联的二步幂零李代数类，用于研究 Anosov 微分同胚。这些李代数也用于 [5, 18] 中的幂零流形研究；对于任意幂零类，它们则在 [7, 14]中进行了研究。由于这类李代数在文献中被广泛使用，因此了解其中哪些李代数存在优基很有用。关于二步幂零李代数，这一点已在 [11] 中讨论过，以研究爱因斯坦可解流形。我们将给出一般的 c步、与图相关联的幂零李代数存在优良基的充要条件。

2 李代数直和的优良基

设 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{h}$是任意李代数。若 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{h}$存在优基，分别记为 $\mathcal{B}_1 = \{X_1, \dots, X_n\}$和 $\mathcal{B}_2 = \{Y_1, \dots, Y_m\}$，那么显然

$$\{(X_1, 0), \dots, (X_n, 0), (0, Y_1), \dots, (0, Y_m)\}$$

构成直和李代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$. 的优基。为简化记号，我们将这个新基记为 $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$。由此引出以下问题。

问题 2.1。 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 存在优基是否意味着 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 也存在优基? 此外，我们能否用 $\nu_{\mathfrak{g}}$ 和 $\nu_{\mathfrak{h}}$ 来描述 $\nu_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}}$？

对于李代数 $\mathfrak{g}$ 的上、下中心列的各项，我们分别用记号 $Z_i(\mathfrak{g})$ 和 $\gamma_j(\mathfrak{g})$ 表示，其中 $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 和 $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$。研究优基的一个重要工具如下。

引理 2.2。 若李代数 $\mathfrak{g}$ 有优基 $\mathcal{B}$，则 $Z_i(\mathfrak{g})$ 和 $\gamma_j(\mathfrak{g})$ 分别由 $\mathcal{B} \cap Z_i(\mathfrak{g})$ 和 $\mathcal{B} \cap \gamma_j(\mathfrak{g})$ 张成。

关于下中心列，这一点在 [12] 中已有说明；关于上中心列，则最早见于 [1]。上述引理也可以用文字表述为：优基与李代数的上、下中心列相适配。

当 $\mathfrak{g}$或 $\mathfrak{h}$为阿贝尔李代数时，答案是肯定的；这是以下定理的一部分。

定理 2.3. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，$\mathfrak{a}$ 是一个阿贝尔李代数。如果 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ 存在优基，那么 $\mathfrak{g}$ 也存在优基。此外，有

$$\nu_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}} = \nu_{\mathfrak{g}}.$$

证明。 设 $\dim(\mathfrak{g}) = n$ 且 $\dim(\mathfrak{a}) = m.$。现在令

$$\mathcal{B} = \{(Y_1, Z_1), \dots, (Y_{n+m}, Z_{n+m})\}$$

是 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$的优基。由引理 2.2 可得

$$[\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \{0\}$$

由 $\mathcal{B}$ 中的元素张成。如果 $\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = t$，则必要时重新排列这些元素，可得$Z_1 = \cdots = Z_t = 0$ 以及

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{Span}\{Y_1,\ldots,Y_t\}.$$

现在令 π：$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}$ 为到 $\mathfrak{g}$上的投影态射。现在，我们可以通过添加向量 Y_{t+1}，……，Y_n，将 $\{Y_1,\ldots,Y_t\}$ 扩充为 $\mathfrak{g}$ 的一组基（必要时重新排列基 $\mathcal{B}$中的元素）。对于所有 i，$j\in\{1,\ldots,n\}$，都有

$$[Y_i,Y_j] = [\pi(Y_i,Z_i),\pi(Y_j,Z_j)] = \pi([(Y_i,Z_i),(Y_j,Z_j)]) = \pi(\alpha(Y_k,0)) = \alpha Y_k$$

对于某些 $k\in\{1,\ldots,t\}$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}.$。现在假设存在 i，j，k，$s\in\{1,\ldots,n\}$，使得$j\neq s$ 并且

$$[Y_i,Y_j] = \alpha Y_k \qquad [Y_i,Y_s] = \beta Y_k,$$

对于某些 α，$\beta\in\mathbb{R}_0$和 $k\in\{1,\ldots,t\}.$。于是可得

$$[(Y_i,Z_i),(Y_j,Z_j)] = \alpha(Y_k,0) \quad \text{and} \quad [(Y_i,Z_i),(Y_s,Z_s)] = \beta(Y_k,0),$$

这与 $\mathcal{B}$ 是优基这一假设相矛盾。因此，这样的 i，j，$s\in\{1,\ldots,n\}$ 不可能存在，所以我们得出结论：$\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的优基，这正是我们需要证明的。

F对于第二部分，我们沿用之前的记号。首先证明每个优基 for $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$ 都等价于如下形式的基

$$\mathcal{B}_1\oplus\mathcal{B}_2,$$

其中，$\mathcal{B}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的优基，$\mathcal{B}_2$ 是 $\mathfrak{a}.$ 的任意一个基。我们从证明的第一部分已经知道，如果

$$\mathcal{B} = \{(Y_1,Z_1),\ldots,(Y_{n+m},Z_{n+m})\}$$

是 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$的优基，那么我们可以假设 $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ 是 $\mathfrak{g}.$ 的优基。由引理 2.2 可知，$\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ 恰好包含 $\dim(Z(\mathfrak{g}))$ 个中心元素。这意味着

$$\{(Y_1,Z_1),\ldots,(Y_n,Z_n)\}$$

恰好包含 $\dim(Z(\mathfrak{g}))$ 个属于 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$的中心元素。由于 $\mathcal{B}$ 是 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$的优基，由引理 2.2 再次可知，$Z(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a})$ 由 $\dim(Z(\mathfrak{g}))$ 个 $+m$ 元素张成，且这些元素属于 $\mathcal{B}$。因此我们得到 $Y_{n+j}\in Z(\mathfrak{g})$，对所有 $j\in\{1,\ldots,m\}.$

现在令 $\{U_1,\ldots,U_m\}$ 为 $\mathfrak{a}$的任意一组基。于是，线性映射 φ：$\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$定义如下：

$$\varphi((Y_i,Z_i)) = (Y_i,0), \quad \varphi((Y_{n+j},Z_{n+j})) = (0,U_j)$$

对于 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 和 $j\in\{1,\ldots,m\}$，它是一个向量空间自同构。此外，注意到对于所有i, $j\in\{1,\ldots,n\}$

$$[(Y_i,Z_i),(Y_j,Z_j)]$$

或者为零，或者是 $\mathcal{B}$中某个形如 $(Y_k,0)$ 的元素的倍数，其中 $k\in\{1,\ldots,n\}$（即 $Z_k=0$）。在这两种情况下，现在显然有

$$\varphi([(Y_i,Z_i),(Y_j,Z_j)]) = [\varphi(Y_i,Z_i),\varphi(Y_j,Z_j)].$$

由于 φ也将中心元素映射为中心元素，我们现在可以得出结论：φ是一个李代数自同构 态，将 $\mathcal{B}$ 中的元素映射为某个基中元素的倍数，其形式为

$$\mathcal{B}_1\oplus\mathcal{B}_2,$$

其中 $\mathcal{B}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的优基， $\mathcal{B}_2$ 是 $\mathfrak{a}$. 的任意基。因此， $\mathcal{B}$ 等价于这种形式的一个基，这正是我们想要证明的。

最后，为完成证明，设 $\{V_1,\dots,V_n\}$ 和 $\{W_1,\dots,W_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$的优良基，那么只需证明 $\{V_1,\dots,V_n\}\sim\{W_1,\dots,W_n\}$ 当且仅当

$$\mathcal{B}_1=\{(V_1,0),\dots,(V_n,0),(0,U_1),\dots,(0,U_m)\}\sim\mathcal{B}_2=\{(W_1,0),\dots,(W_n,0),(0,U_1),\dots,(0,U_m)\}.$$

“仅当”这一部分显然成立。注意，若 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，或 $Z(\mathfrak{g})=0$.则反向命题显然成立。对于其他情形，假设 $\varphi\in$ 自同构群$(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a})$ 将 $\mathcal{B}_1$ 中的元素映射为$\mathcal{B}_2$. 中元素的倍数。由于 $\{V_1,\dots,V_n\}$ 和 $\{W_1,\dots,W_n\}$ 是优良基，由引理 2.2 可知，存在一个$k\in\{0,\dots,n\}$ 使得（可能重新排序后）

$$V_1,\dots,V_k,W_1,\dots,W_k$$

属于 $Z(\mathfrak{g})\setminus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. 现在定义线性映射 $\psi\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，其在基元素上的定义如下

$$\psi(V_i)=\begin{cases}W_i & \text{if } i\le k\\ \pi(\varphi(V_i,0)) & \text{if } i>k\end{cases}.$$

注意，对于所有的 $i>k$，都有 V_i 属于 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 或属于 $\mathfrak{g}\setminus Z(\mathfrak{g})$。这意味着

$$\varphi(V_i,0)=\alpha(W_j,0)$$

对于某些 $j>k$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}_0$。因此我们可以由此得出， ψ 是 $\mathfrak{g}$ 的向量空间自同构，它将 $\{V_1,\dots,V_n\}$ 中的元素映射为 $\{W_1,\dots,W_n\}$ 中元素的倍数。注意，若 i， $j>k$那么对于某些 $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $t\in\{k+1,\dots,n\}$，有 $[V_i,V_j]=\beta V_t$， 这意味着

$$\psi([V_i,V_j])=\beta\psi(V_t)=\beta\pi(\varphi(V_t,0))=[\pi(\varphi(V_i,0)),\pi(\varphi(V_j,0))]=[\psi(V_i),\psi(V_j)].$$

如果 i 或 j 是 $\{1,\dots,k\}$ 的元素，那么立即可得 $\psi([V_i,V_j])=[\psi(V_i)\ \psi(V_j)],$，因此我们可以得出， ψ 是 $\mathfrak{g}$. 的李代数自同构。这证明了 $\{V_1,\dots,V_n\}$ 和 $\{W_1,\dots,W_n\}$ 等价，正如我们想要证明的那样。 □

根据上述证明，我们可以得到以下推论。

推论 2.4。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数， $\mathfrak{a}$ 是一个阿贝尔李代数。直和李代数 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$ 的任意优基 $\mathcal{B}$ 都等价于以下形式的一个基

$$\mathcal{B}_1\oplus\mathcal{B}_2,$$

其中 $\mathcal{B}_1$ 是 $\mathfrak{g}$的一个优基，而 $\mathcal{B}_2$ 是 $\mathfrak{a}$的一个（优）基。

任意李代数 $\mathfrak{g}$都可以写成不可分解理想的直和，即

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_s$$

对于某个 $s\in\mathbb{N}$. 此外，文献 [8] 已证明，这种分解在因子的重排意义下是唯一的。现在不失一般性地假设 $\mathfrak{g}_{t+1}$、…、 $\mathfrak{g}_s$ 对于某个 $t\in\{0,\dots,s\}$而言是阿贝尔李代数。若要判断 $\mathfrak{g}$ 是否存在优基，因此只需考察

$$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_t$$

具有优基。

注记 2.5。 请注意 [2, 命题 3。3] 指出，如果一个李代数的中心扩张具有优基，那么该李代数本身也具有优基。这将使定理 2.3 证明的第一部分变得多余。然而，我们构造出了中心扩张的一个反例，因此 [2, 命题 3。3] 的陈述过于宽泛，而我们的证明表明，该结论对于直和确实成立。

例 2.6。 从六维幂零李代数 $\mathfrak{n}_6$ 出发，它不具有优基 [12]。该李代数的基为 $\{X_1, \ldots, X_6\}$，李括号为

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = X_6.$$

现在考虑七维幂零李代数 $\mathfrak{n}$，其基为 $\{X_1, \ldots, X_7\}$，李括号为

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_3] = X_6, \quad [X_2, X_4] = X_7.$$

该基 $\{X_1, \ldots, X_7\}$ 是优基。由于 $Z(\mathfrak{n}) =$ 张成空间$\{X_6, X_7\}$，李代数 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{n}_6$ 的中心扩张，因为

$$\frac{\mathfrak{n}}{\mathrm{Span}\{X_6 - X_7\}} \cong \mathfrak{n}_6.$$

注意，我们也不能指望具有优基的李代数的中心扩张同样具有优基。事实上，注意 $Z(\mathfrak{n}_6) =$ 张成空间$\{X_6\}$ 和 $z^{\mathfrak{n}_6}(\mathfrak{n}_6)$ 都具有优基，但 $\mathfrak{n}_6$ 不具有优基。 ——

在附加假设下，我们将对问题 2.1 给出部分解答。为此，我们需要李代数的 预爱因斯坦导子 (亦称 尼古拉耶夫斯基导子)，它最早由 [16] 引入。文献 [16] 表明，每个幂零李代数都存在一个实半单导子 $N \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}$，使得对所有 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}$，均有

$$\mathrm{Tr}(ND) = \mathrm{Tr}(D).$$

此外， [16] 证明了 N 在李代数 $\mathfrak{g}$的李代数自同构共轭下唯一。由此立即可知，幂零李代数的预爱因斯坦导子的特征值集合是唯一确定的。虽然没有明确说明，但可以从 [16,定理 3] 的证明中推导出以下结果。

命题 2.7。 设 $\mathfrak{g}$是一个具有优基的李代数，则存在 $\mathfrak{g}$ 的一个预爱因斯坦导子，它相对于该优基是对角的。等价地，如果 $\mathfrak{g}$ 具有优基，那么对于任意预爱因斯坦导子 N，我们都可以找到 $\mathfrak{g}$ 的一个等价优基，使得 N 相对于该基是对角的。

我们将为这一结果给出一个简单的论证。为此，我们需要用到这样一个事实：若 D 是配有优基的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个导子，那么 D 在此基下的对角部分仍是 $\mathfrak{g}$. 的一个导子。这一结论最初是在 [6, 推论 3.15] 中通过直接计算证明的。

证明。 注意，这两个陈述是等价的，因为预爱因斯坦导子在李代数自同构的共轭作用下唯一。S

uppose t hat $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ and define $\mathrm{Dg}(\mathfrak{n})$ to be the set of linear operators on $\mathfrak{n}$ which 相对于 $\mathcal{B}$ 是对角的。该双线性映射

$$(\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})) \times (\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})) \to \mathbb{R} : (D_1, D_2) \mapsto \mathrm{Tr}(D_1 D_2)$$

在 $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})$ 上定义了一个内积。因此，存在唯一的 $N \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})$，使得对于所有 $D' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})$，都有 $\mathrm{Tr}(ND') = \mathrm{Tr}(D')$。

现在我们断言， N 是 $\mathfrak{n}$ 的预爱因斯坦导子。为此，任取 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$，并考虑其相对于基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的对角 $\mathrm{Dg}(D)$。由于 $\mathcal{B}$ 是优基，$\mathrm{Dg}(D)$ 也是 $\mathfrak{n}$ 的一个导子，我们将其记作 D'。因此我们有 $D' \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{Dg}(\mathfrak{n})$。现在有如下等式

$$\mathrm{Tr}(ND) = \mathrm{Tr}(ND') = \mathrm{Tr}(D') = \mathrm{Tr}(D).$$

证明至此结束。 □

A作为一个例子，我们将使用上述证明的方法来计算标准丝状李代数的预爱因斯坦导子 ion 对于标 准丝状李代数。

例2.8。 取 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，并令 L_n 表示 n 维标准丝状李代数。该李代数的基为 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，李括号为

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad \forall i \in \{2, \ldots, n-1\}.$$

由于这个基是优基，根据命题 2.7 的证明，只需找到一个导子N，它相对于这个基是对角的，并且对于所有其他对角导子 D'，都有

$$\mathrm{Tr}(ND') = \mathrm{Tr}(D'). \tag{1}$$

注意，关于此基的任意对角导子都具有如下形式

$$\mathrm{Dg}(x, y, x+y, 2x+y, \ldots, (n-2)x+y),$$

对于 $x,\ y \in \mathbb{R}$. 若令

$$N^{(n)} = \mathrm{Dg}(d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, d_1^{(n)} + d_2^{(n)}, 2d_1^{(n)} + d_2^{(n)}, \ldots, (n-2)d_1^{(n)} + d_2^{(n)})$$

为 L_n 的预爱因斯坦导子，由条件（1）可得

$$xd_1^{(n)} + yd_2^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-2}(kx+y)(kd_1^{(n)} + d_2^{(n)}) = x + y + \sum_{k=1}^{n-2}(kx+y),$$

对于所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$. 通过比较 x 和 y 的系数，并利用前 $n-2$ 个自然数及其平方和的公式，可得

$$d_1^{(n)} = \frac{12}{n^3 - 3n^2 + 2n + 12}, \qquad d_2^{(n)} = \frac{n^3 - 3n^2 - 4n + 24}{n^3 - 3n^2 + 2n + 12}.$$

利用命题 2.7，我们可以为 $\mathfrak{n}_6$ 不存在优基这一事实给出另一种证明。注意，与 [12, 命题 2. 1]，的证明不同，我们的论证不使用 6 维幂零李代数的分类。该证明采用了与 [1, 命题 1.1]相同的思路。

命题 2.9。 李代数 $\mathfrak{n}_6$ 的基为 $\{X_1, \ldots, X_6\}$，其李括号为

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_5] = [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = X_6$$

不存在优基。

证明。 相对于给定基， $\mathfrak{n}_6$ 的预爱因斯坦导子具有如下形式

$$N = \frac{9}{32}\,\mathrm{Dg}(1,2,3,3,4,5).$$

我们通过显式计算 $\mathfrak{n}_6$ 的导子代数得到了这个表达式。请注意，该导子相对于给定的基是对角的，这一点并非显而易见（因为这不是一个优基）。

反设 $\mathfrak{n}_6$ 确实存在优基，那么根据前一个命题，我们可以找到一个优基 $\mathcal{B} = \{X_1', \ldots, X_6'\}$，使得 N 相对于该基是对角的。因此，不失一般性，我们可以认为

$$X_1' \in \mathrm{Span}\{X_1\}, \quad X_2' \in \mathrm{Span}\{X_2\}, \quad X_5' \in \mathrm{Span}\{X_5\}, \quad X_6' \in \mathrm{Span}\{X_6\}.$$

由于 $\mathcal{B}$ 是一个优基，因此 $[X_1', X_2']$ 应当是某个优基元素的倍数，记作 X_4'。另一方面，我们知道 $[X_1', X_2']$ 必须是张成空间 $\{X_4\}$ 中的非零元素。因此可知，X_4' 是张成空间 $\{X_4\}$ 中的非零元素。由此可得 $X_3' = \alpha X_3 + \beta X_4$，其中 α， $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \neq 0$.

根据上述讨论，我们现在发现存在一个 γ， $\delta \in \mathbb{R}_0$，使得 $X_2' = \gamma X_2$ 且$X_4' = \delta X_4$，因此

$$[X_2', X_3'] = \alpha\gamma[X_2, X_3] + \beta\gamma[X_2, X_4] = \gamma(\alpha+\beta)X_6 \in \mathrm{Span}\{X_6'\}$$

$$[X_2', X_4'] = \gamma\delta X_6 \in \mathrm{Span}\{X_6'\} \setminus \{0\}.$$

上述情况只有在 $\alpha = -\beta$，因此 $X_3' = \alpha(X_3 - X_4)$ 时才可能成立。由此我们现在得到

$$[X_1', X_3'] \in \mathrm{Span}\{X_5'\} \setminus \{0\},$$

然而我们也有 $[X_1', X_4'] \in$张成空间$\{X_5'\}\setminus\{0\}$，这与优基的定义矛盾。由此我们得出结论： $\mathfrak{n}_6$ 不具有优基。

□

运用与上述命题证明中类似的思路，我们可以证明以下结论。

定理 2.10. 设 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{h}$ 是李代数，其对应的预爱因斯坦导子分别为 N_1 和 N_2。现在假设 谱$(N_1) \cap$ 谱$(N_2) = \emptyset$。那么，如果 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 具有优基，则 $\mathfrak{g}$和 $\mathfrak{h}$也具有优基。此外

$$\nu_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}} = \nu_{\mathfrak{g}} \cdot \nu_{\mathfrak{h}}.$$

证明。 令 n:=dim($\mathfrak{g}$) 且 m:=dim($\mathfrak{h}$)。 注意

$$N = N_1 \oplus N_2$$

是 的预爱因斯坦导子，根据 [16, 定理 7]。由于 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 存在优良基 $\mathcal{B}$ ={$X_1, \ldots, X_{n+m}$}，我们可以假设 N相对于 $\mathcal{B}$是对角的。重新排列元素后，得到 $\{X_1, \ldots, X_n\}$是 N的一组特征向量，其特征值属于 Spec(N_1)，而$\{X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}\}$是 N的一组特征向量，其特征值属于 Spec(N_2)。由于 Spec(N_1) $\cap$Spec$(N_2) = \emptyset$，可知

$$\{\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n)\}, \qquad \{\varphi(X_{n+1}), \ldots, \varphi(X_{n+m})\}$$

分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$的优良基。

根据前面的讨论，我们知道， $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 的任意优良基都具有 $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$的形式，其中$\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 的优良基。因此，要证明第二部分，只需证明

$$\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1' \oplus \mathcal{B}_2' \iff \mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_1' \text{ and } \mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_2'.$$

注意，“若”部分是显然的。反过来，假设$\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1' \oplus \mathcal{B}_2'$。于是我们可以找到一个映射 $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})$，使得 ψ 将 $\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ 中的元素映射到$\mathcal{B}_1' \oplus \mathcal{B}_2'$中元素的倍数。若 $X \in \mathcal{B}_1$，则 $\psi(X)$不可能是 $\mathcal{B}_2'$中某个元素的倍数。事实上，$\psi(X)$是预爱因斯坦导子的一个特征向量，其对应特征值属于 $\mathrm{Spec}(N_1)$；又由于 $\mathrm{Spec}(N_1) \cap \mathrm{Spec}(N_2) = \emptyset$，我们得出 $\psi(X)$必定是 $\mathcal{B}_1'$中某个元素的倍数。因此，我们有

$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2,$$

其中 $\psi_1 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 且 $\psi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$。这就证明了等价性。 □

推论 2.11。设 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$、……、$\mathfrak{g}_n$ 是李代数，其预爱因斯坦导子分别为 N_1、N_2、……、N_n，且这些导子的谱两两不相交。那么，如果 $\mathfrak{g} := \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$有优基，则 $\mathfrak{g}_1$、$\mathfrak{g}_2$、……、$\mathfrak{g}_n$也有优基。此外

$$\nu_{\mathfrak{g}} = \prod_{i=1}^n \nu_{\mathfrak{g}_i}.$$

注意，公式 $\nu_{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}} = \nu_{\mathfrak{g}} \cdot \nu_{\mathfrak{h}}$ 并不一定普遍成立，因为 [9,定理 2] 表明 $\nu_{\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3} = 2$ 但 $\nu_{\mathfrak{h}_3} = 1$.

如 [12], 所述，简单导子（即具有两两互异特征值的实半单导子）的存在是李代数有优基的充分条件。结合与命题 2.10证明中类似的论证，我们得到以下推论。

推论 2.12. 如果李代数 $\mathfrak{g}$ 的预爱因斯坦导子是简单的，那么 $\mathfrak{g}$ 在等价意义下有唯一的优基。

现在我们将在以下命题中应用2.10 。

命题 2.13. 任取 $n \in \mathbb{N}_0$ 并选取 $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$。李代数满足

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n}_6 \oplus \bigoplus_{k=1}^n L_{i_k}$$

不承认优基。

证明。 相对于通常基， $\mathfrak{n}_6$ 的预爱因斯坦导子 N_1 具有如下形式

$$\frac{9}{32}\,\mathrm{Dg}(1,2,3,3,4,5).$$

记 N_2 为.....的预爱因斯坦导子

$$\bigoplus_{k=1}^n L_{i_k}.$$

我们将证明 $\mathrm{Spec}(N_1) \cap \mathrm{Spec}(N_2) = \emptyset$，为此只需证明，对于所有 $n \geq 3$，$\mathrm{Spec}(N_1) \cap \mathrm{Spec}(N^{(n)}) = \emptyset$。下图给出了 L_n 的预爱因斯坦导子的特征值随 n 变化的图。

注意，对于所有 $n \geq 5$, $d_1^{(n)} < 9/32$，它是 $\mathrm{Spec}(N_1)$ 中最小的元素。可以明确验证，对于 $n = 3$，4，也有 $d_1^{(n)} \notin \mathrm{Spec}(N_1)$。另一方面，注意对于所有$n \geq 7$，都有

$$3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{27}{32} < d_2^{(n)} < \frac{9}{8} = 4 \cdot \frac{9}{32}.$$

注意， $27/32$ 和 $9/8$ 是 N_1 的相邻特征值，而且可以明确验证，对于所有 $n=3$，4，5，6，都有 $d_2^{(n)} \notin \mathrm{Spec}(N_1)$。

现在注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

$$d_1^{(n)}, d_2^{(n)} > 0.$$

由此可知，对于所有 $d_1^{(n)} + d_2^{(n)} < kd_1^{(n)} + d_2^{(n)} < (n-2)d_1^{(n)} + d_2^{(n)}$ 都成立。现在注意，对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$， $d_1^{(n)} + d_2^{(n)} > 27/32$ 都成立；对于所有 $n \geq 8$，$(n-2)d_1^{(n)} + d_2^{(n)} < 9/8$都成立。因此我们得到，对于所有 $n \geq 8$ 和 $k \in \{2, \ldots, n-3\}$，都有

$$3 \cdot \frac{9}{32} = \frac{27}{32} < d_1^{(n)} + d_2^{(n)} < kd_1^{(n)} + d_2^{(n)} < (n-2)d_1^{(n)} + d_2^{(n)} < \frac{9}{8} = 4 \cdot \frac{9}{32}.$$

由此我们可以得出，对于所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 8}$，都有 $\mathrm{Spec}(N_1) \cap 谱\left(N^{(n)}\right) = \emptyset$.。可以明确验证，对于 $n=3$，4，5，6，7。，同样的结论也成立。 □

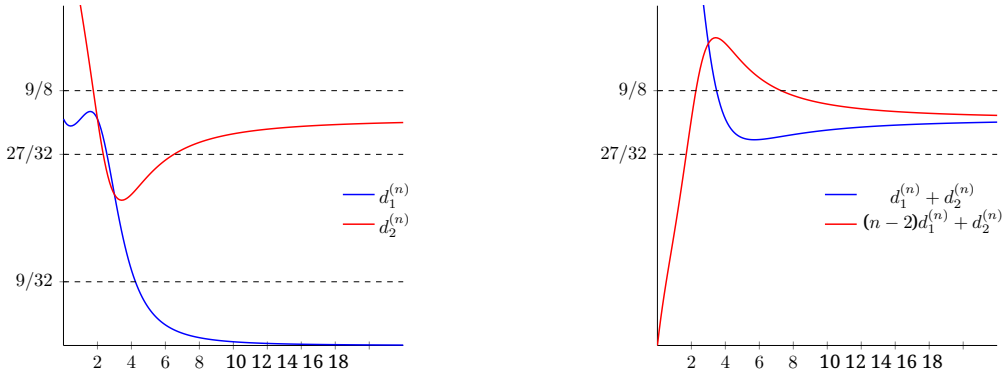


图 1： L_n的预爱因斯坦导子的特征值

从上面的例子可以看出，对于所有 $n > 3$，都有

$$0 < d_1^{(n)} < d_2^{(n)}.$$

这尤其意味着，对于所有 $n > 3$， L_n 的预爱因斯坦导子的特征值两两不同。由于 $L_3 (\cong \mathfrak{h}_3)$在等价意义下只有一个优基，我们得到以下结果。

定理 2.14. 对于所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$，都有 $\nu_{L_n} = 1$.

3 几乎阿贝尔李代数

本节将讨论几乎阿贝尔李代数，即具有余维一阿贝尔理想的李代数。每个这样的李代数都可以写成半直积 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$，其中 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$。我们可以将 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 中的任意元素写为

$$\alpha f + X$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha \in \mathbb{R}$.。那么 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 中两个元素的李括号为

$$[\alpha_1 f + X_1, \alpha_2 f + X_2] = A(\alpha_1 X_2 - \alpha_2 X_1).$$

我们将首先描述形如 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 的李代数何时具有优基，随后讨论优美基的数量。

3.1 优基的存在性

我们将从考察 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 是幂零李代数的情形开始。注意， $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 是幂零的当且仅当 A 是幂零的。

引理 3.1. 若 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$ 是幂零的，则 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 有一个优基。

证明. 由于 A 是幂零变换，我们可以找到 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\mathcal{B}$ ，使得 A相对于这组基的矩阵为其 Jordan 标准形

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

并且 $k_1 + \cdots + k_m = n.$。现在很容易看出， $\{f\} \cup \mathcal{B}$是 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$的一组优基。 □

对于一般情形，我们有以下命题。

命题 3.2. 设 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$，则 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 存在优基，当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 有一个基，使得相对于该基， A 的矩阵每行和每列至多有一个非零元素。

证明。 该命题的“若”部分 显然成立。反过来，设 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 存在优基。若 A是幂零变换，则由前面的结果可知 A 具有所需性质，因此假设 A不是幂零变换，且 $\mathcal{B} = \{\alpha_1 f + X_1, \dots, \alpha_n f + X_n, \alpha_{n+1} f + X_{n+1}\}$ 是一个优基。

我们断言恰好存在一个 $i \in \{1, \dots, n+1\}$ 使得 $\alpha_i \neq 0.$ 为此，注意到

$$0 \neq \mathrm{Im}(A) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathbb{R}^n$$

$$0 \neq \mathrm{Im}(A^2) = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subset \mathbb{R}^n$$

由于 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 和 $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ 均由优基中的元素张成（引理 2.2），因此必存在一个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得 α_i 等于零，且 $X_i \in$ 像$(A) \setminus$ 核(A)。现在假设 α_k和 α_l 均非零。于是可得

$$[\alpha_k f + X_k, X_i] = \alpha_k A X_i,$$

$$[\alpha_l f + X_l, X_i] = \alpha_l A X_i,$$

这只有在 $\alpha_k = 0$ 或 $\alpha_l = 0$ 时才有可能。另一方面，必须至少存在一个 k 使得 $\alpha_k \neq 0$ ，否则我们就没有基。

不失一般性地，我们假设 $\alpha_{n+1} \neq 0$，则

$$[\alpha_{n+1} f + X_{n+1}, X_i] = \alpha_{n+1} A X_i,$$

因此， $AX_i = 0$ 或 AX_i 中必有一个是某个 X_k 的非零倍数，其中 $k \in \{1, \ldots, n\}$。在第二种情况下，不可能存在某个 $j \neq i$ ，使得 AX_j 是 X_k 的非零倍数，因为我们假设该基是优良的。因此，若将 A 表示为关于基 $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathbb{R}^n$ 的矩阵，则可知 A 的每一行和每一列中至多有一个非零元素。这就证明了另一个蕴含。 □

由上述命题的证明可推出以下推论。

推论 3.3. 若 $A^2 \neq 0$，则 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 的每个优基都等价于

$$\{f, X_1, \ldots, X_n\},$$

其中 A 相对于 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的矩阵在每一列和每一行中至多有一个非零项。

若 $\mathbb{R}^n$ 存在一个基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$，使得 A 相对于此基的矩阵在每行和每列中至多有一个非零项，则可以找到一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_n$和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$，使得

$$AX_i = \alpha_i X_{\sigma(i)}.$$

若 $m =$ord(σ)，则 A^m 在 $\mathbb{R}$. 上可对角化。然而，存在这样的$m \in \mathbb{N}$ 并不足以保证矩阵 A 存在一个基，使其相对于该基在每一列和每一行中至多有一个非零项。

例 3.4。 考虑 $\mathbb{R}^2$ 的标准基 $\{e_1, e_2\}$ ，则可由矩阵定义关于此基的线性映射 A

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意， A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化，因为它没有实特征值；然而，它在 $\mathbb{C}$ 上可对角化。由于

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

我们看到， A^2 也没有实特征值，但它在 $\mathbb{C}$ 上仍然可对角化。现在假设 $\mathbb{R}^2$ 有一个基 $\{X_1, X_2\}$ ，使得 A 的每一行和每一列至多有一个非零项。那么，要么 $AX_1 = \alpha_1 X_1$ ，要么 $AX_2 = \alpha_2 X_2$ ，这不可能，因为 A 没有实特征值。由于 A^2 没有实特征值，也可立即得出，存在满足 $AX_1 = \alpha X_2$ 和 $AX_2 = \beta X_1$ 的 $\{X_1, X_2\}$ 是荒谬的。因此我们得出结论：某个 A 的幂可（在实数域上）对角化，或 A 可在 $\mathbb{C}$ 上对角化，都不足以保证 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 存在优基。

如果 $n = 2$，我们可以找到使 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^2$ 拥有优基的以下充要条件。

推论 3.5. 设 $A \in$ 线性变换空间($\mathbb{R}^2$)，那么 $\mathbb{R}^2 \ltimes_A \mathbb{R}$ 拥有优基，当且仅当 A^2 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化且只有一个特征值，或者 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化。

证明. 如果 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^2$ 拥有优基，那么显然，或者 A^2 可由命题 3.2 对角化。

若 A可对角化，则结论显然。若 $A^2 = 0$，则 A 是幂零的，根据引理 3.1 可知， $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^2$ 有一个优基。现在假设 A 在 $\mathbb{R}$上不可对角化，

但 A^2 只有一个非零特征值 λ。由此可知， A 没有实特征值。假设 λ 作为 A^2 的特征向量所对应的特征子空间为张成空间$\{X, Y\}$，并定义

$$X_1 := X, \quad X_2 := AX.$$

由于 A 没有实特征值，因此显然 X_1 和 X_2 必定线性无关。 □

为了找出适用于任意 n的充分条件，我们需要以下命题。

命题 3.6. 考虑李代数 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$，并假设 $A^n = \lambda \mathrm{Id}$ 在 $\lambda \neq 0$ 和A 上有 n 个互异（可能为复数）特征值。由此可知， $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 存在一个优基。

证明. 设 $z_1, \ldots, z_n$ 是 A的互异特征值，接着我们按以下方式构造一组特征向量$\{w_1, \ldots, w_n\}$。若 $z_i \in \mathbb{R}$，则取 w_i为对应于特征值 z_i的实特征向量。若 $z_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，则 w_i 是对应于特征值 z_i的特征向量，并且存在一个 $j \neq i$使得 $z_i = \overline{z_j}$且 $w_i = w_j$.。此时，向量 $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n \in \mathbb{R}^n$满足条件，并且我们还有

$$Aw = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n \in \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

$$A^{n-1} w = z_1^{n-1} w_1 + z_2^{n-1} w_2 + \cdots + z_n^{n-1} w_n \in \mathbb{R}^n.$$

注意

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \ldots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i) \neq 0,$$

因此我们得出结论： $\{w, Aw, A^2 w, \ldots, A^{n-1} w\}$ 是 $\mathbb{C}^n$. 中的一个线性无关向量集。这意味着 $\{w, Aw, A^2 w, \ldots, A^{n-1} w\}$ 构成了 $\mathbb{R}^n$. 的一组基。现在不难看出， A 相对于这组基的矩阵具有以下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

因此我们发现， $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 有一组优基。 □

注 3.7。 注意，(3)的特征多项式为

$$x^n - \lambda.$$

由于 $\lambda \neq 0$， 我们知道该矩阵的特征值是 λ.的 n^{th} 个根

考虑到上面的注释，我们将证明以下引理。

引理 3.8。 设 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$ 并且存在一个基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$， 使得 $\mathbb{R}^n$

$$AX_n = \alpha_n X_1, \quad AX_i = \alpha_i X_{i+1} \quad \forall i \in 1, \ldots, n-1,$$

于是，对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$， $A^n = \lambda$恒等成立。此外，如果 $\lambda \neq 0$，那么 A 可对角化，且具有互异特征值，这些特征值对应于 λ. 的 n^{th} 个根

证明。 第一个结论显然，只需取 $\lambda = \alpha_1 \dots \alpha_n.$。现在令 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 λ 在 $\mathbb{C}.$ 中的互异根。现在注意到

$$V_k := X_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_k} X_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda_k^2} X_3 + \cdots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}{\lambda_k^{n-1}} X_n.$$

对于所有 $k \in \{1, \dots, n\}.$，都是特征值为 λ_k 的特征向量。由于我们已经为 λ 的每个不同的 n^{th} 根找到了一个特征向量，因此可以得出结论。 □

现在我们可以利用上述结果，对具有优基的 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 形式的李代数给出刻画。首先需要引入一些记号。

记号 3.9。 如果 $n \in \mathbb{N}_0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}_0$，我们将记为

$$S_\lambda^n := \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = \lambda\}.$$

因此有 $|S_\lambda^n| = n.$

在下面的命题中，我们将谱视为多重集，并将特征值的重数考虑在内。

命题 3.10。 若 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$，则 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 有优基，当且仅当大小大于 *1* 的约当块在对角线上有零；此外，我们可以找到 λ_1、.. 、 $\lambda_k \in \mathbb{R}_0$ 和 n_1、. . .、 $n_k \in \mathbb{N}_0$，使得

$$\mathrm{Spec}(A) \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^{k} S_{\lambda_i}^{n_i},$$

其中，我们将此等式视为多重集之间的等式。

证明。 假设 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 有一个优基。于是，我们可以找到 $\mathbb{R}^n$的一组基 $\{X_1, \dots, X_n\}$，使得 A 的每一行和每一列至多有一个非零项。更具体地说，我们可以为 A 关联一个元素 $\sigma \in \mathcal{S}_n$，使得 $AX_i = \alpha_i X_{\sigma(i)}$，其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}.$。现在，将 σ 写成不相交循环的复合 τ_1, ..., τ_k。于是，我们可以对基 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 重新排序，使得

$$\tau_1 = (12 \dots n_1), \quad \tau_2 = (n_1 + 1 \dots n_1 + n_2), \dots, \tau_k = (n_1 + \cdots + n_{k-1} + 1 \dots n_1 + \cdots + n_k).$$

归纳地定义 $N_0 = 0$ 和 $N_i = N_{i-1} + n_i$。若令

$$V_i := \mathrm{Span}\{X_{N_{i-1}+1}, \dots, X_{N_i}\}, \quad \lambda_i := \alpha_{N_{i-1}+1} \dots \alpha_{N_i}$$

对于 $1 \le i \le k$，则可得

$$(A|_{V_i})^{n_i} = \lambda_i \,\mathrm{Id}\,.$$

若 $\lambda_i = 0$，则 $A|_{V_i}$ 是幂零的，因此我们可以为 V_i 找到一组基，使得 $A|_{V_i}$ 具有（2）的形式。若 $\lambda_i \neq 0$，则根据上文的引理 3.8，我们知道 $A|_{V_i}$ 可对角化，且其特征值对应于$A|_{V_i}$ n_i^{th}的根 λ_i. 这就证明了第一个蕴含关系。

逆命题可直接由命题 3.6 得出。 □

注记 3.11。 (1) 注意，使用上述证明中的记号，我们可以将 A 的特征多项式写为

$$\varphi(x) = (x^{n_1} - \lambda_1) \dots (x^{n_k} - \lambda_k).$$

注意，对于给定的优基 $\mathcal{B}.$，我们总能找到上述形式的因式分解

(2) 如果 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$，根据上述讨论，我们可以得出结论： $\mathbb{C}f \ltimes_M \mathbb{C}^n$ 存在优基，当且仅当大小大于 1 的约当块在对角线上为零。

设 $k \subseteq K$ 是一个域扩张，并设 $\mathfrak{g}^k$ 是 k上的李代数。通过扩张标量，我们得到一个新的李代数 $\mathfrak{g}^K = \mathfrak{g}^k \otimes_k K$。如果 $\mathfrak{g}^k$ 有一个优基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$，那么 $\{X_1 \otimes 1, \ldots, X_n \otimes 1\}$就是 $\mathfrak{g}^k \otimes_k K$的一个优基。问题仍然是， $\mathfrak{g}^K$ 存在优基是否意味着 $\mathfrak{g}^k$.也存在优基。我们将利用命题3.10给出否定的答案。

例 3.12。考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意，谱$(A) = \{1+i, 1-i\}$。由于$(1+i)^2 = 2i = -(1-i)^2$，由命题3.10 可知$\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 不具有优基。不过，注意

$$\mathbb{C}f \ltimes_A \mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

并且 s 由于 A 可对角化（在 $\mathbb{C}$上），因此显然 $\mathbb{C}f \ltimes_A \mathbb{C}^n$ 有一个优基 .

推论 3.13。 李代数上存在优基这一性质在域扩张下并不保持。

在下面的例子中，我们将说明命题 3.10。

例 3.14。 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

其特征值为 $-2 + 2\sqrt{3}i$ 和 $\bar{-}2 - 2\sqrt{3}i$。注意

$$A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 16 & -8 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $-8 + 8\sqrt{3}i$ 和 $\bar{-}8 - 8\sqrt{3}i$。如果 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^2$ 有一个优基，则应有 A或 A^2 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化，但事实并非如此。因此，我们发现 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^2$ 没有优基。

现在考虑

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

的特征值为 B 4、 $-2 + 2\sqrt{3}i$ 和 $-2 \bar{-} 2\sqrt{3}i$。容易验证，这些特征值正是 64 的三个三次方根。由命题3.10 ，我们因此发现 $\mathbb{R}f \ltimes_B \mathbb{R}^3$ 有一个优基。事实上，我们可以使用命题3.6证明中所用的方法，显式地构造出这个基。特征向量为

$$w_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

我们现在得到

$$X_1 = w_1 + w_2 + w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = BX_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X_3 = BX_2 = B^2X_1 = \begin{pmatrix} -24 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix},$$

构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。由于 $B^3 = 2^6\,\mathrm{Id}$，因此 $\{f, X_1, X_2, X_3\}$ 构成 $\mathbb{R}f \ltimes_B \mathbb{R}^3$. 的一组优良基

3.2 优良基的数量

注意，命题 3.10 并未说明给定李代数有多少组优良基。我们先考虑 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 是幂零的情形。我们首先证明，在对映射 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$施加稍弱条件时，推论 3.3仍然成立。

引理 3.15. 假设 $A \in$ 线性变换空间$(\mathbb{R}^n)$ 是幂零的，且 $\dim(\mathrm{Im}(A)) \geq 2$，则 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 的每个优基都等价于

$$\{f, X_1, \ldots, X_n\},$$

其中， A 相对于 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的矩阵每一列和每一行至多有一个非零项。

证明。 如果 $A^k = 0$ 但 $A^{k-1} \neq 0$对于 $k \geq 3$ 结论可由推论 3.3得出，因此假设$A^2 = 0$ 且 $\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$. 的一个优基。重新排列基元素后，我们可以取

$$\ker(A) = Z(\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n) = \mathrm{Span}\{X_{t+1}, \ldots, X_{n+1}\}.$$

注意，由于 $\dim(\mathrm{Im}(A)) \geq 2$， $t \geq 3$。并对所有 $i \in \{1, \ldots, t\}$ 写出

$$X_i = \alpha_i f + Y_i,$$

对于 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 和 $Y_i \in \mathbb{R}^n$.

不失一般性，假设 $\alpha_1 \neq 0$和 $[X_1, X_2] \neq 0$.。现在取一个 $i \in \{3, \ldots, t\}$，并假设 $\alpha_i \neq 0$。注意到

$$[X_1, X_2] = A(\alpha_1 Y_2 - \alpha_2 Y_1), \quad [X_1, X_i] = A(\alpha_1 Y_i - \alpha_i Y_1), \quad [X_2, X_i] = A(\alpha_2 Y_i - \alpha_i Y_2).$$

因此我们得到

$$\alpha_i [X_1, X_2] = \alpha_2 [X_1, X_i] - \alpha_1 [X_2, X_i].$$

由于 X_1， X_2和 X_i是优基元素，且 $[X_1, X_2] \neq 0$，上述等式意味着 $\alpha_i = 0$，因此对于所有 $i \in \{3, \ldots, t\}$.，都有 $Y_i \notin Z(\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n) = \ker(A)$。由此可知 $\alpha_2 = 0$，否则

$$[X_1, X_i] = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [X_2, X_i]$$

对任意 $i \in \{3, \ldots, t\}$，这再次与优基的假设以及 $AY_i \neq 0$ 和 $\alpha_i = 0$这一事实相矛盾。因此我们得到 $\alpha_2 = 0$ 和 $Y_2 \notin \ker(A)$。现在可以按照命题3.2 的证明中的相同方法进行论证，从而得到所需结果。 □

现在我们可以证明如下命题。

命题 3.16。 如果 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 是幂零的，那么它在等价意义下恰有一个优基。

证明。 如果 $A = 0$，结论显然成立。如果 $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 1$，则可知该李代数同构于 $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$，根据定理 2.3，它恰有一个优基。

现在设 A 是幂零的，且 $\dim(\mathrm{Im}(A)) > 1$. 。如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 的一个优基，根据引理 3.15，我们知道它具有如下形式 $\{f, X_1, \ldots, X_n\}$，并且相对于 $\{X_1, \ldots, X_n\}$， A 的矩阵在每一列和每一行中至多有一个非零项。因此，我们可以找到一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_n$，使得对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$[f, X_i] = AX_i = \alpha_i X_{\sigma(i)}.$$

注意，我们可以将 σ写成不相交循环的复合 τ_1、…、 τ_k，其中 $k = \dim(\ker(A))$，并满足（可能重新排序后）

$$\tau_1 = (12 \ldots n_1), \quad \tau_1 = (n_1 + 1 \ldots n_1 + n_2), \ldots, \tau_k = (n_1 + \cdots + n_{k-1} + 1 \ldots n_1 + \cdots + n_k).$$

现在归纳地定义 $N_0 = 0$和 $N_i = N_{i-1} + n_i$。若令 V_i:=张成空间$\{X_{N_{i-1}+1}, \dots, X_{N_i}\}$，其中$1 \le i \le k$, 则必有

$$(A|_{V_i})^{n_i} = 0$$

对所有 $1 \le i \le k$. 确实，请注意

$$(A|_{V_i})^{n_i} X_{N_{i-1}+1} = A^{n_i} X_{N_{i-1}+1} \in \mathrm{Span}\{X_{N_{i-1}+1}\}.$$

只有在 $A^{n_i} X_{N_{i-1}+1} = 0$的情况下这才可能，因此 $A^{n_i-1} X_{N_{i-1}+1} = X_{N_i} \in \ker(A)$。由此可得，$\ker(A)$ =张成空间$\{X_{N_1}, \dots, X_{N_k}\}$。根据若尔当块分解的唯一性，数值$k$ 和 n_i 是唯一确定的，因此它们对于所有优良基都相同。

因此我们发现，如果存在另一个优良基 $\{f, Y_1, \dots, Y_n\}$ 使得

$$[f, Y_i] = \beta_i Y_{\tilde{\sigma}(i)},$$

对于某个 $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$，那么现在我们可以重新排列 $\{Y_1, \dots, Y_n\}$，使得 $\tilde{\sigma} = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$.。现在可以明确验证，这个基等价于 $\{f, X_1, \dots, X_n\}$. □

对于 A 为任意线性映射的一般情形，请注意，根据备注 3.7 我们知道， A的特征多项式的形式为

$$(x^{n_1} - \lambda_1) \dots (x^{n_k} - \lambda_k). \tag{4}$$

当然，也可能有多种方式将特征多项式写成形如 $x^n - r$ for $r \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}_0$. 的因子的乘积。我们将称这种因式分解

$$(x^{m_1} - \mu_1) \dots (x^{m_l} - \mu_l)$$

与（4）相同，当且仅当 $k = l$，并且在可能对（n_1，.....，n_k）=（m_1，.....，m_l）重新排序后，存在一个 $\eta \in \mathbb{R}$ 使得

$$\eta = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{1/n_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{1/n_2} = \dots = \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right)^{1/n_k}.$$

否则，我们称这些因式分解是不同的。使用这一术语，我们有如下结果。

命题 3.17。 假设 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 具有一个优良基，且 A的特征值中不包含零。设 $\varphi_A(x)$ 为 A的特征多项式。将 $\varphi_A(x)$ 写成形如 $x^d - r$ *for* $d \in \mathbb{N}$ *and* $r \in \mathbb{R}_0$ 的因子的乘积的不同方式的数量，等于 $\mathfrak{g}$的不同优良基的数量。

证明。 假设 $\mathfrak{g}$有一个优基，那么它等价于 $\{f, X_1, \dots, X_n\}$这种形式。我们可以找到一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_n$，使得

$$AX_i = \alpha_i X_{\sigma(i)}.$$

注意，我们可以将 σ写成不相交循环的复合 τ_1，...，τ_k，使得（经过可能的重新排序后）

$$\tau_1 = (12 \dots n_1), \quad \tau_1 = (n_1 + 1 \dots n_1 + n_2), \dots, \tau_k = (n_1 + \dots + n_{k-1} + 1 \dots n_1 + \dots + n_k).$$

现在归纳地定义 $N_0 = 0$和 $N_i = N_{i-1} + n_i$，并令 V_i:=张成空间$\{X_{N_{i-1}+1}, \dots, X_{N_i}\}$ 对于$1 \le i \le k$.

假设我们还有 $\mathfrak{g}$ 的另一个优基，记作 $\{f, Y_1, \ldots, Y_n\}$，并令 $\tilde{\sigma}$ 为其对应的置换。更具体地说，我们有

$$AY_i = \beta_i Y_{\tilde{\sigma}(i)}.$$

现在我们可以将 $\tilde{\sigma}$ 写成不相交循环 $\tilde{\tau}_1$、.....、$\tilde{\tau}_l$ 的复合。令 ψ 为一个自同构，将 $\{f, X_1, \ldots, X_n\}$ 中的元素映射为 $\{f, Y_1, \ldots, Y_n\}$ 中元素的倍数。注意到，数 k、l 以及置换 τ_i 和 $\tilde{\tau}_i$ 的阶，分别可以从 f 的伴随算子和 ψ（f）中读出。因此我们可以得出，如果这些优良基是等价的，那么重新排序后，不妨设 $\sigma = \tilde{\sigma}$。

现在可以得出， A 的特征多项式可以用两种方式写出，即

$$(x^{n_1} - \lambda_1) \ldots (x^{n_k} - \lambda_k) = (x^{n_1} - \mu_1) \ldots (x^{n_k} - \mu_k).$$

注意到 $\alpha_{N_{i-1}+1} \ldots \alpha_{N_i} = \lambda_i$ 和 $\beta_{N_{i-1}+1} \ldots \beta_{N_i} = \mu_i$。根据定义，存在 η、η_1、.....、$\eta_n \in \mathbb{R}_0$ 使得

$$\psi(f) = \eta f$$

and

$$\psi(X_i) = \eta_i Y_i,$$

必要时重新排列基后。由此可知，对于固定的 $1 \leq i \leq k$

$$\alpha_{N_{i-1}+t}\eta_{N_{i-1}+t+1}Y_{N_{i-1}+t+1} = \psi(\alpha_{N_{i-1}+t}X_{N_{i-1}+t+1}) = \psi([f, X_{N_{i-1}+t}]) = \eta\eta_{N_{i-1}+t}\beta_{N_{i-1}+t}Y_{N_{i-1}+t+1}$$

对于所有 $1 \leq t \leq n_i - 1$ 和

$$\alpha_{N_i}\eta_{N_{i-1}+1}Y_{N_{i-1}+1} = \eta\eta_{N_i}\beta_{N_i}Y_{N_{i-1}+1}.$$

因此我们发现，对于所有 $1 \leq t \leq n_i - 1$

$$\eta = \frac{\alpha_{N_{i-1}+t}}{\beta_{N_{i-1}+t}} \frac{\eta_{N_{i-1}+t+1}}{\eta_{N_{i-1}+t}}, \qquad \eta = \frac{\alpha_{N_i}}{\beta_{N_i}} \frac{\eta_{N_{i-1}+1}}{\eta_{N_i}}$$

从而

$$\eta^{n_i} = \frac{\alpha_{N_i}}{\beta_{N_i}} \frac{\eta_{N_{i-1}+1}}{\eta_{N_i}} \cdot \prod_{i=1}^{n_i-1} \frac{\alpha_{N_{i-1}+t}}{\beta_{N_{i-1}+t}} \frac{\eta_{N_{i-1}+t+1}}{\eta_{N_{i-1}+t}} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

特别是,

$$\eta = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{1/n_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{1/n_2} = \cdots = \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right)^{1/n_k}.$$

注意，若满足上述条件，我们便可构造一个李代数自同构，将 $\{f, X_1, \ldots, X_n\}$ 中的元素映射为 $\{f, Y_1, \ldots, Y_n\}$ 中元素的倍数。证明至此结束。 □

现在，我们可以用以下命题概括本节的全部结果。

命题 3.18。 假设 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 有一个优基。设 $\varphi_A(x)$ 为 A 的特征多项式。设 $N \in \mathbb{N}$ 为根 0 在 $\varphi_A(x)$中的重数。我们可以写成以下形式的不同方式数目

$$\frac{\varphi_A(x)}{x^N}$$

作为形如 $x^d - r$ *for* $d \in \mathbb{N}$ *and* $r \in \mathbb{R}_0$ 的因子的乘积，其值等于 $\mathfrak{g}$ 的不同优良基的数量。

证明。 不妨设 $\varphi(x) \neq x^N$，因此 A 不是幂零的。如果 $\mathfrak{g}$ 有一个优良基 $\mathcal{B}$，那么我们知道 $\mathbb{R}^n = V \oplus W$，其中 $A|_V$ 是幂零的，并且 $A|_W$ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，且零不是其特征值。

我们可以从 $\mathcal{B}$ 中移除一个元素，从而得到 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$。相对于这组基， A 的每一列和每一行至多有一个非零项。令 $k := \dim(\ker(A))$，则我们可以找到一个置换 $\sigma \in \mathcal{S}_n$，使得 $AX_i = \alpha_i X_{\sigma(i)}$。此外，不失一般性，我们可以假设 σ 的不相交循环分解包含形如、.....、τ_k的循环 τ_1

$$\tau_1 = (12 \ldots n_1), \quad \tau_1 = (n_1 + 1 \ldots n_1 + n_2), \ldots, \tau_k = (n_1 + \cdots + n_{k-1} + 1 \ldots n_1 + \cdots + n_k)$$

使得对所有 $1 \leq i \leq k$ $AX_{N_i} = 0$，其中 $N_0 = 0$ 且 $N_i = N_{i-1} + n_i$。现在令$V_i :=$张成空间 $\{X_{N_{i-1}+1}, \ldots, X_{N_i}\}$，其中 $1 \leq i \leq k$，则必有

$$(A|_{V_i})^{n_i} = 0$$

对所有 $1 \leq i \leq k.$。由此我们可以得出，张成空间$\{X_1, \ldots, X_{N_k}\} = V$，此外，张成空间 $\{X_{N_k+1}, \ldots, X_n\} = W.$也成立。令 $B = A|_W$，则 $\mathfrak{g}$ 的优美基的数量等于 $\mathfrak{h} := \mathbb{R}f \ltimes_B \mathbb{R}^m$，的优美基的数量，其中 $m = \dim(W)$。注意， $\varphi_B(x) = \varphi_A(x)/x^N$.这就证明了该命题。 □

下面我们给出一些例子。

例 3.19。 考虑由 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 定义的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据命题 3.10 李代数 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^4$ 存在一个优基。特征多项式 A 的不同因式分解如下

- $(x-1)(x+1)(x^2+1)$,
- $(x^2-1)(x^2+1)$,
- (x^4-1)。

因此我们发现，李代数 $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^n$ 在等价意义下有三个优良基。

例 3.20. 考虑由 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 给出的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

显然， $\mathbb{R}f \ltimes_A \mathbb{R}^4$ 至少有一个优良基。注意，特征多项式的不同因式分解为

- $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$,
- $(x^2-4)(x-1)(x+1)$,
- $(x^2-1)(x-2)(x+2)$,

- $(x^2-1)(x^2-4)$.

请注意，第二种和第三种因式分解并不相同，因为

$$2=\sqrt{4}\neq\frac{1}{2}.$$

因此我们可以得出结论： $\mathbb{R}f\ltimes_A\mathbb{R}^4$ 有 4 个不同的优良基。

我们已经知道，李代数的优美基的数量可以任意大。通过本节的分析，我们还可以得到以下结果。

推论 3.21。 对于每个 $n\in\mathbb{N}$ ，都存在一个恰好有 n 个优良基（在等价意义下）的不可分解李代数。

证明。 我们已经知道，存在李代数 $\mathfrak{g}$ 使得 $\nu_{\mathfrak{g}}$ 等于零或一。现在取$n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ ，并令 A_n 为 $2^{n-1}\times 2^{n-1}$ 在（3）中对应于 $\lambda=1$的矩阵。 A_n 的特征多项式为

$$x^{2^{n-1}}-1.$$

T该多项式恰好有 n 种不同的因式分解，因此我们可以得出结论：李代数

$$\mathbb{R}f\ltimes_{A_n}\mathbb{R}^{2^{n-1}}$$

恰好有 n 个优良基（在等价意义下）。此外，李代数 $\mathfrak{g}$ 显然是不可分解的。 □

4 应用：三维李代数的优良基

本节将应用前面得到的结果，考察哪些三维李代数存在优良基，以及若存在，有多少个。在 [4] 中给出了所有三维可解李代数的分类。由此分类可知，这些李代数全都是几乎阿贝尔李代数。

下面的结果说明了两个几乎阿贝尔李代数何时同构。

引理 4.1. 李代数 $\mathfrak{g}:=\mathbb{R}f\ltimes_A\mathbb{R}^n$ 和 $\mathfrak{h}:=\mathbb{R}g\ltimes_B\mathbb{R}^n$ 同构，当且仅当存在 存在一个可逆矩阵 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和一个元素 $c\in\mathbb{R}_0$ ，使得

$$A=cQ^{-1}BQ.$$

证明。 首先，假设 $A=cQ^{-1}BQ$ 如命题所述，然后定义

$$\varphi:\mathbb{R}f\ltimes_A\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}g\ltimes_B\mathbb{R}^n:\alpha f+X\mapsto c\alpha g+QX.$$

这定义了一个李代数同构。

反过来，首先假设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 同构且幂零。由此可知， A和 B 是幂零矩阵。注意

$$\dim(\mathrm{Im}(A^{i-1}))=\dim(\gamma_i(\mathfrak{g}))=\dim(\gamma_i(\mathfrak{h}))=\dim(\mathrm{Im}(B^{i-1})),$$

对所有 $i\in\mathbb{N}_{\geq 2}.$ ，这意味着 A 和 B 的约当块在置换意义下相同，因此A和 B 必定共轭。

现在假设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 同构，且 A 不是幂零的，那么很容易验证， B也不是幂零的，此外

$$\mathfrak{nil}(\mathfrak{g})=\mathbb{R}^n,\qquad \mathfrak{nil}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}^n.$$

由此可知，若 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是一个同构，则$\varphi|_{\mathbb{R}^n}$ 的像等于 $\mathbb{R}^n$。由此我们发现，对于某个 $c \in \mathbb{R}_0$和 $Y \in \mathbb{R}^n$，$\varphi(f) = cg + Y$。此外，我们可以将 $\varphi|_{\mathbb{R}^n}$表示为相对于典范基的矩阵 Q。因此，对于所有的 $X \in \mathbb{R}^n$

$$QAX = \varphi([f, X]) = [cg + Y, QX] = cBQX,$$

因此结论得证。 □

注意，对于两个矩阵 A，$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，

$$A \sim B \iff \exists c \in \mathbb{R}_0, Q \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(Q) \neq 0 \text{ and } A = cQ^{-1}BQ$$

在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上定义了一个等价关系。对于这些 2×2矩阵，不同等价类的代表元如下。

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda \in [-1, 1]$ 且 $\mu \in \mathbb{R}^+$。由 [10] 可知，剩下的三维李代数是简单李代数，即 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{R}$）和 $\mathfrak{so}_3$（$\mathbb{R}$）。对于 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{R}$，我们将使用基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $\mathfrak{so}_3$（$\mathbb{R}$），我们将使用基

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

下表总结了本节将得到的结果。我们将使用记号 $v_1 := (1,\ 0)^\top$ 和 $v_2 = (0,\ 1)^\top$。

李代数 $\mathfrak{g}$	不等价的优良基	$\nu_{\mathfrak{g}}$
$\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}f \ltimes_B \mathbb{R}^2$	$\{f, v_1, v_2\}$	1
$\mathfrak{h}_3 \cong \mathbb{R}f \ltimes_C \mathbb{R}^2$	$\{f, v_1, v_2\}$	1
$\mathbb{R}f \ltimes_{A_{-1}} \mathbb{R}^2$	$\{f, v_1, v_2\}$ $\{f, v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$	2
$\mathbb{R}f \ltimes_{A_\lambda} \mathbb{R}^2 \quad (\lambda \in]-1,\ 1[)$	$\{f, v_1, v_2\}$	1
$\mathbb{R}f \ltimes_D \mathbb{R}^2$	none	0
$\mathbb{R}f \ltimes_{E_0} \mathbb{R}^2$	$\{f, v_1, v_2\}$	1
$\mathbb{R}f \ltimes_{E_\mu} \mathbb{R}^2 \quad (\mu > 0)$	none	0
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$	$\{e_1, e_2, e_3\}$ $\{e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3\}$	2
$\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$	$\{f_1, f_2, f_3\}$	1

由于 B 和 C 都是幂零的，立即可知 $\mathbb{R}f \ltimes_B \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}f \ltimes_C \mathbb{R}^2$ 在等价意义下都只有一个优基。

注意，对于所有的 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\mathbb{R}f \ltimes_{A_\lambda} \mathbb{R}^2$ 都有一个优基。注意，A_λ 的特征多项式为

$$\varphi_{A_\lambda}(x) = (x - 1)(x - \lambda).$$

因此我们可以得出结论：如果 $\lambda \neq -1$，那么 $\mathbb{R}f \ltimes_{A_\lambda} \mathbb{R}^2$ 有一个优基；而如果 $\lambda = -1$，则有两个在等价意义下不同的优基。

注意

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不可对角化，因此 $\mathbb{R}f \ltimes_D \mathbb{R}^2$ 不承认优基。

对于所有 $\mu \in \mathbb{R}^+$， E_μ的特征值为 $\mu + i$和 $\mu - i$。因此我们发现， $\mathbb{R}f \ltimes_{E_\mu} \mathbb{R}^n$承认优基当且仅当

$$(\mu + i)^2 \in \mathbb{R} \iff (\mu^2 - 1) + 2\mu i \in \mathbb{R} \iff \mu = 0.$$

由于

$$\varphi_{E_0}(x) = x^2 + 1,$$

我们可以得出结论： $\mathbb{R}f \ltimes_{E_0} \mathbb{R}^n$ 在等价意义下有一个优基。

我们仍需讨论李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$和 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$，它们都承认优基。事实上， $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$的一个优基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$，因为

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

$\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ 的一个优基由 $\{f_1, f_2, f_3\}$ 给出，因为

$$[f_2, f_3] = f_1, \quad [f_3, f_1] = f_2, \quad [f_1, f_2] = f_3.$$

我们将在下面的命题中确定优良基的数量。注意，每个半单李代数都是幺模的，而且此类李代数的每个导子都是内导子。这意味着半单李代数的预爱因斯坦导子是零映射，因此无法提供有关优良基是否存在或其数量的任何信息。因此，我们将采用另一种方法来计算三维单李代数的优良基数量。

命题4.2。 李代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 在等价意义下有两个优良基，而李代数 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ 在等价意义下有一个优良基。

证明。 注意，任意三维单李代数 $\mathfrak{g}$ 都同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 或 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$。此外， $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ 的 Killing型为负定，而 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的 Killing 型则不是负定的。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个 3 维单李代数，且令 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 为一个优基。于是有

$$[X_2, X_3] = \alpha X_{\sigma(1)}, \quad [X_3, X_1] = \beta X_{\sigma(2)}, \quad [X_1, X_2] = \gamma X_{\sigma(3)}$$

对于某些 $\sigma \in \mathcal{S}_3$和 α， β， $\gamma \in \mathbb{R}_0$. 由雅可比恒等式立即可知， σ的阶不可能是 3；否则， X_1， X_2 和 X_3 的一个非零系数线性组合应等于零，这是不可能的。

因此， σ 的阶为 1 或 2；对基向量重新排列后，我们得到两种情形，分别对应于 $\sigma = e$ 和 $\sigma =$ (12)，即：

(1) $[X_2, X_3] = \alpha X_1, \quad [X_3, X_1] = \beta X_2, \quad [X_1, X_2] = \gamma X_3$

(2) $[X_2, X_3] = \alpha X_2, \quad [X_3, X_1] = \alpha X_1, \quad [X_1, X_2] = \gamma X_3$

注意，在后一种情况下，我们可以找到一个李代数同构，将 $\{X_1, X_2, X_3\}$中的向量映射为 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 中向量的倍数，而 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$的优基。因此，我们只需考虑第一种情况。为此，首先注意到Killing型的特征值为

$$-2\beta\gamma, \quad -2\alpha\gamma, \quad -2\alpha\beta.$$

由此我们可以得出，具有基 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 且李括号为

$$[X_2, X_3] = \alpha X_1, \quad [X_3, X_1] = \beta X_2, \quad [X_1, X_2] = \gamma X_3$$

当且仅当.....时，同构于 $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\beta) = \operatorname{sgn}(\gamma). \tag{5}$$

若此条件成立，我们可以找到一个李代数同构，将 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 中的向量映射为 $\{f_1, f_2, f_3\}$. 中向量的倍数。因此，我们可以得出结论， $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ 在等价意义下只有一个优良基。

若条件 (5) 不成立，我们知道该李代数必定同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$，而且容易验证，基 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 和 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 并不等价。可以证明，任何其他满足以下条件的基 $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$$[Y_2, Y_3] = \alpha' Y_1, \quad [Y_3, Y_1] = \beta' Y_2, \quad [Y_1, Y_2] = \gamma' Y_3$$

等价于 $\{X_1, X_2, X_3\}$，若 α'、β' 和 γ' 不满足条件 (5)。因此，我们可以得出结论， $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 在等价意义下有两个优良基；更具体地说，以下给出了两个不等价的基:

$$\{e_1, e_2, e_3\}, \quad \{e_1, e_2 + e_3, e_2 - e_3\}.$$

□

5 与图相关的幂零李代数的优良基 S

本节将研究与简单图 $\mathcal{G} = (V, E)$ 相关的幂零李代数，其中
V 表示顶点集， E 表示边集。

我们按如下方式为这样的图关联一个 c 步幂零李代数。考虑由 V 生成的自由 c 步幂零李代数，记作 $\mathfrak{n}_c(V)$，并考虑由以下元素生成的理想 $I_{\mathcal{G}}$

$$\{[v_1, v_2] \mid v_1, v_2 \in V, \{v_1, v_2\} \notin E\}.$$

与图 $\mathcal{G}$ 相关的 c 步幂零李代数定义为

$$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c} = \frac{\mathfrak{n}_c(V)}{I_{\mathcal{G}}}.$$

我们有如下泛性质。

定理 5.1 (泛性质)。 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个简单图。对于任意 c步幂零李代数 $\mathfrak{g}$以及任意映射 $f\colon\ V \to \mathfrak{g}$，只要满足 $[f(v_1)\ f(v_2)] = 0$若 $\{v_1, v_2\} \notin E$，就存在唯一的李代数态射 $\varphi\colon\ \mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ c} \to \mathfrak{g}$ 使得 $\varphi|_V = f$.

注意， c顶点数为 d 的完全图所关联的 步幂零李代数与由 c 个生成元生成的自由 步幂零李代数同构。我们将此李代数记为$\mathfrak{n}_{d,\ c}$。对于这些特定类型的图所关联的幂零李代数，有如下来自 [1, 定理 3。11]。

Prop命题 5.2。 由 d 个生成元生成的自由 c 步幂零李代数存在优基，当且仅当
仅当满足以下条件之一: $d = 2$.

利用泛性质，我们得到以下引理。在证明中，我们将使用这一事实：如果幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 中的 $\{X_1, \ldots, X_d\}$ 是一组向量，并且它们在 $\mathfrak{n}/\gamma_2(\mathfrak{n})$ 上的投影构成一个基，那么 $\{X_1, \ldots, X_d\}$ 就是 $\mathfrak{n}$. 的生成元集。我们也将在以下各节的证明中使用这一事实。

引理 5.3。 如果李代数 $\mathfrak{n}_{d,\ c}$ 具有优基，那么该优基在等价意义下是唯一的 $e.$

证明。 我们可以将 $\mathfrak{n}_{d,c}$ 视为定义在顶点 $\{v_1,\ldots,v_d\}.$ 上的完全图所关联的 c 步幂零李代数。若 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ 是 $\mathfrak{n}_{d,c}$ 的优基，那么经过可能的重新排序后，我们可以假设投影

$$X_1,\ldots,X_d$$

到 $\mathfrak{n}_{d,c}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{d,c})$ 上的投影均非零。由泛性质，我们现在可以找到一个李代数态射$\varphi:\ \mathfrak{n}_{d,c}\to\mathfrak{n}_{d,c}$，对所有 $i\in\{1,\ldots,d\}.$，将 v_i 映到 X_i。这是一个同构，因为它将生成元映到生成元。由此我们可以得出，$\mathfrak{n}_{d,c}$ 的所有优基都等价，因为优基中的其他每个元素都可以写成这些生成元的括号，因此它们彼此映到对方。 □

泛性质还可以用于证明以下结果。

引理 5.4。 设 $\mathcal{G}=(V,E)$ 是一个简单图，并设 $c>1$。假设 $\mathcal{G}'=(V',E')$ 是一个子图，那么存在一个李代数态射

$$\pi:\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c}\to\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',c}$$

使得对于任意 $v\in V$，都有

$$\pi(v)=\begin{cases} v\ \textit{if}\ v\in V' \\ 0\ \textit{if}\ v\notin V'\end{cases}$$

正如引言中所指出的，以下结果已由 [11] 得知。

引理 5.5. 任意与图 $\mathcal{G}=(V,E)$ 相关联的二步幂零李代数都存在一个优基。

证明。 设 $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$，并考虑集合

$$\mathcal{B}_1:=\{v_1,\ldots,v_n\},\quad \mathcal{B}_2:=\{[v_i,v_j]\mid\{i,j\}\in E\text{ and }i<j\}.$$

现在立即可得， $\mathcal{B}:=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},2.}$ 的一个优基。 □

对于幂零类大于 2 的情形，还需要做一些工作。我们将在以下各节中讨论这一点。

5.1 与图相关的三步幂零李代数

We w$^{\text{ill s}}$ 如下例所示，$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$ 在 $\mathcal{G}$ 不包含3-圈时有优基。

例5.6。 假设 $\mathcal{G}=$ (V， E)不包含3-圈。我们将明确构造$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$ 的一个优基。正如 [19], 所解释的，每个与图相关的幂零李代数都有一个Lyndon基。对于$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$，这个基对应于以下四个集合的并集

- $B_1:=V=\{v_1,\ldots,v_n\}$
- $B_2:=\{[v_i,v_j]\mid i<j$ 和 $\{i,j\}\in E\}$
- $B_3:=\{[v_i,[v_j,v_k]]\mid i<k$和 $\{v_i,v_j\},\{v_j,v_k\}\in E\}$
- $B_4:=\{[v_i,[v_i,v_j]],[v_j,[v_i,v_j]]\mid i<j$和 $\{v_i,v_j\}\in E\}$

现在我们断言

$$\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

确实是一个优基。首先注意， B_1 中任意两个元素的李括号都是 B_2. 中某个元素的倍数。此外，对于每个元素 $[v_i, v_j] \in B_2$ ， B_1中都存在唯一一对向量，即 v_i 和 v_j，它们的李括号是 $[v_i, v_j]$. 的倍数。现在注意，对于所有 $v_i \in B_1$ 和$[v_j, v_k] \in B_2$ ，都有：若 $i \neq j$， k

$$[v_i,[v_j,v_k]] = \begin{cases} 0 & \text{if } \{v_i,v_j\},\{v_i,v_k\} \notin E \\ [v_i,[v_j,v_k]] & \text{if } i<k, \{v_i,v_j\} \in E \\ [v_k,[v_j,v_i]] & \text{if } k<i, \{v_i,v_j\} \in E \\ -[v_i,[v_k,v_j]] & \text{if } i<j, \{v_i,v_k\} \in E \\ [v_j,[v_k,v_i]] & \text{if } j<i, \{v_i,v_k\} \in E \end{cases}.$$

若 $i = k$，则

$$[v_i,[v_j,v_k]] = \begin{cases} [v_i,[v_j,v_i]] & \text{if } j<i \\ -[v_i,[v_i,v_j]] & \text{if } i<j \end{cases}$$

若 $i = j$，则

$$[v_i,[v_j,v_k]] = \begin{cases} [v_i,[v_i,v_k]] & \text{if } i<k \\ -[v_i,[v_k,v_i]] & \text{if } k<i \end{cases}.$$

由此可知， $[v_i,[v_j,v_k]]$ 始终是 $B_3 \cup B_4$中某个元素的倍数。此外，给定一个元素 $[v_i,[v_j,v_k]] \in B_3 \cup B_4$ ，在 B_1 和 B_2 中，只有一对元素的李括号是 $[v_i,[v_j,v_k]]$. 的倍数。因此我们可以得出结论： $\mathcal{B}$ 是$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$的一个优基。

我们现在可以利用上述例子证明以下命题。

命题 5.7. 与图 $\mathcal{G}$ 相关联的3步幂零李代数有优基，当且仅当 $\mathcal{G}$ 不含3-圈。

证明。“若”部分由例 5.6 得出。对于“仅若”部分，反设$\mathcal{G}$ 含有一个 3-圈 $\mathcal{G}'$，并令 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 为 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},3}$ 的一个优基。由引理 5.4 可知，存在一个满射李代数同态

$$\pi : \mathfrak{n}_{\mathcal{G},3} \to \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3}.$$

令 p: $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3} \to \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3})$ 表示投影态射。不失一般性，我们现在可以假设 $\{(p\circ\pi)(X_1),(p\circ\pi)(X_2),(p\circ\pi)(X_3)\}$ 构成 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3})$ 的一个基。

现在我们断言， $\mathfrak{n}$ 中由 X_1、 X_2 和 X_3 生成的李子代数 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$ 是一个自由三步幂零李代数。为证明这一点，我们将使用泛性质。设 f: $\{X_1, X_2, X_3\} \to \mathfrak{h}$ 是任意映射，其中 $\mathfrak{h}$ 是一个三步幂零李代数。由于 $\pi(X_1)$ $\pi(X_2)$ 和 $\pi(X_3)$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',\ 3}$的生成元，因此可以找到唯一的李代数态射

$$\varphi : \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',3} \to \mathfrak{h}$$

such 使得对所有 $i \in \{1,2,3\}$ ，都有 $\varphi(\pi(X_i)) = f(X_i)$。现在我们可以考察复合映射 n

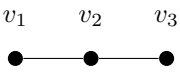
$$\varphi \circ \pi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}.$$

唯一性源于 $\mathfrak{n}$ 由 $\{X_1, X_2, X_3\}$.生成这一事实

由于我们假设 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},\ 3}$ 的优基，因此得出 $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}_{3,\ 3}$ 也有优基，这是不可能的。 □

5.2 4步幂零李代数

我们将证明，与图 $\mathcal{G}$ 相关联的 4步幂零李代数有优基，当且仅当 $\mathcal{G}$ 不含 $\mathcal{G}' = (V',\ E')$ 作为子图，其中 $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$ 和 $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$.



证明这一事实所需的一个工具是*Carnot*李代数的定义。

定义 5.8。 幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 是 Carnot 李代数，当且仅当它具有一个分次 $\mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^{c} \mathfrak{n}_i$，使得 $\mathfrak{n}_1$ 生成 $\mathfrak{n}$.。此处，分次是指，对于所有 $i, j \in \{1, \ldots, c\}$，都有 $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$。

由上述定义立即可知，任何与图相关联的幂零李代数都是 Carnot 李代数。

对于给定的 c步幂零李代数 $\mathfrak{n}$，我们可以构造一个 Carnot 李代数 Car($\mathfrak{n}$)。作为向量空间，它对应于以下直和

$$\bigoplus_{i=1}^{c} \frac{\gamma_i(\mathfrak{n})}{\gamma_{i+1}(\mathfrak{n})}$$

对于 $X \in \gamma_i(\mathfrak{n})$ 和 $Y \in \gamma_j(\mathfrak{n})$，我们定义

$$[X + \gamma_{i+1}(\mathfrak{n}), Y + \gamma_{j+1}(\mathfrak{n})] := [X, Y] + \gamma_{i+j+1}(\mathfrak{n}).$$

现在可以将此定义线性扩展到整个向量空间。众所周知，如果 $\mathfrak{n}$ 是一个Carnot李代数，那么Car($\mathfrak{n}$) $\cong \mathfrak{n}$。

如果 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是一个 c步幂零李代数 $\mathfrak{n}$的优基，我们不妨假设该基的前 k_1 个向量属于 $\mathfrak{n} \setminus \gamma_2(\mathfrak{n})$，接下来的 k_2 个向量属于 $\gamma_2(\mathfrak{n}) \setminus \gamma_3(\mathfrak{n})$，依此类推。于是可得

$$\{X_1 + \gamma_2(\mathfrak{n}) \ldots, X_{k_1} + \gamma_2(\mathfrak{n}), X_{k_1+1} + \gamma_3(\mathfrak{n}), \ldots, X_n + \gamma_{c+1}(\mathfrak{n})\}$$

构成Car($\mathfrak{n}$)的一个优基。 由此可得， $\mathfrak{n}$ 存在优基意味着Car($\mathfrak{n}$)存在优基。

可以证明，以下向量构成一个Lyndon基（参见 [19]），属于$\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',\ 4}$:

- v_1, v_2, v_3,
- $[v_1, v_2], [v_2, v_3]$,
- $[v_1, [v_1, v_2]]$, $[v_1, [v_2, v_3]]$, $[v_2, [v_2, v_3]]$,
  $[v_2, [v_1, v_2]]$, $[v_3, [v_2, v_3]]$,
- $[v_1, [v_1, [v_1, v_2]]]$, $[v_1, [v_2, [v_1, v_2]]]$, $[v_2, [v_2, [v_1, v_2]]]$,
  $[v_2, [v_2, [v_2, v_3]]]$, $[v_2, [v_3, [v_2, v_3]]]$, $[v_3, [v_3, [v_2, v_3]]]$,
  $[v_1, [v_1, [v_2, v_3]]]$, $[v_1, [v_2, [v_2, v_3]]]$, $[v_1, [v_3, [v_2, v_3]]]$,
  $[v_2, [v_1, [v_2, v_3]]]$.

我们将在以下命题的证明中用到这个基。

命题 5.9。设 $\mathcal{G}=(V,E)$ 是一个图，且有$\#V>1$ 和$\#E\geq 1.$。那么，如果 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},4}$有优基， $\mathcal{G}$ 就不能以 $\mathcal{G}'$ 为子图。

证明。假设 $\mathcal{G}=(V,E)$ 有一个子图 $\mathcal{G}'=(V',E')$，其中 $V'=\{v_1,v_2,v_3\}$ 且 $E'=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\}\}$。我们知道存在一个满射李代数同态

$$\pi:\mathfrak{n}_{\mathcal{G},4}\to\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}$$

使得 $\pi(v)=v$ 当且仅当 $v\in V'$，而 $\pi(v)=0$ 当且仅当 $v\in V\setminus V'$。

Supp反设 $\mathcal{B}=\{X_1,\dots,X_n\}$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},4}$的优基。注意，经过可能的重新排序 后，我们可以假设

$$\{\pi(X_1)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\pi(X_2)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\pi(X_3)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})\}$$

构成 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 的一组基。现在注意到 $\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})/\gamma_3(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 应为二维的，因此我们可以假设存在 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，使得

$$\pi([X_1,X_3]-\alpha[X_1,X_2]-\beta[X_2,X_3])\in\gamma_3(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}). \tag{6}$$

现在定义 $i\in\{1,2,3\}$ 这些向量

$$U_i:=[X_i,[X_1,X_3]],\quad V_i:=[X_i,[X_1,X_2]],\quad W_i:=[X_i,[X_2,X_3]].$$

现在显然，该集合

$$S:=\{\pi(U_i)+\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\pi(V_i)+\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\pi(W_i)+\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})\mid 1\leq i\leq 3\}$$

张成五维空间 $\gamma_3(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})/\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$。由于假设 $\mathcal{B}$ 是 nice 的，我们知道，由 U_2，V_3 和 W_1 张成的向量空间的维数至多为一，因此向量$\pi(U_2)$ $\pi(V_3)$ 和 $\pi(W_1)$ 至多张成一个一维向量空间。

首先假设我们可以找到 γ，$\delta\in\mathbb{R}$ 使得

$$\pi(U_2)=\gamma\pi(W_1),\quad \pi(V_3)=\delta\pi(W_1).$$

因此我们发现，S 至多张成一个七维向量空间。此外，根据（6）我们知道

$$\begin{aligned}\pi(U_1)-\alpha\pi(V_1)-\beta\pi(W_1)&\in\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\\ \gamma\pi(W_1)-\alpha\pi(V_2)-\beta\pi(W_2)&\in\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\\ \pi(U_3)-\alpha\delta\pi(W_1)-\beta\pi(W_3)&\in\gamma_4(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}).\end{aligned}$$

如果 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$，则由上述方程可知，S 张成的向量空间的维数至多为四，这是不可能的。

如果 $\pi(W_1)=0$，类似的分析也适用，因此我们得出 $\alpha=0=\beta$，从而

$$[\pi(X_1),\pi(X_3)]\in\gamma_3(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}).$$

通过使 $\mathfrak{g}\ \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}$ Carnot，进而可得 $\pi(X_1)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ $\pi(X_2)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 以及 $\pi(X_3)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 生成 $\mathrm{Car}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$，而且

$$[\pi(X_1)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}),\pi(X_3)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})]=0+\gamma_3(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}).$$

因此，我们可以找到一个李代数态射 $\varphi:\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}\to\mathrm{Car}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$，使得 $\varphi(v_i)=\pi(X_i)+\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$，其中 $i\in\{1,2,3\}$. 由于 $\mathrm{Car}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})\cong\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4}$，它们的维数必定相等。此外，由于

$\pi(X_1) + \gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ $\pi(X_2) + \gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 和 $\pi(X_3) + \gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 生成了 $\mathrm{Car}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$，由此可知 φ 是一个同构。

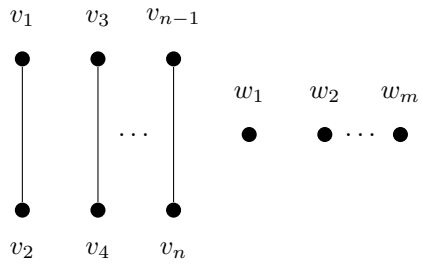
由于 $\mathcal{B}$ 是优基，我们知道

$$\mathrm{Span}\{\pi([[X_1,X_2],[X_2,X_3]]),\pi([X_2,[X_1,[X_2,X_3]]]),\pi([X_1,[X_2,[X_2,X_3]]])\}$$

根据雅可比恒等式，至多为一维。因此，$\mathrm{Car}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',4})$ 中相应的向量也至多张成一个一维向量空间。由此我们得到矛盾，因为我们知道 $[v_2,[v_1,[v_2,v_3]]]$ 和 $[v_1,[v_2,[v_2,v_3]]]$ 线性无关，所以它们经 φ 映射后也应为线性无关的向量。因此可以得出结论：$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},4}$ 不承认优基。

□

注意，不包含 $\mathcal{G}'$ 作为子图的图 $\mathcal{G}$ 必定具有以下形式 m



现在可以相对容易地验证，与该图关联的4步幂零李代数同构于 $\mathfrak{n}_{2,4}^k \oplus \mathbb{R}^m$，其中 $n = 2k$。这个李代数显然承认优基。由此我们证明了以下结果。

命题 5.10. 与图 $\mathcal{G}$ 关联的*4*步幂零李代数承认优基，当且仅当它不包含子图 $\mathcal{G}' = (V', E')$，其中 $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$ 和 $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$。

5.3 更高的幂零类

对于 5 阶幂零类，我们可以采用与命题 5.7 中类似的论证。

Prop命题 5.11。 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个图，则 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},5}$ 存在优基，当且仅当 $E =$ $\emptyset$.

证明。 “若”部分显然，因为 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},5}$ 在 $E = \emptyset$ 时是阿贝尔的。反过来，假设 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},5}$ 存在优基 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 且 $|E| \geq 1$。由此可得 $\mathcal{G}$ 有一个包含两个顶点的完全子图 $\mathcal{G}'$。由引理 5.4 可知，存在一个满射李代数同态

$$\pi : \mathfrak{n}_{\mathcal{G},5} \to \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5}.$$

令 p: $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5} \to \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5})$ 表示投影态射。不失一般性，现在可以假设 $\{(p\circ\pi)(X_1),(p\circ\pi)(X_2)\}$ 构成 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5}/\gamma_2(\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5})$ 的一组基。

现在我们断言，由 X_1 和 X_2 生成的 $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},5}$ 阶李子代数是自由 5 阶幂零李代数。为证明这一点，我们将使用泛性质。设 $f : \{X_1, X_2\} \to \mathfrak{h}$ 是任意映射，其中 $\mathfrak{h}$ 是一个 5 阶幂零李代数。由于 $\pi(X_1)$ 和 $\pi(X_2)$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5}$ 的生成元，因此我们可以找到唯一的李代数态射

$$\varphi : \mathfrak{n}_{\mathcal{G}',5} \to \mathfrak{h}$$

such 使得对于所有 $i \in \{1,2\}$，都有 $\varphi(\pi(X_i)) = f(X_i)$。现在我们可以考察复合

$$\varphi \circ \pi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}.$$

唯一性源于 $\mathfrak{n}$ 由 $\{X_1, X_2\}$.生成这一事实。

由于我们假设 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ 是 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},5}$的优基，因此可得 $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{n}_{2,5}$ 也有优基，这就导出了矛盾。 □

由上述结果可以推出以下结论。

推论 5.12. 设 $\mathcal{G} = (V, E)$ 是一个图，且 $c \geq 5$，那么 $\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c}$ 有优基当且仅当$E = \emptyset$.

证明。注意，对于固定的图 $\mathcal{G}$，有

$$\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c} = \frac{\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c+1}}{\gamma_{c+1}(\mathfrak{n}_{\mathcal{G},c+1})}.$$

该结论现在可由以下一般事实推出：若李代数 $\mathfrak{g}$ 有优基，则将此基投影到 $\mathfrak{g}/\gamma_i(\mathfrak{g})$上，就会得到 $\mathfrak{g}/\gamma_i(\mathfrak{g})$ 的优基。 □

参考文献

[1] D. Conti、V. del Barco 和 F. A. Rossi。非优幂零李代数上的伴随不变度量。代数及其应用杂志，24(10):2550232，2025年。[2] Diego Conti 和 Federico A. Rossi。优幂零李群的构造。代数杂志，525:311–340，2019年。[3] S. G. Dani 和 Meera G. Mainkar。与图相关的紧致幂零流形上的 Anosov自同构。美国数学会会刊，357(6):2235–2251，2005年。[4] W. A. de Graaf。可解李代数的分类。实验数学，14(1):15–25，2005年。[5] Rachelle C. DeCoste、Lisa DeMeyer 和 Meera G. Mainkar。图与度量二步幂零李代数。几何学进展，18(3):265–284，2018年。[6] Jonas Der´e 和 Jorge Lauret。关于里奇负可解流形及其幂零根。数学年刊，292(7):1462–1481，2019年。[7] Jonas Der´e 和 Thomas Witdouck。与图相关的幂零李代数中 k-形式的分类。2023年。[8] David J Fisher、Robert J Gray 和 Peter E Hydon。五维及以下实李代数的自同构。物理学杂志 *A*：数学与理论，46(22):225204，2013年5月。[9] V. V. Gorbatsevich。有限维李代数中若干类基。数学札记，114(1-2):165–171，2023年。[10] S. V. Khabirov。 $\mathbb{R}$ 中三维李代数的分类及其二阶微分不变量。罗巴切夫斯基数学杂志，31(2):152–156，2010年。[11] Jorge Lauret 和 Cynthia Will。爱因斯坦可解流形：存在与不存在问题。数学年刊，350(1):199–225，2011年。

[12] Jorge Lauret 和 Cynthia Will。李群上里奇流的对角化。美国数学会会刊，141(10):3651–3663，2013年。[13] Jorge Lauret 和 Cynthia Will。关于里奇负李群。几何学、李理论与应用，2019年。[14] Meera G. Mainkar。某些类幂零流形上的 Anosov自同构。格拉斯哥数学杂志，48(1):161–170，2006年。[15] John Milnor。李群左不变度量的曲率。数学进展，21(3):293–329，1976年。[16] Y. Nikolayevsky。爱因斯坦可解流形与预爱因斯坦导子。美国数学会会刊，363(8):3935–3958，2011年。[17] Tracy L. Payne。幂零流形上的里奇流。现代动力学杂志，4(1):65–90，2010年。[18] Hannes Pouseele 和 Paulo Tirao。与图相关的紧辛幂零流形。纯粹与应用代数杂志，213(9):1788–1794，2009年。[19]Richard Wade。直角阿廷群的下中心列。数学教学 ´论丛，61:343–371，2016年8月。