哈密顿形式中的黑洞霍金-佩奇相变

Tran NgocThien[a, b*] 和 Vo Quoc Phong[a, b†]a自然科学大学物理学院理论物理与工程物理系，越南胡志明市 *700000*b越南国家大学，越南胡志明市 *700000*

arXiv:2603.16560v1 [gr-qc] 17 Mar 2026

霍金-佩奇相变是黑洞热力学中的一种临界现象，标志着反德西特（AdS）时空中的热辐射态变得不稳定的临界点。在本研究中，我们采用哈密顿形式，研究巴纳多斯-泰特尔博伊姆-泽内利（BTZ）黑洞在壳上和壳外构型下的霍金-佩奇相变。结果表明，黑洞系统的哈密顿量对应于其热力学自由能。接下来，我们考察赖斯纳-诺德斯特伦（RN）黑洞和克尔-纽曼（KN）黑洞的霍金-佩奇相变，并将所得结果与已有的壳上情形结果进行比较。随后，我们将该方法进一步推广到此前尚未研究的RN和KN黑洞壳外情形，从而揭示电荷和黑洞旋转对其霍金-佩奇相变的影响。结果表明，在存在电荷和旋转的情况下，黑洞与热孤子态能够共存。

* tnthien@hcmus.edu.vn

† vqphong@hcmus.edu.vn

目录

I. 引言 3

II. 引力理论的哈密顿形式 4

A. 动量张量 5 B. 引力场的哈密顿量 5

III. 巴纳多斯-特特尔博伊姆-扎内利黑洞 6

A. 黑洞的哈密顿量 B. 壳上 C. 壳外 D. 评估 7 8 9 13

IV. 赖斯纳-诺德斯特伦黑洞 14

A. 黑洞的哈密顿量 B. 壳上 C. 壳外 D. 评估 15 16 17 20

V. 克尔-纽曼黑洞 20

A. 黑洞的哈密顿量 B. 壳上 C. 壳外 D. 评估 22 23 24 26

VI. 结论与展望 27

致谢 27

参考文献 27

I. 引言

黑洞热力学为通过外部时空中可观测的热力学量 [1–4]研究黑洞提供了理论框架，例如：温度、熵.....作为热力学系统，黑洞可以发生相变，例如霍金-佩奇相变。该相变描述了反德西特时空中稳定黑洞与热辐射之间发生相变，导致黑洞蒸发的过程 [5–7]。在探索引力场量子化的过程中，霍金-佩奇相变可以在广义相对论与量子场论之间建立概念联系。

霍金–佩奇相变表明，黑洞具有量子统计描述：在同一热力学系综中，孤子态与黑洞态共存，并且在相变过程中二者的相对统计权重会重新分配。在低于临界值的温度下，孤子态的概率高于黑洞态；相反，在高于临界温度时，黑洞态的概率超过孤子态。

本文旨在通过提出一种推导黑洞热力学函数的替代方法，推进引力场的量子化。在相同的引力作用量框架下，我们采用哈密顿形式，分别在壳上和壳外情形下评估巴纳多斯-泰特尔博伊姆-赞内利（BTZ）黑洞的热力学量 [8–10], ，并将其与直接从作用量得到的结果进行比较。

结果表明，哈密顿量对应于黑洞的自由能，并且无需额外的计算成本即可用于研究霍金-佩奇相变。

接下来，我们将哈密顿形式推广到赖斯纳-诺德斯特伦（RN）黑洞[11–13] 和克尔-纽曼（KN）黑洞 [14–16], ，这两种黑洞均具有电荷和旋转 [17–19]。这些结果与壳上情形下的已知结果一致，后者对应于黑洞的自由能。

随后，我们进一步将这一方法应用于壳外构型。对于 RN黑洞，电荷的存在会产生最小质量，并导致相变过程中孤子态与黑洞态并行共存。对于克尔-纽曼黑洞，电荷与旋转的共同作用同样会产生最小

质量，并使孤子态与黑洞态在整个相变过程中同时共存。

在哈密顿形式下，可以直接推导黑洞系统的热力学量，其中哈密顿量被认定为自由能。这种方法为作用量原理所得结果提供了独立的一致性检验。此外，为经历霍金-佩奇相变的黑洞构造哈密顿量，或将为深入理解引力场的量子化开辟一条有前景的途径。

本文结构如下。第一节介绍本研究的动机与背景。第二节阐述引力场的哈密顿形式，为构造黑洞系统的哈密顿量奠定基础。第三至第五节将这一形式应用于壳上背景下渐近反德西特时空中的 BTZ、RN 和 KN 黑洞，并将结果与已发表的结果进行比较，随后再将该方法拓展至壳外构型。最后，第六节总结主要结果并探讨未来的研究方向。

II. 引力理论的哈密顿形式

哈密顿力学是通过勒让德变换从拉格朗日形式改写而来的经典力学。在这一框架中，广义坐标 q 和广义动量 p 被视为两个独立变量，系统的动力学由哈密顿密度函数 $\mathcal{H}(q,\ p,\ t)$ 描述，而非由拉格朗日密度函数 $\mathcal{L}(q,\ \dot{q},\ t)$ 描述。

引力场的哈密顿形式为度规张量 $g_{\mu\nu}$ 提供了一种正则表述，该表述通过对引力作用量进行勒让德变换而得到。在这一框架中，我们需要定义与度规张量相关的动量张量 $p^{\mu\nu}$ 。

为了建立引力场的正则结构，我们类比量子场论中坐标与动量之间的正则对易关系，定义度规张量与动量张量之间的泊松括号 [20, 21]。

A. 动量张量

与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 共轭的动量张量 $p^{\mu\nu}$，定义为度规张量 $\partial_0 g_{\mu\nu}$ 关于拉格朗日变分导数的时间导数，

$$\int \delta\mathcal{L}d^3x = \int p^{\mu\nu}\delta\partial_0 g_{\mu\nu}d^3x, \tag{1}$$

我们选取一阶约束 $p^{\mu 0} \approx 0$，由此推导出动量张量与克里斯托费尔联络之间的关系；在不改变运动方程的情况下，我们对拉格朗日量进行变换，

$$\mathcal{L}^* - \mathcal{L} = \partial_v(\sqrt{-g}g^{00})\partial_0\left(\frac{g^{v0}}{g^{00}}\right) - \partial_0(\sqrt{-g}g^{00})\partial_v\left(\frac{g^{v0}}{g^{00}}\right). \tag{2}$$

为简化起见，我们定义度规 $e^{\mu\nu} = e^{\nu\mu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 0}g^{\nu 0}}{g^{00}}$，其中 $e^{\mu\nu} \neq 0$ 为 $\mu \neq 0$ 和 $\nu \neq 0$，这与一阶约束一致，并推导出

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}^* &= 2\sqrt{-g}(e^{ra}e^{sb} - e^{rs}e^{ab})\Gamma^0_{ab}\delta\Gamma^0_{rs}/g^{00} \\ &= -\sqrt{-g}(e^{ra}e^{sb} - e^{rs}e^{ab})\Gamma^0_{ab}\delta\partial_0 g_{rs}.\end{aligned} \tag{3}$$

因此，我们定义了引力场中的动量张量 $p^{\mu\nu}$，仅考虑非零项

$$p^{rs} = \sqrt{-g}(e^{rs}e^{ab} - e^{ra}e^{sb})\Gamma^0_{ab}. \tag{4}$$

B. 引力场的哈密顿量

我们已经定义了构建引力场哈密顿量所需的基本量。将引力视为时空曲率后，我们使用度规张量描述粒子 $g_{\mu\nu}$，并将度规张量的导数视为速度 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$，从而引入动量张量 p^{rs}。因此，与该张量相关的哈密顿量密度可写为

$$\mathcal{H}(g_{\mu\nu}, p_{rs}) = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - p^{rs}\partial_0 g_{rs}. \tag{5}$$

随着宇宙学 常数（Λ），我们推导出引力场的哈密顿量 ，

$$H = \int \sqrt{-g}\left[(e^{rs}e^{ab} - e^{ra}e^{sb})\Gamma^0_{ab}\partial_0 g_{rs} - (R - 2\Lambda)\right]dx^3. \tag{6}$$

本文分别考察渐近反德西特时空中的巴纳多斯-特特尔博伊姆-扎内利黑洞、赖斯纳–诺德斯特伦黑洞和克尔–纽曼黑洞的霍金-佩奇相变，并将我们的结果与壳上情形下的先前研究进行比较，进一步研究壳外构型。

III. 巴纳多斯-特特尔博伊姆-扎内利黑洞

反德西特三维时空系统中巴纳多斯-特特尔博伊姆-扎内利黑洞的度规 [9] 具有如下形式

$$ds^2_{BTZ} = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\phi^2, \tag{7}$$

其中 $f(r) = -M + \frac{r^2}{l^2}$。其中，$M$ 对应 ADM 质量，l 为反德西特半径。事件视界为 $r_H = l\sqrt{M}$，温度为 $T_H = \frac{1}{4\pi}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r_H} = \frac{\sqrt{M}}{2\pi l}$.

在研究霍金-佩奇相变时，我们考察没有物质源[22], 时的爱因斯坦-希尔伯特作用量以及包含高阶导数项的作用量，其形式为

$$I_{\text{bulk}} = I_{EH} + I_{HC}, \tag{8}$$

$$I_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} dx^3\sqrt{-g}(R - 2\lambda), \tag{9}$$

$$I_{\text{HC}} = \frac{1}{16\pi G m^2}\int_{\mathcal{M}} dx^3\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2). \tag{10}$$

然而，为了运用最小作用量原理求得运动方程，我们必须添加广义吉本斯–霍金项 I_{GGH}；为了得到有限的欧几里得作用量，还必须添加一项 I_{ct} 来对作用量进行归一化。此时总作用量的形式为 [23–26],

$$I = I_{\text{bulk}} + I_{\text{GGH}} + I_{\text{ct}}, \tag{11}$$

$$I_{\text{GGH}} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dx^2\sqrt{-\gamma}\left(-2K - \hat{f}^{ij}K_{ij} + \hat{f}K\right), \tag{12}$$

$$I_{\text{ct}} = -\frac{1}{8\pi G l}\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right)\int_{\partial\mathcal{M}} dx^2\sqrt{-\gamma}, \tag{13}$$

ˆ其中，f 由辅助场 $f_{\mu\nu}$计算得出，

$$f_{\mu\nu} = -\frac{2}{m^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right). \qquad \hat{f}^{ij} = f^{ij} + 2f^{r(i}N^{j)} + f^{rr}N^iN^j. \tag{14}$$

以及超曲面曲率:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\left(\partial_r \gamma_{ij} - \Delta_i N_j - \Delta_j N_i\right). \tag{15}$$

由已建立的作用量，我们得到拉格朗日量，它由两项组成， $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ 在空间中 $\mathcal{M}$ 以及 $\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}$ 在曲面上 $\partial\mathcal{M}$。因此

$$I = \int_{\mathcal{M}} dx^3\, \mathcal{L}_{\mathcal{M}} + \int_{\partial\mathcal{M}} dx^2\, \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}, \tag{16}$$

with

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\left(R - 2\lambda - \frac{1}{m^2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{3}{8m^2}R^2\right). \tag{17}$$

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-\gamma}\left[-2K - \hat{f}^{ij}K_{ij} + \hat{f}K - \frac{2}{l}\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right)\right]. \tag{18}$$

其中，我们可以描述与空间度规 $\partial\mathcal{M}$相关联的空间度规 $\mathcal{M}$ 。这表明

$$\begin{aligned} ds^2_{\mathrm{BTZ}} &= -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\phi^2 \\ &= N^2 dr^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dr)(dx^j + N^j dr) \\ &= N^2 dr^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j, \end{aligned} \tag{19}$$

with

$$N = \sqrt{\frac{1}{f(r)}}, \qquad N^i = 0, \qquad \gamma_{ij} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

因此，系统的哈密顿量分为与拉格朗日量相对应的两个部分，因此

$$H_{\mathcal{M}} = \int_{\mathcal{M}} dx^2\, (p^{rs}_{\mathcal{M}}\partial_0 g_{rs_{\mathcal{M}}} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}}) = -\int_{\mathcal{M}} dx^2\, \mathcal{L}_{\mathcal{M}}, \tag{21}$$

$$H_{\partial\mathcal{M}} = \int_{\partial\mathcal{M}} dx\, (p^{rs}_{\partial\mathcal{M}}\partial_0 g_{rs_{\partial\mathcal{M}}} - \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}) = -\int_{\partial\mathcal{M}} dx\, \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}. \tag{22}$$

A. 黑洞的哈密顿量

由 ds^2_{BTZ} 在空间 $\mathcal{M}$ 中导出的度规形式为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

我们可以计算里奇张量 $R_{\mu\nu} = -\frac{2}{l^2} g_{\mu\nu}$。利用 $\lambda = -\frac{1}{l^2} - \frac{1}{4m^2 l^4}$，我们得到 $\mathcal{M}$曲面上的引力拉格朗日量:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \frac{r}{16\pi G}\left(-\frac{4}{l^2} + \frac{2}{m^2 l^4}\right). \tag{24}$$

对于 $N_i = 0$，辅助场 $\hat{f}_{ij} = f^{ij} = \frac{1}{m^2 l^2}\gamma^{ij}$ 和外曲率 $K_{ij} = -\frac{\sqrt{f(r)}}{2}\partial_r \gamma_{ij}$。我们得到超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 上的拉格朗日量,

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{l^2}\frac{1}{16\pi G}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right)\left[\left(\sqrt{r^2 - r_H^2} - r\right)^2 + \left(r^2 - r_H^2\right) + r^2\right]. \tag{25}$$

因此，哈密顿量为

$$H_{\mathcal{M}} = \frac{1}{4Gl^2}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right)\left(r^2 - r_H^2\right), \tag{26}$$

$$H_{\partial\mathcal{M}} = -\frac{1}{8Gl^2}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right)\left[\left(\sqrt{r^2 - r_H^2} - r\right)^2 + \left(r^2 - r_H^2\right) + r^2\right]. \tag{27}$$

因此，BTZ 黑洞的哈密顿量形式为

$$\begin{aligned} H_{bh} &= H_{\mathcal{M}} + H_{\partial\mathcal{M}} \\ &= -\frac{M}{8G}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

与直接从作用量得到的结果相比，黑洞哈密顿量 (H_{bh}) 与自由能 (F) 类似于参考文献 [8–10]，中的情况，即,

$$H_{bh} = F_{bh} = -\frac{M}{8G}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{29}$$

B. 壳上

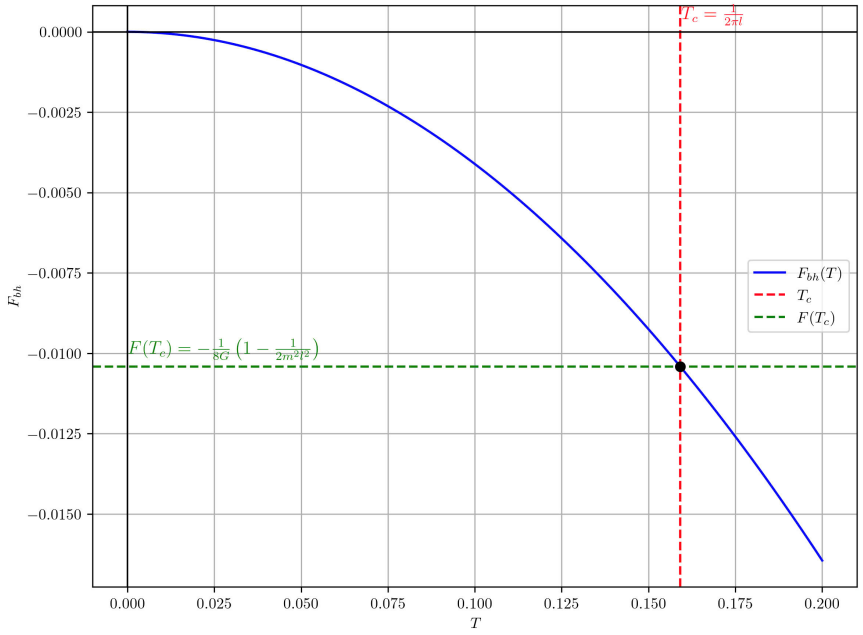
我们计算孤子态的哈密顿量以研究相变。若 $M = -1$，此时度规具有反德西特形式，因此我们现在可以研究孤子，借助 $\frac{r^2}{l^2} = -1$，从而得到 $f(r) = 0$。因此，孤子态的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{soliton} &= H_{\mathcal{M}_{soliton}} + H_{\partial\mathcal{M}_{soliton}} \\ &= -\frac{1}{8G}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

为研究相变，我们建立连续性条件 $H_{bh} = H_{soliton}$，因此 $M = 1$。由此得到临界温度 $T_C = \frac{1}{2\pi l}$。

当温度低于临界值时，系统处于孤子态；反之，当温度高于临界值时，系统处于黑洞态。我们可以将自由能（F_{bh}）重新表示为霍金温度 $\left(T = \frac{\sqrt{M}}{2\pi l}\right)$ 的函数，

$$F_{bh} = -\frac{4\pi^2 l^2 T^2}{8G}\left(1 - \frac{1}{2m^2 l^2}\right). \tag{31}$$



FI图 1：BTZ黑洞的壳上自由能随温度的变化

图 1 表明，相变发生在临界温度 T_C，此时系统从孤子态转变为黑洞态。由于相变只发生在一个点上，在壳上极限下，我们只能假设系统在临界温度 T_C 时瞬间从孤子态转变为黑洞态。由此可得，此处的霍金-佩奇相变是一级相变。

C. 壳外

我们将研究拓展至壳外情形，此时构型不受限于黑洞曲面，并包括黑洞视界上的随机涨落。我们

考察由带有亏角$2\pi(1-\alpha)$的圆锥 $\mathcal{M}_\alpha$ 以及奇异集 Σ所表示的黑洞上的任意效应。里奇标量和里奇张量现在具有如下形式

$$R^{(\alpha)}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + 2\pi(1-\alpha)\,(n_\mu n_\nu)\,\delta_\Sigma, \tag{32}$$

$$R^{(\alpha)} = R + 4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma, \tag{33}$$

其中， δ_Σ 是在奇异点 $\int_{\mathcal{M}} f\delta_\Sigma = \int_\Sigma f$ 处的狄拉克 δ 函数，而 $n^s = n^s_\mu dx^\mu (s = 1,$ 2) 是与奇异点集合 Σ where$_2(n_\mu n_\nu) = \sum n^s_\mu n^s_\nu$ 正交且垂直的两个向量。拉格朗日量的壳外条件为 $_{s=1}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mathcal{M} &= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\left[R^{(\alpha)} - 2\lambda - \frac{1}{m^2}R^{(\alpha)}_{\mu\nu}R^{(\alpha),\mu\nu} + \frac{3}{8m^2}\left(R^{(\alpha)}\right)^2\right] \qquad (34)\\
&= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\left(R - 2\lambda - \frac{1}{m^2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{3}{8m^2}R^2\right)\\
&\quad + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\,\{4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma\\
&\quad -\frac{1}{m^2}\left[2\pi(1-\alpha)R^{\mu\nu}\,(n_\mu n_\nu)\,\delta_\Sigma\right] - \frac{1}{m^2}\left[2\pi(1-\alpha)R_{\mu\nu}\,(n^\mu n^\nu)\,\delta_\Sigma\right]\\
&\quad -\frac{1}{m^2}4\pi^2(1-\alpha)^2(n^\mu n^\nu)(n_\mu n_\nu)\delta^2_\Sigma + \frac{3}{8m^2}\left[8\pi R(1-\alpha)\delta_\Sigma + (4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma)^2\right]\Big\}\\
&= \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{bulk}}} + \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}. \qquad (35)
\end{aligned}$$

仅考虑 $H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}$，我们根据 δ_Σ 和 δ^2_Σ 对各项进行分离，从而得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} &= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta_\Sigma\left\{4\pi(1-\alpha) + \frac{3}{8m^2}\left[8\pi R(1-\alpha)\right]\right.\\
&\quad \left. -\frac{1}{m^2}\left[2\pi(1-\alpha)R^{\mu\nu}\,(n_\mu n_\nu)\right] - \frac{1}{m^2}\left[2\pi(1-\alpha)R_{\mu\nu}\,(n^\mu n^\nu)\right]\right\}\\
&\quad + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta^2_\Sigma\left[-\frac{1}{m^2}4\pi^2(1-\alpha)^2(n^\mu n^\nu)(n_\mu n_\nu) + \frac{1}{m^2}6\pi^2(1-\alpha)^2\right].
\end{aligned} \tag{36}$$

由于积分区域为 $\mathcal{M}$，我们可以推导出奇点处的积分，但哈密顿量积分并未覆盖整个区域 $\mathcal{M}$。由于哈密顿量密度是线性的，且不依赖于 t，我们可以进行变换

$$\int_\mathcal{M}\mathcal{H}dx^3\delta_\Sigma = \int_0^\beta\left[\int\mathcal{H}\,dx^2\right]dt\,\delta_\Sigma = \beta\int\mathcal{H}\,dx^2\,\delta_\Sigma = \int_\Sigma\mathcal{H}d\Sigma. \tag{37}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\beta \int \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}\, dx^2\, \delta_\Sigma &= \int_\Sigma \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} d\Sigma, \\ \beta H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} &= \int_\Sigma \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} d\Sigma, \\ H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} &= \frac{1}{\beta}\int_\Sigma \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} d\Sigma. \end{aligned} \tag{38}$$

由于

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} &= -\frac{(1-\alpha)}{4G\beta}\int_\Sigma d\Sigma\sqrt{-g}\left\{1+\frac{3}{4m^2}R-\frac{1}{m^2}R_{\mu\nu}\left(n^\mu n^\nu\right)\right\} \\ &\quad -\frac{\pi(1-\alpha)^2}{4G\beta}\int_\Sigma d\Sigma\sqrt{-g}\delta_\Sigma\left\{\ \frac{3}{2m^2}-\frac{1}{m^2}(n^\mu n^\nu)(n_\mu n_\nu)\right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

公式 39 中的第二项不对能量产生贡献，因此我们可以将其消去。我们考察曲面 Σ，其中来自曲面 $[t,r]$ 的球锥奇点位于 r_H。由于奇点出现在时间分量中，时间参数 t 不产生贡献；又由于奇点所在的视界是确定的，空间参数 r 不发生变化，因此也不产生贡献。只有参数 ϕ 对曲面 Σ 上的积分有贡献，此处描述奇点处切向量的正交坐标为

$$n_1^\mu = (\sqrt{g^{00}}, 0, 0), \qquad n_2^\mu = (0, \sqrt{g^{11}}, 0). \tag{40}$$

奇点的积分为

$$\begin{aligned} H_{\text{singular}} &= -\frac{(1-\alpha)}{4G\beta}\int_0^{2\pi} d\phi\sqrt{g_{22}|_{r=r_H}}\left[1+\frac{3}{4m^2}R-\frac{1}{m^2}R_{\mu\nu}\left(n^\mu n^\nu\right)\right] \\ &= -\frac{\pi(1-\alpha)}{2G\beta}r_H\left(1-\frac{1}{2m^2l^2}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

通过对相变进行热力学研究，可以合理地认为奇点的亏角与霍金温度有关；由于奇点位于度规的时间分量中，它也与霍金时间有关，因此我们选择固定系数 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = \beta\frac{\sqrt{M}}{2\pi l}$。因此，公式 41 可改写如下

$$H_{\text{singular}} = \left(\frac{M}{4G}-\frac{\pi l\sqrt{M}}{2G\beta}\right)\left(1-\frac{1}{2m^2l^2}\right). \tag{42}$$

我们得到黑洞态的自由能，即

$$\begin{aligned} F_{bh} = H_{bh} &= H_{bulk} + H_{singular} \\ &= \left(\frac{M}{8G} - \frac{\pi l\sqrt{M}}{2G\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

我们考察 $M < 0$，由于孤子的普遍结构，我们考虑曲面 Σ，其中 $r = 0$ 处的锥形奇点由曲面 $[r, \phi]$ 构成，因此度规所表示的空间不再是弯曲空间。由于 $r = 0$ 旋转分量 ϕ 不再产生贡献，可知 r 是确定的，因此空间参数 r 不变且不产生贡献，故只有时间参数 t 对曲面 Σ 上的积分有贡献，其中描述奇点处切向量的正交坐标为

$$n_1^\mu = (0, \sqrt{g^{11}}, 0), \qquad n_2^\mu = (0, 0, \sqrt{g^{22}}). \tag{44}$$

奇点的积分形式为

$$\begin{aligned} H_{\text{singular}}^{soliton} &= -\frac{(1-\alpha)}{4G\beta}\int_0^\beta dt\sqrt{g_{00}|_{r=0}}\left[1 + \frac{3}{4m^2}R - \frac{1}{m^2}R_{\mu\nu}\left(n^\mu n^\nu\right)\right] \\ &= -\frac{(1-\alpha)}{4G}\sqrt{-M}\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right). \end{aligned} \tag{45}$$

鉴于在 $M < 0$ 处考察了相变，亏角与 M 相关是合理的。我们选择 $\alpha = \sqrt{-M}$，于是

$$H_{\text{singular}}^{soliton} = -\frac{(1-\sqrt{-M})}{4G}\sqrt{-M}\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right). \tag{46}$$

孤子态的自由能为 $H_{soliton}$，

$$\begin{aligned} F_{soliton} = H_{soliton} &= H_{bulk} + H_{\text{singular}}^{soliton} \\ &= -\frac{1}{8G}\left(M + 2\sqrt{-M}\right)\left(1 - \frac{1}{2m^2l^2}\right). \end{aligned} \tag{47}$$

图2中 F_{bh} 和 $F_{soliton}$ 的两个端点在 $M = 0$ 处相连，代表着一次相变。由于孤子态曲线是连续函数，并与黑洞态曲线相连，因此这种情况下的相变是连续的。

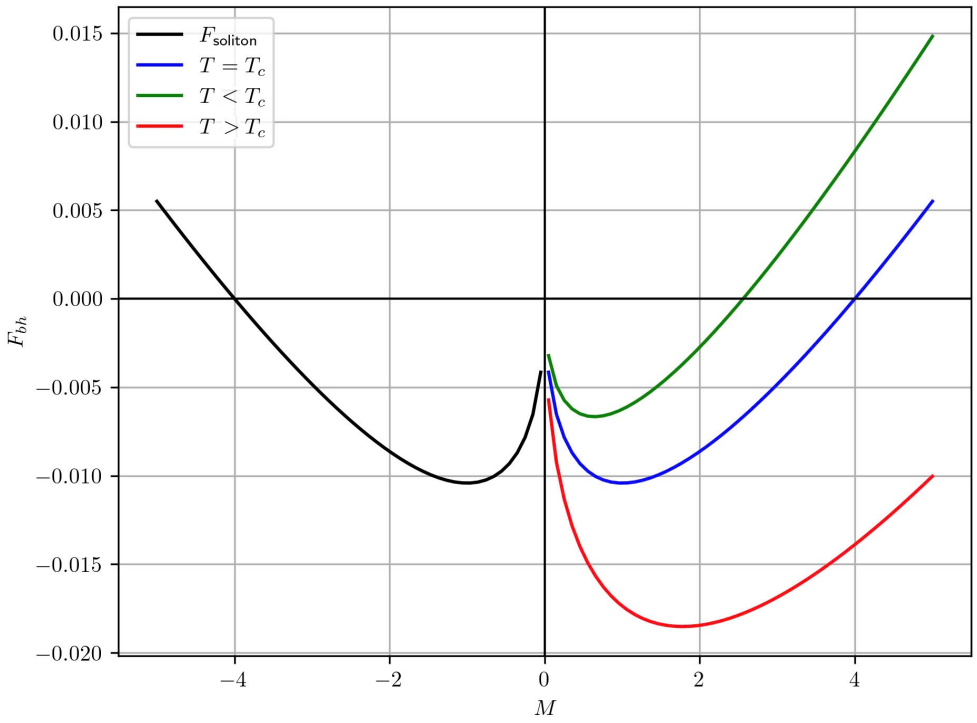


图2：在固定温度 T 下，孤子和BTZ黑洞相对于 M的壳外自由能。

D. 评估

与基于作用量的方法类似，壳上情形下的哈密顿量方法给出了临界温度 $T_C = \dfrac{1}{2\pi l'}$，在该温度下，热孤子态与黑洞态之间会发生转变。系统会瞬时发生转变，因此我们得出结论：壳上情形下的霍金-佩奇相变是一级相变。

在壳外构型中，黑洞的几何由带有亏角的锥形奇点描述，这表明存在孤子态 $M < 0$。与在临界值处瞬间发生相变的壳上情形不同，壳外时空中的相变涉及孤子态与黑洞态之间的连接，两者在 $M = 0$ 处相连。因此，这种相变是连续发生的，由此可以得出结论：壳外构型中的霍金-佩奇相变是二级相变。

IV. 莱斯纳-诺德斯特伦黑洞

赖斯纳-诺德斯特伦黑洞是球对称、非旋转、带电的四维黑洞的一种解。反德西特时空中的赖斯纳-诺德斯特伦黑洞度规形式为 [13]

$$ds^2_{RN} = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \tag{48}$$

其中 $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}$。ADM质量为 M，反德西特半径为 l，电荷为Q。事件视界 r_H 是下列方程的解

$$r_H^4 + l^2 r_H^2 - 2Ml^2 r_H + Q^2 l^2 = 0 \tag{49}$$

该方程形式复杂，且要求 r_H 等于或大于某个正的常数。由于 $r_H = r_H(M)$，因此 M 必须等于或大于相应的正最小阈值。

此外，我们还有霍金温度，

$$T_H = \frac{1}{4\pi}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r_H} = \frac{1}{2\pi l^2 r_H^3}\left(Ml^2 r_H - Q^2 l^2 + r_H^4\right). \tag{50}$$

我们考察爱因斯坦-希尔伯特作用量以及包含高阶导数项的作用量，其形式如下:

$$I_{bulk} = I_{EH} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}} dx^4\sqrt{-g}(R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \tag{51}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是电磁场张量，矢量场为 A_μ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad A = A_\mu dx^\mu = -\frac{Q}{r}dt. \tag{52}$$

为了得到完整的欧几里得作用量，我们需要添加项 I_{GGH} ，该项是对具有边界条件 $r \to \infty$ 的超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 进行积分后得到的边界作用量；为了对作用量进行归一化，我们还需要添加项 I_{ct} 以消除发散。总作用量为:

$$I = I_{\text{bulk}} + I_{GGH} + I_{ct}, \tag{53}$$

$$I_{GGH} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\mathcal{M}} dx^3\sqrt{-\gamma}K, \tag{54}$$

$$I_{ct} = \frac{1}{8\pi}\int_{\partial\mathcal{M}} dx^3\sqrt{-\gamma}K_0. \tag{55}$$

根据上述结果，我们可以推导出系统的拉格朗日量：

$$I = \int_{\mathcal{M}} dx^4 \, \mathcal{L}_{\mathcal{M}} + \int_{\partial\mathcal{M}} dx^3 \, \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}. \tag{56}$$

with

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} \;=\; \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,(R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\,, \tag{57}$$

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}} \;=\; -\frac{1}{8\pi}\sqrt{-\gamma}(K - K_0). \tag{58}$$

我们可以用空间度规 $\mathcal{M}$ 来表示空间度规 $\partial\mathcal{M}$ ，

$$ds^2_{RN} \;=\; N^2 dr^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \tag{59}$$

其中

$$N = \sqrt{\frac{1}{f(r)}}, \qquad N^i = 0, \qquad \gamma_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{60}$$

与BTZ黑洞类似，RN黑洞的哈密顿量由两个分量组成，分别对应拉格朗日量中的两个分量，

$$H_{\mathcal{M}} \;\;= \int_{\mathcal{M}} dx^3 \, (p^{rs}_{\mathcal{M}} \partial_0 g_{rs_{\mathcal{M}}} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}}) = \;\; - \int_{\mathcal{M}} dx^3 \, \mathcal{L}_{\mathcal{M}}, \tag{61}$$

$$H_{\partial\mathcal{M}} \;= \int_{\mathcal{M}} dx^2 \, (p^{rs}_{\partial\mathcal{M}} \partial_0 g_{rs_{\partial\mathcal{M}}} - \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}) = \; - \int_{\partial\mathcal{M}} dx^2 \, \mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}. \tag{62}$$

A. 黑洞的哈密顿量

由 ds^2_{RN} 在空间 $\mathcal{M}$中导出的度规形式为

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \;\; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{63}$$

里奇张量以矩阵形式计算，

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{Q^2}{r^4} - \frac{3}{l^2}\right) \begin{pmatrix} -g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{64}$$

以及电磁场的贡献 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{Q^2}{r^4}$。曲面上的引力拉格朗日量为 $\mathcal{M}$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{8\pi}\frac{Q^2}{r^2}\sin\theta. \tag{65}$$

对于 $N_i = 0$，我们推导出外曲率 $K_{ij} = -\frac{\sqrt{f}(r)}{2}\overline{\partial_r \gamma_{ij}}$，以及超曲面 $\partial\mathcal{M}$，$K_0 = \frac{\sqrt{f}}{f}\frac{r}{l^2} - \frac{\sqrt{f}}{r^2}\partial_r r^2$ 上的归一化项。超曲面$\partial\mathcal{M}$ 的拉格朗日量形式为

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{8\pi}\left(M - \frac{Q^2}{r}\right)\sin\theta. \tag{66}$$

RN黑洞的哈密顿量形式为

$$\begin{aligned} H_{bh} &= H_{\mathcal{M}} + H_{\partial\mathcal{M}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(M - \frac{Q^2}{r_H}\right), \end{aligned} \tag{67}$$

其中

$$H_{\mathcal{M}} = -\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_H}\right), \tag{68}$$

$$H_{\partial\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}\left(M - \frac{Q^2}{r}\right). \tag{69}$$

B. 壳上

在壳上情形中，我们考察推导出的哈密顿量本身

$$H_{bh} = F_{bh} = -\frac{1}{2}\left(M - \frac{Q^2}{r_H}\right). \tag{70}$$

考虑 $M = 0$ 和 $Q = 0$，此时度规具有反德西特形式，我们现在可以研究孤子。因此，孤子态的哈密顿量为

$$H_{soliton} = H_{\mathcal{M}_{soliton}} + H_{\partial\mathcal{M}_{soliton}} = 0.$$

根据连续性条件，$H_{bh} = H_{soliton}$，因此 $M = Q^2$。我们得到临界r_H温度 $T_C = \frac{r_H}{2\pi l^2}$。

图3表明，壳上自由能存在一个下界，即最小质量；这一界限的存在是由电荷 Q导致的。此外，相

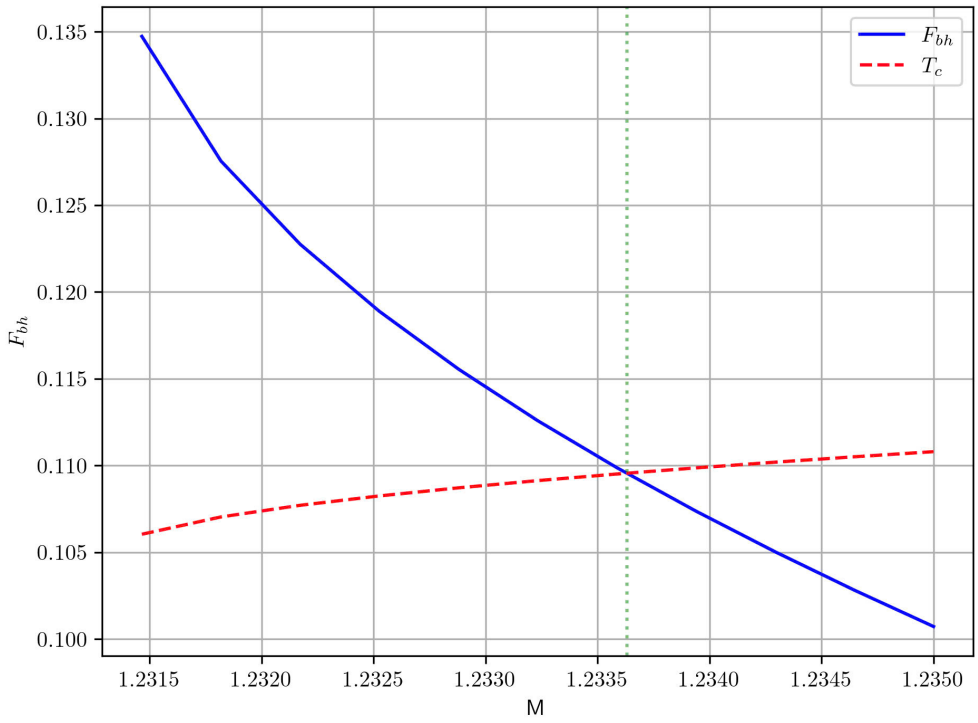


图3：固定电荷的 RN黑洞的壳上自由能和临界温度随 M 的变化。

变发生在 F_{bh} 线与 T_C 线的交点处，从孤子态转变为黑洞态。与BTZ黑洞类似，壳上时空中的相变瞬时发生，因此霍金-佩奇相变是一阶相变。

C. 壳外

我们考察锥周期为 $\mathcal{M}_\alpha$、亏角为 $2\pi\,(1-\alpha)$ 以及奇点集为 Σ 对黑洞产生的任意影响。因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{M}} &= \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left[R^{(\alpha)} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \\ &= \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left[4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma - \frac{Q^2}{r^4}\right] \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{bulk}}} + \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}.\end{aligned} \tag{71}$$

C仅考虑 $H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}$，我们根据 δ_Σ将各项分开，

$$H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} = -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}\int_\Sigma d\Sigma\sqrt{|g|}. \tag{72}$$

我们考察奇异集 Σ，其中 $r=r_H$ 处的圆锥由曲面$[t,r]$ 在 Σ中旋转而成。此时空间参数固定，因此不对积分作出贡献。同样，时间参数之前的元素也消失了，因此时间不再对积分作出贡献。因此，只有天顶角 θ 和方位角ϕ 作出贡献，描述切向量的坐标为

$$n_1^\mu=(\sqrt{g^{00}},0,0,0),\qquad n_2^\mu=(0,\sqrt{g^{11}},0,0). \tag{73}$$

我们选择固定系数 $\alpha=1$或 $\alpha=T\beta=\dfrac{1}{2\pi l^2 r_H^3}\left(Ml^2r_H-Q^2l^2+r_H^4\right)\beta$,

$$\begin{aligned} H_{\text{singular}} &= -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}r_H^2\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= -\frac{\pi}{\beta}r_H^2+\frac{r_H^3}{2l^2}+\frac{1}{2}\left(M-\frac{Q^2}{r_H}\right). \end{aligned} \tag{74}$$

黑洞态的自由能为

$$\begin{aligned} F_{bh}=H_{bh} &= H_{bulk}+H_{singular} \\ &= \frac{r_H^3}{2l^2}-\frac{\pi}{\beta}r_H^2. \end{aligned} \tag{75}$$

我们考虑 M 使得 $T<T_C$，由于孤子具有一般结构，我们考虑曲面 Σ，其中 $r=\dfrac{Q^2}{2M}$处的锥形奇点由切向量 r组成，因为在此处，度规所表示的空间不再是弯曲空间；由于 $r=\dfrac{Q^2}{2M}$被定义为，因此空间参数 r 不会变化，故不会产生贡献。因此，对曲面 Σ 上的积分仍有贡献的参数包括：时间 t、天顶角 θ、方位角 ϕ，描述奇点处切向量的坐标为

$$n_1^\mu=(0,\sqrt{g^{11}},0,0). \tag{76}$$

奇点的积分形式为

$$\begin{aligned} H_{\text{singular}}^{soliton} &= -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}r^2\sqrt{f}\Big|_{r=\frac{Q^2}{2M}}\int_0^\beta dt\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= -\pi(1-\alpha)\frac{Q^4}{4M^2}\sqrt{1+\frac{Q^4}{4M^2l^2}}. \end{aligned} \tag{77}$$

考虑到 $T<T_C$ 处的相变，亏角与 M 相关是合理的；由于存在 $M_{irreducible}$，我们选择 $\alpha=\sqrt{2\pi-M}$。

$$H_{\text{singular}}^{soliton} = -\pi(1-\sqrt{2\pi-M})\frac{Q^4}{4M^2}\sqrt{1+\frac{Q^4}{4M^2l^2}}. \tag{78}$$

孤子态的自由能为

$$\begin{aligned} H_{soliton} = F_{soliton} &= H_{bulk} + H_{\text{singular}}^{soliton} \\ &= -\frac{1}{2}\left(M-\frac{Q^2}{r_H}\right) - \pi(1-\sqrt{2\pi-M})\frac{Q^4}{4M^2}\sqrt{1+\frac{Q^4}{4M^2l^2}}. \end{aligned} \tag{79}$$

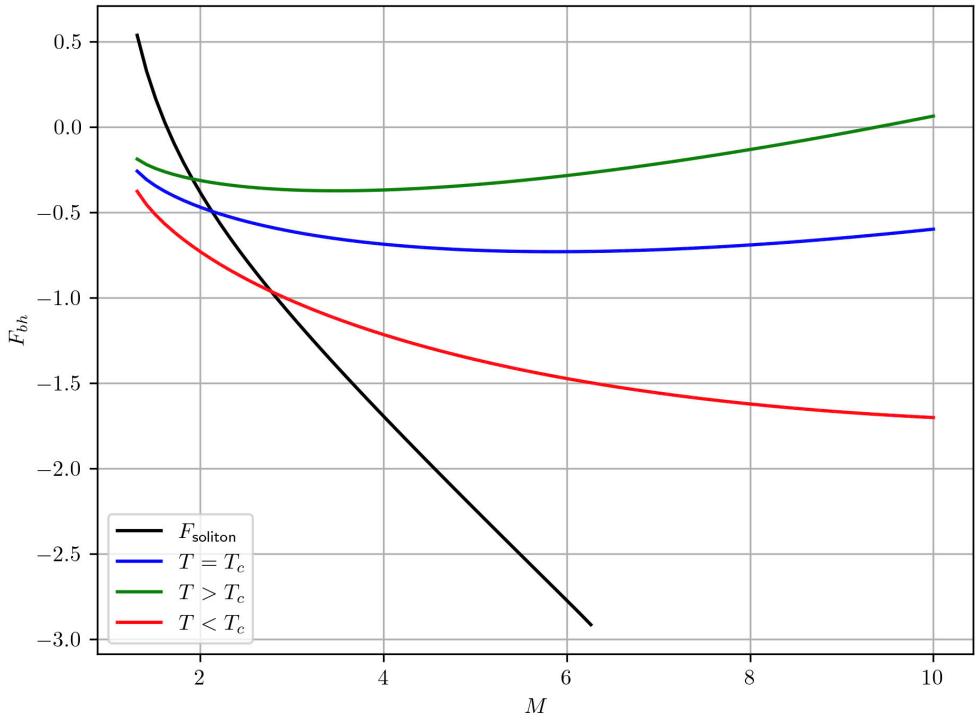


图4：固定温度 T 和电荷 Q 时，孤子和RN黑洞的壳外自由能随 M的变化。

从图 4 可以看出，壳外情形下，孤子态和黑洞态的自由能都有一个下界，它代表质量阈值。与壳上情形类似，这一阈值的存在源于电荷 Q。此外，孤子态的自由能有一个由最小质量决定的上界，因此孤子态只在某些条件下存在。值得注意的是，两种态的自由能曲线相交，这表明两种态共存。因此，相变

只是在孤子态和黑洞态之间重新分配统计权重，并非截然分明，因此可以视为连续相变。

D. 评估

在壳上情形下，我们得到临界温度 $T_C = \dfrac{r_H}{2\pi l}$，在该温度下黑洞态与热孤子态之间发生相变。重要的是，电荷 Q 的存在要求黑洞具有最小质量，事件视界才能存在。因此，由于该相变是瞬时发生的，所以它属于一阶相变。

同样，在壳外构型下，电荷要求系统达到质量阈值，并将孤子的存在限制在一定范围内；此外，还使孤子态与黑洞态能够共存。当自由能相交时发生相变，两个态之间的概率随之重新分配。随着温度升高，黑洞态逐渐占据主导地位；相反，随着温度降低，在其存在范围内，孤子态逐渐占据主导地位。因此，由于该相变是连续发生的，所以它属于二阶相变。

V. 克尔-纽曼黑洞

克尔-纽曼 [14] 是球对称、旋转且带电的四维黑洞度规。在采用博耶-林德奎斯特坐标的反德西特模型中，度规形式为

$$\begin{aligned} ds^2_{KN} = & \left(-\frac{\Delta_r}{\rho^2}+\frac{a^2\Delta_\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\right)dt^2+\left[\frac{a\Delta_r\sin^2\theta}{\Xi\rho^2}-\frac{a(r^2+a^2)\Delta_\theta\sin^2\theta}{\Xi\rho^2}\right]dtd\phi \\ & +\frac{\rho^2}{\Delta_r}dr^2+\frac{\rho^2}{\Delta_\theta}d\theta^2+\left[\frac{a\Delta_r\sin^2\theta}{\Xi\rho^2}-\frac{a(r^2+a^2)\Delta_\theta\sin^2\theta}{\Xi\rho^2}\right]d\phi dt \\ & +\left(-\frac{a^2\Delta_r\sin^4\theta}{\Xi^2\rho^2}+\frac{(r^2+a^2)^2\Delta_\theta\sin^2\theta}{\Xi^2\rho^2}\right)d\phi^2, \end{aligned} \tag{80}$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_r = & \left(r^2+a^2\right)\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)-2Mr+\left(q_e^2+q_m^2\right), \qquad \rho^2 = r^2+a^2\cos^2\theta, \\ \Delta_\theta = & \quad 1-\frac{a^2}{l^2}\cos^2\theta, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Xi = \quad 1-\frac{a^2}{l^2}. \end{aligned} \tag{81}$$

其中， M 是ADM质量， l 是反德西特半径，电磁荷为 q_e、 q_m，旋转参数为 a。事件视界 r_H是下列方程的解：

$$\left(r_H^2+a^2\right)\left(1+\frac{r_H^2}{l^2}\right)-2Mr_H+\left(q_e^2+q_m^2\right)=0, \tag{82}$$

与RN黑洞类似， r_H 较为复杂，并且由于电荷和旋转的存在，事件视界的存在要求质量达到最小值。

霍金温度(T_H)的形式为:

$$T_H=\frac{1}{4\pi}\frac{r_H}{\left(r_H^2+a^2\right)^2}\left[1+\frac{a^2}{l^2}+3\frac{r_H^2}{l^2}-\frac{a^2-(q_e^2+q_m^2)}{r_H^2}\right]. \tag{83}$$

爱因斯坦-希尔伯特作用量为

$$I_{bulk}=I_{EH}\ =\ \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{M}}d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \tag{84}$$

$F_{\mu\nu}$ 中的矢量场 A_μ 为

$$A=-\frac{q_e r}{\rho\sqrt{\Delta_r}}e^0-\frac{q_m\cos\theta}{\rho\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}e^3, \tag{85}$$

且 $F_{\mu\nu}$ 可用标架坐标表示,

$$\begin{aligned}F\ =\ &-\frac{1}{\rho^4}\left[q_e\left(r^2-a^2\cos^2\theta\right)+2q_m ra\cos\theta\right]e^0\wedge e^1\\&+\frac{1}{\rho^4}\left[q_m\left(r^2-a^2\cos^2\theta\right)-2q_e ra\cos\theta\right]e^2\wedge e^3,\end{aligned} \tag{86}$$

其中标架矢量为,

$$\begin{aligned}e^0=&\ \frac{\sqrt{\Delta_r}}{\rho}\left(dt-\frac{a\sin^2\theta}{\Xi}d\phi\right), &e^1=&\ \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_r}},\\e^3=&\ \frac{\sqrt{\Delta_\theta}\sin\theta}{\rho}\left(adt-\frac{r^2+a^2}{\Xi}d\phi\right), &e^2=&\ \frac{\rho}{\sqrt{\Delta_\theta}}.\end{aligned} \tag{87}$$

总作用量为

$$I\ =\ I_{\rm bulk}+I_{GGH}+I_{ct}, \tag{88}$$

$$I_{GGH}\ =\ -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\mathcal{M}}d^3x\sqrt{-\gamma}K, \tag{89}$$

$$I_{ct}\ =\ \frac{1}{8\pi}\int_{\partial\mathcal{M}}d^3x\sqrt{-\gamma}K_0. \tag{90}$$

由上述效应，我们可以得到该系统的拉格朗日量,

$$I=\int_{\mathcal{M}}d^4x\,\mathcal{L}_{\mathcal{M}}+\int_{\partial\mathcal{M}}d^3x\,\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}},\tag{91}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}\;=\;\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left(R-2\Lambda-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),\tag{92}$$

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}\;=\;-\frac{1}{8\pi}\sqrt{-\gamma}(K-K_0).\tag{93}$$

空间度规 $\mathcal{M}$ 可以用空间度规 $\partial\mathcal{M}$表示，因此

$$ds^2_{\rm bulk}=N^2dr^2+\gamma_{ij}dx^idx^j,\tag{94}$$

with

$$N=\sqrt{\frac{\Delta_r}{\rho^2}},\qquad N^i=0,\qquad \gamma_{ij}\;=\;\begin{pmatrix}g_{00}&0&g_{03}\\0&g_{22}&0\\g_{30}&0&g_{33}\end{pmatrix}\tag{95}$$

A. 黑洞的哈密顿量

由 ds^2_{RN} 导出的空间 $\mathcal{M}$ 中的度规形式为

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}g_{00}&0&0&g_{03}\\0&g_{11}&0&0\\0&0&g_{22}&0\\g_{30}&0&0&g_{33}\end{pmatrix},g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\frac{g_{33}}{g_{00}g_{33}-g_{03}g_{30}}&0&0&-\frac{g_{30}}{g_{00}g_{33}-g_{03}g_{30}}\\0&\frac{1}{g_{11}}&0&0\\0&0&\frac{1}{g_{22}}&0\\-\frac{g_{03}}{g_{00}g_{33}-g_{03}g_{30}}&0&0&\frac{g_{00}}{g_{00}g_{33}-g_{03}g_{30}}\end{pmatrix}.\tag{96}$$

利用 $\Lambda=-\frac{3}{l^2}$，我们可推导出 $\mathcal{M}$ 曲面上的拉格朗日量，

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}\;=\;-\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left(\frac{6}{l^2}+F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right).\tag{97}$$

对于 $N_i=0$，我们推导出超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 上的外曲率 $\overline{K_{ij}}=-\frac{\sqrt{\Delta_r}}{2\rho}\partial_r\gamma_{ij}$ 和归一化项 $K_0=-\frac{\sqrt{\Delta_r}}{2\rho}\left(\gamma^{11}\partial_r\gamma_{11}+\Xi r\right)$。因此，我们得到超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 上的拉格朗日量：

$$\mathcal{L}_{\partial\mathcal{M}}\;=\;\frac{1}{16\pi\Xi l^2}\left(2r^3+2a^2r-2Ml^2\right)\sin\theta.\tag{98}$$

我们推导出哈密顿量,

$$H_{\mathcal{M}} = \frac{1}{4\Xi l^2}\left[2r^3+2a^2r-2r_H^3-2a^2r_H+2\frac{(q_e^2-q_m^2)\,r}{a^2+r^2}l^2-2\frac{(q_e^2-q_m^2)\,r_H}{a^2+r_H^2}l^2\right], \tag{99}$$

$$H_{\partial\mathcal{M}} = -\frac{1}{4\Xi l^2}\left(2r^3+2a^2r-2Ml^2\right). \tag{100}$$

对于 $r\to\infty$ 的边界条件，以及基于 $\Delta_r(r_H) = \Delta_r(r_H)\,r_H = 0$ 的变换，黑洞克尔-纽曼黑洞的哈密顿量具有如下形式

$$\begin{aligned} H_{bh} &= H_{\mathcal{M}}+H_{\partial\mathcal{M}}=F_{bh} \\ &= \frac{1}{4\Xi l^2}\left[-r_H^3+\Xi l^2 r_H+\frac{a^2l^2}{r_H}+\frac{(q_e^2+q_m^2)\,l^2}{r_H}-2\frac{(q_e^2-q_m^2)\,l^2}{a^2+r_H^2}r_H\right]. \end{aligned} \tag{101}$$

B. 壳上

在壳上时空中，我们只考察电荷 $q_e = q$，而不考虑磁荷 $q_m=0$，因此

$$H_{bh}=F_{bh} = \frac{1}{4\Xi l^2}\left[-r_H^3+\Xi l^2 r_H+\frac{a^2l^2}{r_H}+\frac{q^2l^2}{r_H}-2\frac{q^2l^2}{a^2+r_H^2}r_H\right]. \tag{102}$$

给定 $m=0$、 $a=0$ 和 $q=0$，度规具有反德西特形式以及 $r_H=0$，现在我们可以考察孤子态:

$$H_{soliton}=H_{\mathcal{M}_{soliton}}+H_{\partial\mathcal{M}_{soliton}}=0. \tag{103}$$

根据连续性条件 $H_{bh}=H_{soliton}$，这意味着 $M=(r_H^2+a^2)^2+q^2a^2$。我们得到 $r_H^2+a^2$

相变温度:

$$T_C=\frac{1}{2\pi l^2}\frac{1}{\left(r_H^2+a^2\right)^2 r_H}\left[\frac{r_H^4}{l^2}-a^2+\frac{\left(r_H^2+a^2\right)^2+q^2a^2}{r_H^2+a^2}\right]. \tag{104}$$

首先，对比图5和图3可以发现，RN黑洞和克尔-纽曼黑洞的壳上自由能在定性上具有相同的形式。此外，电荷q和旋转 a 决定了质量的最低阈值。 F_{bh} 线与 T_C 线相交时，系统发生从孤子态到黑洞态的相变。然而，由于系统具有球对称性，旋转的重要性尚未得到明确体现。相变瞬间发生，因此属于一级相变。

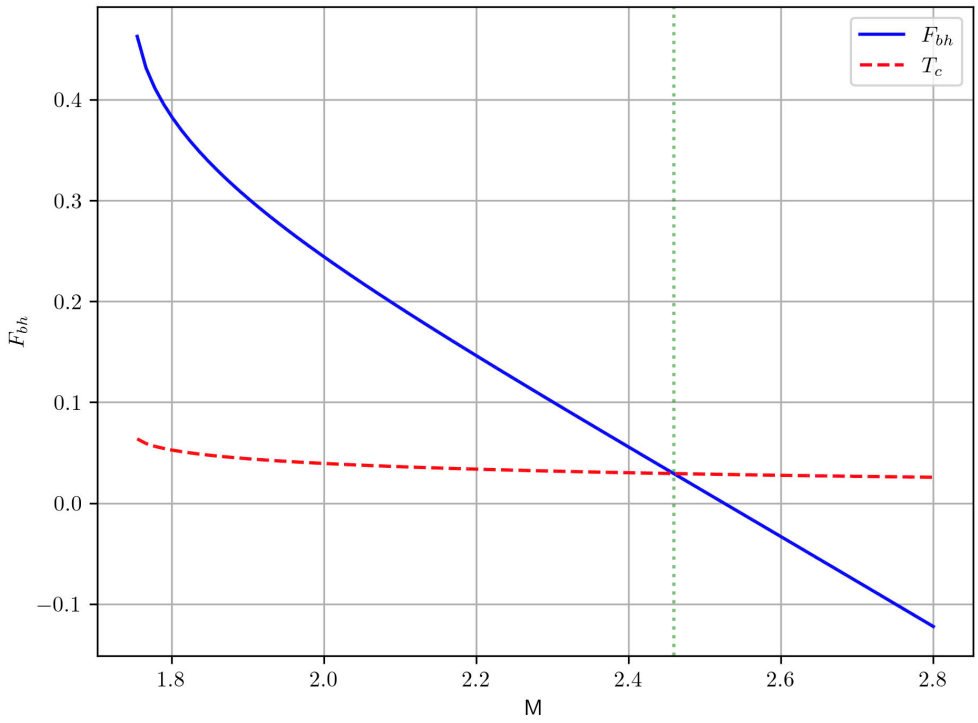


图 5：在克尔-纽曼黑洞的电荷和旋转固定时，壳上自由能和临界温度关于 M 的变化。

C. 壳外

我们将壳外时空代入拉格朗日量，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{M}} &= \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left[R^{(\alpha)} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \\ &= \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\left[R + 4\pi(1-\alpha)\delta_{\Sigma} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \\ &= \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{bulk}}} + \mathcal{L}_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}. \end{aligned} \tag{105}$$

仅考察 $H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}}$，我们根据 δ_{Σ} 对各项进行分类，

$$H_{\mathcal{M}_{\text{singular}}} = -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}\int_{\Sigma} d\Sigma\sqrt{|g|}. \tag{106}$$

我们考察奇异集 Σ，其中在 $r = r_H$ 处的圆锥由曲面 $[t, r]$ 在 Σ 中旋转而成。此时空间参数固定，因此不对积分作出贡献。因此，只有时间参数 t、天顶角 θ 和方位角 ϕ 有贡献，描述切向量的坐标为

$$n_1^\mu = (0, \sqrt{g^{11}}, 0, 0), \tag{107}$$

因此

$$H_{\text{singular}} = -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}\int_0^\beta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\left|g_{22}\left(g_{00}g_{33}-g_{30}g_{03}\right)\right|}\Big|_{\Delta_r=0}dtd\theta d\phi = 0. \tag{108}$$

推导黑洞态的自由能,

$$\begin{aligned} H_{bh} = F_{bh} &= H_{bulk} + H_{singular} \\ &= \frac{1}{4\Xi l^2}\left[-r_H^3 + \Xi l^2 r_H + \frac{a^2l^2}{r_H} + \frac{q^2l^2}{r_H} - 2\frac{q^2l^2}{a^2+r_H^2}r_H\right]. \end{aligned} \tag{109}$$

我们考虑 M，使得 $T < T_C$。由于孤子的普遍性质，我们考察曲面 Σ，其中 $r=0$ 处的锥形奇点由切向量 r 构成，因为在此处，由度规表示的时空不再弯曲，且 $r=0$ 是确定的，因此空间参数 r 不产生贡献。接下来，对曲面 Σ 上积分仍有贡献的参数包括：时间 t、天顶角 θ、方位角 ϕ，奇点处切向量的坐标为

$$n_1^\mu = (0, \sqrt{g^{11}}, 0, 0), \tag{110}$$

奇点的积分形式为

$$\begin{aligned} H_{\text{singular}}^{soliton} &= -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}\int_0^\beta\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{\left|g_{22}\left(g_{00}g_{33}-g_{30}g_{03}\right)\right|}\Big|_{r=0}dtd\theta d\phi \\ &= -\frac{(1-\alpha)}{4\beta}\sqrt{a^2\left(a^2+q^2\right)}\int_0^\beta dt\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = 0. \end{aligned} \tag{111}$$

推导孤子态的自由能,

$$\begin{aligned} H_{soliton} = F_{soliton} &= H_{bulk} + H_{\text{singular}}^{soliton} \\ &= \frac{1}{4\Xi l^2}\left[-r_H^3 + \Xi l^2 r_H + \frac{a^2l^2}{r_H} + \frac{q^2l^2}{r_H} - 2\frac{q^2l^2}{a^2+r_H^2}r_H\right]. \end{aligned} \tag{112}$$

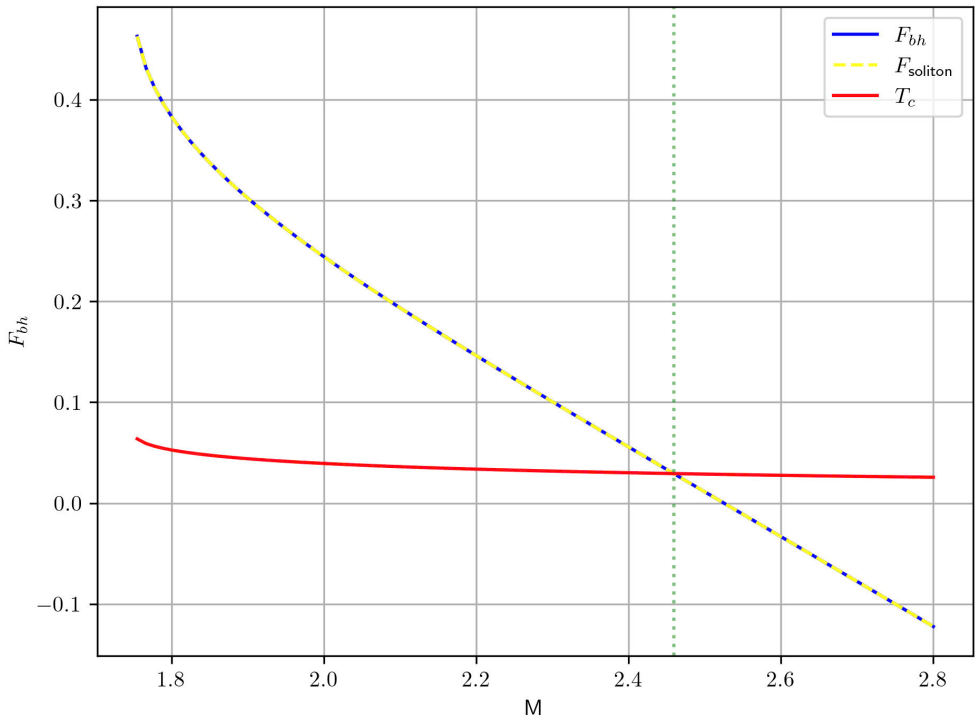


图 6：固定克尔-纽曼黑洞的电荷和旋转时，壳外自由能和临界温度随 M 的变化。

值得注意的是，图6中黑洞的自由能与图5完全相同，这源于旋转运动抵消了所有任意的曲面贡献。因此，无论是壳上还是壳外构型，哈密顿量都得以守恒。此外，由于旋转的存在，孤子的自由能也与黑洞的自由能完全相同。旋转运动还消除了孤子的能量上限，使孤子态与黑洞态在整个热力学过程中共存。因此，相变只是在孤子态与黑洞态之间重新分配统计权重，而不存在明显的分界，这使其可以被解释为连续相变。

D. 评估

在壳上时空中，相变发生在临界温度 T_C (Eq.104) 时，此时系统从孤子态转变为黑洞态。电荷和旋转意味着事件视界的存在受到质量阈值的限制。因此，该相变是一阶相变。

在壳外构型中，电荷的存在要求质量达到最小值；旋转则抵消了所有任意的表面贡献，并消除了孤子态与黑洞态之间的区别，使两种态共存。相变会重新分配系统的概率：随着温度升高，黑洞态逐渐占据主导；反之，随着温度降低，孤子态逐渐占据主导。因此，该相变是二阶相变。

VI. 结论与展望

本文运用引力场的哈密顿形式，研究了反德西特时空中巴纳多斯-特特尔博伊姆-扎内利黑洞的霍金-佩奇相变。就黑洞热力学而言，哈密顿量对应于黑洞的自由能。接下来，我们进一步将哈密顿形式扩展到反德西特时空中的赖斯纳-诺德斯特伦黑洞和克尔-纽曼黑洞，并研究其壳上和壳外情形下的霍金-佩奇相变。

哈密顿形式所得结果与直接从作用量推导的结果一致：在壳上情形中，相变为一阶，而在壳外构型中则为二阶；与此同时，量子性质因黑洞特征不同而呈现出不同表现。因此，哈密顿形式使我们能够全面研究霍金-佩奇相变，并在不增加计算开销的情况下得到等价结果。此外，在这一背景下构造哈密顿量，为实现引力场严格的数学量子化提供了一条有前景的途径。

致谢

本研究由胡志明市国家大学理科大学通过项目编号 T2025- 37 资助

[1] R. M. Wald，Living Rev.4 （2001年）。

[2] J. M. Bardeen、B. Carter 和 S. W. Hawking，数学物理 31，161–170（1973年）。[3] J. D. Bekenstein，物理评论 D 7，2333–2346（1973年）。[4] S. Hod，物理快报 B 751，241–245（2015年）。[5] E. Witten，理论与数学物理进展 10.48550/ARXIV.HEP-TH/9802150（1998年）。[6] R. A. Hennigar、D. Kubizˇn´ak、S. Murk 和 I. Soranidis，高能物理学期刊 2025（11）。[7] S. W. Hawking 和 D. N. Page，数学物理 87，577–588（1983年）。[8] M. Eune、W. Kim 和 S.-H. Yi，高能物理学期刊 2013（3）。[9] S.-J. Zhang，物理快报 B 747，158–163（2015年）。[10] D. Birmingham、I. Sachs 和 S. Sen，国际现代物理学杂志 D 10，833–857（2001年）。[11] C. S. Peca 和 J. P. S. Lemos，物理评论 D 59（1999年）。[12] C.-M. Chen 和 J.-R. Sun，物理学杂志：会议系列 330，012009（2011年）。[13] P. Mitra，物理快报 B 459，119–124（1999年）。[14] M. M. Caldarelli、G. Cognola 和 D. Klemm，经典与量子引力 17，399–420（1999年）。[15] T. Adamo 和 E. T. Newman，学术百科 9，31791（2014年）。[16] O. Ruiz、U. Molina 和 P. Viloria，物理学杂志：会议系列 1219，012016（2019年）。[17] W. Israel，物理评论 164，1776–1779（1967年）。[18] W. Israel，数学物理 8，245–260（1968年）。[19] R. C. Pappas，美国物理学杂志 52，255–256（1984年）。[20] P. A. M. Dirac，伦敦皇家学会会刊 A 辑 246，333–343（1958年）。[21] M. Kasuya，进展物理学 60，167–177（1978年）。[22] P. Kraus、F. Larsen 和 R. Siebelink，核物理 B 563，259–278（1999年）。[23] R. Emparan、C. V. Johnson 和 R. C. Myers，物理评论 D 60 （ 1999 年）。[24] D. P. Jatkar 和 A. Sinha，物理评论快报 106 （ 2011 年）。[25] S. Chakraborty 和 T. Padmanabhan，物理评论 D 101（2020年）。[26] M. Krˇsˇs´ak，物理评论 D 110（2024年）。