arXiv:2603.16591v1 [math.DS] 17 Mar 2026

# 子移位自同构群的周期点与剩余有限性

Ville Salo
vosalo@utu.fi

2026年3月18日

**摘要**

若全周期点在子移位 $X$ 中稠密，则其自同构群是剩余有限的。我们证明了一个弱逆命题：若周期点在子移位 $X$ 中不稠密，则对于全移位 $Y$（以及足够类满移位子移位），$X \times Y$ 的自同构群不是剩余有限的。另一方面，我们证明，块拼接 $\mathbb{Z}^2$-子移位的自同构群总是局部可嵌入有限群（因而是索菲克的）。Hochman 最近构造了一个没有周期点的强不可约 $\mathbb{Z}^2$-子移位。将我们的结果与该例结合，便得到一个自同构群并非剩余有限的强不可约 $\mathbb{Z}^2$-子移位，从而解决了 Coornaert 和 Ceccherini-Silberstein 提出的一个问题。

## 1 引言

令 $A$ 为一个有限集，称为**字母表**（至少包含两个元素，称为**符号**），并令 $G$ 为一个可数无限群。那么，$A^G$ 在乘积拓扑下同胚于康托尔集，而 $G$ 通过 $gx_h = x_{hg}$作用于其上。这个系统称为**全移位**，而一个**子移位** 是一个 $X \subset A^G$，它是拓扑闭集，并且对所有 $g \in G$都满足 $gX = X$。我们用 Aut($X$) 表示 $X$ 的**自同构群**，即在函数复合下，由与 $G$交换的同胚$f\colon X \to X$ 构成的群。

近年来，子移位的自同构群得到了非常深入的研究。研究主要集中在群 $G = \mathbb{Z}$上的子移位。粗略而言，这些研究可分为两类：关于“类全移位”子移位 [13, 5, 16, 23, 11, 24, 6]的自同构群，以及关于“类极小／无周期子移位” [28, 9, 8, 20]的自同构群（不过自然也不是所有论文都明显属于其中一类）。

关于其他群上的子移位的自同构群，也有一些研究。最早的是 Hochman 关于 $\mathbb{Z}^d$- 子移位自同构群的论文 [14]。近期的研究 [1, 25] 则探讨了更一般的 $G$ 上的 $G$- 子移位的自同构。这些论文表明，当 $X \subset A^G$ 足够类似于全移位时，Aut($X$) 会以有趣的方式反映移位群 $G$ 的一些几何性质和代数性质。例如，[1] 表明，当 $G$ 是非 amenable 时，Aut($A^{F_2}$)嵌入 Aut($A^G$)。进而，我们可以用一个称为收缩增长的函数来表述 [25] 的结果（这里省略其定义，详见 [3, 25]）。

研究表明，当 $G$ 具有多项式增长时，全移位的自同构群 Aut($A^G$)的收缩增长至多为 $e^{e^{n^{O(1)}}}$；而对于满足格里戈尔丘克间隙猜想[12], 的所有其他群 $G$，我们可以在 Aut($A^G$)中找到一个有限生成子群，使其收缩增长为 $e^{e^{e^{n^{\Omega(1)}}}}$。研究还表明，对于任意 $d \geq 1$，Aut($A^{\mathbb{Z}^{d+1}}$)都不能抽象嵌入 Aut($A^{\mathbb{Z}^d}$)。

[25] 中研究的收缩增长是一种与剩余有限性相关的定量性质，而剩余有限性是群的一种布尔性质。本文详细研究了当 $X$ 不是“类满移位”的子移位时，Aut($X$)的这一性质。我们证明，它大致对应于具有稠密周期点这一动力性质，不过我们必须先将子移位 $X$ 嵌入一个直积中（一个没有周期点的子移位 $X$ 可能具有平凡的自同构群）。

回顾一下，群 $\mathcal{G}$ 是剩余有限的，是指对于所有 $g \in \mathcal{G} \setminus \{e_{\mathcal{G}}\}$（$e$ 始终表示单位元），都存在一个同态 $\phi$： $\mathcal{G} \to Q$到有限群 $Q$，使得 $\phi(g) \neq e_Q$。若子移位 $X \subset A^G$中的点 $x \in X$ 的点稳定子在 $G$中具有有限指数，则称该点为全周期的。众所周知，如果 $X \subset A^G$ 是一个具有稠密全周期点的子移位，那么 Aut($X$)是剩余有限的。我们证明了某种逆命题：

**定理 1.** 如果 $G$ 是有限生成的，且 $X \subset A^G$ 不具有稠密全周期点，那么对于 $|B| \geq 2$，群 自同构群($X \times B^G$) 不是剩余有限的。

为强调这一结论可以表述为“当且仅当”条件，注意到 $B^G$ 显然具有稠密周期点，因此也可以将结果表述如下：如果 $G$ 是有限生成的，且 $X \subset A^G$ 可以分解为一个直积与一个全移位（至少包含两个字母），那么 Aut($X$) 是剩余有限的，当且仅当 $X$ 具有稠密周期点。

该证明是构造性的，也就是说，给定一个不含全周期点的开闭集，证明会展示如何构造一个特定元素 $f \in$ Aut($X \times B^G$)，它无法在任何有限商群中得到非平凡像。事实上，给定 $n$，我们会明确构造 Aut($X \times B^G$) 的一个子群，其中包含 $f$，且该子群是若干单群的直积，而这些单群的阶都大于 $n$。

在自同构群中寻找大型单群（以及它们与剩余有限性的联系）是一个常见的思路，并且发挥着重要作用，例如见 [14, 10, 27, 25]。当然，我们注意到，Aut($X$) 中存在大型单群并不会直接排除剩余有限性——早在 [13, 16] 中就已证明，对于任意字母表 $A$，所有有限单群都嵌入 Aut($A^{\mathbb{Z}}$)，但这个群是剩余有限的。

当 $|B| \geq 2$时，群 Aut($X \times B^G$) 含有一个与 $G$ 同构的副本（见定义 5 和引理 14），因此当 $G$ 不是剩余有限的，Aut($X \times B^G$) 也不是剩余有限的（因为剩余有限性这一性质可由所有子群继承）。换言之，我们的结果主要在非周期性源于 $X$ 的动力学性质、而非仅仅因为 $G$ 的有限商群较少时才有意义。

在对 $X$ 加上一些额外条件后，可以将全移位 $B^G$ 替换为任意满足如下条件的子移位 $Y$：其中存在足够多两两可交换的局部模式。更一般的陈述见定理 5。

现在我们陈述 Coornaert 和 Ceccherini-Silberstein 在 [7] 中提出的一个问题。

**定义 1**。若存在一个 $S \Subset G$ 的有限子集，使得只要 $x$、$y \in X$ 与 $M$、$N \subset G$ 满足 $SM \cap SN = \emptyset$，就存在某个 $z \in X$，使 $z|M = x|M$ 且 $z|N = y|N$（其中 $|$表示构型的限制，并将构型视为函数），则称子移位 $X \subset A^G$ 是强不可约的。

**问题 1.** 在 $\mathbb{Z}^2$ 上是否存在一个强不可约子移位，使其自同构群不是剩余有限的？

Hochman [15] 最近证明，存在一个没有任何周期点的强不可约 $\mathbb{Z}^2$-子移位。结合我们的结果，我们解决了 [7] 的问题：

**定理 2.** 如果 $G$ 包含 $\mathbb{Z}^2$ 的一个副本，那么 $G$ 存在一个强不可约子移位，其自同构群不是剩余有限的。

每个强不可约的 $\mathbb{Z}$-子移位都有稠密周期点 [2]（[7] 中也将此归功于 Weiss），因此只要 $X$ 是强不可约的 $\mathbb{Z}$-子移位，Aut($X$) 就是剩余有限的。我们在引理 8 中回顾一个证明。

剩余有限性的一个自然弱化概念是局部可嵌入有限群 [29]。群 $\mathcal{G}$ 具有这一性质，是指对于所有 $F \Subset \mathcal{G}$，都存在一个有限群 $Q$ 和一个单射 $\phi$：$\mathcal{G} \to Q$，使得当 $g$，$g'$，$gg' \in F$ 时，$\phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$。这等价于说，对于 $\mathcal{G}$ 的有限生成子群的凯莱图中的所有球，我们都能在有限群的凯莱图中找到与之（作为图）同构的球。

我们证明，尽管强不可约 $\mathbb{Z}^2$-子移位的自同构群可能并非残余有限，但它们仍总是具有这一较弱的性质。

**定理 3.** 对于所有强不可约子移位 $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$，$\mathrm{Aut}(X)$ 都是局部可嵌入有限群的。

群的*sofic*性 是另一种更弱的性质，参见 [30]。由于定义较长，这里略去；众所周知，局部可嵌入有限群的群都是 sofic 群，因此我们有：

**推论 1.** 对于所有强不可约子移位 $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$，$\mathrm{Aut}(X)$ 都是 *sofic* 群。

**问题 2.** 对于所有强不可约 $\mathbb{Z}^3$-子移位，$\mathrm{Aut}(X)$是否局部可嵌入有限群，或者至少是 *sofic* 群？

事实上，除一个显而易见的情况外，我们不知道任何作用群的反例：如果 $G$不能局部可嵌入有限群，那么 Aut($A^G$) 也不能（类似地，任何非 sofic 群都会给出 Aut($A^G$) 的一个非 sofic 例子；但目前尚无已知的非 sofic 群）。

一个群即使不是剩余有限的，其所有有限生成子群当然也可能都是剩余有限的。一个极端的例子是非剩余有限的局部有限群，例如 $\mathbb{N}$上所有有限支撑偶置换构成的群。我们的非剩余有限性证明恰恰基于自同构群中出现大型交错群，因此，若能在一个有限生成子群中实现该证明，就很值得探究。我们称一个群为局部剩余有限，如果它的所有有限生成子群都是剩余有限的。

**定理 4**。 如果 $G$ 是有限生成的，且 $X \subset A^G$ 没有稠密的周期点，那么群自同构群$(X \times B^G)$ 在以下任一条件成立时都不是局部剩余有限的：

- $|B| = mn$ 与 $m \geq 2$、$n \geq 3$，或
- $|B| \geq 3$ 和 $X$ 是 $\mathcal{B}_1$-无周期的。

此处及下文， $\mathcal{B}_r$ 表示所选生成元集合下 $G$ 中半径为 $r$ 的球，而对于 $S \subset G$， $S$-无周期 表示对所有 $s \in S \setminus \{e\}$， $X$ 都不存在满足 $sx = x$的点 $x$。

看起来，在这个定理中任何字母表都可能适用，即使没有 $\mathcal{B}_1$-非周期性假设也是如此，但仅此处的陈述就已经需要一些技术性工作。

我们还指出一个关于群层面的当且仅当陈述（定理 2 在 $G = \mathbb{Z}^2$的情形中用到了这一点）：

**推论 2.** 设 $G$ 是一个有限生成群。设 $\mathcal{C}$ 是 $G$-子移位的一个类，该类在与全移位作直积后仍然封闭。则下列条件等价：

- 在 $\mathcal{C}$ 中的所有子移位都具有稠密全周期点，
- 在 $\mathcal{C}$ 中的所有子移位都具有剩余有限自同构群，
- 在 $\mathcal{C}$ 中的所有子移位都具有局部剩余有限自同构群，

例如， $G$ 存在一个没有稠密全周期点的强不可约子移位（有限型子移位），当且仅当它存在一个自同构群非剩余有限的强不可约子移位（有限型子移位）（定义见定义 1 和定义 2）。

# 2 定义与约定

我们有 $0 \in \mathbb{N}$。对于 $k \in \mathbb{N}$，记作 $[\![k]\!] = \{0, 1, \ldots, k-1\}$和 $[\![m,\ n]\!] = \{i \in \mathbb{Z} \mid m \leq i \leq n\}$。（因此 $[\![k]\!] = [\![0,\ k-1]\!]$、 $[\![1]\!] = \emptyset$和 $[\![0]\!]$ 未定义。）置换群 Sym($A$) 和 Alt($A$) 表示集合 $A$ 上的有限支撑置换 群（大多数情况下， $A$ 是有限集，但在第 7 节中我们也允许更大的集合）。我们用 $A \sqcup B$ 表示不交并；具体来说，它表示一个我们已知为不交的并集（因此，例如， $\{0,1\} \sqcup \{1,2\}$ 没有意义，而 $\{0\} \sqcup \{1,2\} = \{0\} \cup \{1,2\}$）。这个符号还有另一种含义，见下文。字母表 $A$ 上的字 是 $A$ 上自由幺半群中的一个元素，或是一个函数 $[\![n]\!] \to A$ （其中 $n$ 是该字的长度，即它在以 $A$ 为生成元的自由幺半群中的词范数）。对于两个字 $u$, $v$，我们记作 $u \cdot v$，或简记为 $uv$，表示它们的拼接，定义显然。有时我们写作 $d : A \cong B$，表示从 $A$ 到 $B$ 的一个双射。

我们用 $S \Subset G$ 表示 $S$ 的有限子集。所有群作用均为左作用，且满足协变性：$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$。我们将 $g$在 $x$上的作用简记为 $gx$。 $A^B$ 形式上指从 $B$ 到 $A$的函数集合，但我们称这些函数为构型，并使用下标而非函数作用表示；也就是说，若 $x \in A^B$，我们写作 $x_b$ 表示 $x(b)$，其中 $b \in B$。构型在子集 $D \subset G$ 上的限制记为 $x|D$，具体而言， $x|D$ 是由 $y_g = x_g$定义的构型$y \in A^D$。

一个模式 是一个定义域 $B$ 为有限集的构型 $x \in A^B$ 。在$G = \mathbb{Z}$的情况下，我们将长度为 $n$ 的字与具有连续定义域的模式 $[\![n]\!] \to A$ 等同。对于定义域不相交的两个模式 $p \in A^D$，$q \in A^E$，将 $A^{D \sqcup E}$ 中满足 $t_g = \begin{cases} p_g & g \in D \\ q_g & g \in E. \end{cases}$若 的模式记为 $t = p \sqcup q$，其中

我们用几段文字讨论移位约定，因为文献中存在多种约定，而每种约定都有其优点和缺点。这里选择的移位约定是 $gx_h = x_{hg}$，其中 $g$，$h \in G, x \in A^G$。这确实是协变的，因为 $gg' x_h = g' x_{hg} = x_{hgg'}$。

我们主要关注有限生成群 $G$。此时，可以将 $G$ 想象成其左凯莱图：顶点为 $G$，超边为 $(g,\ sg)$，其中 $s \in S$，而 $S$ 是 $G$的一个生成集。在这个图景中，应将 $x \mapsto gx$ 理解为把节点 $g$ 拉到原点 $e$。或者，也可以将凯莱图想象成具有一个浮动的原点；在 $gx$中，原点已经移动到 $gx$。

如果 $C \subset X$ 在子移位 $X \subset A^G$中是开闭集，我们称 $C$ 出现或发生 $g \in G$，如果 $gx \in C$，且 $g$ 是 $C$的一个出现位置。注意，这意味着“ $x$中 $g$ 处的局部图案”是 $C$。具体而言，一个开闭集是有限个柱集$[p]$ 的并，其中 $p \in A^D$，$D \Subset G$ 是一个模式，并且 $[p] = \{x \in X \mid x|D = p\}$。柱集 $[p]$ 在 $g$ 处出现，当且仅当 $x_{hg} = gx_h = p_h$ 对所有 $h \in D$都成立；这恰好意味着，在左凯莱图中，我们考察的是位置 $g$周围的相对模式。对于模式 $p \in A^D$，我们也直接使用出现/发生这一术语，将 $p$ 与 $[p]$对应起来。

子移位已在引言中定义为全移位 $A^G$ 的拓扑闭且 $G$ 不变的子集；等价地，它是由（可能无限多个） $\mathcal{F}$ 个 禁用图案 $p \in A^D$ 所定义的 $A^G$ 的子集，其中有限 $D \Subset G$，意即 $X = \{x \in A^G \mid \forall p \in F\colon\ \forall g \in G\colon\ gx|D \neq p\}$。

**定义 2.** 若存在某个开闭集 $C \subset A^G$，使得 $X = \{x \in A^G \mid \forall g \in G\colon\ \ gx \in C\}$，则称其为有限型子移位，或称有限型子移位。 $X \subset A^G$

子移位 $X \subset A^G$ 与 $Y \subset B^G$ 之间的共轭 是一个同胚 $\phi\colon X \to Y$，满足 $g \circ \phi = \phi \circ g$（群元素通过其对应的移位映射来识别）。子移位的自同构群就是其自共轭所构成的群。共轭也称为重新编码。重新编码的一个典型例子是块编码，其中取 $D \Subset G$，满足 $e \in D$，并定义 $\phi(x)_g = p \in A^D$，其中 $p_h = x_{hg}$。这将 $X$ 与 $(A^D)^G$ 的一个子移位共轭。

若 $K \subset G$，我们称 $x \in A^G$ 是 $K$-周期的，如果 $\forall g \in K\colon\ gx = x$。

本文大部分内容研究直积子移位 $X \times Y$ 的自同构群，其中 $X \subset A^G$、$Y \subset B^G$ 和 $G$ 通过 $g(x, y) = (gx, gy)$ 对角作用。我们可以将 $X \times Y$ 等价地视为群 $(A \times B)^G$ 上的子移位，方法是将 $(x, y) \in X \times Y$ 映射到 $z \in (A \times B)^G$，其中 $z_g = (x_g, y_g)$。这不应引起任何混淆。

在直积的语境下，我们采用元胞自动机理论中的标准术语：我们将 $(x, y) \in X \times Y$视为具有两条轨道。可以想象，构型 $y$ 位于 $x$“下方”。设想两个 $G$ 的左凯莱图上下叠放，分别称为上轨道 （包含来自 $X$的元素）和下轨道 （包含来自 $Y$的元素）。特别地，如果在构型 $(x, y)$ 中，开闭集 $D \subset Y$ 在开闭集的一处出现位置下方出现 $C \subset X$ 于 $g \in G$，那么我们说（即， $C$ 出现

于 $g$ 处，在 $x$中）且 $gy \in D$ （即， $D$ 在 $y$中的 $g$ 处出现）。

$g$、 $g'$ 的换位子是 $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$。 $g$关于 $h$ 的左共轭是${}^{h}g = hgh^{-1}$，右共轭是 $g^{h} = h^{-1}gh$。我们也将其记作 ${}^{-h}g = {}^{h}(g^{-1})$和 $g^{-h} = (g^{-1})^{h}$。左共轭是一个群作用，即 ${}^{a}({}^{b}c) = {}^{ab}c$。子群 $K \leq G$ 的左陪集为 $gK$ ，其中 $g \in G$。两个子群 $H$、$K \leq G$可交换，当且仅当对所有 $h \in H$、 $k \in K$都有 $hk = kh$。若 $g_1$、 $g_2$、……、$g_n \in G$，则称乘积 $g_1 g_2 \cdots g_n$为可交换乘积，当且仅当对所有 $i$、 $j \in \{1, \ldots, n\}$都有 $g_i g_j = g_j g_i$。我们也将其记作 $\prod_i g_i$。

群的商群是指在某个群同态下作为其像出现的群。这个同态称为商映射。如果一个群没有非平凡商群（即每个商映射的目标要么是平凡群，要么是与其同构），则称该群为单群。至少包含五个元素的交错群都是单群。群中元素 $g \in G$ 的正规闭包是包含 $g$ 的最小正规子群。具体来说，它是由 $g$ 的所有共轭元素生成的群。当然，在单群中，正规闭包总是整个群 $G$ （除非 $g$ 是平凡的）。

群 $G$ 的下中心列通过 $G_1 = [G, G]$、$G_{i+1} = [G, G_i]$归纳定义，其中 $[A, B]$ 表示在 $G$ 中由交换子 $[a, b]$ （ $a \in A$， $b \in B$）生成的群。我们只需要知道，至少包含三个元素的对称群的下中心列最终会到达相应的交错群。

如果子集 $S \subset G$ 满足 $\forall s \in S:\ s^{-1} \in S$，则称其为对称的。当 $G$ 是有限生成的，且对称生成集 $S \ni e_G$ 已由上下文明确时，如果 $S_G C \cap D \neq \emptyset$，我们称两个集合 $C$、 $D \subset G$ 相接。这是一种对称的自反关系（但不是传递关系）。

对于置换群，我们使用通常的循环记号（$a_1\ a_2\ \cdots\ a_k$）来表示如下置换：对 $i < k$ ，将 $a_i$ 映射到 $a_{i+1}$ ，并将 $a_k$ 映射到 $a_1$。当 $a_i$ 是较长的表达式时，我们使用分隔符 ; 而不是空格，例如，(00; 01; 10; 11) 是长度为 2 的字的一个四循环。

如果 $G$ 是有限生成群，则当 $SB = G$对某个有限集 $S \Subset G$成立时，我们称 $B \subset G$ 是右稠密的。注意，这恰好意味着 $B$ 在左凯莱图中相对稠密，即每个 $g \in G$ 都与 $B$中的某个元素相距有界距离。 $B \subset G$ 的 $S$-内部是 $\{g \in B \mid Sg \subset B\}$。如果 $x \in A^G$，则当 $p$ 出现的位置集合 $K \subset G$ 是（右）稠密的时，我们称 $p \in A^D$ 相对稠密地出现。

# 3 过程

本节描述一种过程：从一个构型 $x \in A^G$ 出发，生成群 $G$ 的一系列日益粗化的划分，并为每个划分元素指定一个代表元。从思想上说，这相当于符号动力系统中通常所用标记引理的一种变体。尽管已有适用于群的标记引理版本（例如 [18]），但我们关注的并不十分是标记之间的分离，而是需要利用轨道的基数。我们直接证明恰好所需的命题；这一命题与 [18] 的命题似乎多少有些不同。

过程可以描述如下：我们考虑群 $G$ 的凯莱图，其中每个元素 $g \in G$ 都包含来自子移位 $X$ 中某个位置 $x \in X$ 的符号 $x_g$ 。初始时，每个 $g \in G$ 都被视为一个单元素集合

“细胞群落”（其灵感来自这样一个事实：在元胞自动机理论中，节点 $g$ 通常被称为单元）。根据一组本质上任意、但具有确定性且空间均匀的规则，细胞群落开始与附近的群落合并，形成更大的群落。此外，每个群落都有一个脑细胞，负责指挥其合并过程（脑细胞在应用于自同构群时起着关键作用）。

我们的想法是从脑细胞的视角出发，仅根据它们周围的相对构型以及附近其他殖民地的相对构型，来描述它们的行为（进而描述它们所指挥的殖民地的行为）。只要对行为的描述不使用脑细胞的实际位置 $g \in G$，且每个脑细胞都遵循相同的流程，我们最终必然会得到一个平移不变的殖民地集合。我们只需确保不会永远陷入停滞，并确保脑细胞尽其所能尝试打破所有可能的平移对称性。

我们先从一个标准观察开始。

**引理 1.** 设 $G$ 是一个有限生成群，$X \subset A^G$ 是一个子移位。那么对于所有 $n$，存在一个开闭集 $C_n \subset X$，使得 $x \in X$ 的轨道大小至多为 $n$，当且仅当 $gx \in C_n$ 对所有 $g \in G$ 均成立。

证明。只需对 $X = A^G$ 证明这一点（如果 $C$ 是为$A^G$得到的开闭集，那么对于 $X$ 我们可以使用 $C \cap X$）。$A^G$ 中轨道大小不超过 $n$的点，其点稳定子的指数至多为 $n$。这样的子群只有有限多个。因此，轨道大小不超过 $n$ 的点所组成的集合是 $X$ 的一个有限子移位。众所周知，有限生成群上的有限子移位是有限型的；等价地，它是轨道始终留在某个特定开闭集 $C$中的点集，我们可以取 $C_n = C$。

□

形式上，我们现在考虑集合$G$ 的划分（或其上的等价关系），其中划分元素有选定的代表元，且每个划分元素都是有限的。为了对应我们脑海中的图景，我们将等价类称为细胞群落（或简称群落），并将其中的代表元称为脑细胞（或简称 大脑）；在离散时间步中，部分大脑会将其群落的控制权交给附近的另一个大脑（即在左凯莱图中相距有界距离，或相隔若干条超边）。简而言之，我们将带有代表元选择的 $G$划分称为 $G$上的一种文化。

现在，当 $G$ 是一个有限生成群时，我们在 $G$ 的文化集合上赋予一种拓扑。为此，我们将一种文化编码在 $(2 \times \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G))^G$ 中，使用 $g$ 处的位 $b \in 2$ 来记录当前节点是否为脑，而 $p \in \mathcal{P}(G)$ 则编码当前节点 $g$ 所属群落的相对形状，也就是说，$g$ 恰好与节点 $pg$ 有关系。在 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G)$ 上，我们采用离散拓扑；在形如 $A^G$ 的集合上，我们采用乘积拓扑，因此这些编码属于贝尔空间。实际中，我们只研究这样的文化：$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G)$ 中仅有有限多个集合被使用；等价地说，这些殖民地在 $G$的左凯莱图中有界。这意味着我们实际上研究的是带有最终拓扑的康托空间的可数并

$$\bigcup_{P \Subset \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}} (2 \times P)^G$$

赋予最终拓扑。

我们来公理化对应于文化（的编码）的 $(2 \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(G))^G$ 的点集：如果 $(x,\ y) \in 2^G \times \mathcal{P}_{\text{fin}}(G)^G$，我们希望

1. $|\{y_g \mid g \in G\}| < \infty$，2. $\forall g \in G:\ e \in y_G$，
3. $\forall h,\ g:\ h \in y_g \implies h^{-1} \in y_{hg}$，4. $\forall h,$
$g:\ h \in y_g \wedge k \in y_{hg} \implies kh \in y_g$，5. $\forall g:$
$\exists h:\ h \in y_g \wedge x_{hg} = 1$。6. $\forall h,\ g:$
$h \in y_g \wedge x_g = 1 \implies h = e \vee x_{hg} = 0$。

$G$ 在文化上有一个作用：我们只需按照通常的移位约定，对编码文化的构型 $(x,\ y)$ 进行移位，即可得到文化的新编码 $(gx,\ gy)$。直接用文化来表述，若 $z$ 是一种文化，其中 $S$ 是一个脑为 $h$ 的群落，那么 $gz$ 就是一个脑为 $hg^{-1}$的群落。

**这个过程**。给定 $x \in A^G$，我们现在描述一个过程，用来描述 $x$ 上随时间演化的一系列文化，并希望最终所有殖民地都能成长（通过吸收其他殖民地或与其他殖民地合并）。我们首先描述基本过程，再对其加以修改以获得其他性质。

这里的一个关键技术概念是殖民地的合并 。假设我们已经指定了文化 $z$ 中的一个（可能是无限的）殖民地集合（$C_1^i,\ C_2^i$）。那么，我们可以通过将所有满足 $c_1 \in C_1^i$ 且 $c_2 \in C_2^i$ 的数对（$c_1,\ c_2$）添加到现有等价关系中，并取其传递闭包，来构造一个新的等价关系。这意味着，所有形如 $C_1^i$ 或 $C_2^j$ 的划分元素都会消失，而这些集合将成为新的、更大的殖民地的一部分。如果每个新殖民地都只包含一个形如 $C_2^j$ 的殖民地，我们就称这次合并是良好的。在这种情况下，我们得到一种新的文化，其中每个新殖民地的大脑就是它所包含的 $C_2^j$ 殖民地的大脑。

我们将 $C_2^i$-殖民地视为吸收 殖民地 $C_1^i$。反过来，我们称 $C_1^i$融合 进 $C_2^i$。我们使用合并 作为这一作用的中性术语。我们也将这些术语应用于单元 $g \in G$，并理解为此时这些术语指的是包含 $g$的殖民地。

**引理 2**。假设 $z$ 是一个文化，并且$(C_1^i,C_2^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是殖民地对的序列，使得 $C_1^i$ 接触 $C_2^j$。假设

- $C_1^i \neq C_2^j$ 对于所有 $i$、$j$，以及
- $C_1^i \neq C_1^j$ 每当 $i \neq j$时。

那么相应的合并是良好的。

这些条件也可以等价地表述如下：融合到其他群落中的群落 $C_1^j$ 本身不会吸收任何群落，不会重复列出任何一对，并且不会有任何群落被吸收到两个群落中。

证明。 考虑这样一张图，其中的节点是成对出现的群落。根据第一项，该图是二部的，其中“左节点”是以 $C_1^i$ 出现的节点，而“右节点”是以 $C_2^j$ 出现的节点。按照从左到右的方向为超边定向，根据第二项，入度为 1；由此显然可知，新群落恰好是形如以下形式的集合

$$C_2^j \cup \bigcup \{C_1^i \mid i \in \mathbb{N}, C_1^j = C_2^j\},$$

因此，它们都恰好有一个吸收型 $C_2^j$-单元。我们还看到，每个 $C_1^i$ 合并到 $C_2^j$ 中的对象都会接触 $C_2^j$，这为新群落的直径提供了一个上界，因此这些群落是有界的，符合文化定义的要求。 □

我们从离散培养体开始，其中每个节点 $g \in G$都是其自身单元素集合群落 $\{g\}$的大脑。首先，我们可以执行一些与移位可交换的预处理步骤，在此过程中，某些群落会合并。

一种常见做法是在每个开闭集的出现位置执行 $S$-合并$C$。为此，我们定义一个辅助概念，稍后也会用到它。

**定义 3**。 设 $X \subset A^G$ 是一个子移位，且 $C \subset X$ 是开闭集。若对于任意 $s$、$s' \in S$，只要 $s \neq s'$，就有 $s^{-1}s'C \cap C = \emptyset$，则称 $S \subset G$ 相对于 $C$ 是安全的 。

我们只会在每个 $C$ 出现位置执行 $S$-合并，条件是 $e \in S \Subset G$且 $S$ 对 $C$ 是安全的。这一步的定义是：满足 $gx \in C$ 的那些 $g$，其殖民地会与所有 $sg$ 的殖民地合并。请注意，这种合并具有平移不变性（也就是说，对 $x$ 执行合并所得的结果，与先对 $gx$ 执行合并、再将所得文化平移 $g^{-1}$ 的结果相同）。

这里安全性之所以重要，是因为这样就不会发生殖民地的“非预期”额外合并（即引理 2 的假设成立）：如果在这一步中，$h$ 与两个不同的脑 $g$、$g'$ 的殖民地合并，那么对于 $s$，$s' \in S$，$h = sg = s'g'$，这意味着 $g'x$ 和 $gx = s^{-1}s'g'x$ 都属于 $C$，也就是说 $s^{-1}sC \cap C \neq \emptyset$。如果 $S$ 对 $C$ 是安全的，这种情况就不可能发生。

经过可能的预处理步骤后，过程的主要部分便在所得的文化上开始。这个过程有很大的自由度，具体来说，如何排列各种可能步骤的选择有无限多种（而且主要结论引理3在任何情况下都成立），但我们通过人为固定一种排列使其具有确定性；这一点对引理5至关重要。

这个过程总是会无限持续下去，分为无限多个步骤，下面我们将描述这些步骤。首先，任选一个全序，作用于所有的 $r$上的 $A^{B_r}$；例如，可以根据 $A$ 和 $B_r$上的某些全序定义字典序。我们将这些称为模式序（每个 $r$对应一个）。这些全序之间完全不需要保持一致。

然后，让$(k, h, p)$遍历所有满足以下条件的四元组：$k \in \mathbb{N}$、$h \in G$和$p \in A^{B_r}$，其中某个 $r \in \mathbb{N}$。按照某种顺序，对每个这样的三元组执行一个步骤，该步骤又由以下两个子步骤组成：

1. 如果 $g$ 是一个大小恰好为 $k$ 的群落中的脑细胞，$hg$ 包含在一个严格更大的群落中，且这两个群落相邻，那么这两个群落就会合并，其中 $hg$ 所在群落的脑将成为新群落的脑。

2. 如果 $g$ 和 $hg$ 是脑， $x_{kg} = p_k$ 对所有 $k \in \mathcal{B}_r$ 都成立，而 $k \mapsto x_{khg}$ 依次是 $A^{B_r}$ 中模式序更高的模式，并且这两个群落相邻，那么这两个群落就会合并，其中 $hg$ 将成为新群落的脑。

注意，在第一种情形中， $g$ 必须是脑，而 $hg$ 则不必。在第二种情形中，我们要求二者都是脑。在这两种情形下， $hg$ 的群落都会吸收 $g$的群落。第一种情形中描述的合并称为基数合并，第二种情形中描述的合并称为模式合并。

用公式表述也是如此：在基数合并中，我们对满足以下条件的配对 $(C_1^i, C_2^i)$ 应用引理 2：若 $g$ 是$C_1^i$的脑，则有

$$hg \in C_2^i \wedge |C_1^i| = k \wedge |C_2^i| > k,$$

在模式合并中，我们对满足以下条件的配对 $(C_1^i, C_2^i)$ 应用引理 2：令$g$ 为 $C_1^i$的脑， $hg$ 为 $C_2^i$的脑，并且

$$hgx|\mathcal{B}_r < gx|\mathcal{B}_r = p.$$

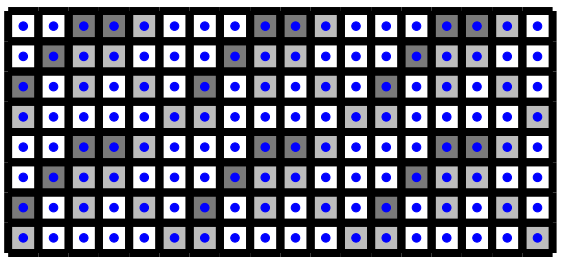
很容易看出，引理 2 的假设在这两种情形下都成立。在基数合并的情形中，每个 $C_2^j$ 都大于 $k$ ，且每个 $C_1^j$ 的大小为 $k$，因此引理的第一个假设成立。第二个假设成立，是因为对于形如 $C_1^i$的群落， $C_2^i$ 恰好是 $hg$的群落，其中 $g$ 是 $C_1^i$ 的脑。对于模式合并，论证类似，但更简单。

我们得出结论，每一步（由两个子步骤组成）确实都会产生一种新的文化。至此，基本过程的描述结束。

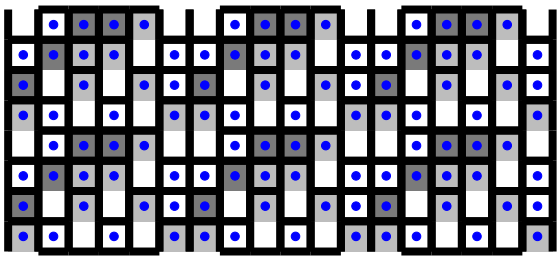
我们主要考虑基本过程的两种变体。基数过程的运作方式与该过程完全相同，但我们跳过所有模式合并。我们仍然遍历三元组（$k$， $h$， $p$），因此每个基数 $k$和方向 $h$都会被考虑无穷多次。

容易看出，对于任意一种过程，在第 $n$ 步之后生成文化的函数是连续且与移位可交换的——它由一个移位不变过程定义，可以分别在每个 $g \in G$ 处执行，并且所有元素对结果都一致。虽然我们总是无限地继续这一过程，但也可能在某一步之后不再发生任何合并。此时我们称已经到达一种稳定文化。

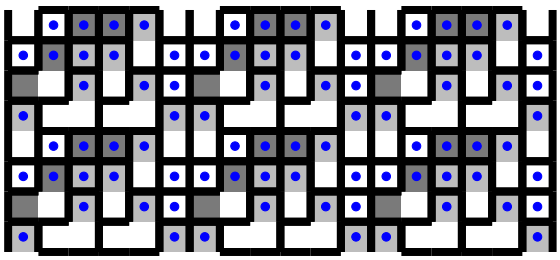
例 1：我们展示从周期配置开始，在群 $\mathbb{Z}^2$ 上运行基本过程可能得到的结果示例。我们考虑一个 $\mathbb{Z}^2$-构型，其周期为 (6，0) 和 (0，5)，初始文化中所有单元都形成单例群落。我们按照标准方向绘制 $\mathbb{Z}^2$ 的左凯莱图（它同时也是右凯莱图），并使用标准生成元，其中 (1，0) 指向右方，(0，1) 指向上方。我们用蓝点标记大脑，用粗边框标记它们的群落，并用灰度区分 0，1，2（0 为白色，2 为深灰色）。图中展示了一个 18×8 的区域



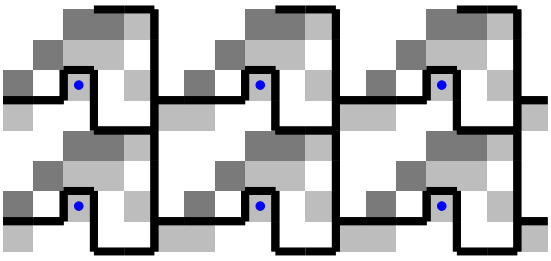
我们首先使用模式 (0，0) $\mapsto 0$ 沿方向 (0，1) 进行模式合并。因此，每个脑 $g$ 都会检查 (0，1) $+g$ 是否是一个脑，且其周围的模式在字典序上更大（即包含符号 1 或 2）；如果是， $g$ 就融合到 (0，1) $+g$:



接下来，我们沿着方向 (1,1) 执行一次基数为 1 的基数合并。因此，每个拥有大小为 1 的群落的脑 $g$，都会并入位于 (1,1) $+g$ 的群落，前提是包含 $g+$(1,1) 的群落严格大于 $g$ 的群落:



应用一系列随机的基数合并后，我们得到以下稳定文化（当然，根据过程定义中顺序选择的不同，可能会得到许多不同的结果）：



注意，这可以看作基本过程的一个实例，其中模式合并并未匹配到任何内容。我们对由此产生的文化作几点说明。正如预期的那样，我们恰好看到 6 个脑，因为周期重复了 6 次。事实上，我们得到了一组连通的陪集代表元（即连通的基本区域），对应周期格 $6\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z}$。注意，尽管有 $1<2$，这些脑碰巧都带有符号 1。由于我们只执行了一次模式合并，实际上该过程尚未区分符号 1 和 2。如果将 1 和 2 投影为同一个符号后，模式具有更多平移对称性，那么若不进行额外的模式合并，我们将永远无法得到一组陪集代表元。○

现在让我们解除对固定构型 $x$的限制，并开始分析这一过程的全局性质。

**引理3**。 如果我们从 $x \in A^G$ 开始执行该过程（可能经过一些与移位可交换的预处理步骤），并且某个 $g \in G$ 的群落大小不趋于无穷大，那么

*1.* 合并只会在有限多个步骤中发生，最终我们得到一种稳定文化 $(y, z) \in (2 \times \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(G))^G$*; 2.* 存在一个有限指数为 $n$ 的子群 $K$，使得若 $y_g = 1$，则当且仅当 $h \in K$ 时，$gy_h = 1$；*3.* 存在一个关于 $K$ 的连通集陪集代表元 $R$，使得当$gy_h = 1$时，我们有 $gz_h = R$*; 4.* $x$ 是 $K$-周期性的。

证明。 假设包含 $g' \in G$ 的群落大小不趋于无穷大。特别地，这意味着某个脑 $g'$ 永远不会融合到另一个群落中；具体而言，在某个 $g \in G$ 处存在一个脑（而不仅仅是一个单元），其群落在极限状态下是有限的，设其大小为 $n$。

我们首先注意到，其他任何群落的大小都不可能增长到高于 $n$。因为这样一来，经过某个有限步后，其大小将大于 $n$，最终我们会考虑一个三元组（$k$，$h$，$p$），其中 $hg$ 属于这个更大的群落，并且它会想要与 $g$ 合并。此外，必然存在这样一对群落，使它们相互接触，对于某个 $g$，$h$（沿着从 $g$ 到 $hg$ 的路径即可找到这样的一对）。因此最终，$g$ 也会融合到一个更大的类中。同样的逻辑表明，事实上在极限状态下，所有节点最终都会属于大小恰好为 $n$ 的群落。

现在平移该点，使得单位元 $e_G$ 包含一个脑。假设在极限中，$g \in G$ 处还有另一个脑。那么事实上 $x = gx$：如果不是这样，则对某个 $r$ 有 $x|\mathcal{B}_r \neq gx|\mathcal{B}_r$，因此在模式的全序中，这些模式中的一个会大于另一个，并且必定存在这样一对其群落相接触的模式（沿着从 $e_G$ 到 $g$的任意路径，并在路径上群落发生变化时考虑相邻的群落）。最终我们将考虑三元组 $(k, g, p)$，其中 $p = x|B_r$，以及 $(k, g^{-1}, p)$，其中$p = gx|B_r$，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，而这些群落将会合并。

如果 $K$ 是 $x$的点稳定子，那么我们得出结论：在极限中，脑只能出现在 $K$ 上。但当然，每个 $g \in K$ 在极限中确实都包含一个脑，因为该过程是平移不变的。此外，再次由该过程与平移的交换性可知，这些脑在 $e$处的脑到达其最终群落的那一步时，就已经形成并到达了各自的最终群落。我们得出结论，在这个有限步之后不可能再发生合并。

在这一步，与每一步一样，每个 $g \in G$ 都属于某个殖民地。若 $R$ 是单位元所在的殖民地，那么根据平移不变性，$g \in K$ 所在的殖民地恰好是$Rg$。此外，对于不同的 $g \in K$，这些殖民地彼此不相交。这恰好意味着 $R$ 是子群 $K$的一组左陪集代表元。特别地，$K$ 的指数为 $n$。

注意，由于在任意时刻，殖民地都保持连通（因为我们只合并相接触的集合），$R$ 是一组连通的左陪集代表元，正如所声称的那样。

□

当 $G$ 是一个自由群时，连通的陪集代表元集合称为*Schreier* 遍历。

**注 1**。 人们可能会希望在过程中进一步加入一个步骤，让大脑根据某种逻辑在其群落内部移动。例如，如果 $x \in A^{F_2}$ 是一个构型，其点稳定子恰好是 $\langle a \rangle$ 自由生成元$a$中的一个，且 $F_2$，那么该过程可能趋向于一种大脑位于 $\langle a \rangle$的文化；或者，大脑（及其两两距离）可能趋于无穷。在当前版本的过程中，这两种情况都有可能发生，而我们可能希望控制偏向哪一种情况。此外，澄清其与通常的标记引理之间的关系也很有意义，尤其是与 *[19]*的关系。不过，这些问题超出了本文的范围；特别是，按照任意逻辑移动大脑会给前一个引理增加复杂性。

当然，如果最终会出现控制大区域的大脑，那么在紧集内，它们会在有界步数之后出现。以下引理对这一点作出了形式化表述。如果 $S \Subset G$，则集合 $T \subset G$ 的 $S$-计数 是满足 $Sg \subset T$ 的 $g \in G$ 的数量。（可能为 $\infty$。）

**引理 4**。 设 $G$ 为有限生成群，假设 $e \in S \Subset G$，且 $X \subset A^G$ 是一个子移位。令 $C$ 为一个开闭集，并假设 $S$ 对其是安全的。则存在一个针对该过程的预处理步骤，使得将其应用于任意 $x \in X$ 后，我们都会到达这样一种文化：所有群落都具有正的 $S$-计数，并且对于 $C$ 的每个出现位置 $g$， $g$ 的群落都包含 $Sg$。

证明。 如果 $|S| = 1$，那么 $S = \{e\}$，我们可以使用一个什么也不做的平凡预处理步骤——离散培养体已经满足结论。

否则，预处理如下：我们立即在 $C$的每个出现位置执行 $S$-合并。由于我们假设 $S$ 对 $C$是安全的，这是可行的。这样，无论之后发生什么，对于 $C$ 的每个出现位置 $g$， $g$ 的群落都包含 $Sg$。因此，只需证明我们还可以确保所有群落都具有正的 $S$-计数。

接下来，由于 $X$ 是 $S^{-1}S$-无周期的，我们可以对 $C$ 重新编码，使得当 $s \in S^{-1}S \setminus \{e\}$时 $x_g \neq x_{sg}$。如果 $g$ 具有极大符号，且附近尚未执行任何合并（即附近不出现 $C$），那么我们就吸收 $Sg$ 中的所有单元（即所有单元素集合群落），并注意到这不会触发由传递性导致的进一步合并，这同样是由于 $X$的 $S^{-1}S$-非周期性。

然后，我们按降序处理符号；如果$g$ 处的符号在足够大的局部邻域中是极大的，它就会吸收$Sg$中的单元。具体来说，我们希望这不会触发任何进一步的合并；只要我们仅在满足以下条件的符号处进行合并，就能做到这一点：节点 $Sg$中没有任何节点此前已经合并。我们注意到，此时每个非单元素集合群落的 $S$-计数均为**1**，并且这些群落在 $G$中是右稠密的。对于后一个断言，如果此时 $g$ 尚未合并，那是因为附近有一个更大的符号已经进行了合并。

此后，我们开始进行基数过程。我们声称，最终所有不是单元素集合的群落都将具有正的 $S$-计数。为此，我们注意到，根据归纳法，经过任意数量的步骤后，非单元素集合$g$ 仍将具有正的 $S$-计数，因为在基数合并过程中，两个单例群落永远不会合并。特别是，一旦一个单元素集合群落 $g$ 融合到另一个群落中，它就会具有正的 $S$-计数。由于在有界距离内存在一个非单元素集合群落，这将在有限步数后发生。 □

**引理5.** 设 $G$ 是一个有限生成群，假设 $S \Subset G$，且 $X \subset A^G$ 是一个 $S^{-1}S$-无周期的子移位。此外，假设 $C \subset X$ 是一个闭集

，其中 $C$ 中没有点是全周期的，并且 $S$ 对 $C$是安全的。那么，存在一个针对该过程的预处理步骤，使得以下结论成立：对于所有 $r$、$n$，存在 $t$，使得如果我们在任意 $x \in C$ 上运行该过程 $t$ 步（预处理步骤之后），那么每个满足 $gx \in C$ 的 $g$ 都在其群落中包含所有 $Sg$；并且只要 $hgx \in C$，$hg$ 的群落就有大小至少为 $n$ 的 $S$-计数。

证明。我们采用前一个引理中的预处理。因此，对任意 $x \in X$，每个群落在所有 $G$ 中的正 $S$计数都已存在。我们注意到，每当两个群落合并时，合并后群落的 $S$计数至少是这两个群落的 $S$计数之和。因此，一个群落的 $S$计数趋于无穷，当且仅当该群落的大小趋于无穷。

设 $f'_t(x)$ 是在 $x \in X$ 上运行 $t$ 步过程时，$\mathcal{B}_r$ 中某个单元的群落的最小 $S$计数。对于所有 $x \in C$，它都趋于无穷：由于 $C$ 没有全周期点，根据引理 3，群落的大小必定无限增长。特别是，根据前一段，它们的 $S$计数趋于无穷。

于是，函数 $f_i(x) = 1/f'_i(x)$ 构成逐点递减的连续函数序列，并且在开闭集 $C$ 上趋于零函数。由于零函数连续，根据Dini定理，该序列在紧集 $C$ 上一致收敛。这恰好意味着，存在某个 $t$，使得对所有 $x \in C$，$f'_t(x) \geq n$。换言之，如果我们在任意 $x \in C$ 上运行 $t$ 步过程，那么所有 $g \in \mathcal{B}_r$ 的群落都至少有 $n$ 的 $S$计数。 □

例 2：或许可以去除关于 $X$ 的 $S^{-1}S$-非周期性假设，只需 $C$ 没有全周期点，且对它而言 $S$ 是安全的。然而，这肯定需要更复杂的论证。下面概述为何即使是 $G = \mathbb{Z}^2$ 这种情况也可能存在问题。

考虑子移位 $X \subset \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^2}$，其禁用模式规定，不能有两个 2 在垂直或水平方向相邻。考虑开闭集 $C = [p]$，其中 $p \in \{2\}^{\{(0,0)\}}$。对于 $S =\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 而言，此开闭集是 $S$-安全的。现在考虑一个构型 $x$，其中 2 恰好出现在 $\{0\} \times 2\mathbb{Z}$ 上，并且在 $\{0\} \times 2\mathbb{Z}$ 的作用下具有周期性。显然，任何这样的构型都属于 $X$。

在预处理集合中，我们肯定希望在每个 $C$-出现位置执行 $S$-合并。应用于 $x$ 时，$(\{0,1\} \times 2\mathbb{Z}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z})$ 中的单元现在属于非单例群落，而其他单元则属于单例群落。现在解释为何可以继续这一过程，使所有 $S$-计数趋于无穷大，进而使它们不趋于无穷大。

首先，我们来说明，如果采用一种不使用所有可能三元组（$k$、$h$、$p$）且不必交替进行基数合并与模式合并的过程，该如何实现这一点。为了使 $S$-计数趋于无穷，先用 $h = (0、-1)$ 进行一次基数合并，使非单例群落恰好是盒子$\{2n, 2n+1\} \times \{0,1\}$。然后仅沿方向 $(1、0)$ 和 $(-1、0)$ 使用 $k = 1$，不断重复进行基数合并。盒子会变成细长矩形，其 $S$-计数显然会越来越大。

使 $S$ 的计数不趋于无穷。使用模式匹配，并组织 $x$ 的内容，使非单例群落始终形成一列粗列 $[\![r, r]\!] \times \mathbb{Z}$，且我们始终只在这列的前沿匹配模式。我们确保某个位置的垂直奇偶性始终能在有限邻域内被观察到。这样，我们就能确保绝不会将两个垂直

相邻的单元融合到同一个群落中，位置是在不断扩展的初始盒子列的“前沿”处（例如，向左扩展时，可以将偶数单元向右融合，将奇数单元沿方向 $(1,\ d)$ 融合，$d \in \mathbb{Z}$ 取适当的值）。显然，$S$ 的计数不会增加。

要用现有过程实现相同的效果，即依次遍历所有 $(k,\ h,\ p)$，当然是可行的，但逐一处理细节只会徒劳无功。

在阿贝尔群上，避免这些问题并确保 $S$-非周期性处处得到传递，应该不难。在一般群上，问题则严重得多。○

**备注 2**。作者发明这一过程，是为了证明论文 *[22]*中的标记引理（该工作是在阿贝尔群上进行的，此时可以使用例如 *[21]* 中的论证来扩展大脑集合，只要这些集合足够稀疏）。作者意识到可以直接使用 *[22]*,中的标准标记引理后，便搁置了这一想法；但后来发现，这恰好就是我们当前情形所需要的。

# 4 开闭集下的置换

本节中，我们定义自同构群 $\mathrm{Aut}(X \times Y)$ 的一个子群；当 $X$ 不具有稠密周期点，且 $X$，$Y$具有一些与 $X$ 的非周期性以及 $Y$ 中可交换模式相关的附加动力学性质时，该子群将不是剩余有限的。此外，这些条件彼此关联：当 $Y$ 是全移位时，对 $X$ 的非周期性假设便变得平凡。

设 $Y \subset B^G$ 是一个子移位。具有相同定义域的模式集合若在任意上下文中均可相互替换，且不会引入任何禁用图案，则称它们可交换。在公式中，$P \subset A^D$ 可交换，当且仅当对所有 $x \in B^{G \setminus D}$，$x \sqcup p \in Y \iff x \sqcup q \in Y$，以及所有 $p$，$q \in P$ 都成立。可交换性是一种等价关系，记作 $\equiv$，因此对每个 $D$，我们都可以将 $Y|D$ 划分为极大的可交换集合。若一个 $Y|D$ 的置换保持这一等价关系，即稳定每个等价类，则称该置换保持这一等价关系；将保持该关系的置换群记作 $\mathrm{Sym}_{\equiv}(Y|D)$。记 $\mathrm{Alt}_{\equiv}(Y|D)$ 为在每个等价类中分别都是偶置换的置换所构成的群（注意，除非只有一个非平凡等价类，否则它是 $\mathrm{Alt}(Y|D) \cap \mathrm{Sym}_{\equiv}(Y|D)$ 的真子群）。

通常，我们希望 $Y$ 具有较大的可交换性类。我们称子移位 $Y$ 具有 局部多填充性质 $LMFP$，如果对于某个 $D \Subset G$，$Y|D$ 中的每个模式的可交换性类的基数都至少为 2。

**引理 6**。如果 $Y$ 具有 *LMFP*，那么对于所有 $n$，存在某个 $D \Subset G$，使得 $Y|D$ 中的每个模式的可交换性类的基数都至少为 $n$。

证明。将定义域为 $D$ 的模式的等价类的最小大小记为 $m(D)$。如果 $D \cap Dg = \emptyset$，则容易看出 $m(D \cup gD) \geq 2m(D)$（特别注意，这不需要任何额外的混合假设）。证明可由归纳法轻松完成。 □

对于 $Y = k^G$ 全移位，可交换关系是全的，并且 $\mathrm{Sym}(Y|D) = \mathrm{Sym}(k^D)$ 中的每个置换都保持可交换关系。

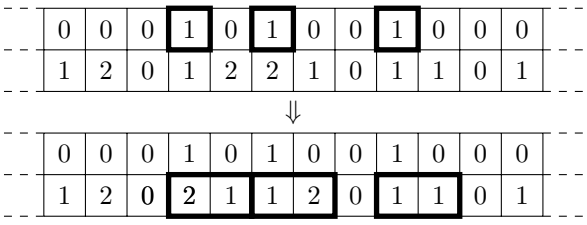



图1：应用例3中的$f_{U,\ \pi}$。原像中突出显示了 $U$（即 1-符号）的出现位置。像中突出显示了应用 $\pi$ 的相应区域。当然，11 在 $\pi$下保持不变，因此该模式保持不变。

**定义4.** 设 $G$ 为一个群，设 $X \subset A^G$, $Y \subset B^G$ 为子移位，设 $U \subset X$为开闭集，设 $e \in S \Subset G$，设 $\pi \in \mathrm{Sym}(Y|S)$ 保持可交换关系。假设 $S$ 对 $U$是安全的，即 $tU \cap U = \emptyset$ 对任意 $t \in S^{-1}S \setminus \{e\}$。那么我们定义$f_{U,\pi}\colon X \times Y \to X \times Y$如下：

$$f_{U,\pi}(x,y)_g = \begin{cases} (x_g, \pi(gy|S)_s) & \text{if } s \in S, s^{-1}gx \in U \\ (x_g, y_g) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

例3：设 $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 为黄金均值移位，其唯一的禁用图案为 11。则 $S = \{0,1\}$ 对于开闭集 $U = [1]$是安全的。设 $Y \subset \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$为具有唯一禁用图案 $\{00\}$的子移位。则置换$\pi = (12; 21)$对于 $Y$是安全的。图1展示了$f_{U,\ \pi}$ 的一次应用。

**引理 7。** 在该定义的假设下，映射$f_{U,\ \pi}$ 是 $X \times Y$的一个自同构。进一步地，若 $U$和一个安全集 $S$ 固定，则由$\pi \mapsto f_{U,\ \pi}$ 定义的从$\mathrm{Sym}_{\Subset}(Y|S)$ 到$\mathrm{Aut}(X \times Y)$ 的映射是一个嵌入。

证明。 显然，映射 $f_{U,\pi}$ 与移位可交换且连续，因为它由局部规则定义（尽管其陪域先验上可能是 $X \times B^G$）。考虑$x, y \in X \times Y$。令 $R \subset G$ 为满足 $gx \in U$的元素 $g \in G$ 的集合。$f_{\pi,U}$ 的作用不会以任何方式改变 $x$。在 $y$中，它至多影响满足如下条件的 $g \in G$ 处的单元：对某个 $s \in S$，有 $s^{-1}g \in R$。注意，这种情况不可能对两个不同的 $s_1, s_2 \in S$同时发生，因为若 $s_1^{-1}g, s_2^{-1}g \in R$，则 $s_1^{-1}gx \in U \cap tU$，其中$t = s_1^{-1}s_2 \in S^{-1}S$。

现在，$f_{U,\pi}$ 的作用仅仅是在$g \in R$时，将 $\pi$ 应用于模式 $gy|S$，但将其视为 $g$处的相对模式，即我们重写模式 $y|Sg$。这一定义良好，因为不同节点 $g$, $g' \in R$所影响的区域彼此不相交，而且这些模式是可交换的。请注意，虽然可交换性是单次模式交换的性质，但我们也可以一次进行无穷多次改变，因为这可以看作一列交换的极限（当然，$Y$是闭集）。因此，陪域实际上是 $X \times Y$。

这一描述还表明，$\pi \mapsto f_{U,\ \pi}$ 是一个同态，这说明$f_{U,\ \pi}$ 是双射，因为$f_{U,\ \pi^{-1}}$ 是它的逆映射（因此$f_{U,\ \pi} \in$ 自同构群$(X \times Y)$）。它是一个嵌入，因为任意 $Y|S$ 都可以出现在任意 $U \subset X$的一次出现位置下，这是因为我们处理的是全乘积子移位 $X \times Y$。 □

# 5 自同构群($X \times Y$)的非剩余有限性

**定理 5**。 假设 $G$ 是一个有限生成群。假设 $Y \subset B^G$ 具有 *LMFP*。那么存在 $D$，使得如果

- $X \subset A^G$ 是一个 $D^{-1}D$-无周期子移位，并且
- $X$ 有一个开集 $U$，使得 $U$ 中没有任何点具有有限轨道，那么

群自同构群($X \times Y$) 不是剩余有限的。如果 $Y$是全移位，我们可以取$D = \{e\}$。

证明。 我们先证明一般性结论，并在最后说明最后一句所需的细微修改。设 $D \Subset G$ 满足： $Y|D$ 中的每个可交换等价类的基数都至少为 3。根据引理 6，这样的 $D$ 存在。设 $U \subset X$ 是一个不含周期点的开闭集。注意，通过细化 $U$， $D$自动对 $U$变得安全。否则，取一个极限，就能在 $X$ 中找到一个周期属于 $D^{-1}D \setminus \{e\}$的点，而这与假设不存在这样的点矛盾。我们不妨假设 $U$ 是一个柱集（取其中任意一个柱集即可），再通过对 $X$重新编码，不妨假设它是一个基本柱集，即具有 $U = [a] = \{x \in X \mid x_e = a\}$的形式。定义 $f = f_{U,\hat{\pi}}$，其中$\hat{\pi} \in$ Alt(*Y*|*D*)是一个非平凡的偶置换。

现在我们将证明，对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

- 都存在有限单群子群 $\mathcal{G}_i$，它们两两交换，且其基数均至少为 $n$,
- $f$ 可以写成自同构 $f_i$ 的乘积，它们分别属于群 $\mathcal{G}_i$。

这表明 Aut($X \times k^G$) 不是剩余有限的：若它是剩余有限的，就会存在一个有限商群 $Q$，使得 $f$ 在其中映射为非平凡元素。于是令 $n > |Q|$，并将$f$ 写成第二项所述的形式。由于 $f$ 是若干个 $f_i$的乘积，因此其中某个 $f_i$ 也映射到 $Q$ 中的非平凡元素；但这样一来，单群 $\mathcal{G}_i$ 就嵌入了 $Q$，这与 $|\mathcal{G}_i| \geq n > |Q|$矛盾。

为证明这一断言，我们对开闭集 $U$应用引理5，在每个 $U$出现位置处从$D$-合并开始。具体而言，我们得到 $t$，经过 $t$个过程步骤后，

- 对于每个满足 $gx \in U$的 $g \in G$， $Dg$ 都包含在该群落中，并且
- 每个群落 $S$ 都满足：对于任意 $g$，只要 $gx \in U$ 至少包含 $n$ 个 $h \in G$，就有 $Dh \subset S$。

过程经过 $t \geq 1$ 步后，群落大小至少为 $n$ 的所有点组成的集合 $V$ 本身当然是开闭集，并且根据上一段的内容，它包含 $U$。具体而言，这意味着 $V$ 包含每个满足 $x_e = a$ 的构型 $x$。集合 $V$ 可根据集合 $S$ 相对于脑的精确形状进行自然的有限分解，最后再取其中符号 $a$ 出现的部分。我们将这些集合记作 $V_{S、T、g}$，并定义 $V_{S、T} = \bigcup_{g \in S} V_{S、T、g}$。更确切地说，如果对 $x \in X$ 应用过程 $t$ 步后，$e$ 的群落脑位于 $h$， $e$ 的群落为 $S'$，并且当 $k \in S'$ 时，我们恰有 $x_k = a$ 当且仅当 $k \in T'$，那么 $x \in V_{S、T、g}$，其中 $g = h^{-1}$ 且 $S = S'h^{-1}$、 $T = T'h^{-1}$。注意，该过程在 $a$ 的所有出现位置处以一次 $D$-合并开始，因此我们有 $DT \subset S$。

对于有限多个可能的（相对于脑的）形状 $S$ 和集合 $T$ 中的每一种，由 Alt≅($Y|S$) 到 Aut($X \times Y$) 的映射 $\pi \mapsto f_{V_{S,T},\pi}$ 根据引理 7 是一个嵌入。此外，对于每个 $S, T$，群 Alt≅($Y|S$) 都是交错群的直积。由于集合 $S$ 最终会包含 $D$ 的许多右平移副本，因此最终也会包含许多互不相交的平移副本，于是 $Y|S$ 中的等价类会变得任意大。这意味着 Alt≅($Y|S$) 是作用在任意大集合上的交错群的直积，因此也是任意大的单群的直积。

将所有这些群列为 $\mathcal{G}_i$，具体而言，每个 $i$ 都对应于一个 $S$，$T$的选择，以及一个 $Y|S$的等价类 $E$；而 $\mathcal{G}_i$ 同构于作用在 $E$ 上的交错群（具体来说，它在$V_{S,T}$的出现位置上作用）。现在考虑 $f$ 在$V_{S,T}$的一次出现位置上的作用。显然，它只是在每个满足 $g \in T$ 的 $Dg$处应用 $\hat{}\pi$。令 $f_i \in \mathcal{G}_i$ 为这样一个自同构：每当 $Y|S \in E$时，它就在$V_{S,T}$的各次出现位置中，在 $T$的每个位置应用 $\hat{}\pi$。对所有可能的 $i$ 取 $f_i$的乘积，恰好就是 $f$。至此，一般情形的证明完成。

对于全移位，需要稍作修改：如果取 $D = \{e\}$，那么等价类的基数可能不是 3，具体来说，当 $k = 2$时便是如此。我们将介绍一种统一处理所有全移位的方法。取 $f = f_{U,\hat{\pi}}$，其中 $\hat{}\pi$ 与 $k$具有相同的奇偶性。如果字母表的大小为偶数，那么将 $\hat{}\pi$ 视为字母表的某个幂的一个坐标上的置换时，它是偶置换；而如果 $k$ 是奇数，那么 $\hat{}\pi$ 本身就是字母表上的偶置换。无论哪种情况，与一般情形的证明一样，当 $|S| \geq 2$时，在 $V_{S,T}$ 的一次出现位置上，它都会对 $[\![k]\!]^S$ 施加一个偶置换（它在位置 $g \in T$应用 $\hat{}\pi$），因此我们可以沿用同样的证明。

□

**推论 3.** 设 $G$ 是一个有限生成群，并假设 $X$ 不具有稠密全周期点。那么群 自同构群($X \times B^G$) 对于 $|B| \geq 2$不是剩余有限的。

证明。 由于周期点不稠密，存在一个不含任何全周期点的开闭集 $U$。在上一个定理中，当 $Y$ 是全移位时，我们可以取 $D = \{e\}$，而任意子移位都显然是 $D^{-1}D$-无周期的（这是一个空要求）。

□

# 6 群 $\mathbb{Z}^2$

**定理 6.** 若 $G$ 包含 $\mathbb{Z}^2$的一个副本，则 $G$存在一个强不可约子移位，其自同构群不是剩余有限的。

证明。 令 $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ 为 Hochman 在 [15]中的无周期点强不可约子移位。特别地，周期点在 $X$中不稠密，因此根据定理 5，$Z = X \times B^{\mathbb{Z}^2}$ 对于 $|B| \geq 2$具有非 RF 自同构群，而且它当然仍然是强不可约的。我们可以通过将其自由扩张到 $G$，把它扩展到 $G$；也就是说，子移位 $Z' \subset (A \times B)^G$，其中

$$z \in Z' \iff \forall g \in G : gz|\mathbb{Z}^2 \in Z$$

显然它仍然是强不可约的，并且其自同构群显然包含一个 Aut($Z$) 的副本。

□

我们将需要以下众所周知的结果。我们用符号动力系统语言给出证明。[1]

**引理 8**。设 $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ 是一个强不可约子移位，则 $X$ 具有稠密全周期点。

证明。如果字 $w \in A^n$ 出现在 $X$的某个构型中，并且对于所有 $x \in A^{(-\infty,-1]}$ 和 $y \in A^{[}n, \infty)$ 都有以下性质，则称字 $w \in A^n$ 是同步的 （对于 $X$）：

$$x \sqcup w \in X|(-\infty, n-1] \wedge w \sqcup y \in X|[0, \infty).$$

设 $r$ 为强不可约半径，这意味着在强不可约性的定义中可以取 $S = [\![-r, r]\!]$。我们证明同步词存在。反设不存在同步词。任取 $w_1 \in X|[\![2r+1]\!]$。由于 $w_1$ 不是同步词，根据紧致性，我们可以找到字 $u_1$， $v_1$，使得

$$u_1 w_1 \sqsubset X, w_1 v_1 \sqsubset X, \text{ but } u_1 w_1 v_1 \not\sqsubset X$$

根据强不可约性，我们找到某个 $w_2 \in X|[\![2r+1]\!] \setminus \{w_1\}$，使得$u_1 w_2 v_1 \sqsubset X$。由于这个字不是同步词，我们找到字 $u_2$， $v_2$，使得

$$u_2 u_1 w_2 v_1 \sqsubset X, u_1 w_2 v_1 v_2 \sqsubset X, \text{ but } u_2 u_1 w_2 v_1 v_2 \not\sqsubset X.$$

归纳地继续这一论证，我们得到一个无限序列的**互不相同的**字 $w_1$， $w_2$， $w_3$，$\ldots \in X|[\![2r+1]\!]$ 以及字 $u_i$， $v_i$，使得

$$u_k \cdots u_2 u_1 w_k v_1 v_2 \cdots v_{k-1} \sqsubset X, u_{k-1} \cdots u_2 u_1 w_k v_1 v_2 \cdots v_k \sqsubset X,$$

but

$$u_k \cdots u_2 u_1 w_k v_1 v_2 \cdots v_k \not\sqsubset X.$$

这就产生了矛盾，因为 $X|[\![2r+1]\!]$ 是有限的。

一旦有了同步词 $w \in A^n$，我们就几乎大功告成了。根据强不可约性，我们可以找到一个构型 $x \in X$，使得对所有 $k \in \mathbb{Z}$， $k(n+2r+1) \cdot x|[\![n]\!] = w$。显然，任何两个形如 $wuw$ 且长度相同的字都是可交换的。因此，具有 $y|[\![n+2r+1]\!] = x|[\![n+2r+1]\!]$ 的$(n+2r+1)\mathbb{Z}$-周期点 $y \in A^{\mathbb{Z}}$ 属于 $X$。特别地，$X$ 包含一个周期点。根据 [7], ，全周期点稠密（或者，也可以直接将任意字包含在一个同步词中，或包含在 $u$中）。 □

文献 [17] 证明了强不可约的 $\mathbb{Z}^2$ 有限型子移位具有稠密周期点，而众所周知，块拼接的 $\mathbb{Z}^2$有限型子移位也具有这一性质。回顾一下，若某个 $\mathbb{Z}^2$子移位 $X$ 满足以下条件，则称其为块拼接：存在半径 $r$，使得对所有 $x$， $y \in X$，都存在 $z$， $z' \in X$，使得

$$z|(-\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = x|(-\mathbb{N} \times \mathbb{Z}), \quad z|([r, \infty) \times \mathbb{Z}) = y|([r, \infty) \times \mathbb{Z}),$$

$$z'|(\mathbb{Z} \times -\mathbb{N}) = x|(\mathbb{Z} \times -\mathbb{N}), \quad z'|(\mathbb{Z} \times [r, \infty)) = y|(\mathbb{Z} \times [r, \infty)).$$

这当然可由强不可约性推出。

我们需要对这一结果稍作加强：周期点存在于一个包含它的有限型子移位中，而该有限型子移位本身不必是强不可约的（或具有块拼接性质）。

[1]作者从 Dominik Kwietniak 那里得知，证明的关键在于找到一个同步词。

**引理 9.** 设 $X \subset Y \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ 是子移位，其中 $Y$ 是有限型子移位，且 $X$ 具有块拼接性质。那么 $Y$ 的周期点在 $X$ 中稠密。

证明。 假设 $X$ 具有半径为 $r$ 的块拼接性质。设 $p \in A^D$ 是出现在 $X$中的任意模式。我们不妨假设 $D = [\![0, n-1]\!]^2$。定义 $S = \mathbb{Z} \times [\![0, n-1]\!]$，并将 $X|S$ 视为在水平移位作用下的一个 $\mathbb{Z}$-子移位。显然，它是强不可约的，因此根据引理 8，它具有稠密周期点。

设 $s \in X|S$ 是周期性的，并利用 $X$ 的块拼接性质，得到一点 $x \in X$，使得

$$x_{i,j} = s_{i,j} = x_{i,j+n+r}$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}, j \in [\![0, n-1]\!]$ 均成立。特别地，该点属于 $Y$。由于 $Y$是有限型子移位，我们可以重复中间的线段，得到一点 $y \in Y$，使得

$$y_{i,j+k(n+r)} = x_{i,j}$$

对所有 $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, j \in [\![0, n+r-1]\!]$ 均成立。现在，该点属于 $Y$的子移位$Z$，其中由 $(\{0\} \times (n+r-1)\mathbb{Z})$-周期点组成。当然， $Z$ 本身是一个 $\mathbb{Z}^2$-有限型子移位；在 $\mathbb{Z} \times \{0\}$ 的作用下，它是一个 $\mathbb{Z}$-有限型子移位。因此，我们可以在其中找到一个周期点 $z$ 。这个点自然对应于 $Y$中的一个全周期点。由于原模式 $p$ 在 $y$中相对稠密地出现，它也会在 $z$中相对稠密地出现，因此我们找到了 $Y$ 中的一个全周期点，其中包含 $p$。 □

**引理 10.** 在 $\mathbb{Z}^2$上，有限子移位在豪斯多夫度量下稠密于块拼接子移位。

证明。 回顾一下，对于子移位，豪斯多夫度量衡量的是语言的相似程度，而收敛的确切含义是：对于所有 $D \Subset G$，子移位中的$D$-模式集合最终变得相同。

设$X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ 是块拼接子移位。设 $D \Subset \mathbb{Z}^2$ 任意。我们需要找到一个有限子移位，使其 $D$-模式恰好是 $D$。取与 $D$对应的有限型子移位近似$Y$，也就是说，在该有限型子移位中，一个 $D$-模式被禁用，当且仅当它没有出现在 $X$中。于是， $Y$ 中的全周期点在 $X$中稠密。因此，我们可以找到一个有限指数子群 $L \leq \mathbb{Z}^2$ ，使得 $Y$ 中的 $L$-周期点已经包含 $X$中出现的所有 $D$-模式。于是， $L$ 中 $Z \subset Y$ 的有限子移位具有与 $X$相同的 $D$-模式：它不可能包含更多模式，因为连 $Y$ 也不包含。另一方面，我们特意选择了 $L$ ，使得所有 $D$-模式都出现。 □

**定理 7.** 设 $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ 是一个块拼接子移位。那么，自同构群$(X)$ 局部可嵌入有限群。

证明。 设 $F \Subset$ 自同构群$(X)$是任意一个有限集。我们需要找到一个包含子集 $F'$ 的有限群，以及一个双射 $\phi$: $F \to F'$，使得只要 $f, g \in F$和 $f \circ g \in F$，就有 $\phi(f) \cdot \phi(g) = \phi(f \circ g)$。设 $r$是 $F$ 中任意自同构作为元胞自动机时（或其逆映射）的最大半径。

现在假设 $Z$ 是一个与 $X$具有相同 $B_{2r}$-模式的子移位。那么， $F$中自同构的局部规则定义了 $Z$的自同构：如果我们按任一顺序计算 $f \in F$ 和 $f^{-1} \in F$ 的局部规则的复合，那么在 $Y$中的计算与在 $X$中的相同，因此得到恒等映射，这就证明了二者都是自同构。

此外，如果 $f, g \in F$彼此不同，那么将它们视为 $Z$ 的自同构时也彼此不同。同样地，根据相同的论证，如果 $f, g, f \circ g \in F$

并且我们在 $Z$中计算相同的复合，便会得到相同的结果。因此，我们有一个单射 $\psi\colon \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(Z)$，它满足 $f, g, f \circ g \in F \implies \psi(f) \circ \psi(g) = \psi(f \circ g)$。

当 $X$ 是块拼接时，根据前一个引理，我们可以取有限的 $Z$，因此 $\mathrm{Aut}(Z)$ 是有限的，并且我们恰好得到 $F$ 到它的一个局部嵌入。 □

# 7 笛卡尔积上的置换群

现在，我们通过研究集合乘积上的置换群，为证明 $\mathrm{Aut}(X)$ 的有限生成子群的非剩余有限性做一些准备。

本节将考虑作用于集合的笛卡尔积上的置换群。若我们有一个乘积 $\prod_{g\in E} A_g$，那么对于 $C,\ D \subset E,\ \pi \in \mathrm{Sym}(\prod_{g\in C} A_g)$ 和 $P \subset \prod_{g\in D} A_g$，我们将 $\prod_{g\in E} A_g$ 上按如下方式定义的置换 $f = \pi|P$ 记为：

$$f(p)_g = \begin{cases} p_g & \text{if } g \notin C, \\ p_g & \text{if } g \in C \wedge p|D \notin P, \\ \pi(p|C)_g & \text{if } g \in C \wedge p|D \in P. \end{cases}$$

这可以读作“在给定 $P$ 的情况下应用 $\pi$”；其含义是，我们检查某些坐标上的一个条件，如果该条件成立，就将这个置换应用于另一组（不相交的）坐标。

置换 $\pi|P$ 可以看作自同构 $f_{U,\pi}$ 的抽象类比（其中，当输入的另一部分满足某个条件时，我们也会对输入的一部分进行置换）。然而，与自同构群的情形不同，本节中“控制与数据”并不能完美分离；而且，稍后将这些结果应用于自同构群时，它们所起的作用也不同（且大多隐含在引理 13 的用法中）。

当 $P = \prod_{g\in D} A_g$ 时，我们只需将 $\pi \in \mathrm{Sym}(\prod_{g\in C} A_g)$ 视为 $\prod_{g\in E} A_g$ 上相应的置换。更准确地说，我们有一个从 $\mathrm{Sym}(\prod_{g\in C} A_g)$ 到 $\mathrm{Sym}(\prod_{g\in E} A_g)$ 的嵌入（记号上省略），称为**自然嵌入**。其像称为 $\mathrm{Sym}(\prod_{g\in C} A_g)$ 在 $\mathrm{Sym}(\prod_{g\in E} A_g)$ 中的**自然副本**。

通常，我们希望将 $\pi$ 抽象地定义为笛卡尔积上的一个置换，并使用特殊的 @记号来明确该置换作用于较大乘积中的哪些坐标。例如，如果我们考虑 $A_1 \times A_2 \times A_3$ 的置换，其中 $A_1 = A_2 = A_3 = \{0, 1\}$，我们可能会考虑长度为2的词的 3-循环 $\pi =$ (00 01 10)，并将由 $(\pi@12)(a, b, c) = (a', b', c)$ 定义的 $A_1 \times A_2 \times A_3$ 上的置换写作 $\pi@12$，其中 $a'b' = \pi(ab)$。对于模式，我们也采用类似的约定；具体而言，如果 $a \in A_g$，我们将模式 $p \in A_g^{\{g\}}$写作 $a@g$，其中$p_g = a$。

下文中，我们考虑笛卡尔积 $A \times B \times C$ 上的置换。然后，我们可以直接用符号 $A, B, C$ 来指代坐标（即使它们在技术上可能指代同一个集合），例如将 $AC$ 视为一个形式符号，用来指代 $A \times B \times C$ 最外侧的两个坐标。

我们将使用 [4] 中的以下“超图引理”。为陈述该引理，我们先引入一些术语。我们将由一组节点以及这些节点的若干子集（称为超边）构成的集合称为超图。我们称其为 $k$-超图

若所有子集的基数均为 $k$。2-超图称为图。超图有一个底层图，其中包含那些包含在超边中的、由两个节点组成的子集。如果超图的底层图是连通的，我们就称该超图弱连通。

**引理 11.** 设 $G$ 是一个弱连通的3超图。假设 $\mathcal{G}$ 是交错群($V(G)$) 的一个子群，并且对于 $G$ 的每条超边，它都包含这些节点的旋转。那么 $\mathcal{G}$ 包含交错群($V(G)$)。

在 [4], 中，这一点只对有限图证明了，但对一般图仍然成立（因为连通图是其连通有限子图的有向并）。

**引理 12.** 设 $A$、$B$、$C$ 是非空集合。设 $\mathcal{G}$ 为由交错群($A \times B$) 和交错群($B \times C$) 的自然副本生成的群。那么交错群($A \times B \times C$) $\leq \mathcal{G}$ 当且仅当以下条件之一成立：

- $A$、$C$ 中有一个是单元素集合，或者
- 所有集合都至少包含两个元素，且其中一个至少包含三个元素。

证明。 首先，我们排除其中一个集合为单元素集合的无关紧要情形。如果 $A$ 或 $C$ 是单元素集合，那么显然 $\mathcal{G}$ 由 Alt($A \times B$) 和 Alt($B \times C$) 生成（事实上，它等于其中之一）。如果 $A$ 和 $C$ 都不是单元素集合，但 $B$ 是，那么 $A$ 与 $C$ 之间没有连通，而且很容易找到 Alt($A \times C$) 中的一个置换，使得一侧的作用取决于另一侧。如果所有集合的基数都是 2，那么分别在 $\mathbb{Z}_2$ 与每个集合之间建立任意双射，可见所有置换都是仿射映射，因此显然无法生成完整的交错群。

现在假设所有集合的大小都至少为 2，且其中一个集合的大小至少为 3。首先，考虑 $|A| \geq 4$ 的情形。考虑节点为 $ABC$ 的图，其超边为那些 ($abc$, $a'b'c'$)，其中 $ABC$ 中存在一个同时包含这两个字的 3-循环。根据引理 11，我们只需证明这个超图是弱连通的。我们证明，同时改变第一坐标和另一个坐标都是可行的，即当 $a \neq a'$，$b \neq b'$，$c \neq c'$ 时，($abc$，$a'bc'$) 和 ($abc$，$a'b'c$) 是其底层图中的超边。显然它们使底层图连通，因此这就足够了。

我们不妨假设所有集合 $A$，$B$，$C$ 都由从 0 开始的数字组成。我们有置换 $\pi_1 =$ (00; 10; 20)@$AB$ 和 $\pi_2 =$(11; 21; 31)@$AB$ 属于 $\mathcal{G}$，并且有 $\pi_3 =$ (00; 10; 11)@$BC \in \mathcal{G}$。于是

$$[\pi_2^{\pi_3}, \pi_1] = (000;\ 300)(100;\ 200)@ABC = (00;\ 30)(10;\ 20)@AB|0@C =: \pi_4.$$

这只是一个计算，但直观的解释如下：由于$\pi_2$ 不会改变 $B$ 或 $C$ 坐标，因此无论应用 $\pi_2^{\pi_3}$还是 $\pi_2^{-\pi_3}$，$\pi_3$ 对 $B \times C$ 的作用总会抵消，而 $\pi_2^{\pi_3}$只影响 $A$。因此，$\pi_1$和 $\pi_2^{\pi_3}$都只影响 $A$。现在考虑换位子对 $abc$的作用。如果$b \neq 0$，那么 $\pi_1$ 在换位子的两次作用中都平凡作用，因此换位子会抵消。如果 $b = 0$，那么除非 $c = 0$，否则 $\pi_2^{\pi_3}$在换位子的两次作用中都平凡作用，因此若 $b = 0 \wedge c \neq 0$，换位子也会再次抵消。如果 $bc = 00$，那么换位子不会抵消，其作用为 [(1 2 3)，(0 1 2)] = (0 3)(2 1)。

现在我们注意到，由于 Alt($A \times B$) 是单群，它是 (00; 30)(20; 10) 的正规闭包。用这种方式表示 Alt($A \times B$) 的元素，但将这些操作改为作用于 $\pi_4$，我们得到群 Alt($A \times B$)|0@$C$；特别地，对于 $AB$的任意一个 3-旋转 ($ab$; $a'b'$; $a''b''$)，都有 ($ab0$; $a'b'0$; $a''b''0$) $\in \mathcal{G}$。由于 0 的作用无关紧要，我们得出结论：边 ($abc$, $a'b'c$)（包括可能存在 $a = a'$ 或 $b = b'$的情形）都属于第一段所描述的图。

现在考虑用$\pi_5^{\pi_6}$对 3-循环 (000; 100; 200) 进行左共轭，其中 $\pi_5$ = (10; 11; 01)@$AB, \pi_6$ = (10; 11; 01)@$BC$，使这三个字在该映射下向前移动。结果是 (000; 101; 200)。同样，符号的作用是任意的，因此我们可以用一个 3-循环同时改变$A$-和 $C$-坐标，这表明类型为 ($abc, a'bc'$) 的超边属于该图。由此，我们得到了所声称的所有超边，超图引理适用。

其次，考虑 $|B| \geq 3$ 的情形。那么

$$\begin{aligned}\pi &= [(00;\ 01;\ 02)@AB, (00;\ 01;\ 11)@BC] \\ &= (000;\ 021;\ 020;\ 001;\ 011)@ABC \\ &= (00;\ 21;\ 20;\ 01;\ 11)@BC|0@A\end{aligned}$$

推理与之前完全相同。我们有一个 5-循环 (00; 21; 20; 01; 11)，其在交错群 Alt($B \times C$) 中的正规闭包是整个 Alt($B \times C$)。在 $A$-坐标中不出现 0 的情形下，它们的作用相互抵消，因此恰好生成 Alt($B \times C$)|0@$A$。

情形 $|C| \geq 4$ 与情形 $|A| \geq 4$是对称的。

剩下的情形只有 $|A| = 3$、$|B| = 2$、$|C| = 2$； $|A| = 2$、$|B| = 2$、$|C| = 3$；以及 $|A| = 3$、$|B| = 2$、$|C| = 3$。我们已在 GAP 中对这些情形进行了检验，代码见 [26]。□

下面的引理推广了 [24] 中的引理 3.2。

**引理 13**。设 $G$ 是一个连通无向图，并假设对于每个$g \in V(G)$，都有一个集合 $A_g$，使得对所有 $g$ 均有 $|A_g| \geq 2$，并且对某个$g$有 $|A_g| \geq 3$。假设 $\mathcal{G} \leq$交错群($\prod_{g \in V(G)} A_g$) 包含对于每条超边 $\{u, v\} \in E(G)$以及每个 $\pi \in$ 交错群($A_g \times A_h$)的置换 $\hat{}\pi$，其定义为

$$\hat{\pi}(p)_w = \begin{cases} p_w & if\ w \notin \{u, v\} \\ \pi(p|\{u, v\})_w & otherwise. \end{cases}$$

那么 $\mathcal{G}$ 包含 交错群($A^{V(G)}$)。

证明。我们使用引理 12 和归纳法。对于任意包含 $g$ 且满足 $|A_g| \geq 3$ 的两个节点的连通集 $D$，显然我们在 $\mathcal{G}$ 中有交错群($\prod_{k \in D} A_k$) 的自然副本。如果 $D \cup \{g\}$ 是连通的，并且 $D$ 包含满足 $A_k \geq 3$ 的 $k$，那么 $g$ 与某个 $h \in C$ 连通，并且我们可以在前一个引理中取 $A = C \setminus \{h\}$， $B =\{h\}$, $C = \{g\}$，从而得出交错群($\prod_{k \in D \cup \{g\}} A_k$) 的自然副本包含在 $\mathcal{G}$ 中。 □

如果所有集合的大小都是 2，那么引理不成立，因为对于 $A_g$ 与二元域之间任意选取的双射，所有置换都是仿射的。

# 8 自同构群的有限生成非残有限子群

**定义 5.** 设 $G$ 是一个有限生成群， $X \subset A^G$ 是一个子移位。对于分解 $d$ : $B \cong B_1 \times B_2$ （通过任意双射）为直积，对应的 部分移位 是 $X \times B^G$ 的自同构，定义如下:

$$\sigma_{d,h}(x,y,z)_g = (x_g, y_g, z_{hg})$$

其中 $x \in X$、$y \in B_1^G$、 $z \in B_2^G$ 和 $h \in G$。

对于不同的双射 $d$ : $B \cong B_1 \times B_2$，我们得到不同的群。注意，如果固定一个双射 $d$ : $B \cong B_1 \times B_2$ 并通过它观察构型，那么该分解的部分平移 $d$ 与平凡分解 $B \cong \{1\} \times B$ 结合起来，也生成部分平移 $\sigma'_h(x,\ y,\ z)_g = (x_g,\ y_{hg},\ z_g)$。或者，这些部分平移直接对应于双射 $B \cong B_2 \times B_1$ 的部分平移，该双射由 $d$ 交换像的分量得到。

**引理 14.** 设 $G$ 是一个有限生成群， $X \subset A^G$ 是一个子移位。则 自同构群($X \times B^G$) 中存在一个有限生成子群，包含所有部分平移。

证明。 显然，我们只需考虑有限多个分解 $B \cong B_1 \times B_2$ （因为 $B$ 是有限的）；如果两个分解 $d$ : $B \cong B_1 \times B_2$， $d'$ : $B \cong B'_1 \times B'_2$ 在如下意义下同构：存在某些双射 $d_1$ : $B_1 \cong B'_1$和 $d_2$ : $B_2 \cong B'_2$ ，使得 $d'(b) = (d_1(b_1)\ d_2(b_2))$，那么对应的部分平移相同。对于每个分解，这些部分平移生成的群同构于 $G$，因此这些群都是有限生成的。它们生成的子群包含所有部分平移。

□

**引理 15**。 设 $G$ 是一个有限生成群， $X \subset A^G$ 是一个子移位。若$|B| \geq 3$，则存在一个有限生成子群 $\mathcal{H}$ ，它包含于 自同构群($X \times B^G$) 中，并且包含所有 $f_{U,\ \pi}$ ，其中 $\pi$ 是 $B$ 的一个偶置换， $U$ 是一个开闭集。

证明。 令 $\mathcal{H}$ 为由（有限多个）部分移位生成的群，以及所有满足 $\pi \in$Sym($B$) 且 $a \in A$ 的 $f_{[a],\pi}$ 。注意，对于任意开闭集 $U, V$，以及任意满足 $\pi' \in$Sym($B$) 的 $\pi$, $\pi' \in$，我们有

$$[f_{U,\pi}, f_{V,\pi'}] = f_{U \cap V,[\pi,\pi']}.$$

利用这一点，以及 $S_n$ 的下中心列在 $n \geq 3$ 时于 $A_n$ 终止这一事实，我们可以对 $|D|$ 使用归纳法，证明对于所有柱集 $[p]$ 和模式 $p \in A^D$ ，自同构 $f_{[p],\pi}$ 均属于 $\mathcal{H}$。

对于 $|D| = 1$ 的情形，注意到 $f_{g[a],\pi} \in \mathcal{H}$ ，即使对于所有 $\pi \in$ Sym($B$) 也成立；这是通过用部分移位对 $f_{[p],\pi}$ 进行共轭得到的。具体而言，使用平凡分解 $B = \{1\} \times B$ ，使整个 $B$-轨道都发生平移。对于一般情形，令 $D = D' \sqcup \{g\}$。于是，在 $\mathcal{H}$ 中，对于 $\pi' \in$ Alt($B$) 和 $\pi \in$ Sym($B$)，映射 $[f_{[p|D'],\pi'}, f_{[p|\{g\}],\pi}] = f_{p,[\pi',\pi]}$ 均成立。由于换位子 $[\pi', \pi]$ 生成 Alt$B$，这就证明了归纳步骤。

对于任意开闭集 $U$，我们都可以将其写成若干柱集的并，并将$f_{U,\ \pi}$ 表示为可交换乘积 $f_{U,\ \pi} = \prod_i f_{[p_i],\ \pi}$。 □

**定理 8**。 如果 $G$ 是有限生成的，且 $X \subset A^G$ 没有稠密的周期点，那么当以下任一条件成立时，$\mathrm{Aut}(X \times B^G)$ 具有一个不是剩余有限的有限生成子群 $\mathcal{G}$ :

- $|B| = mn$ 满足 $m \geq 2$、$n \geq 3$，或
- $|B| \geq 3$ 和 $X$ 是 $\mathcal{B}_1$-无周期的。

在第一种情况下，我们可以使用引理 *15* 的证明中构造的群 $\mathcal{G}$ 。

证明。 注意，在每种情况下都有 $|B| \geq 3$，因此引理 15 适用。我们将引理 15 中的 $\mathcal{H}$ 的生成元作为有限生成子群 $\mathcal{G}$ 的生成元；在 $|B| \geq 3$ 和 $X$ 是 $\mathcal{B}_1$-无周期的情况下，还加入有限多个额外的$f_{U,\ \pi}$ （其中 $\pi$ 置换某个开闭集 $U$的一个非单元素安全集）

首先考虑 $|B| = mn$ 且 $m \geq 2$，$n \geq 3$的情况。我们在群 $\mathcal{G}$中实现定理 5 的证明中的方案。注意，来自该证明的映射$f = f_{U,\ \hat{\pi}}$ 根据引理 15 直接属于 $\mathcal{G}$ 。回想一下，此处的 $U$ 是一个不包含任何全周期点的非空开闭集（假设这样的集合存在），而 ˆ$\pi$ ∈Sym($A$) 是任意一个非平凡置换，其奇偶性与 $|A|$的奇偶性相同。

现在我们需要证明，对于一个带有安全集 $S$的开闭集 $V$，我们可以在 $\pi \in k^S$ 15, $f_{V\pi} \in$ 上执行 $\mathcal{G}$ $\pi \in B^{\{g\}}$ $B \cong B_1 \times B_2$ $|B_1| =$ 任意偶置换 Alt( )。再次由引理可得，对于任意 Alt( )。固定一个满足 $m$，$|B_2| = n$ 的分解。利用该分解的部分移位 $\sigma'_k$ ，以及平凡分解 $B \cong \{1\} \times B$ 的部分移位 $\sigma_k$ ，我们得到，只要 $\pi$ ∈Alt($B_1^{\{g\}} \times B_1^{\{h\}}$)，就有 $f_{V,\ \pi} \in \mathcal{G}$，并且 $g$，$h \in G$。

特别地，如果 $S$ 是 $V$的一个安全集，考虑我们能在 $V$的一次出现位置下、在相对位置上执行的置换 $P$，它们作用于 $(B_1 \times B_2)^S$ 。如果我们构造一个具有 $2|S|$ 个节点的完全二分图，每个节点分别对应一个 $B_1^{\{g\}}$ 或 $B_2^{\{h\}}$ -符号，那么在 $\mathcal{G}$ 中，我们就有与所有超边对应的交错群。由引理 13，得出 $P =$ Alt($(B_1 \times B_2)^S$) $=$ Alt($B^S$)。我们得出结论：证明定理 5 中出现的所有映射 $f_i$ 以及所有单群 $\mathcal{G}_i$ 都包含在 $\mathcal{G}$中。因此， $\mathcal{G}$ 不是剩余有限的。

接下来考虑 $|B| \geq 3$ 的情况，并假设 $X$ 是 $\mathcal{B}_1$-无周期的。在这种情况下，我们利用这样一个事实：按照协议执行时，开闭集 $V$ 的安全集（对应于相对于脑的各种安全集形状）是连通的。

现在，我们使用 $\mathcal{B}_1$-非周期性假设：如果一开始对 $X$ 进行共轭，我们可以假设 $\mathcal{B}_1$-非周期性表现为：在构型 $x \in X$ 中，任何符号都不会与自身相邻。因此，对于安全集 $S$ 中 $V$ 的任意两个相邻位置 $\{g, sg\}$，我们总能保证 $V$ 在 $g$ 和 $sg$ 处是不同的符号。我们可以在生成集中加入 Alt($B^2$) 的所有置换，它们只在第一轨道的一对特定符号下作用，这对符号在相对位置 $\{e, s\}$。将这类置换与相对位置 $g$ 处单个符号的 3-轮换进行共轭，实际上就能得到群 Alt($B^2$) 的一个副本，它只在相对位置 $g$，$sg$ 处、在 $V$ 的一次出现下作用。

由于 $S$ 是连通的，根据引理 13，我们可以在 $V$ 的一次出现位置下对 $B^S$ 进行任意偶置换。同样，这意味着自同构 $f_i$ 和单群 $\mathcal{G}_i$ 都包含在 $\mathcal{G}$ 中。□

# 参考文献

[1] Sebasti´an Barbieri、Nicanor Carrasco-Vargas 和 Paola Rivera-Burgos。《群上强不可约子移位的自同构群》，2025年。

[2] A。《国际编码理论与应用研讨会》论文集，第86–95页。施普林格，1986年。[3] Khalid Bou-Rabee和Yves Cornulier。线性群的收缩增长。美国数学会会报，144(2)：529–533，2016年。[4] Tim Boykett、Jarkko Kari和Ville Salo。一般守恒律下可逆门集的有限生成集。理论计算机科学，701：27–39，2017年。[5] Mike Boyle、Douglas Lind和Daniel Rudolph。有限型移位的自同构群。美国数学会汇刊，306(1)：第71–114页，1988年。[6]Antonin Callard和Ville Salo。全移位自同构群中的扭曲元素。《遍历论与动力系统》，44(7)：1757–1817，2024年。[7]Tullio Ceccherini-Silberstein和Michel Coornaert。强不可约子移位中周期构型的密度。非线性，25(7)：2119，2012年6月。[8] Van Cyr、John Franks、Bryna Kra和Samuel Petite。移位的扭曲与自同构群。现代动力学杂志，13(1)：147，2018年。[9] Van Cyr和Bryna Kra。拉伸指数增长极小移位的自同构群。现代动力学杂志，10：483–495，2016年。[10] Robbert Fokkink、Dan Rust和Ville Salo。随机替换子移位的自同构群。数学研究，35(5)：931–958，2024年。[11] Joshua Frisch、Tomer Schlank和Omer Tamuz。全移位自同构群的正规可解子群。《遍历论与动力系统》，39(5)：1290–1298，2019年。[12] Rostislav Grigorchuk。关于群增长间隙猜想。数学科学通报，4(1)：113–128，2014年。[13] Gustav A. Hedlund。移位动力系统的内同态与自同构。数学系统理论，3：320–375，1969年。[14] Michael Hochman。关于多维有限型移位的自同构群。《遍历论与动力系统》，30(3)：809–840，2010年。[15] Michael Hochman。\(\mathbb zˆ 2\)符号系统中的不可约性与周期性。离散分析，2025年。[16] K. H. Kim和F. W. Roush。关于子移位的自同构群。纯数学与应用，1(4)：203–230，1990年。

[17] Samuel J Lightwood。从非周期 $\mathbb{Z}^2$ 子移位出发的态射 I：通过同态构造嵌入。《遍历论与动力系统》，23(2)：587–609，2003 年。[18] Tom Meyerovitch。多维子移位的嵌入定理。*arXiv* 预印本 *arXiv:2312.05650*，2023 年。[19] Tom Meyerovitch。多维子移位的嵌入定理。《遍历论与动力系统》，45(6)：1870–1914，2025 年。[20] Ronnie Pavlov 和 Scott Schmieding。低复杂度子移位的局部有限性与自同构群。《遍历论与动力系统》，43(6)：1980–2001，2023 年。[21] Leo Poirier 和 Ville Salo。可缩子移位，2024 年。[22] Ville Salo。全移位上由幂等元生成的元胞自动机的刻画。载于 Edward A. Hirsch、Juhani Karhum¨aki、Arto Lepist¨o 和 Michail Prilutskii 编，*CSR*，第 7353 卷《计算机科学讲义》，第 290–301 页。施普林格，2012 年。[23] Ville Salo。全移位有限点上的传递作用与有限型 Ryan 定理。《遍历论与动力系统》，39(6)：1637–1667，2019 年。[24] Ville Salo。元胞自动机的泛群。载于《数学研讨会》，第 169 卷，第 39–77 页。波兰科学院数学研究所，2022 年。[25]Ville Salo。群上的元胞自动机群中的字问题与嵌入障碍。*arXiv* 预印本 *arXiv:2503.05572*，2025 年。[26]Ville Salo。置换检查。https://github.com/vosalo/ PermutationChecks，2026 年。GitHub 仓库。[27] Ville Salo 和 Scott Schmieding。子移位的有限型 Ryan 定理与局部 $\mathcal{Q}$熵，2025 年。[28] Ville Salo 和 Ilkka T¨orm¨a。原始一致替换与 Pisot 替换之间的块映射。《遍历论与动力系统》，35：2292–2310，2015 年 10 月。[29] Anatoly M Vershik。可局部嵌入有限群类的群。《代数与分析》，9：71，1997 年。[30] Benjamin Weiss。Sofic 群与动力系统。$Sankhy\bar{a}$：印度统计学杂志，*A*辑（*1961–2002*），62(3)：350–359，2000 年。