arXiv:2603.16613v1 [math.CO] 17 Mar 2026

方程类中相容有向图的连通性概念

´GERGO GYENIZSE、MIKLOS MAROTI 和 LASZLO ZADORI

Abstract. 如果有向图 $\mathbb{G}$ 中的任意两个顶点都分别由一条定向路径、有向路径和对称路径连接，则称其为弱连通、强连通和极端连通。我们研究迫使这些连通性概念中的某些概念重合的有向图的代数性质。

我们证明，对于具有 Hobby-McKenzie 多态运算的有向图，其强连通分支与极端连通分支重合。反过来，如果方程类中任意相容有向图的强连通分支与极端连通分支重合，那么该类必定具有 Hobby-McKenzie 项。因此，我们得到：方程类 $\mathcal{V}$ 对某个 n 是 n- 可置换的，当且仅当其中任意相容自反有向图 $\mathcal{V}$ 的弱连通分支都是极端连通的。

1. 引言

本文研究各种代数方程类中相容有向图的形态。在说明研究动机之前，我们先澄清研究中用到的一些基本概念。

全文中，我们用粗体大写字母表示代数，用相同的大写字母表示其底集；用黑板粗体大写字母表示有向图，用相同的大写字母表示其顶点集。我们用花体大写字母表示簇。

如果有向图 $\mathbb{G}$ 中的任意两个顶点分别通过 $\mathbb{G}$中的一条有向、定向和对称路径相连，那么称 $\mathbb{G}$ 为**弱连通**、**强连通**、**极端连通** $\mathbb{G}$ 。我们还需要第四种连通性概念——根连通，它的定义要稍微复杂一些。我们将在第2节给出定义。理解引言内容只需知道，对于任意有向图，以下蕴含关系成立：极端连通 $\Rightarrow$根连通 $\Rightarrow$ 强连通 $\Rightarrow$弱连通。每一种

关键词与短语。有向图；簇；可解释性；克隆同态；连通性。

作者的研究得到了 NKFIH 项目 K138892 和 AD-VANCED 153383 的资助，以及项目 TKP2021-NVA-09 的资助；后者由匈牙利文化与创新部通过国家研究、发展与创新基金提供经费。

有向图的这些连通性概念都会自然地导出其顶点集上的一个等价关系。我们分别称之为该有向图的极端等价关系、根等价关系、强等价关系和弱等价关系。图1展示了这四种有向图等价关系的包含次序。

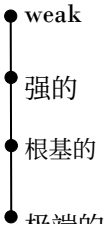

FIGURE 1. 与四种连通性概念相关的全序集

一个簇（也称为方程类）是由满足给定签名下一组恒等式的、具有相同签名的所有代数构成的类。若存在一个$\mathbf{G}$代数属于某个簇，且其底集与有向图的顶点集相同，并且该有向图的边关系是$\mathbf{G}$的子代数，则称该有向图 $\mathbb{G}$相容于该簇 $\mathcal{V}$。此时，我们也称 $\mathbb{G}$它是代数$\mathbf{G}$的一个相容有向图。

泰勒簇在 [3] 中被引入，定义为其完全幂等约化不能在集合簇 $\mathcal{SET}$中解释的簇。泰勒簇有多种刻画方式，例如参见 [7], 中的定理 A.1，以及 [1]中的引理 4.2 和推论 4.3。在 [4], 中，我们借助相容自反有向图的两种连通性概念，给出了泰勒簇的一种刻画。下述定理中条目（1）与（2）的等价性是这一刻画的一部分。考虑到根连通蕴含强连通，且强等价关系是使有向图的商无环的最小等价关系，条目（2）与（3）显然等价。对本文而言，条目（3）更为合适，因为它直接联系了上述两种连通性概念所对应的等价关系。

定理 1.1 ([4],参见定理 4.4)。 对于任意簇 $\mathcal{V}$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{V}$ 是 *Taylor*簇。*(2)* $\mathcal{V}$ 中每个相容自反有向图对其根等价取商后都是无环的。*(3)* 对于 $\mathcal{V}$ 中任意相容自反有向图，强等价与根等价重合。

在 [5], Hagemann 和 Mitschke 借助相容自反有向图刻画了 n-置换簇。他们证明，簇 $\mathcal{V}$ 是 n-置换的，当且仅当对任意边 $a \to b$

在 $\mathcal{V}$ 中任意相容自反有向图 $\mathbb{G}$ 里，都存在一条长度不超过 $n-1$、从 b 到 a 的有向路径，该路径位于 $\mathbb{G}$ 中。若某个簇对某个 $n \geq 2$ 是 n-置换的，我们就称它为*Hagemann-Mitschke* 簇。在[13], Valeriote 和 Willard 证明，Hagemann-Mitschke 簇就是其完全幂等约化不能在分配格簇 $\mathcal{DL}$ 中解释的那些簇。利用 [4],中的定理 4.4，我们从相容自反有向图的连通关系角度，得到了 Hagemann-Mitschke 簇的一个刻画。下述定理中第 (1) 项与第 (2) 项的等价性是这一刻画的一部分。此外，不难看出第 (2) 项与第 (3) 项等价。只需利用以下事实：根连通蕴含弱连通；对于一个有向图，弱等价是使商成为环的不交并的最小等价关系。请注意，与定理 1.1 类似，这里的第 (3) 项也直接关联了与上述两种连通性概念有关的等价关系。

定理 1.2 （[4],参见推论 4.5）。 对于一个簇 $\mathcal{V}$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{V}$ 是一个 *Hagemann-Mitschke* 簇。*(2)* $\mathcal{V}$ 中每个相容自反有向图对其根等价取商后，都是环的不交并。*(3)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，弱等价与根等价一致。

Hobby-McKenzie 簇在 [6] 中被引入，指的是其完全幂等约化不能在半格簇 $\mathcal{SL}$ 中解释的那些簇。Hobby-McKenzie 簇有多种刻画方式，例如参见 [7], 中的定理 A.2，以及 [2]中的引理 5.1 和推论 5.2。此处我们注意到，对于迄今引入的三类簇，通过考察它们对完全幂等约化的解释刻画，可得以下蕴含关系： $\mathcal{V}$ 是 Hagemann-Mitschke 簇 $\Rightarrow$ $\mathcal{V}$ 是 Hobby-McKenzie 簇 $\Rightarrow$ $\mathcal{V}$ 是 Taylor簇。

本文研究 Hobby-McKenzie 簇中相容自反有向图的结构。我们的目标是为 Hobby-McKenzie 簇提出一种类似于上文标注的定理中针对 Taylor 簇和 Hagemann-Mitschke 簇所给出的刻画。

在 [10], 中，最后两位作者证明了定理 2.9，该定理指出，在具有 Gumm 项的簇 $\mathcal{V}$ 中，每个相容的有限强连通自反有向图都是极端连通的。我们指出，Gumm 项的存在刻画了簇的同余模性，并意味着该簇是 Hobby-McKenzie 簇。长期以来，我们一直猜想，定理 2.9 对 Hobby-McKenzie

簇的推广也成立。也就是说，如果 $\mathcal{V}$ 是一个 Hobby-McKenzie 簇，那么 $\mathcal{V}$ 中每个相容的强连通自反有向图都是极端连通的。

本文将验证这一猜想。事实上，我们将证明一个更强的结论：一个簇 $\mathcal{V}$ 是 Hobby-McKenzie 簇，当且仅当对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，强等价关系与极端等价关系重合。由对 Hobby-McKenzie 簇的这一新描述，可以进一步推出一个推论：一个簇 $\mathcal{V}$ 是 Hagemann-Mitschke 簇，当且仅当对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，弱等价关系与极端等价关系重合。

本文的结构如下。第2节介绍与簇和有向图有关的一些定义，并在第2节末尾证明一些关于两个特定有向图和 Hobby-McKenzie 簇的初步结果。第3节在证明若干准备性引理和推论之后，证明关于 Hobby-McKenzie 簇的主要结果，见定理 3.5；并作为推论，给出对 Hagemann-Mitschke 簇更好的刻画，见推论 3.6。第4节总结本文所得的结果。

2. Preliminaries

本节回顾与簇、克隆和簇的解释相关的一些基本代数概念。我们还引入有向图连通性的一些进一步概念。在本节末尾，我们定义一些与相容有向图相关的概念，回顾一些众所周知的事实，并验证一些事实，这些事实将有助于我们在第3节中的研究。

簇 $\mathcal{V}$ 的项 t 称为幂等的，如果 $\mathcal{V}$ 满足恒等式$t(x, \dots, x) = x$。簇 $\mathcal{V}$ 的完全幂等约化是一个簇，其签名为 $\mathcal{V}$ 的幂等项集合，其恒等式则是 $\mathcal{V}$ 的幂等项所满足的恒等式。全文中，我们用 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 表示 $\mathcal{V}$ 的完全幂等约化。

如果恒等式每一边至多出现一次函数符号，那么称该簇的语言中的恒等式是线性的。众所周知，Taylor、Hobby-McKenzie 和 Hagemann-Mitschke 簇的特征，分别是存在一个 n 元幂等项 t，使得该簇满足关于 t 的某个有限线性恒等式集合，参见 [3], 中的定理 5.1、5.2 和 5.3， [6], 中的引理 9.5，以及 [8] 中的定理 4.2。相应的项 t 分别称为*Taylor* 项、*Hobby-McKenzie* 项和 *Hagemann-Mitschke* 项。现在显然，一个簇是 Taylor、Hobby-McKenzie 或 Hagemann-Mitschke 簇，当且仅当其幂等约化也分别具有相应性质。

为便于后续使用，我们定义 Hobby-McKenzie 项。若簇 $\mathcal{V}$ 的一个 n 元幂等项 t 对每个$i \in \{1, \ldots, n\}$、 $\mathcal{V}$ 都满足关于两个变量 x 和 y 的一个线性恒等式，如

$$t(x, \ldots, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

其中，对于所有 $i + 1 \leq j \leq n$， x_j， $y_k \in \{x, y\}$ 且对于所有满足$1 \leq k \leq n$的 $k \neq i$。换言之， t 是幂等的，并满足一组线性恒等式，而任何 $\mathcal{SL}$ 的 n 元项都不满足这组恒等式。

设 A 是一个集合。在 A 上的克隆 A 是 A 上有限元运算的集合，它包含所有投影运算，且对复合运算封闭。从克隆 $\mathscr{C}$ 到克隆 $\mathscr{D}$ 的克隆同态 是一个从 $\mathscr{C}$ 到$\mathscr{D}$ 的映射，它将 $\mathscr{C}$ 的每个投影映射到$\mathscr{D}$ 中对应的投影，并且与复合运算相容。设**A** 是一个代数。**A** 的克隆 是**A**的有限元项运算所构成的克隆，记作 Clo(**A**)。

我们定义簇的可解释性概念。我们的可解释性概念与 Garcia 和 Taylor 在 [3] 中提出的概念一致。若一个簇仅由单元素代数组成，则称其为平凡的。平凡簇的克隆 定义为单元素代数的克隆。非平凡簇的克隆 $\mathcal{V}$ 是具有可数无限自由生成集的自由代数的克隆。我们用 Clo($\mathcal{V}$) 表示此克隆。若存在从 Clo($\mathcal{V}$) 到 Clo($\mathcal{W}$) 的克隆同态，我们就称簇 $\mathcal{V}$ 可解释于簇$\mathcal{W}$ 。在定义可解释性时，可以使用簇 $\mathcal{V}$ 或 $\mathcal{W}$ 中任一生成代数的克隆，因为该克隆与相应簇的克隆同构。在后续证明中，我们将直接使用这一事实，不再另行说明。我们指出，簇的可解释性可以用对恒等式集合的满足关系来表述。因此，可解释性的等价描述如下： $\mathcal{V}$ 可解释于 $\mathcal{W}$ ，当且仅当存在一个保元数映射 α ，将 $\mathcal{V}$ 的函数符号映射为 $\mathcal{W}$ 的项，使得对于 $\mathcal{V}$的任意恒等式集合 Σ, 将恒等式中的函数符号替换为它们在 α 下的像后，所得恒等式集合都由 $\mathcal{W}$满足。若两个簇各自都可解释于对方，则称它们互可解释。

对于每个有向图，我们定义四种等价关系，每一种都与某类连通性概念相关。在引言中提到的三类簇中研究相容有向图时，这些等价关系被证明是有用的。设 $\mathbb{G}$为一个自反有向图。设 a 和 b 为 G中的两个顶点。(a, b)-路径是 $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ 中顶点的一个序列，满足对于所有 $0 \leq i < n$都有 $a_i \to a_{i+1}$ 或 $a_{i+1} \to a_i$。 有向的 (a, b)-路径是 $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ 中的顶点序列，满足对于所有 $0 \leq i < n$都有 $a_i \to a_{i+1}$。 对称的 (a, b)- 路径是 $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ 中的顶点序列，满足对于所有 $0 \leq i < n$都有 $a_i \to a_{i+1}$ 和 $a_{i+1} \to a_i$ 。 弱

等价关系 由 $\mathbb{G}$ 中的所有点对 $(a,\ b) \in G^2$ 组成，其中存在一条 $\mathbb{G}$中的 $(a,\ b)$-路径。 $\mathbb{G}$ 的 强等价 由所有点对 $(a,\ b) \in G^2$组成，其中存在 $(a,\ b)$-有向路径和 $(b,\ a)$-有向路径。 $\mathbb{G}$ 的 极端等价 由所有点对 $(a,\ b) \in G^2$ 组成，其中存在 $\mathbb{G}$中的对称 $(a,\ b)$-路径。这些块分别称为相应等价关系的弱、强和极端连通分支 。现在很明显，有向图 $\mathbb{G}$ 是弱连通、强连通和极端连通的，当且仅当 $\mathbb{G}$ 的相应等价关系只有一个块。

设 α 是 $\mathbb{G}$ 上的一个等价关系。那么， $\mathbb{G}/\alpha$ 表示顶点集为 G/α 、边集定义如下的有向图： $A \to B$ 当且仅当 $\mathbb{G}$ 中存在一条边 $a \to b$ ，使得 $a \in A$ 且 $b \in B$。我们还需要一个用于有向图的连通性概念。对于自反有向图 $\mathbb{G}$，我们如下定义 $\mathbb{G}$ 的根等价。设 $\mathbb{G}$ 的极端等价为 ν_0 。再令 $\mathbb{G}/\nu_0$ 的极端等价为 ν_1' ，并令 $\nu_1 = \{(a,b)\colon\ a/\nu_0\ \nu_1'\ b/\nu_0\}.$。显然， ν_1 是 G 上的一个等价关系，且 $\mathbb{G}/\nu_1 \cong (\mathbb{G}/\nu_0)/\nu_1'$ 。利用 ν_i，我们以类似方式为每个 $i \geq 0$ 定义 ν_{i+1} 。显然， $\nu_0 \subseteq \cdots \subseteq \nu_i \subseteq \ldots$ 都是 G 上的等价关系。因此， $\nu = \bigcup_{i=0}^{\infty} \nu_i$ 也是 G 上的一个等价关系。我们称 ν 为 $\mathbb{G}$ 的根等价。 ν 的块称为根连通分支。此外，如果 $\mathbb{G}$ 的根等价只有一个块，我们就称 $\mathbb{G}$ 是根连通的。

命题 2.1. 设 $\mathbb{G}$ 是一个自反有向图。那么它的根基等价关系 ν 是满足 $\mathbb{G}/\mu$ 为反对称的最小等价关系 μ。

证明。 在 [4] 中，我们证明了有向图 $\mathbb{G}/\nu$ 是反对称的。这里我们论证 ν 是满足 G 为反对称的最小等价关系 μ 。

因此，设 μ 是 G 的一个等价关系，且 $\mathbb{G}/\mu$ 为反对称。我们对 i 使用归纳法，证明对所有 i 都有 $\nu_i \subseteq \mu$ ，从而得到 $\nu \subseteq \mu$。若 $\nu_0 \not\subseteq \mu$，则存在一个 $(a,b) \in \nu_0 \setminus \mu.$。因此，在 μ 中存在一条对称路径 $a = a_0 \leftrightarrow a_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow a_n = b$，以及一个 $0 \leq j < n$，使得 $(a_j, a_{j+1}) \notin \mu$；但这将意味着 $a_j/\mu \neq a_{j+1}/\mu$ 且 $a_j/\mu \leftrightarrow a_{j+1}/\mu$，所以 $\mathbb{G}/\mu$ 将不是反对称的。因此 $\nu_0 \subseteq \mu$。假设 $i \geq 1$，则根据归纳假设， $\nu_{i-1} \subseteq \mu$。若 $\nu_i \not\subseteq \mu$，则存在一个 $(a,b) \in \nu_i \setminus \mu.$。因此，存在 ν_{i-1} 的块 B_0、.....、B_n，元素 a_k、b_k、a_k'、$b_k' \in B_k$，其中 $0 \leq k \leq n$，以及一个 $0 \leq j < n$ ，使得对所有 $0 \leq k < n$，均有 $a \in B_0$、 $b \in B_n$、 $a_k \to b_{k+1}$、 $a_k' \leftarrow b_{k+1}'$ ，且 $(a_j, a_{j+1}) \notin \mu$。由于每个 B_k 都包含在某个 μ-块中，这再次意味着 $a_j/\mu \neq a_{j+1}/\mu$ 且 $a_j/\mu \leftrightarrow a_{j+1}/\mu$，所以 $\mathbb{G}/\mu$ 将不是反对称的。因此 $\nu_i \subseteq \mu$。 ■

注意，根据前面的命题， $\mathbb{G}$ 的根等价是强等价的一个子关系。事实上， $\mathbb{G}$ 的商

对 $\mathbb{G}$ 按强等价取商，显然得到一个无环的、因而是反对称自反有向图。

因此，现在应该很清楚，对于任意自反有向图 $\mathbb{G}$，弱等价、强等价、根基等价和极端等价按照包含关系构成一个递减序列，正如我们在引言中提到的这一事实。我们还注意到，对于代数$\mathbf{G}$的每个相容有向图 $\mathbb{G}$，上述不同连通性概念所定义的四种等价关系都是$\mathbf{G}$的同余。

对于有向图 $\mathbb{G}$， n次幂 $\mathbb{G}^n$ 是一个顶点集为 G^n 的有向图，其边定义如下：当且仅当对所有 $1 \leq i \leq n$， $a_i \to b_i$ 属于 $\mathbb{G}$时，$(a_1, \ldots, a_n) \to (b_1, \ldots, b_n)$。称 G 上的一个 n元运算 f 为 $\mathbb{G}$ 的多态运算，如果 f 保持 $\mathbb{G}$ 的边关系，也就是说，对于 $\mathbb{G}^n$中的所有$(a_1, \ldots, a_n) \to (b_1, \ldots, b_n)$，都有 $\mathbb{G}$中的 $f(a_1, \ldots, a_n) \to f(b_1, \ldots, b_n)$。有向图 $\mathbb{G}$ 的多态运算在集合 G 上构成一个克隆。我们将此克隆记为$\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$。$\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$中的幂等运算也在 G上构成一个克隆。这个克隆记为$\mathrm{Pol}_{\mathrm{Id}}(\mathbb{G})$。我们指出，并且稍后会直接使用这一事实： $\mathbb{G}$是 $\mathcal{V}$ 中的相容有向图，当且仅当存在一个从 $\mathcal{V}$ 的克隆到$\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$的克隆同态。

我们定义两个在后续证明中经常出现的特定小有向图。令 $\mathbb{D}$ 为定义在 3 元集合$\{0, 1, 2\}$ 上的自反有向图，其非环边为 $0 \leftrightarrow 1$、 $1 \to 2$和 $2 \to 0$。令 $\mathbb{K}$ 为定义在 4 元集合 $\{0, 1, 2, 3\}$上的自反有向图，其非环边为 $0 \leftrightarrow 1$、 $1 \to 2$、 $2 \leftrightarrow 3$和$3 \to 0$。我们在图2中绘出了这两个有向图。

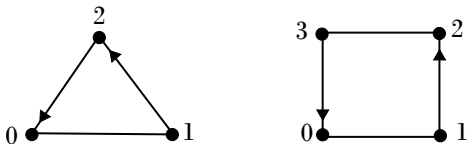

FIGURE 2. 有向图 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{K}$ （未显示环边以及重边上的箭头）。

在下面的命题中，我们建立 $\mathbb{D}$ 和$\mathbb{K}$的一些性质。

命题 2.2。 令 **D** 和 **K** 分别表示定义在 D 和 K 上的代数，其基本运算分别等于 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{K}$的幂等多态射。令 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别为由**D** 和 **K**生成的簇。则有如下结论。

(1) $\mathcal{SL}$ 和 $\mathcal{D}$ 互可解释。 *(2)* $\mathcal{SET}$ 和 $\mathcal{K}$ 互可解释。

证明。 首先证明命题 **(1)**。注意，链 $0 < 1 < 2$ 上的交半格运算是 $\mathbb{D}$ 的一个多态运算。因此， $\mathcal{SL}$ 可在 $\mathcal{D}$ 中解释。

对于反方向，首先注意到 $\{0,2\}$ 在 $\mathbf{D}$ 的运算下封闭。事实上，对于任意 $c_1,\dots,c_n \in \{0,2\}$ 以及 n 元幂等多态运算 t（定义在 $\mathbb{D}$ 上），$2 = t(2,\dots,2) \to t(c_1,\dots,c_n)$。因此 $t(c_1,\dots,c_n) \in \{0,2\}$。令 $\mathbf{D}_0$ 表示底集为 $\{0,2\}$ 的 $\mathbf{D}$ 的子代数。令 $\mathcal{D}_0$ 为由 $\mathbf{D}_0$ 生成的簇。显然，$\mathcal{D}$ 可在 $\mathcal{D}_0$ 中解释。若能证明 $\mathcal{D}_0$ 可在 $\mathcal{SL}$ 中解释，则结论成立。

为证明这一点，只需验证 $\mathbf{D}_0$ 的任意项运算都是全序集 $0 < 2$ 上的交半格运算。注意，$\mathbf{D}_0$ 的每个项运算都具有 $t|_{\{0,2\}}$ 的形式，其中 $t \in \mathrm{Pol}_{\mathrm{Id}}(\mathbb{D})$。我们的首要目标是描述 $\mathrm{Pol}_{\mathrm{Id}}(\mathbb{D})$ 的多态运算。因此，设 t 是 n 元幂等多态运算 $\mathbb{D}$。

若存在$c_1,\dots,c_n \in D$ 使得 $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ 是 的主子集，则称其为主子集

$$t(c_1,\dots,c_n) = 2 \text{ and } I = \{i \mid c_i = 2\}.$$

由幂等性可知，$\{1,\dots,n\}$ 本身就是一个主子集。我们证明关于这些主子集的两个断言。

断言 1. 设 $d_1,\dots,d_n \in D$ 且 $I = \{i\colon d_i = 2,\ 1 \le i \le n\}$。那么$t(d_1,\dots,d_n) = 2$ 当且仅当 I 是 $\{1,\dots,n\}$ 中的一个主子集。

断言的证明。“只有当”部分由主要子集的定义立即可得。对于“如果”部分，设 I 是一个主要子集，则存在 $c_1,\dots,c_n \in D$ 使得

$$t(c_1,\dots,c_n) = 2 \text{ and } I = \{i\colon c_i = 2, 1 \le i \le n\}.$$

注意，由第二个等式可知，$c_i \leftrightarrow d_i$ 对所有 $1 \le i \le n$ 都成立。因此，由于 t 是一个多态运算，$t(c_1,\dots,c_n) \leftrightarrow t(d_1,\dots,d_n)$，而这只有在 $t(d_1,\dots,d_n) = 2$ 时才可能发生。因此断言得证。□

断言 2。主要子集构成 $\{1,\dots,n\}$ 的子集格 $\mathbf{B}(n)$ 的一个滤子。

断言的证明。首先证明，若 I 是一个主要子集，且 $j \in \{1,\dots,n\} \setminus I$，则 $I \cup \{j\}$ 也是一个主要子集。令

$$c = (c_1,\dots,c_n) \in D^n \text{ such that } t(c) = 2 \text{ and } I = \{i \mid c_i = 2\}.$$

则 $c_j \in \{0,1\}$。令 $c'_j \in \{0,1\}$ 使得 $c_j \neq c'_j$，并令

$$c' = (c_1,\dots,c'_j,\dots,c_n).$$

由于 $c_j \leftrightarrow c'_j$ 和 t是一个多态运算，$2 = t(c) \leftrightarrow t(c')$，因此$t(c') = 2$。接下来由

$$t(c_1,\dots,1,\dots,c_n) \to t(c_1,\dots,2,\dots,c_n) \to t(c_1,\dots,0,\dots,c_n),$$

其中 0，1 和 2 分别是相应 n 元组的第 j 个分量，

$$2 \to t(c_1,\dots,2,\dots,c_n) \to 2.$$

因此，$t(c_1,\dots,2,\dots,c_n) = 2$。所以 $I \cup \{j\}$ 是一个主子集。这说明主子集构成了$\mathbf{B}(n)$的一个向上闭子集。

我们还需证明主子集在交运算下封闭。假设 I_1 和 I_2 是 t的主子集。令

$$e_i := \begin{cases} 2, \text{ if } i \in I_1 \cap I_2, \\ 1, \text{ if } i \in I_1 \backslash I_2, \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

而

$$e_i^+ := \begin{cases} 2, \text{ if } i \in I_1, \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

and

$$e_i^- := \begin{cases} 2, \text{ if } i \in I_2, \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

那么，对于所有 i，$e_i^- \to e_i \to e_i^+$。根据断言 **1** 以及 t 是一个多态运算这一事实，

$$2 = t(e_1^-, \ldots, e_n^-) \to t(e_1, \ldots, e_n) \to t(e_1^+, \ldots, e_n^+) = 2.$$

因此 $t(e_1, \ldots, e_n) = 2$ 因此，$I_1 \cap I_2$ 确实是 t的一个主子集 . □

根据断言 2，$\{1, \ldots, n\}$ 中存在一个关于 t的最小主子集 I_t。注意，根据断言 **1** 和断言 2，对于任意 $a_1, \ldots, a_n \in D$，$t(a_1, \ldots, a_n) = 2$ 成立，当且仅当对所有 $i \in I_t$，$a_i = 2$ 成立。特别是，由于 t 是幂等的，$I_t \neq \emptyset$。因此，对于任意 $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 2\}$，$t_{\{0,2\}}(a_1, \ldots, a_n) = 2$ 成立，当且仅当对所有 $i \in I_t$，$a_i = 2$ 成立。这恰好意味着

$$t_{\{0,2\}}(x_1 \ldots, x_n) = \bigwedge_{i \in I_t} x_i.$$

因此，$\mathbf{D}_0$ 的任意项运算都是全序集 $0 < 2$上的交半格运算，正如我们所声称的。

对于第 (2) 项，只需证明 $\mathcal{K}$可在 $\mathcal{SET}$中解释，因为 $\mathcal{SET}$可在每个簇中解释。 [9] 应用于 $\mathbb{K}$ 的主要结果断言， $\mathbb{K}$的所有满射多态都本质上是一元的，因此 $\mathbb{K}$ 的幂等多态运算与投影一致。因此， $\mathcal{K}$ 可在 $\mathcal{SET}$中解释。■

我们定义一种构造相容有向图的自然方法。设 $\mathbb{P}$ 是一个有向图。设$\mathbf{A}$ 是一个代数，使得 $P \subseteq A$ 和 P 是$\mathbf{A}$的生成集。如果有向图 $\mathbb{A}$ 的顶点集与 A重合，且其边集等于$\mathbf{A}^2$中由 $\mathbb{P}$ 的边集生成的子代数，我们称 $\mathbb{A}$为由 $\mathbf{A}$ 生成的有向图。注意，如果 $\mathbb{A}$ 是$\mathbf{A}$的$\mathbb{P}$生成有向图，那么 $\mathbb{A}$是$\mathbf{A}$的相容有向图。设$\mathcal{V}$ 是一个簇。设$\mathbf{F} \in \mathcal{V}$ 是自由代数，其自由生成集为 P。有时，我们称$\mathbf{F}$ 的 $\mathbb{P}$生成有向图为由 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{V}$中自由生成的相容有向图。

我们称有向图 $\mathbb{H}$ 是有向图 $\mathbb{G}$ 的收缩，如果存在同态 $\alpha\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$和 $\beta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{G}$，使得 $\alpha\beta = \mathrm{id}_H$。那么

我们称 α 为收缩，称 β 为余缩回。我们需要以下关于自由生成有向图的引理。

引理 2.3 ([2], 参见引理 3.3)。 设 $\mathcal{V}$ 是一个非平凡簇。设 $\mathbb{S}$是一个顶点集为 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$的自反弱连通有向图，并且存在一个从 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 的克隆到$\mathrm{Pol}(\mathbb{S})$的克隆同态。令 $\mathbf{F} \in \mathcal{V}$ 表示以 S为自由生成集的自由代数，令 $\mathbb{F}$ 表示由 $\mathbb{S}$ 在 $\mathcal{V}$中自由生成的有向图。令 U 表示$\mathbf{F}$的一元项运算集；对任意 $u \in U$，令 $\mathbb{F}_u$ 表示由子集诱导的 $\mathbb{F}$的子有向图

$$\{t(s_1, \ldots, s_n) \colon t \text{ is an } n\text{-ary term where } \forall s \in S,\ t(s, \ldots, s) = u(s)\}.$$

则有以下结论。

(1) $\mathbb{F}$ 的弱连通分支与子有向图 $\mathbb{F}_u, u \in U$相同。*(2)* 对于 F的恒等运算id， $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 是由 $\mathbb{F}$中的幂等项运算诱导的弱分量，而 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 的收缩，其余缩回为 β: $S \to F_{\mathrm{id}}, a \mapsto a$.

下面的推论将 Hobby-McKenzie 簇与有向图 $\mathbb{D}$联系起来。

推论 2.4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇， $\mathbb{F}$ 是由 $\mathbb{D}$ 在 $\mathcal{V}$中自由生成的相容有向图， $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 是$\mathbb{F}$中包含 D 的弱分量。则以下命题等价。

(1) $\mathcal{V}$ 是一个 *Hobby-McKenzie* 簇。
(2) $\mathbb{D}$ 不是 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$的收缩。

证明。 首先证明 (1) $\Rightarrow$(2)。若 (1) 成立，则 $\mathbb{F}$ 具有一个 Hobby-McKenzie 多态。由于这是一个幂等多态，它限制在$\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$上，因此 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 也具有一个 Hobby-McKenzie 多态。由于线性恒等式在收缩下保持不变，若 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$的收缩，则$\mathbb{D}$ 也具有一个 Hobby-McKenzie 多态，因此 $\mathcal{D}$ 将是一个 Hobby-McKenzie 簇。另一方面， $\mathcal{D}$ 是一个幂等簇，因此 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_{\mathrm{Id}}$ 互可解释。由命题 2.2 中的第 (1) 项可知， $\mathcal{D}_{\mathrm{Id}}$ 可在 $\mathcal{SL}$中解释。利用引言中提到的 Hobby-McKenzie 簇的刻画，这意味着 $\mathcal{D}$实际上并非 Hobby-McKenzie 簇。矛盾由此证明了 (1) $\Rightarrow$ (2)。

对于 (2) $\Rightarrow$(1)，假设 $\mathcal{V}$ 不是 Hobby-McKenzie 簇。那么，根据引言中的刻画， $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$可在 $\mathcal{SL}$中解释。因此，再次使用命题 2.2 中的第 (1) 项，$\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 可在 $\mathcal{D}$中解释。于是，存在一个从克隆$\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 到 Pol($\mathbb{D}$) 的克隆同态。根据前面的引理， $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$的收缩。■

3. Main results

本节将给出 Hobby-McKenzie 簇的若干种新刻画。作为推论，我们得到 Hagemann-Mitschke 簇的一种刻画，它比已有刻画更能深入揭示这类簇的结构。我们先证明一些引理，以了解 Hobby-McKenzie 簇中某些类型的相容有向图的形态。

首先，我们证明在幂等 Hobby-McKenzie 簇中由 $\mathbb{D}$ 自由生成的有向图具有一个性质。

引理 3.1. 设 $\mathcal{V}$ 是一个幂等 *Hobby-McKenzie* 簇，且 $\mathbb{F}$ 是在 $\mathcal{V}$ 中由 $\mathbb{D}$ 自由生成的相容有向图。那么 $\mathbb{F}$ 是极端连通的。

证明。设 $\mathcal{V}$ 是一个幂等簇，并假设 $\mathbb{F}$ 不是极端连通的。我们将证明 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个收缩。根据推论 2.4，这意味着 $\mathcal{V}$ 不是 Hobby-McKenzie 簇。

我们将 $\mathbb{F}$ 上的极端等价记为 $\sim$。设 $\mathbf{F}$ 是在 $\mathcal{V}$ 中以 $\{0,1,2\}$ 为自由生成集的自由代数。如前所述，$\sim$ 是 $\mathbf{F}$ 的一个同余，因此 $\mathbf{F}$ 的项运算保持 $\sim$。令 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{F}$ 中 2 的极端分量。证明 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个收缩需要经过一系列断言。

断言 1. $0,1 \notin T$。

断言的证明。假设 $0 \sim 2$。那么， D 的元素属于同一个 $\sim$-类。 F 的每个元素都具有 $t(0,1,2)$ 的形式，其中 t 是 $\mathcal{V}$ 的一个三元项。由于 $\sim$ 是 $\mathbf{F}$ 的同余， $t(0,1,2) \sim t(0,0,0) = 0$，因此 F 的所有元素都属于 0 的 $\sim$-类，矛盾。因此 $0 \notin T$。由于 $0 \sim 1$，我们也有 $1 \notin T$。□

断言 2. 设 t 是 $\mathcal{V}$ 的一个四元项，并设 $p(x) = t(0, 1, 2, x)$。如果$p(0) \in T$，那么 $p(2) \in T$。

断言的证明。 利用 t 是幂等的，并且作为 $\mathbb{F}$ 的多态射作用于 F

$$p(0) = t(t(0,1,2,0), t(0,1,2,0), t(0,1,2,0), t(0,1,2,0)) \to$$
$$t(0,0,t(1,1,2,1), t(1,1,2,1)) \to t(0,1,2,0) = p(0),$$

and

$$t(0,0,t(1,1,2,1), t(1,1,2,1)) \leftrightarrow t(0,1,t(0,1,2,0), t(0,1,2,0)).$$

因此 $p(0) \sim t(0, 1, p(0), (p(0))$。利用 $\sim$ 是一个同余且$p(0) \sim 2$，我们得到

$$p(0) \sim t(0,1,p(0),p(0)) \sim t(0,1,2,2) = p(2),$$

因此 $p(2) \in T$。 □

断言 3。

(1) 设 $u \in F$、 $v \in T$ 和 $u \to v$。那么存在 $\mathcal{V}$的四元项 t，使得 $u = p(1)$ 和 $p(2) \in T$ 对一元多项式$p(x) = t(0, 1, 2, x)$成立。*(2)* 设 $u \in F$、 $v \in T$和 $u \leftarrow v$。那么存在 $\mathcal{V}$的四元项 t，使得 $u = p(0)$ 和 $p(2) \in T$ 对一元多项式$p(x) = t(0, 1, 2, x)$成立。

断言的证明。我们只证明第一个陈述，因为第二个陈述显然是第一个的对偶。由于 $u \to v$ 属于 $\mathbb{F}$，根据 $\mathbb{F}$ 的定义，存在 s的一个七元项 $\mathcal{V}$，使得

$$u = s(0, 1, 2, 0, 1, 1, 2),$$
$$v = s(0, 1, 2, 1, 0, 2, 0).$$

令 $t(x, y, z, u) := s(x, y, z, x, y, u, z)$，并且 $v' := t(0, 1, 2, 2)$。则

$$p(1) = t(0, 1, 2, 1) = s(0, 1, 2, 0, 1, 1, 2) = u,$$
$$p(2) = t(0, 1, 2, 2) = s(0, 1, 2, 0, 1, 2, 2) = v'.$$

因此，$u \to v'$ 属于 $\mathbb{F}$。

我们证明 $v' \in T$。令 $t'(x, y, z, u) := s(x, y, z, y, x, z, u)$，且 $p'(x) = t'(0, 1, 2, x)$。因此

$$p'(0) = t'(0, 1, 2, 0) = s(0, 1, 2, 1, 0, 2, 0) = v \sim 2.$$

因此，对 t' 和 p'应用断言 2，可得

$$v' = s(0, 1, 2, 0, 1, 2, 2) \sim s(0, 1, 2, 1, 0, 2, 2) = t'(0, 1, 2, 2) = p'(2) \sim 2,$$

由此完成断言 3 的证明。 □

断言 4. 设 $w \in F$ 和 $w^+, w^- \in T$ 满足 $w^- \to w \to w^+$。那么$w \in T$。

断言的证明. 根据断言 3，存在 $\mathcal{V}$ 的四元项 t 和 s，使得$t(0, 1, 2, 1) = s(0, 1, 2, 0) = w$和 $t(0, 1, 2, 2)$ $s(0, 1, 2, 2) \in T$。现在

$$\begin{aligned} w = t(0, 1, 2, 1) = s(t(0, 1, 2, 1), t(0, 1, 2, 1), t(0, 1, 2, 1), t(0, 1, 2, 1)) \to \\ s(0, 0, t(1, 1, 2, 2), t(1, 1, 2, 2)) \to \\ s(0, 1, t(2, 2, 2, 2), t(0, 0, 0, 0)) = s(0, 1, 2, 0) = w, \end{aligned}$$

SO

$$\begin{aligned} w \sim s(0, 0, t(1, 1, 2, 2), t(1, 1, 2, 2)) \sim \\ s(0, 1, t(0, 1, 2, 2), t(0, 1, 2, 2)) \sim s(0, 1, 2, 2) \in T, \end{aligned}$$

由此完成断言 4 的证明。 □

令 R 表示 $F \setminus T$ 中存在一条边通向 T中某个顶点的那些顶点的集合，并令 $P = F \setminus (T \cup R)$。现在我们定义一个

映射 α，从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{D}$，定义为

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \in T, \\ 1 & \text{if } x \in R, \\ 0 & \text{if } x \in P. \end{cases}$$

于是，根据断言 1，$1 \in R$ 并根据断言 1 和 4，$0 \in P$。根据断言 4，$\mathbb{F}$ 没有从 T 到 R的边；根据 α的定义，$\mathbb{F}$ 没有从 P 到 T的边。因此，α 是从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{D}$上的一个收缩。于是，$\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{F}$的一个收缩。■

推论 3.2。设 $\mathcal{V}$ 为一个 *Hobby-McKenzie* 簇。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ 为任意一个生成集为 $D \subseteq A$的代数。设 $\mathbb{A}$ 为 $\mathbf{A}$的 $\mathbb{D}$-生成有向图。则 $\mathbb{A}$的所有弱连通分支都是极端连通的。

证明。设 $\mathbf{F} \in \mathcal{V}$ 为自由生成集为 D的自由代数，且$\mathbb{F}$ 为在 $\mathcal{V}$中由 $\mathbb{D}$自由生成的相容有向图。首先证明，$\mathbb{F}$ 的弱连通分支都是极端连通的。注意，根据引理 2.3，在 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$中由 $\mathbb{D}$ 自由生成的相容有向图，与由幂等三元项在 $\mathbb{F}$中诱导的弱分量 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 重合。于是根据前面的引理，$\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 是极端连通的。现在证明 $\mathbb{F}$ 的任意弱连通分支都是极端连通的。根据引理 2.3，我们知道，$\mathbb{F}$ 的任意弱连通分支都具有如下形式：对于 $\mathbf{F}$ 的某个一元项运算 u，为 $\mathbb{F}_u$，并且由所有元素 $t(0,1,2) \in F$组成，其中 t 是 $\mathbf{F}$ 的一个三元项运算，并且对于所有 $0 \le i \le 2$，$t(i,i,i) = u(i)$。对于这样的 t，令 $t(0,1,2) \in F_u$。由于 $\mathbb{F}$是 $\mathbf{F}$ 的一个相容有向图，且 t 是 $\mathbb{F}$的一个多态运算，$t|_{F_{\mathrm{id}}^3}$ 是从 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}^3$ 到 $\mathbb{F}_u$的同态。由于 $\mathbb{F}_{\mathrm{id}}$ 是极端连通的，因此$\mathbb{F}_{\mathrm{id}}^3$ 和 $t(\mathbb{F}_{\mathrm{id}}^3)$也是极端连通的。因此，对于 $\mathbf{F}$ 的任意三元项运算 t，若对所有 $0 \le i \le 2$都有$t(i,i,i) = u(i)$，且 $t(0,1,2)$ 与 $t(0,0,0)$ 在 $\mathbb{F}_u$中由一条对称路径连通，则 $\mathbb{F}_u$ 是极端连通的。

现在我们证明，$\mathbb{A}$的弱连通分支是极端连通的。设 α 是从$\mathbf{F}$到 $\mathbf{A}$ 上的同态，使得对所有 $d \in D$，$\alpha(d) = d$。

首先我们证明，α 也是从 $\mathbb{F}$ 到 $\mathbb{A}$ 上的同态。$\mathbb{F}$ 的任意边都具有如下形式：$t_{\mathbf{F}}(0,1,2,1,0,1,2) \to t_{\mathbf{F}}(0,1,2,0,1,2,0)$，其中$t$ 是 $\mathcal{V}$的一个七元项。由于 α 是一个同态，且对所有$i \in D$都有 $\alpha(i) = i$，

$$\begin{aligned} &\alpha(t_{\mathbf{F}}(0,1,2,1,0,1,2)) = t_{\mathbf{A}}(0,1,2,1,0,1,2) \text{ and} \\ &\alpha(t_{\mathbf{F}}(0,1,2,0,1,2,0)) = t_{\mathbf{A}}(0,1,2,0,1,2,0). \end{aligned}$$

在 $\mathbb{A}$ 中，我们有 $t_{\mathbf{A}}(0,1,2,1,0,1,2) \to t_{\mathbf{A}}(0,1,2,1,0,1,2)$。因此，$\alpha$ 保留了 $\mathbb{F}$的边。

现在我们证明，有向图 $\mathbb{A}$ 中的每条边都具有 $\alpha(f) \to \alpha(g)$ 的形式，其中 $f \to g$ 属于 $\mathbb{F}$。设 $a \to b$ 是 $\mathbb{A}$中的任意一条边，则存在 $\mathcal{V}$上的七元项 t，使得 $a = t_{\mathbf{A}}(0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2)$

且 $b = t_{\mathbf{A}}(0, 1, 2, 0, 1, 2, 0)$ 属于 $\mathbf{A}$。利用对所有 $i \in D$ 都有 $\alpha(i) = i$，我们还可得

$$a = t_{\mathbf{A}}(\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2)) \text{ and}$$
$$b = t_{\mathbf{A}}(\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(0)).$$

由于 α 是一个同态，

$$a = \alpha(t_{\mathbf{F}}(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2)) \text{ and } b = \alpha(t_{\mathbf{F}}(0, 1, 2, 0, 1, 2, 0)).$$

现在，借助前面的两个等式，这两个顶点

$$f = t_{\mathbf{F}}(0, 1, 2, 1, 0, 1, 2) \text{ and } g = t_{\mathbf{F}}(0, 1, 2, 0, 1, 2, 0)$$

表明 $a \to b$ 具有 $\alpha(f) \to \alpha(g)$ 的形式，其中 $f \to g$属于 $\mathbb{F}$。

假设在 $\mathbb{A}$ 中存在一条从 a 到 b 的定向路径，即存在序列 $a = a_0$，...，$a_n = b$，使得对于所有 $0 \leq i < n$，$a_i \to a_{i+1}$ 或 $a_{i+1} \to a_i$ 都属于 $\mathbb{A}$。由于 $\mathbb{A}$的每条边都是 α下 $\mathbb{F}$的一条边的像，因此对于每个 $0 \leq i < n$，$\mathbb{F}$ 中都存在一个弱分量，其在 α 下的像包含 a_i 和 a_{i+1}。由于 $\mathbb{F}$的弱连通分支是极端连通的，它们的同态像也如此。因此，对于每个 $0 \leq i < n$，在$\mathbb{A}$中存在一条连接 a_i 和 a_{i+1} 的对称路径。所以在 $\mathbb{A}$中，a和 b 由一条对称路径连接。因此，$\mathbb{A}$的弱连通分支是极端连通的。■

设 $\mathbb{G}$和 $\mathbb{H}$为有向图。若序列 $g = g_0$、g_1、.....、$g_n = g'$满足：对于所有 $0 \leq i < n$，都存在一个同态 φ_i: $\mathbb{H} \to \mathbb{G}$，其值域包含 g_i 和 g_{i+1}，则称其为 $\mathbb{H}$从 g 到 g' 在 $\mathbb{G}$中的路径。包含满足 g 和 g' 由一条 $\mathbb{H}$路径相连的那些数对 (g, g') 的等价关系，称为 $\mathbb{G}$的 $\mathbb{H}$等价关系。$\mathbb{G}$ 的 $\mathbb{H}$等价关系的块称为 $\mathbb{G}$的 $\mathbb{H}$分支。如果 $\mathbb{G}$的 $\mathbb{H}$等价关系只有一个块，我们就称 $\mathbb{G}$是$\mathbb{H}$连通的。

设 $\mathbb{N} = (\{0, 1\}; \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\})$。我们注意到，对于任意自反有向图，极端等价关系都与 $\mathbb{N}$等价关系重合。此外，对于任意自反有向图，如果 $\mathbb{H}$ 是至少含有两个元素的有向图，则极端等价关系是 $\mathbb{H}$等价关系的子关系。

在 [11], Olˇs´ak 证明，每个 Taylor簇 $\mathcal{V}$ 都有一个幂等的六元项 o（我们称 o 其为*Olˇs´ak* 项），使得 $\mathcal{V}$ 满足以下恒等式

$$o(x, x, x, y, y, y) = o(x, y, y, x, x, y) = o(y, x, y, x, y, x).$$

引理 3.3。 在 *Taylor*簇 $\mathcal{V}$中，对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图 $\mathbb{G}$，$\mathbb{K}$-等价关系 $\mathbb{G}$ 与 $\mathbb{D}$-等价关系 $\mathbb{G}$重合。

证明。 由于存在一个从 $\mathbb{K}$ 到 $\mathbb{D}$的同态，对于任意有向图，$\mathbb{D}$-等价关系是 $\mathbb{K}$-等价关系的子关系。设 $\mathcal{V}$ 是一个Taylor簇，$\mathbb{G}$ 是 $\mathcal{V}$中的一个相容自反有向图。设 o 是一个 Olˇs´ak

$\mathbb{G}$的多态运算。设 $\mathbb{C}$是 $\mathbb{G}$的一个 $\mathbb{K}$-连通分支。为了完成该引理的证明，我们将证明 $\mathbb{C}$包含于 $\mathbb{G}$的某个 $\mathbb{D}$-连通分支中。

设 φ 是从 $\mathbb{K}$到 $\mathbb{C}$ 的同态，使得

$$\varphi(0) = a,\ \varphi(2) = b,\ \varphi(3) = c \text{ and } \varphi(4) = d.$$

因此，对于 a，b，c，$d \in C$，有 $a \leftrightarrow b \to c \leftrightarrow d \to a$。首先我们证明 a 和 c 属于 $\mathbb{G}$的同一个 $\mathbb{D}$-分支。由于 o 是 $\mathbb{G}$的一个多态运算，

$$a \leftrightarrow o(a,a,a,b,b,b) \to o(a,a,a,c,c,a) \leftrightarrow$$
$$o(a,a,a,d,d,a) \to o(a,b,b,a,a,b) = o(a,a,a,b,b,b).$$

这意味着 a、$o(a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b)$ 和 $o(a,\ a,\ a,\ d,\ d,\ a)$ 属于同一个 $\mathbb{D}$-分支。根据

$$o(a,a,a,d,d,a) \leftrightarrow o(a,a,a,c,c,a) \leftrightarrow o(b,a,b,d,c,a) \to$$
$$o(c,a,c,a,c,a) = o(a,a,a,c,c,c) \leftrightarrow o(b,a,a,d,c,d) \to o(b,a,b,d,c,a),$$

$o(a,\ a,\ a,\ c,\ c,\ c)$ 也属于这个 $\mathbb{D}$-分支。用类似的论证可得，c和 $o(a,\ a,\ a,\ c,\ c,\ c)$ 属于同一个 $\mathbb{D}$-分支。因此，a和 c属于 $\mathbb{G}$的同一个 $\mathbb{D}$-分支。

由于 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{K}$-连通的，且从 $\mathbb{K}$ 到 $\mathbb{C}$ 的同态像都包含在同一个 $\mathbb{D}$-分支中，因此 $\mathbb{C}$ 是某个 $\mathbb{D}$-分支的子有向图。所以，$\mathbb{G}$ 的 $\mathbb{K}$-等价关系包含于 $\mathbb{G}$ 的 $\mathbb{D}$-等价关系中。■

由推论 3.2，前面的引理推出以下结论。

推论 3.4。在 *Hobby-McKenzie* 簇 $\mathcal{V}$ 中，对于任意相容自反有向图，其 $\mathbb{K}$-等价关系与极端等价相同。

证明。设 $\mathbf{G} \in \mathcal{V}$，且 $\mathbb{G}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个相容自反有向图。显然，$\mathbb{G}$ 的 $\mathbb{K}$-等价关系包含 $\mathbb{G}$ 的极端等价，因此只需证明 $\mathbb{G}$ 的每个 $\mathbb{K}$-分支都是极端连通的。

设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个 $\mathbb{K}$-分支。由前面的引理，$\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个 $\mathbb{D}$-分支。设 C 中任意两个顶点为 g 和 g'。利用 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{D}$-连通的这一事实，可得序列 $g = g_0$，g_1，……，$g_n = g'$，它们属于 $\mathbb{C}$；并且对每个 $0 \leq i < n$，存在一个同态 φ_i: $\mathbb{D} \to \mathbb{G}$，其像包含 g_i 和 g_{i+1}。令 $\mathbb{D}_i$ 为 $\mathbb{C}$ 中由 $\varphi_i(D)$ 诱导的子有向图。令 $\mathbb{G}_i$ 为$\mathbf{G}_i$ 的 $\mathbb{D}_i$-生成有向图，其中$\mathbf{G}_i$ 是由 D_i 生成的 $\mathbf{G}$ 的子代数。注意，由于 $\mathbb{G}$ 的相容性，$\mathbb{G}_i$ 是 $\mathbb{G}$ 的子有向图。

现在我们证明，$\mathbb{D}_i$ 中的任意两个顶点均由 $\mathbb{G}$中的一条对称路径连接。若 $\mathbb{D}_i$ 不同构于 $\mathbb{D}$，则由于存在从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}_i$的满同态，$\mathbb{D}_i$ 本身是极端连通的。另一方面，若 $\mathbb{D}_i$ 同构于 $\mathbb{D}$，则由推论 3.2 可知，弱

包含 D_i 的 $\mathbb{G}_i$ 的分量是极端连通的。因此，无论哪种情况， $\mathbb{D}_i$ 中的任意两个顶点均由 $\mathbb{G}$中的一条对称路径连接。

由此可得， g 和 g' 通过 $\mathbb{G}$中的一条对称路径相连。因此， $\mathbb{C}$ 是极端连通的。■

我们利用前面的推论来刻画 Hobby-McKenzie 簇。对于任意正整数 n，令 $\mathbb{C}_n$ 表示反身有向 n-环。

定理 3.5。 对于任意簇 $\mathcal{V}$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{V}$ 是 *Hobby-McKenzie* 簇。*(2)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，根基等价关系与极端等价一致。*(3)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，强等价与极端等价一致。*(4)* 对于任意正整数 n，在 $\mathcal{V}$ 中由 $\mathbb{C}_n$自由生成的有向图里， $\mathbb{C}_n$ 的弱分量是极端连通的。*(5)* 在 $\mathcal{V}$中由 $\mathbb{C}_3$ 自由生成的有向图里， $\mathbb{C}_3$ 的弱分量是极端连通的。*(6)* 存在六元项 s_i 和 t_i 、 $1 \leq i \leq n$，对于 $\mathcal{V}$ ，使得$\mathcal{V}$ 满足以下恒等式

$$
\begin{aligned}
t_1(x,x,y,y,z,z) &= x,\\
t_i(x,x,y,y,z,z) &= s_i(x,y,y,z,z,x) \text{ for all } 1 \leq i \leq n,\\
s_i(x,x,y,y,z,z) &= t_i(x,y,y,z,z,x) \text{ for all } 1 \leq i \leq n,\\
t_i(x,x,y,y,z,z) &= t_{i-1}(x,y,y,z,z,x) \text{ for all } 1 < i \leq n,\\
y &= t_n(x,y,y,z,z,x).
\end{aligned}
$$

证明。由于 $\mathbb{C}_n$ 是强连通有向图，在任意簇 $\mathcal{V}$中由 $\mathbb{C}_n$ 自由生成的相容有向图里， $\mathbb{C}_n$ 的弱分量与 $\mathbb{C}_n$ 的强分量重合。因此，蕴含关系 (3) ⇒(4) ⇒ (5)显然成立。注意，当且仅当在由 $\mathcal{V}$中 $\mathbb{C}_3$的同构副本 ($\{x,y,z\}$; {(x， x)，(x， y)，(y， y)，(y， z)，(z， z)，(z， x)})自由生成的自由有向图中，存在一条从 x 到 z、长度为 n 的对称路径时，(6) 才成立。因此，(5) ⇒(6)。

对于 (1) ⇒ (2)，我们假设 $\mathbf{G} \in \mathcal{V}$, $\mathbb{G}$ 是$\mathbf{G}$的相容自反有向图，且 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{G}$的根基分支，但不是极端分支。因此， $\mathbb{H}$中存在极端分支 $\mathbb{A}$和 $\mathbb{B}$ ，使得在 $\mathbb{G}$ 对其极端同余关系取商后，有 $A \leftrightarrow B$。这意味着存在顶点 $a, a' \in A$和 $b, b' \in B$，使得 $a \to b$且$b' \to a'$。令 d 为最短对称 (a, a')-路径与最短对称 (b, b')-路径长度的最大值。我们假设选择 $\mathbb{G}$,$\mathbb{H}$, a, a', b和 b' ，使得 d 最小。

显然， d 不为 0，否则将推出 $a = a'$ 和 $b = b'$，因此在 $\mathbb{G}$中，a 与 b 之间会有一条重边。若 $d = 1$，则由 $\{a, a', b, b'\}$ 诱导的 $\mathbb{G}$ 的子有向图同构于 $\mathbb{D}$ 或 $\mathbb{K}$。因此，(a, b) 属于 $\mathbb{G}$的 $\mathbb{K}$-等价关系。于是根据推论 3.4， a 和 b 属于 $\mathbb{G}$的同一个极端分支，矛盾。

因此， $d > 1$。接下来，我们定义 G 上的自反关系 ρ，如下:

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow \exists u : x \to u \leftrightarrow y.$$

显然， ρ 是 $\mathbf{G}^2$ 的子代数。因此， $\mathbb{G}' = (G; \rho)$ 是 $\mathcal{V}$ 中的相容自反有向图。注意，由于 $\mathbb{G}$ 的自反性，$\mathbb{H}$ 的边都包含在 ρ 中。设 $\mathbb{H}'$ 是包含 $\mathbb{H}$ 的 $\mathbb{G}'$ 的强分量。显然，如果 $x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$ 属于 $\mathbb{G}$，那么 $(x, z) \in \rho$。因此， $\mathbb{H}'$ 中最短对称 (a, a') 路径和 (b, b') 路径长度的最大值小于 d。

现在，根据 d 的极小性，顶点 a 和 b 位于 $\mathbb{H}'$ 的同一个极端分支中。因此，$\mathbb{H}'$ 中存在一条对称的 (a, b) 路径。注意，如果 (x, y),$(y, x) \in \rho$，那么 x 和 y 都在从 $\mathbb{K}$ 到 $\mathbb{G}$ 的某个同态的值域中。因此，(a, b) 属于 $\mathbb{K}$-等价关系；于是，根据推论 3.4， $\mathbb{G}$ 中存在一条对称的 (a, b) 路径，矛盾。

现在我们证明 (2) ⇒(3)。如果 $\mathcal{V}$ 是一个Taylor簇，那么根据定理 1.1， $\mathcal{V}$ 中的所有相容强连通有向图都是根连通的，因而由 (2) 可知，它们都是极端连通的。因此，只需证明 $\mathcal{V}$ 是一个Taylor簇。假设 $\mathcal{V}$ 不是Taylor簇，则 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 可解释于 $\mathcal{SET}$中，因而也可解释于 $\mathcal{D}$ 中。设 $\mathbb{F}_0$是在 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$中由 $\mathbb{D}$ 自由生成的有向图。注意到

$$F_0 = \{t(0, 1, 2) \colon t \text{ is a ternary idempotent term of } \mathcal{V}\}.$$

于是，根据 [2]中的引理 3.3， $\mathbb{F}_0$ 是在 $\mathcal{V}$中由 $\mathbb{D}$ 自由生成的有向图$\mathbb{F}$的一个弱分量，且 $\mathbb{D}$是 $\mathbb{F}_0$的一个收缩。设 ν 为 $\mathbb{F}_0$的极端等价关系。对于 $\mathcal{V}$的任意三元幂等项 t，由于t 作为 $\mathbb{F}$的一个多态运算而作用于 F，

$$1 = t(1, 1, 1) \to t(0, 1, 2) \to t(0, 0, 0) = 0.$$

于是，由 $(0, 1) \in \nu$ 可知，对于 $\mathcal{V}$的每个幂等项 t，

$$t(0, 0, 0)/\nu \leftrightarrow t(0, 1, 2)/\nu \text{ in } \mathbb{F}_0/\nu.$$

因此， $\mathbb{F}_0/\nu$ 的极端等价是全关系。因此， $\mathbb{F}_0$ 是根连通的，所以 F_0 是$\mathbb{F}$的根等价的一个块。由此，根据（2）， $\mathbb{F}_0$ 是极端连通的。因此，它的收缩 $\mathbb{D}$ 也必须是极端连通的，这就产生了矛盾。因此， $\mathcal{V}$ 是一个 Taylor簇。

最后，我们证明 (6) ⇒ (1)。假设条件 (6) 成立，而 $\mathcal{V}$ 仍然不是一个 Hobby-McKenzie 簇。则 $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}}$ 可解释于 $\mathcal{SL}$中。显然，出现在 (6) 的恒等式中的所有项都是幂等的。因此，(6) 在 $\mathcal{SL}$中成立。于是，根据本定理证明开头的评注

，在 $\mathcal{SL}$ 中由 $\mathbb{C}_3$ 自由生成的相容有向图必须存在一条从 x 到 z 的对称路径。这个自由生成的有向图有七个顶点，且很容易构造，见图3。显然，它不存在从 x 到 z的对称路径，这就产生了矛盾。■

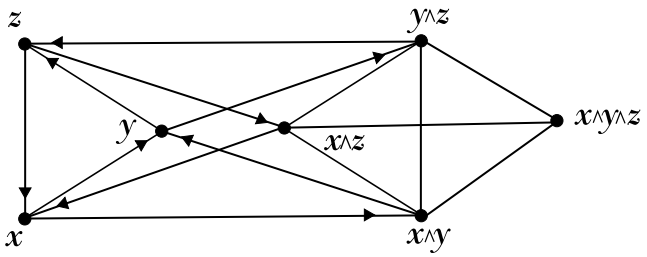

FIGURE 3. 由 $\mathbb{C}_3$ 在半格簇中自由生成的有向图

前述定理给出了 Hagemann-Mitschke 簇的一种新刻画。

推论 3.6. 对于任意簇 $\mathcal{V}$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{V}$ 是一个 *Hagemann-Mitschke* 簇。*(2)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，弱等价与强等价重合。*(3)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，弱等价与根等价重合。*(4)* 对于 $\mathcal{V}$中的任意相容自反有向图，弱等价与极端等价重合。

证明。 根据引言中提到的 Hagemann 和 Mitschke 对 n-可置换簇的刻画，(1) $\Rightarrow$ (2)显然。Hagemann-Mitschke 簇是 Hobby-McKenzie 簇，因此根据前一定理中前两个条件的等价性，(2) $\Rightarrow$ (4)也显然。由于极端等价包含于根等价，(4) $\Rightarrow$(3)。最后，由定理 1.1 可得 (3) $\Rightarrow$ (1)。■

4. CONCLUSION

我们总结了本文取得的主要成果。我们利用相容有向图的四种连通性概念，对 Taylor 簇、Hobby-McKenzie 簇和 Hagemann-Mitschke 簇给出了各种刻画。事实证明，一个簇是 Hagemann-Mitschke 簇，当且仅当对于该簇中的每个相容有向图，弱等价与强等价、根等价或极端等价中的一种相一致。一个簇是 Hobby-McKenzie 簇，当且仅当对于该簇中的每个相容有向图，极端等价与强等价或根等价相一致。一个簇

是 Taylor 簇，当且仅当对于该簇中的每个相容有向图，强等价与根等价相一致。注意到，根据我们所引入的四种连通性概念定义的四个等价关系，两两合并的方式只有 6 种，而本文所得结果穷尽了全部 6 种情形。

References

[1] Bodor, B、Gyenizse, G、Mar´oti, M 和 Z´adori, L；Taylor 是素的，IJAC, 34/06，857–879（2024）。[2] Bodor, B、Gyenizse, G、Mar´oti, M 和 Z´adori, L；Hobby-McKenzie 簇的可解释性类型滤子是素的，已投稿, https://www.math.u-szeged.hu/ zadori/publications/publ37.pdf（2024）。[3] Garcia O. C 和 Taylor, W；簇的可解释性类型格，美国数学会回忆录 50（1984）v+125。[4]Gyenizse, G、Mar´oti, M 和 Z´adori, L；Taylor 簇中的自反有向图，已投稿，https://www.math.u-szeged.hu/ zadori/publications/publ38.pdf（2025）。[5] Hagemann, J 和 Mitschke, A；关于 n-可置换同余，Algebra Universalis 3，8–12（1973）[6] Hobby, D 和 McKenzie, R；有限代数的结构，当代数学 76，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1988。[7] Kearnes, K. A 和 Kiss, E. W；同余格的形状，美国数学会回忆录 222（2013）viii+169。[8] Kozik, M、Krokhin, A、Valeriote, M 和Willard, R；若干 Maltsev 条件的刻画，Algebra Universalis 73，205–224（2015）。[9] Larivi`ere, I、Larose, B 和 Pazmi˜no Pullas, D E；有向自反圈的满射多态，Algebra Universalis 85/4，1–28（2024）。[10] Mar´oti, M 和 Z´adori, L；具有近一致多态的自反有向图，离散数学 12/15，2316–2328（2012）。[11] Ol˘s´ak, M；最弱的非平凡幂等方程，伦敦数学会通报 49/6，1028–1047（2017）。[12] Taylor, W；满足同伦律的簇，加拿大数学杂志，29/3，498–527（1977）。[13] Valeriote, M 和 Willard, R；幂等 n-可置换簇，伦敦数学会通报 46，870–880（2014）。

Bolyai Institute, Univ. of Szeged, Szeged, Aradi Vértanúk tere 1, HUNGARY 6720电子邮箱地址：gergogyenizse@gmail.com

电子邮箱地址：mmaroti@math.u-szeged.hu

电子邮箱地址：zadori@math.u-szeged.hu