arXiv:2603.16615v1 [math.CO] 17 Mar 2026

排除树或顶点树作为小图的图的膨胀结构

QUENTIN CLAUS、GWENAËL JORET 和 CLÉMENT RAMBAUD

摘要。我们证明了排除树或顶点树作为子式的图的膨胀结构定理。首先，我们证明，对于每棵具有 $t \geqslant 3$ 且半径为 h 的 t 阶树 T，以及每个以 T 为子式的排除对象的图 G，都存在一个路径宽度至多为 $2h-1$ 的图 H，使得 G 是 $H \boxtimes K_{t-2}$ 的子图。此结果改进了 Dujmović、Hickingbotham、Joret、Micek、Morin 和 Wood（2024年）近期证明的定理；他们证明了相同结论，但乘积中完全图的阶上界更大。

其次，我们证明，对于每棵具有 $t \geqslant 2$、半径为 h 且最大度为 d 的 t 阶树 T，以及每个以顶点树 T^+ 为子式的排除对象的图 G，其中 T^+ 是通过向 T 添加一个全域顶点得到的树，都存在一个树宽至多为 $4h-1$ 的图 H，使得 G 包含于 $H \boxtimes K_{2(t-1)d}$ 中。H 的树宽上界在因子 2 的范围内是最优的，并且改进了 Dujmović、Hickingbotham、Hodor、Joret、La、Micek、Morin、Rambaud 和 Wood（2024年）近期结果所导出的 $2^{h+2}-4$ 上界。

1. 引言

在他们的图小图系列论文中，Robertson 和 Seymour 展示了许多关于排除某个固定图作为子式的图的结构的结果。其中最早的一个结果指出，每个 G排除一个 t顶点树 T 作为子式的图，其路径宽度都被 t [10]的某个函数所界定。后来，Bienstock、Robertson、Seymour 和 Thomas [1]（另见 Diestel [3]）给出了 $t-2$ 关于 G 的最优上界：

定理1 (Bienstock、Robertson、Seymour 和 Thomas [1])。设 T 是一棵有 $t \geqslant 2$个顶点的树，G 是一个排除 T作为子式的图。那么 $\mathrm{pw}(G) \leqslant t-2$。

虽然一般而言，路径宽度的上界 $t-2$ 已是最佳可能，Dujmović、Hick- ingbotham、Joret、Micek、Morin 和 Wood [4] 最近证明，如果树 T 的半径为 h（可能有 $h \ll t$），那么排除 T 作为子式的图实际上“与路径宽度为 O的图相差不远”（h）：

定理 2 (Dujmović、Hickingbotham、JORET、Micek、Morin、Wood [4])。对于每棵具有 t 个顶点、半径为 h 且最大度为 d 的树 T，对于每个不含 T 子式的图 G，都存在一个图 H，使得$\mathrm{pw}(H) \leqslant 2h-1$，且 G 包含于 $H \boxtimes K_{(d+h-2)(t-1)}$ 中。[1]

通俗地说，该定理表明，G 随后包含于一个路径宽度为 $2h-1$ 的图中，其中每个顶点都被一个团“膨胀”了，而团的大小仅取决于 T。上界

(Q. Claus) 布鲁塞尔自由大学数学系，比利时 (G. Joret) 布鲁塞尔自由大学计算机科学系，比利时 (C. Rambaud) 蔚蓝海岸大学、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究院、I3S，索菲亚-安提波利斯，法国电子邮件地址：quentin.claus@ulb.be，gwenael.joret@ulb.be，clement.rambaud@inria.fr。Q. Claus 和 G. Joret 得到了比利时国家科学研究基金会（FNRS）的资助。[1]本文中以及下文中，“G 包含于 J 中”意指 G 与图 J 的一个子图同构。

关于 $2h-1$ 的路径宽度 H 是最佳可能的，正如 [4]所示。然而，确定团大小的最佳可能上界仍是一个悬而未决的问题。我们的第一个结果是对后者的如下改进：

定理 3. 对于每棵具有 $t \geqslant 3$ 个顶点且半径为 h 的树 T，以及每个不含 T 子式的图 G，存在一个图 H，使得 $\mathrm{pw}(H) \leqslant 2h-1$，且 G 包含于 $H \boxtimes K_{t-2}$ 中。

$t-2$ 的界几乎是最优的：图 K_{t-1} 不含 T 子式，但如果对于某个满足 $\mathrm{pw}(H) \leqslant 2h-1$ 的图 H，有 K_{t-1} 包含于 $H \boxtimes K_c$ 中，那么必有 $c \geqslant (t-1)/2h$。这是因为 $t-2 = \mathrm{pw}(K_{t-1}) \leqslant \mathrm{pw}(H \boxtimes K_c) \leqslant c(\mathrm{pw}(H)+1) - 1 \leqslant 2ch-1$。

接下来，我们将注意力转向不含某个固定图 T^+ 作为子式的图，其中 T 是一棵树，而 T^+ 表示由 T 添加一个与其余所有顶点相邻的新顶点后得到的图。由于 T^+ 是平面图，根据 Robertson 和 Seymour 的网格小图子定理 [11]，不含 T^+ 子式的图具有有界树宽。后来，Leaf 和 Seymour [8] 给出了以下树宽界：

定理 4 (利夫和 Seymour [8])。设 T 是一棵树，G 是一个不含 T^+ 子式的图。那么$\mathrm{tw}(G) \leqslant {}^{3}(|V(T^+)|-1)\,2$。

刘和俞 [9],最近将树宽的上界改进为 $|V(T^+)|-2$，且该界是最优的：

定理 5 (刘和俞 [9])。设 T 是一棵树，G 是一个不含 T^+ 子式的图。那么$\mathrm{tw}(G) \leqslant |V(T^+)|-2$。

我们独立发现，对定理 4 的证明稍作修改，便可得到定理 5 的另一种证明，比 [9]中给出的证明更短。该证明见附录。

注意，定理 5与定理 1 类似，只不过这里界定的是树宽，而非路径宽度。很自然会想到，是否存在定理 5 的“膨胀”类比，它将类似于定理 2。从宽泛的意义上说，以下网格子式定理的一个变体表明，情况确实如此：

定理 6 (Dujmović, Hickingbotham, Hodor, JORET, 拉, Micek, Morin, RAMBAUD, Wood[5])。对于每个平面图 X，都存在一个正整数 c，使得对于每个 X-子式自由图 G，都存在一个树宽至多为 $2^{\mathrm{td}(X)}-4$ 的图 H，使得 G 包含于 $H \boxtimes K_c$中。

在上述定理中，$\mathrm{td}(X)$ 表示 X的树深度。取 $X = T^+$ 为半径为 h 的某棵树 T，应用定理 6，并利用 T的树深度至多为 $h+1$这一事实，因此 T^+的树深度至多为 $h+2$，可得以下推论：

推论 7 (Dujmović等人 [5], 隐含得出)。对于每棵半径为 h的树 T，都存在一个正整数 c，使得对于每个 T^+-子式自由图 G，都存在一个树宽至多为 $2^{h+2}-4$ 的图 H，使得 G 包含于 $H \boxtimes K_c$中。

我们的第二项贡献是证明，推论 H 7 中的图 H可以选取得使其树宽为 $4h-1$，这在相差一个因子 2的范围内是最优的，并对 [5]中的问题 1 的一个特殊情形给出了肯定答案。我们还得到了膨胀中团大小 c 的一个显式上界，即 $c \leqslant 2(t-1)d$。

定理 8。 对于每棵具有 $t \geqslant 2$ 个顶点、半径为 h、最大度为 d 的树 T，以及每个不含 T^+-子式的图 G，都存在一个树宽至多为 $4h-1$ 的图 H，使得 G 包含于 $H \boxtimes K_{(2t-1)d}$。

对 [4] 中的命题 3 作一个直接的修改， H 即可表明，在上述定理中， $2h$ 的树宽至少为 $4h-1$，因此2 是$(2t-1)d$ 的上界与最优值相差一个因子。我们猜想，定理8中膨胀的团大小上界 $O(t)$或许还能进一步改进为3中的 $O(t)$，然而，后一个结果的证明似乎不容易适用于这种情形。

本文组织如下。在第2节中，我们给出必要的定义和记号。在第3节中，我们证明定理3。接着，在第4节中，我们证明定理5 和定理8。最后，在第5节中，我们总结若干未解决问题。

2. 预备知识

我们考虑简单有限无向图。给定一个图 G，我们用 $V(G)$ 表示其顶点集，用 $E(G)$ 表示其边集。对于 $c \in \mathbb{N}$，我们用 K_c 表示具有 c 个顶点的完全图。对于 h， $d \in \mathbb{N}$，我们用 $T_{h,\ d}$表示半径为 h 的完全 d 叉树。对于一棵树 T，我们用 T^+ 表示通过向 T 添加一个全域顶点所得到的顶点树。

一个有根树是指指定一个顶点为根的树。有根树的高度是根与树中某个顶点之间距离的最大值。有根森林是若干棵有根树的不交并。竖直路径 F 是包含在某棵有根树 T F中的一条路径，且其一个端点是 T 的根。

对于图 G 和集合 $S \subseteq V(G)$，我们将 S 在 G 中的邻域定义为 $V(G) \setminus S$ 中与 S 中至少一个顶点相邻的顶点集，并记作 $N_G(S)$。如果 S 只包含一个顶点 v，我们有时用 $N_G(v)$ 代替 $N_G(\{v\})$。我们用 $\partial_G(S)$ 表示 S 中与不属于 S 的至少一个顶点相邻的顶点集。对于这两种记号 $N_G(S)$ 和 $\partial_G(S)$，当图的含义明确时，我们省略下标。

对于图 G 和集合 $S \subseteq V$（G），我们用 $G-S$ 表示从 G 中移除包含在 S 中的 G 的所有顶点后得到的子图。如果 S 只包含一个顶点 v，我们就简单地用 $G-v$ 代替 $G-\{v\}$。

如果图 H 可以通过收缩图 G 的某个子图中的边得到，那么图 H 是图 G 的子式。如果图 H 不是图 G 的子式，那么图 G 是无 H 子式的。在图 G 中的 H-模型（也称为 G 中 H 的模型）由两两不相交的顶点集 $\{W_v \subseteq V$（G）$\mid v \in V$（H）$\}$ 组成；每个顶点集在 G 中都诱导出一个连通子图，并且对于 H 的每条边 vw，都存在 $x \in W_v$ 和 $y \in W_w$，使得 x 与 y 在 G 中相邻。注意，当且仅当 G 包含一个 H-模型时， H 才是 G 的子式。

一个图的树分解 G 是一个集合 $\mathcal{D} := \{B_x \subseteq V$（$G$）$\mid x \in V$（$T$）$\}$ 由 G的顶点子集构成，称为包，其中 T 是一棵树，并且满足

- 对于每个顶点 $v \in V(G)$，集合 $\{x \in V(T) \mid v \in B_x\}$ 在 T中诱导出一棵非空子树，并且
- 对于每条边 $vw \in E(G)$，都存在 $x \in V(T)$，使得 v 和 w 都包含在袋 B_x中。

我们称 T 为与该分解相关联的树，并且对每个顶点 $x \in V(T)$，称 B_x 为与相关联的袋 x。树分解的宽度为最大值$\{|B_x| \mid x \in$

$V(T)\} - 1$。图的树宽，记为 G，表示为$\mathrm{tw}(G)$，是其树分解的最小宽度 G。

一个 图的路径分解 G，其宽度以及图的路径宽度 G分别记为$\mathrm{pw}(G)$，定义方式相同，只是要求树 T 必须是一条路径。将路径分解简单地记作袋的序列会很方便 B_1， B_2，……， B_m。在这种情况下，我们将 B_1 称为该分解的第一个袋。

设 G 是一个图。 $V(G)$的一个划分是 $V(G)$的非空子集的集合 $\mathcal{P}$ ，满足 G 的每个顶点恰好属于该集合中的一个集合。 $\mathcal{P}$ 的每个元素称为一个部分。 $\mathcal{P}$ 的宽度是 $\mathcal{P}$的一个部分的最大大小。商图 $G/\mathcal{P}$ 是一个顶点集为 $\mathcal{P}$的图；对于不同的部分 P和 $P' \in \mathcal{P}$，它们在 $G/\mathcal{P}$中相邻，当且仅当 P 中存在一个顶点与 P' 中的某个顶点在 G中相邻。

两个图 G 和 H的强积，记作 $G \boxtimes H$，是顶点集为$V(G \boxtimes H) := V(G) \times V(H)$ 的图，并且满足：在 $V(G \boxtimes H)$中的两个不同顶点 $(v,\ w)$ 和 $(v',\ w')$ 相邻，当且仅当以下两个条件成立：

(i) $v = v'$，或 v 和 v' 在 G中相邻；(ii) $w = w'$，或 w 和 w' 在 H中相邻。本文余下部分将反复（通常是隐含地）使用以下简单观察：

命题 9. 给定两个图 G、H 和一个正整数 c，图 G 包含于$H \boxtimes K_c$，当且仅当存在 $V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{P}$，其宽度至多为 c，且 $G/\mathcal{P}$ 同构于 H的一个子图。

3. 排除一棵树

本节证明定理 3，为方便起见，我们在此重述该定理。

定理 3。 对于每棵具有 T 个顶点且半径为 h的树，以及每个 T-子式-*free* 图 G，存在一个图 H，使得 $\mathrm{pw}(H) \leqslant 2h - 1$，且 G 包含于 $H \boxtimes K_{t-2}$中。

我们回顾一下，该结果的表述与定理 2 中证明的表述相同， [4],只是膨胀中的团大小从 $(d + h - 2)$ $(t - 1)$ 降为 $t - 2$。在 [4], 中，作者将定理 2 作为以下引理（ [4]中的引理 8）的推论导出。

引理 10 (Dujmović 等人 [4])。 对于每个 h、$d \in \mathbb{N}$，其中 $h + d \geqslant 3$，对于每个 $T_{h,\ d}$-子式-*free* 图 G，以及 V中的每个顶点 r (G)，图 G 具有一个宽度至多为$(d + h - 2(\mathrm{pw}(G) + 1)$ 的划分 $\mathcal{P}$，使得 $\{r\} \in \mathcal{P}$；并且 $G/\mathcal{P}$具有一个宽度至多为 $2h - 1$ 的路径分解，使得第一个袋包含 $\{r\}$。

为说明引理 10 推出定理2，注意到，若 G 不以一棵 t个顶点、半径为 T 、最大度为 h 的树 d 作为子式，则特别地， G不以$T_{h作为d}$ 子式，并且 $\mathrm{pw}(G) \leqslant t - 2$ 由定理 1可知。

引理 10 在 [4] 中的证明核心是以下技术引理，它并未在 [4] 中明确陈述，但可由其证明推出。为完整起见，我们指出，该引理也可以作为本文稍后引入的引理 19 （其中 $R = V(G)$）的一个特例导出。

引理 11 （Dujmović 等人 [4], 隐式）。 设 G 为一个图，设 x、$y \in \mathbb{N}$，且设 $r \in V$（G）。设 R ：$= N_G$（r）。假设存在一个集合 $X \subseteq V$（G）$\backslash\{r\}$，其大小至多为 x，并满足以下条件：

（*i*）对于每个顶点 $v \in X$，存在一条位于 G 中的路径，从 r 到 v，且其内部顶点与 X不相交。（*ii*）对于 $G - X - r$ 的每个包含 R中某个顶点的连通分量 C，存在一个 $V(C)$的宽度至多为 x 的划分 $\mathcal{P}_C$，使得 $pw(C/\mathcal{P}_C) \leqslant y$。（*iii*）如果 G' 是 G 的一个子式，且 $|V(G')| < |V(G)|$，并且 G 中存在一个 G'-模型，使得r 包含于 G'中某个顶点 r' 的分支集内，则存在一个$V(G')$的宽度至多为 x 的划分 $\mathcal{P}_{G'}$，使得 $\{r'\} \in \mathcal{P}_{G'}$；并且存在一个 $G'/\mathcal{P}_{G'}$的宽度至多为 $y+2$ 的路径分解 $\mathcal{D}'$，使得 $\{r'\}$ 位于 $\mathcal{D}'$ 的第一个袋中。
那么，存在一个 V（G）的划分 $\mathcal{P}$，其宽度至多为 x，使得 $\{r\} \in \mathcal{P}$；并且存在一个 $G/\mathcal{P}$ 的路径分解 $\mathcal{D}$，其宽度至多为 $y+2$，使得 $\{r\}$ 位于 $\mathcal{D}$ 的第一个袋中。

为了证明定理3，我们将重用 [4], 中的想法，尤其是引理11，并结合以下引理。该引理是对 [6] 中一项近期结果的略微修改。为陈述此引理，我们需要以下术语：给定一个有根森林 F、一个图 G以及一个 G的顶点集合 R，如果一个 F中的模型 G 满足以下条件，我们称其为弱R-有根的：森林 F 中每棵树的根所对应的分支集都至少包含一个 R中的顶点。为简化记号，方便起见，我们在此定义中也允许 R 包含不属于 G的顶点，并据此处理。（例如，这样我们便可以在以下引理中写“弱 R-有根”，而不必写“弱（$R \setminus X$）-有根”。）

引理 12。设 G 是一个图，令 $R \subseteq V$（G），并设 F 是一个有根森林。若 G 中不存在弱 R-有根模型 F，则存在 F 的一个连通分量 T 以及一个集合 $X \subseteq V$（G），满足 $|X| < |V$（F）$|$，使得 $G - X$ 不包含任何弱 R-有根模型 T。

在证明引理 12 之前，我们先说明它蕴含以下引理；对 3 中每个连通分量任取一个顶点 r，并以 G为根，选择 T 的根，使得 T 的高度等于 T的半径，即可直接由此得到定理 {v?}。

引理 13。对于任意具有 $t \geqslant 3$ 个顶点且高度为 $h \geqslant 1$ 的有根树 T，对于任意连通图 G，以及任意 $r \in V$（G），若 G 不包含任何弱 $\{r\}$-有根模型 T，则存在 V（G）的一个宽度至多为 $t-2$ 的划分 $\mathcal{P}$，满足 $\{r\} \in \mathcal{P}$；并且 $G/\mathcal{P}$ 具有一个宽度至多为 $2h-1$ 的路径分解，且第一个袋包含 $\{r\}$。

引理 13 的证明（假设引理 12）。我们按（h，$|V$（G）$|$）进行归纳，采用字典序。基例 $h = 1$ 与定理 2 的证明中类似的情形相同；为完整起见，我们在此加以描述。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $V_i := \{v \in V$（G）$\mid \mathsf{dist}_G(r, v) = i\}$。如果对于某个 $i \in \mathbb{N}$有 $|V_i| \geqslant t-1$，那么集合 $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{i-1}$（其在 G 中是连通的）连同 V_i 中作为单点集的 $t-1$ 个顶点，将在 G 中给出一个弱 $\{r\}$-根 T-模型，这与矛盾。因此，对于所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $|V_i| \leqslant t-2$。令 m 为满足 $V_m \neq \emptyset$ 的最大整数。由于 G 是连通的，$\{V_i \mid i \in \mathbb{N}, i \leqslant m\}$ 是 V（G）的一个划分，其宽度至多为 $t-2$。此外，$V_0 = \{r\}$，并且容易验证，$\big\{\{V_i, V_{i+1}\} \mid 0 \leqslant i < m\big\}$ 是 $G/\mathcal{P}$ 的一个路径分解，其宽度至多为 $1 = 2h-1$，其中 $\{r\} = V_0$ 位于第一个袋中。基例得证。

现在考虑归纳情形，假设 $h \geqslant 2$。首先，我们证明对于 $x = t-2$ 和 $y = 2h-3$，引理 11 的假设均成立。令 F 为从 T 中删除其根后得到的有根森林，其中，对于 F的每个连通分量，该树的根是唯一一个曾是 T的根的子节点的顶点。令 $R := N_G(r)$。注意，$G - r$ 不可能包含 F的弱 R-有根模型，否则 G 将包含 T的弱 $\{r\}$-有根模型。对 $G - r$应用引理 12，可得 F 的一个连通分量 T'以及一个大小至多为 $t-2$ 的集合 $X \subseteq V(G - r)$，使得 $G - (X \cup \{r\})$不含弱 R-有根 T'-模型。不失一般性，我们可以选择按包含关系极小的 X

并具有这一性质。另请注意，根据 F的定义， T'的高度 h'严格小于h。

请注意，集合 X 可能为空，这对我们的目的而言没有问题。如果 X 非空，根据 X的极小性，对于每个顶点 $v \in X$，图 $G - r - (X \setminus \{v\})$ 都包含一个弱 R-有根模型，其模型为 T'。该模型必定使用 v，因此特别地，它包含一条从 v到 R中某个顶点的路径，因此 $G - (X \setminus \{v\})$ 包含一条从 v到 r的路径。这条路径必定与 X内部不相交，因此引理 11 的第一个条件得以满足。

接下来，假设 C是 $G - (X \cup r)$中包含顶点 $v \in R$的一个连通分支。根据 X的定义， C 不包含任何弱 $\{v\}$-有根模型，其模型为 T'。因此，由于 $h' < h$，我们可以应用归纳法；根据归纳假设，引理11的第二个条件对集合 X 也成立。

最后，假设 G' 是 G 的一个子式，使得 $|V(G')| < |V(G)|$，并且存在一个 G' 在 G 中的模型，以及一个属于 G' 的顶点 r'，其在该模型中的分支集包含 r。若 T 在 G'中存在一个弱 $\{r'\}$有根模型，则 T 在 G中存在一个弱 $\{r\}$有根模型，矛盾。因此， T 在 G'中不存在弱 $\{r'\}$有根模型。又因为 G' 的顶点数少于 G，我们可以应用归纳假设，并由此得出引理 11 的第三个条件也成立。

因此，我们可以将引理 11应用于 G 和 X，从而得到所需结果。 □

现在我们证明引理 12。我们将用到 Diestel 提出的以下引理 [3]。我们指出，该引理并未在 [3] 中明确陈述，但可由该论文的主要证明推得。

引理 14 (Diestel [3], 隐含）。 设 G 是一个连通图，设 $v \in V(G)$，并设 T 是一个以 $t > 1$ 个顶点为节点的有根树。若 $\mathrm{pw}(G) \geqslant t - 1$，则存在 $Y \subseteq V(G)$，使得 $r \in Y$、$G[Y]$ 含有一个弱 $\{r\}$-根 T-模型，并且 $G[Y]$ 有一个宽度至多为 $t - 1$ 的路径分解，其最后的袋包含 $\partial_G(Y)$。

下面这个引理的证明依赖于引理14，它稍微修改了 [6] 中的一个结果（该结果在那篇论文定理 2 的证明开头给出）。唯一的区别是，在 [6], 中，模型没有根。为完整起见，我们给出该引理的证明；需要强调的是，这与 [6], 中的证明相同，只是做了少量修改，以确保我们构造的模型以适当的方式定根。

引理 15。 设 G为一个图，设 $R \subseteq V(G)$，设 c为一个正整数，设 $t_1, \ldots, t_c$为满足 $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_c$的正整数，设 $T_1, \ldots, T_c$为有根树，使得对每个 $i \in [c]$，都有 $|V(T_i)| = t_i$；设 $x_1, \ldots, x_c$为非负整数，其中至少一个非零，并设$I := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant c$和 $x_i \geqslant 1\}$。那么，以下两个条件至少有一个成立

(i) G 包含两两顶点不交的子图 $\{M_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant c, 1 \leqslant j \leqslant x_i\}$，使得对每个 $i \in [c]$ 和每个 $j \in [x_i]$， $M_{i,\,j}$ 都包含一个弱 R-根 T_i-模型。(ii) 存在 $X \subseteq V(G)$，满足 $|X| \leqslant (\sum_{i \in I} x_i t_i) - t_{\max(I)}$，并且 $i \in I$ 使得 $G - X$ 不包含任何弱 R-根 T_i-模型。

证明。 我们称元组 $(G,\ R,\ c,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_c,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_c)$ 为一个 实例。

设 $(G$、R、c、T_1，……，T_c、x_1，……，$x_c)$ 是一个实例，并令 $m := \min(I)$。证明对 $(\sum_{i=1}^{c} x_i$、$|V(G)|)$ 进行归纳，采用字典序。在基例中， $\sum_{i=1}^{c} x_i = 1$，这意味着 $x_m = 1$，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, c\} \setminus \{m\}$ 都有 $x_i = 0$。要么存在一个弱 R-根模型

在 G 中的 T_m，且第一个陈述在 $M_{m、1} = G$ 时成立；要么不存在 T_m 的 R-根模型，即 G，此时第二个陈述在 $X = \emptyset$ 时成立。

在归纳情形中，假设 $\sum_{i=1}^{c} x_i \geqslant 2$，并且对于和严格较小的情形，或和相等但顶点数严格较小的情形，命题均成立。若对于每个整数 $i \in I$，都不存在 R-有根模型 T_i，且该模型位于 G 中，则第二个命题对 $X = \emptyset$ 成立。因此，我们可以假设存在 $i \in I$，使得 G 包含一个 R-有根模型 T_i。若 G 存在一个连通分量 C，使得 $V(C) \cap R = \emptyset$，则我们对实例 $(G - V(C)$ $R \backslash V(C)$ $c, T_1, \ldots, T_c, x_1, \ldots, x_c)$ 应用归纳法。若第一个命题对该实例成立，则它对 $(G, R, c,$ $T_1, \ldots, T_c, x_1, \ldots, x_c)$ 也成立。若第二个命题对 $(G - V(C)$ $R \backslash V(C)$ $c, T_1, \ldots, T_c, x_1, \ldots x_c)$ 成立，则它对 $(G, R, c, T_1, \ldots, T_c, x_1, \ldots x_c)$ 也成立，且使用同一个集合 X。因此，我们可以假设 G 的每个连通分量都至少包含 R 中的一个顶点。

若 $\mathsf{pw}(G) < t_m - 1$，令 $Y := V(G)$。注意，在此情况下 $\partial_G(Y) = \emptyset$。若 $\mathsf{pw}(G) \geqslant t_m - 1$，则存在 G 的一个连通分量 C，使得 $\mathsf{pw}(C) \geqslant t_m - 1$。接着，我们对 C、T_m 和任意顶点 $r \in R \cap V(C)$ 应用引理 14。在此情况下，令 Y 为所得的顶点子集。

注意，在 Y 的定义中，无论是哪种情况，以下两个性质都成立 d:

- $G[Y]$ 包含某个 $i \in I$ 的弱 R-有根模型 T_i，并且
- $G[Y]$ 有一个宽度至多为 $t_m - 1$ 的路径分解 $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$，使得 $\partial_G(Y) \subseteq B_q$。

（若 $Y = V(G)$，则第一个性质成立，因为它对 G 成立。）令 ℓ 为介于 1 和 q 之间的最小整数 j，使得存在 $i \in I$ 满足：$G_\ell := G[\bigcup_{j=1}^{\ell} B_j]$ 包含一个弱 R-有根模型 T_i。令 $i' \in I$ 满足：G_ℓ 包含一个弱 R-有根模型$T_{i'}$。

我们断言，$G_\ell - B_\ell$ 的任意顶点与 $G - V$的任意顶点之间都不存在边（G_ℓ）。反设存在一条边 $uv \in E$（G），其中 $u \in V$（G_ℓ）$\setminus B_\ell$ 且$v \in V$（G）$\setminus V$（G_ℓ）。首先，注意到 $u \in \bigcup_{j=1}^{\ell-1} B_j$。若 $v \in Y$，则 v只出现在索引严格大于 ℓ的包（B_1、.....、B_q）中。然而，u至少出现在一个索引严格小于 ℓ的包中。于是，根据路径分解的定义可知 $u \in B_\ell$，矛盾。因此，$v \notin Y$，进而 $u \in \partial_G$（Y），所以 $u \in B_q$。由于 u既出现在 B_q 中，也出现在一个索引严格小于 ℓ的包中，因此应有 $u \in B_\ell$，矛盾。

令 $G' := G - V(G_\ell)$。令 $x'_i := x_i$，对每个 $i \in \{1, \ldots, c\} \backslash \{i'\}$ 均成立，并令 $x'_{i'} := x_{i'} - 1$。令 $I' := \{i \in I \mid x'_i \geqslant 1\}$。注意，$I'$ 非空，因为 $\sum_{i \in I} x_i \geqslant 2$。对实例 $(G', R \backslash V(G_l)$ $c, T_1, \ldots, T_c, x'_1, \ldots, x'_c)$ 应用归纳法。若存在一组顶点不交子图 $\{M'_{i,j} \mid i \in I', 1 \leqslant j \leqslant x'_i\}$，使得 $M'_{i,j}$ 对每个 $i \in I'$ 和 $j \in \{1, \ldots, x'_i\}$ 都包含一个弱 R-有根模型 T_i，则令 $M_{i,j} := M'_{i,j}$ 对每个满足 $1 \leqslant i \leqslant c$, $i \neq i'$ 且 $1 \leqslant j \leqslant x_i$，或满足 $i = i'$ 且 $1 \leqslant j \leqslant x_i - 1$ 的 i, j 成立，并令 $M_{i', x_i} = G_\ell$，即可满足引理的第一条陈述。

否则，存在一个大小至多为 $(\sum_{i \in I'} x'_i t_i) - t_{\max(I')}$ 的集合 X'，以及一个整数 $z \in I'$，使得 $G' - X'$ 不包含任何弱 R-有根模型 T_z。令 $X := X' \cup B_\ell$。我们有

$$|X| = |X'| + |B_\ell| \leqslant \left(\left(\sum_{i \in I'} x'_i t_i \right) - t_{\max(I')} \right) + t_m = \left(\sum_{i \in I} x_i t_i \right) - (t_{\max(I')} + t_{i'} - t_m).$$

如果 $\max(I') = \max(I)$，那么 $t_{\max(I')} + t_{i'} - t_m = t_{\max(I)} + (t_{i'} - t_m) \geqslant t_{\max(I)}$，因为 $m = \min(I)$，因此 $i' \geqslant m$，所以 $t_{i'} \geqslant t_m$。

如果 $\max(I') \neq \max(I)$，那么 $\max(I) = i'$（且 $x_{i'} = 1$），接着 $t_{\max(I')} + t_{i'} - t_m = t_{\max(I)} + (t_{\max(I')} - t_m) \geqslant t_{\max(I)}$，因为 $\max(I') \in I$，所以 $\max(I') \geqslant m$，进而 $t_{\max(I')} \geqslant t_m$。
因此，在这两种情况下，我们都有 $t_{\max(I')} + t_{i'} - t_m \geqslant t_{\max(I)}$，从而得到 $|X| \leqslant \left(\sum_{i \in I} x_i t_i\right) - t_{\max(I)}$。为证明第二个结论，只需证明 $G - X$ 不包含 T_z的任何弱R-有根模型。由于 $B_\ell \subseteq X$，且我们已证明 G 中 $G_\ell - B_\ell$ 的任意顶点与 $G - V(G_\ell)$ 的任意顶点之间都没有边，因此只需证明 $G_\ell - B_\ell$ 中不存在 T_z 的弱 R-有根模型，并且 $G - V(G_\ell)$ 中不存在T_z 的弱 R-有根模型 $- X$。根据 ℓ的定义（尤其是其极小性），第一个性质成立。由于 $G' - X'$中不存在 T_z的弱 R-有根模型，第二个性质成立。证明至此完成。□

引理12 由引理15 可得，只需令 $T_1, \ldots, T_c$为森林 F的连通分量，并令 $x_1 = \cdots = x_c = 1$即可。定理3的证明至此完成。

4. 排除顶点森林

我们先定义一些在 [7]（另见 [2]）中引入、将在本节使用的概念：设 G和 H为图，且设 S、$R \subseteq V(G)$。若 H中的一个模型满足其中每个顶点的分支集都至少包含 S中的一个顶点，则称其为 S-有根模型。若 H 是一个有根森林，则称 G 中的一个 H模型为 (S, R)-有根模型，若它是 S-有根且弱 R-有根的。为使涉及子图时的记号简洁，在此定义中也允许 S 和 R 包含不属于 G 的顶点，因此我们采用这种约定。(G, S) 的路径分解由 G 的一个导出子图 H（满足H $S \subseteq V$）以及H 的一个路径分解 $\mathcal{D}$ 构成，并且对于 $G - V(H)$ 的每个连通分量 C，$\mathcal{D}$ 中都存在一个袋，包含$V(C)$中的所有 N_G。(G, S) 的路径宽度记为 $\mathrm{pw}(G, S)$，定义为 (G, S) 的路径分解的最小宽度。

作者 [7] 证明了以下定理。

定理 16 (Hodor 等人 [7])。对于每个至少有一个顶点的森林 F、每个图G 以及每个 $S \subseteq V(G)$，若 G 没有 S-有根模型 F，则 $\mathrm{pw}(G, S) \leqslant 2|V(F)| - 2$。

稍微修改他们的证明，可以得到他们定理的以下有根变体，我们将在本节中使用：

定理 17. 对于每棵至少有一个顶点的有根树 T、每个连通图 G以及每个 $S, R \subseteq V(G)$，若 R 非空，且 G 没有 (S, R)-有根模型 T，则 $\mathrm{pw}(G, S) \leqslant 2|V(T)| - 2$。

接下来，从图膨胀的角度出发，我们引入 (G) 路径宽度定义的一种推广，这将有助于我们的研究。设 G 为一个图，令 $S \subseteq V(G)$，并令 k 为一个正整数。图 (G, S) 的 k-划分路径分解由 G 的一个导出子图 H 组成，其中 $S \subseteq V(H)$；由 $V(H)$ 的一个划分 $\mathcal{P}_H$ 组成，其宽度至多为 k；以及 $H/\mathcal{P}_\mathcal{H}$ 的一个路径分解 $\mathcal{D}_H$ 组成，并且对于 $G - V(H)$ 的每个连通分量 C，存在 $\mathcal{D}_\mathcal{H}$ 中的一个袋 B，使得 $N_G(V(C))$ 包含于 B 中所包含的 $\mathcal{P}_H$ 的各部分的并集内。我们将称导出子图 H、该划分

$\mathcal{P}_H$ 以及路径分解 $\mathcal{D}_H$ 与该分解相关联。我们将 (G, S) 的 k-划分路径宽度定义为与 (G, S) 的 k-划分路径分解相关联的路径分解的最小宽度，并将其记为 ppw(k, G, S)。注意，对于每个 $k' \leqslant k$，都有 ppw(k', G, S) $\geqslant$ ppw(k, G, S)。稍后我们将使用这一事实。

现在我们转而证明定理 8。为此，我们将证明定理3在 S-有根模型情形下的以下类比结果。论证主要受到定理 2的证明 [4] 以及我们对定理 3的证明的启发：

定理 18。设 G 是一张图，令 $S \subseteq V(G)$，且令 T 为一棵有 t个顶点的树，其 $t \geqslant 2$、最大度为 d，半径为 h。若 G 不包含任何 S-有根模型 T，则 $\mathrm{ppw}((2t-1)d, G, S) \leqslant 2h-1$。

首先，我们证明引理 11 的一个类比结果（事实上，该结果在情形 $S = V(G)$下蕴含引理 8 的证明 [4]的改编。

引理 19. 设 G 是一个连通图，设 $S \subseteq V(G)$，设 x, y 为满足 $x \geqslant 1$ and$y \geqslant 0$的整数，设 $r \in V(G)$，并设 $R := N_G(r)$。假设存在一个大小至多为 x 的集合 $X \subseteq V(G) \backslash \{r\}$，使得：

(i) 对每个 $v \in X$，G 中都存在一条从 r 到 v 的路径，该路径的内部顶点与 X 不相交。
(ii) 对于 $G - X - r$ 的每个包含 R 中某个顶点的连通分量 C，都有 *ppw*$(x, C, S \cap V(C)) \leqslant y$。
(iii) 对于 G 的每个满足 $|V(G')| < |V(G)|$ 的子式 G'，若存在 G 中的一个 G' 模型 $\mathcal{M}$，以及 G' 的一个顶点 r'，使得该顶点在 $\mathcal{M}$ 中的分支集包含 r，令 S' 为 G' 的顶点集，其中每个顶点在 $\mathcal{M}$ 中的分支集至少包含 S 中的一个顶点，则存在一个 x-划分路径分解 (G', S')，其宽度至多为 $y+2$，且其关联划分包含 $\{r'\}$，关联路径分解的第一个袋包含 $\{r'\}$。

于是，存在一个宽度至多为 $y+2$ 的 x-划分路径分解 (G, S)，使得其关联划分包含 $\{r\}$，且其关联路径分解的第一个袋包含 $\{r\}$。

证明。首先注意，若 R 为空，则 G 仅由顶点 r 构成，此时很容易为 G 定义一个具有所需性质的 x-划分路径分解。因此，我们可以假设 R 非空。

接下来，考虑 X 为空的情形。在这种情况下，$G - X - r = G - r$ 的每个连通分量都包含 R 中的一个顶点，因为 G 是连通的，且 $R = N_G$（r）。于是，由性质 (ii) 可知，ppw(x, $G - r, S \setminus \{r\}$) $\leqslant y$。取一个宽度至多为 y 的 x-划分路径分解 $G - r$，并将 $\{r\}$ 加入关联划分及关联路径分解的所有袋中，便得到一个宽度至多为 $y+1$ 的 x-划分路径分解 (G, S)，其关联划分以 $\{r\}$ 为一个部分，且其关联路径分解的第一个袋包含 $\{r\}$。结论成立。因此，在证明余下部分中，我们可以假设 X 非空。

设 $G_1, \ldots, G_p$为 $G - X - r$中包含 R中某个顶点的连通分量。根据性质 (ii)，对于每个 $i \in [p]$，存在 $A_i \subseteq V(G_i)$，以及 $\mathcal{P}_i$ 的一个划分 A_i，其宽度至多为x，还有一个 $\mathcal{D}_i$ 的路径分解 $G[A_i]/\mathcal{P}_i$，使得：

(i) $S \cap V(G_i) \subseteq A_i$; (ii) $\mathcal{D}_i$ 的宽度至多为 y；并且 (iii) 对于 $G_i - A_i$ 的每个连通分量 C，$\mathcal{D}_i$ 中都存在一个袋，包含 $\mathcal{P}_i$ 中所有与 $N_{G_i}(V(C))$ 相交的部分。

令 Z 为 $G - X - r$ 中所有不含 R 中顶点的连通分量的顶点集之并。考虑一个顶点 $v \in X$，令 P_v 为一条从 r 到 v 且内部与 X 不相交的路径；根据性质 (i)，这样的路径存在。由于 P_v 中 r 的邻居属于 R，因而对于某个 $i \in [p]$，它也属于 G_i；又由于 P_v 中唯一同时属于 X 的顶点是 v，因此 $P_v - \{v, r\}$ 完全包含于 G_i，所以 P_v 避开 Z。因此，$G[\bigcup_{v\in X} V(P_v)]$ 连通且避开 Z。令 G' 为从 G 得到的图：将 $\bigcup_{v\in X} V(P_v)$ 收缩为一个顶点 r'，并删除 G 中所有不属于 Z 的其他顶点，从而 $V(G') = \{r'\} \cup Z$。注意到 $X \cup \{r\} \subseteq \bigcup_{v\in X} V(P_v)$。由于 X 非空，$|X \cup \{r\}| \geqslant 2$，因此 $|V(G')| < |V(G)|$；于是根据性质 (iii)，存在 $A' \subseteq V(G')$、一个宽度至多为 x 的 A' 的划分 $\mathcal{P}'$（其中 $\{r'\}$ 是其一部分），以及 $G[A']/\mathcal{P}'$ 的一个路径分解 $\mathcal{D}'$，使得：

(i) $(S \cap Z) \cup \{r'\} \subseteq A'$；(ii) $\mathcal{D}'$ 的宽度至多为 $y + 2$，且其第一个袋包含 $\{r'\}$；并且 (iii) 对于 $G' - A'$ 的每个连通分量 C，$\mathcal{D}'$ 中都存在一个袋，包含与 $N_{G'}(V(C))$ 相交的 $\mathcal{P}'$ 的所有部分。

Let

$$A := \{r\} \cup X \cup (\cup_{1\leqslant i\leqslant p} A_i) \cup (A' \setminus \{r'\})$$

and

$$\mathcal{P} := \big\{\{r\}, X\big\} \cup (\cup_{1\leqslant i\leqslant p} \mathcal{P}_i) \cup (\mathcal{P}' \setminus \big\{\{r'\}\big\}).$$

注意，$S \subseteq A$，并且 $\mathcal{P}$ 是 A 的一个划分，其宽度至多为 x。

令 $\mathcal{D}$ 为由 $\{\{r\}, X\}, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p$ 与 $\mathcal{D}'$ 拼接得到的 $G[A]/\mathcal{P}$ 的顶点子集序列：将 $\{r\}$ 和 X 添加到来自 $\mathcal{D}'_i$ 的每个袋中，并在 $\mathcal{D}'$ 中每个包含 $\{r'\}$ 的袋里用 X 替换 $\{r'\}$。我们说明 $\mathcal{D}$ 是 $G[A]/\mathcal{P}$ 的一个路径分解。容易验证，$\mathcal{P}$ 的每个部分都出现在连续的袋中。事实上，$\mathcal{D}_i$ 和 $\mathcal{D}'$ 是路径分解，X 被添加到了来自 $\mathcal{D}_i$ 的所有袋中；来自 $\mathcal{D}_i$ 的袋与来自 $\mathcal{D}'$ 的袋之间唯一可能共有的部分是 X，而且 X 也在来自 $\mathcal{D}'$ 的第一个袋中。

接下来，我们证明 $\mathcal{P}$ 的每个部分都至少属于 $\mathcal{D}$ 的一个袋。根据构造，这对 $\{r\}$ 和 X 成立。对于某个 $i \in [p]$，$\mathcal{P}$ 中属于 $\mathcal{P}'_i$ 的每个部分都至少属于 $\mathcal{D}_i$ 的一个袋，因此也至少属于 $\mathcal{D}$ 的一个袋。$\mathcal{P}$ 中属于 $\mathcal{P}'$ 的每个部分都出现在 $\mathcal{D}'$ 的至少一个袋中，并且由于 $\{r'\} \notin \mathcal{P}$，也会出现在 $\mathcal{D}$ 的至少一个袋中。因此，$\mathcal{P}$ 的每个部分确实都出现在 $\mathcal{D}$ 的至少一个袋中。

接下来，我们证明，对于 $G[A]/\mathcal{P}$ 中相邻的任意两个不同部分 P，$P' \in \mathcal{P}$，$\mathcal{D}$ 中存在一个袋同时包含 P 和 P'。根据构造，以下情况之一成立：

(i) $PP' \in E(G[A_i]/\mathcal{P}_i)$ 对某个 $i \in [p]$ 成立，于是存在一个属于 $\mathcal{D}_i$ 的袋 W，其中有 P，$P' \in W$；根据构造，$W \cup \{\{r\}, X\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个袋。(ii) $PP' \in E(G[A']/\mathcal{P}')$，因此存在一个属于 $\mathcal{D}'$ 的袋 W，其中有 $P, P' \in W$；根据构造，W 或 $(W \setminus \{r'\}) \cup \{X\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个袋，并且同时包含 P 和 P'。(iii) $P = X$ 或 $P' = X$，不失一般性，假设 $P = X$。如果对某个 $i \in [p]$ 有 $P' \in \mathcal{P}_i$，那么任何一个包含 P' 的 $\mathcal{D}_i$ 中的袋 W，都会产生 $\mathcal{D}$ 中的一个袋 $W \cup \{\{r\}, X\}$，它同时包含 P 和 P'。类似地，如果 $P' = \{r\}$，那么 $\{\{r\}, X\}$ 同时包含 P 和 P'。如果 $P' \in \mathcal{P}'$，那么 $\{r'\}P' \in E(G[A']/\mathcal{P}')$，因此存在一个属于 $\mathcal{D}'$ 的袋 W，其中有 $\{r'\}, P' \in W$，所以 $\big(W \setminus \big\{\{r'\}\big\}\big) \cup \{X\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个袋，同时包含 P 和 P'。(iv) $P = \{r\}$ 或 $P' = \{r\}$，不失一般性，假设 $P = \{r\}$。那么，要么 $P' = \{X\}$，但这种情况已经讨论过；要么对某个 $i \in [p]$ 有 $P' \in \mathcal{P}_i$。此时，任何一个包含 P' 的 $\mathcal{D}_i$ 中的袋 W，都会产生 $\mathcal{D}$ 中的一个袋 $W \cup \{\{r\}, X\}$，它同时包含 P 和 P'。

最后，我们需要证明：对于 $G - A$ 的每个连通分量 C，$\mathcal{D}$ 中都存在一个袋，包含 $\mathcal{P}$ 中与 $N_G(V(C))$ 相交的每个部分。由于 $X \cup \{r\} \subseteq A$，C 要么是某个 $i \in [p]$ 对应的 $G_i - A_i$ 的连通分量，要么 C 是 $G' - A'$ 的一个连通分量。在第一种情况下，存在一个属于 $\mathcal{D}_i$ 的袋 W，其并集包含 $N_{G_i}(V(C))$；又因为 $W \cup \{\{r\}, X\}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个袋，且 $N_G(V(C)) \subseteq N_{G_i}(V(C)) \cup \{r\} \cup X$，结论成立。在第二种情况下，要么 $r' \in N_{G'}(V(C))$，因此 $N_G(V(C)) \subseteq (N_{G'}(V(C)) \setminus \{r'\}) \cup X$；要么 $N_G(V(C)) = N_{G'}(V(C))$。在这两种情况下，任何一个属于 $\mathcal{D}'$ 且其并集包含 $N_{G'}(V(C))$ 的袋 W，都会在 $\mathcal{D}$ 中产生一个袋（即 $\big(W \setminus \{\{r'\}\}\big) \cup \{X\}$ 或 W），其并集包含 $N_{G'}(V(C))$。

由此可知，$\mathcal{D}$ 是 $G[A]/\mathcal{P}$的路径分解，证毕。现在注意到，根据构造，$\mathcal{D}$ 的宽度至多为 $y + 2$。因此，集合 A、划分 $\mathcal{P}$和路径分解 $\mathcal{D}$ 共同构成了(G, S)的一个宽度至多为 $y + 2$ 的 x-划分路径分解，其中关联划分包含 $\{r\}$，且关联路径分解的第一个袋包含 $\{r\}$，如所需。证明至此完成。□

我们还将使用以下引理，其灵感来自 23 中的引理 [7]。

引理 *20.* 设 G 为一个图，设 S、$R \subseteq V(G)$，并设 F 为一个非空有根森林。设d 为 F 的连通分量数，并设 $p := pw(G, S)$。假设 G 不包含 F的任何(S, R)-有根模型。那么，存在一个集合 $X \subseteq V(G)$和 F的一个连通分量 T，使得 $|X| \leqslant (d-1)(p+1)$，且 $G - X$不包含 T的任何(S, R)-有根模型。

证明。 通过对 d 进行归纳来证明。若 $d = 1$，则取 $X = \emptyset$ 和$T = F$即可得到结论。

接下来进行归纳步骤。因此，假设 $d \geqslant 2$，且该引理对小于 d 的值成立。若 F 的某个连通分支 T 中，图 G 不含 T 的 (S, R)-有根模型，则取 $X = \emptyset$ 和 T 即可得到该引理。因此，我们可以假设，对于 F 的每个连通分支 T，G 中都存在 T 的某个 (S, R)-有根模型。（特别注意，这意味着 S 和 R 均非空。）我们还可以假设 G 的每个连通分支都至少包含一个来自 S 的顶点，因为不满足这一条件的连通分支可以直接舍弃，它们不会影响集合 X 的存在性。

考虑 (G, S) 的一个宽度至多为 p 的路径分解，其中 H 表示 G 中对应的导出子图，而 $B_1, \ldots, B_m$ 表示相应的袋序列。注意，对于 $G - V(H)$ 的每个连通分支 C，我们有 $N_G(V(C)) \neq \emptyset$（因为 G 的每个连通分支都至少包含一个来自 S 的顶点），并且，对于某个 $i \in [m]$，还有 $N_G(V(C)) \subseteq B_i$（根据 (G, S) 的路径分解的定义）。对于每个 $i \in [m]$，令 V_i 为满足 $N_G(V(C)) \subseteq B_i$ 的 $G - V(H)$ 的连通分支 C 的顶点集之并。因此，$V(H) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} V_i) = V(G)$。对于每个 $j \in [m]$，令 $G_j := G[\bigcup_{i=1}^{j}(B_i \cup V_i)]$。注意，根据 (G, S) 的路径分解的定义，集合 B_j 在 G 中将 $V(G_j)$ 与 $V(G) \setminus V(G_j)$ 分隔开。令 $j \in [m]$ 为满足以下条件的最小值：G_j 包含某个 F 的连通分支 T' 的 (S, R)-有根模型。根据我们对 G 的假设，j 有定义，因为$G = G_m$包含 F的某个连通分支的(S, R)-有根模型。令 $F' := F - V(T')$。

注意，$G - V(G_j)$ 不包含 F' 的 (S, R)-有根模型。事实上，若情况如此，则 G 将包含 F 的 (S, R)-有根模型，因为 G_j 包含 T' 的 (S, R)-有根模型，这就产生了矛盾。这意味着 $G - B_j$ 不包含任何 F' 的 (S, R)-有根模型，因为 $G_j - B_j$ 不包含任何 F' 中树的 (S, R)-有根模型。

因此，我们可以对 $G - B_j$ 和 F' 应用归纳假设。令 $p' := \mathsf{pw}(G - B_j, S \setminus B_j)$，于是得到 F' 的一个连通分量 T 和一个大小至多为 $(d-2)(p'+1) \leqslant (d-2)(p+1)$ 的集合 $X' \subseteq V(G - B_j)$，使得 $G - B_j - X'$ 不包含任何 T 的 (S, R)-有根模型。接着令 $X := X' \cup B_j$，可得 $|X| = |X'| + |B_j| \leqslant (d-2)(p+1) + (p+1) = (d-1)(p+1)$，并且 $G - X$ 不包含任何 T 的 (S, R)-有根模型，正如所需。至此证明完毕。□

接下来，我们证明引理 10 的一个类似结论（这蕴含了引理 10 在 $S = V(G)$ 的情形下成立，但划分宽度的上界较差）。

引理 21. 设 T 是一棵以根为根、高度为 h、最大度为 d 的 t 阶树，其中 $t \geqslant 2$ 且 $h, d \geqslant 1$。假设 G 是一个连通图，带有指定集合 $S \subseteq V(G)$ 和顶点 $r \in V(G)$，使得 G 不包含任何 $(S, \{r\})$-有根模型 T。那么，存在一个 $((2t-1)d)$-划分路径分解 (G, S)，其宽度至多为 $2h - 1$，使得关联划分包含 $\{r\}$，且路径分解的第一个袋包含 $\{r\}$。

证明。对这些有序对 $(h, |V(G)|)$ 按字典序进行归纳。若 $|V(G)| = 1$，容易看出取 $V(G)$ 的划分 $\{\{r\}\}$ 即可使引理成立。因此，设 $|V(G)| \geqslant 2$。

首先，我们考虑 $h = 1$ 的情形。令 $A := S \cup \{r\}$，并令 G' 为将 G 中与 $G - A$ 的各个连通分量对应的 G 的导出子图分别收缩为一个顶点后得到的图。注意，G' 是连通的，因为 G 是连通的。对于每个非负整数 i，令 $V'_i := \{v \in V(G') \mid \mathsf{dist}_{G'}(v, r) = i\}$，并令 $V_i := V'_i \cap A$。注意，若对于某个 $i \geqslant 1$，$|V_i| \geqslant d + 1$ 成立，那么将 G' 中由 $V'_0 \cup V'_1 \cup \cdots \cup V'_{i-1}$ 诱导的连通子图收缩为一个顶点后，可知 G' 中存在 T 的 $(S, \{r\})$-有根模型，因而 G 中也存在这样的模型，这就产生了矛盾。因此，对于每个 $i \geqslant 0$，$|V_i| \leqslant d$ 都成立。

令 $m \in \mathbb{N}$ 为满足 $V_{2(m+1)} = \emptyset$ 的最小值。令 $\mathcal{P} := \{\{V_{2i} \cup V_{2i+1}\} \mid i \in \mathbb{N}, i \leqslant m\}$。若 $m \neq 0$，则对每个非负整数 $i < m$，令 $D_i := \{\{V_{2i} \cup V_{2i+1}\}, \{V_{2i+2} \cup V_{2i+3}\}\}$，并令 $\mathcal{D} := \{D_i \mid i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\}$。若 $m = 0$，则令 $D_0 := \{\{V_0, V_1\}\}$ 和 $\mathcal{D} := \{D_0\}$。由于 $G[A]/\mathcal{P}$ 是路径的子图，不难看出，$\mathcal{D}$ 是 $G[A]/\mathcal{P}$ 的一个宽度至多为 1 的路径分解。若 $m \neq 0$，对于 $G - A$ 的每个连通分量 C，C 对应于 G' 的一个顶点 v'，且在 1 与 $m - 1$ 之间恰有一个指标 i 满足 $v' \in V'_i$。因此，在 G 中与 C 有邻居的 A 的每个顶点，都属于 V_{i-1}、V_i 或 V_{i+1}，而它们都包含在 $\mathcal{D}$ 的同一个袋中。此外，$\mathcal{P}$ 的每个部分的大小至多为 $2d \leqslant (2t-1)d$。$m = 0$ 的情形更简单，也非常相似。因此，该引理对 $h = 1$ 成立。

现在我们进行归纳步骤。假设 $h \geqslant 2$。令 $R := N_G(r)$。令 F 为从 T 中移除其根并添加一个单顶点连通分支后得到的有根森林。注意，F 至多有 $d + 1$ 个连通分量；并且，如果 $G - r$ 包含 F 的一个 (S, R)-有根模型，那么 G 就包含 T 的一个 $(S, \{r\})$-有根模型，这与假设矛盾。因此，$G - r$ 不含 F 的任何 (S, R)-有根模型。

还要注意，$G - r$ 不含 (S, R)-有根模型 T，因为这样的模型很容易导出一个 $(S, \{r\})$-有根模型 T，位于 G 中。定理 17 由此推出 $\mathrm{pw}(G - r, S \setminus \{r\}) \leqslant 2t - 2$。

根据以上观察，我们可以应用引理 20，其中取 $G - r$、$S \setminus \{r\}$、$p = 2t - 2$ 和 F。因此，存在一个大小至多为 $(2t-1)d$ 的集合 $X \subseteq V(G - r)$，以及一棵属于 F 的树 T'，使得 $G - r - X$ 不包含任何 (S, R)-根 T'-模型。注意，由于 $h \geqslant 2$，存在一棵属于 F 且高度至少为 1 的树，因此我们可以假设 T' 的选取满足其高度至少为 1。不失一般性，假设 X

按包含关系极小，使得 $G - r - X$ 不包含任何 $(S,\ R)$-根 T'-模型。令 d' 为 T'的最大度。注意 $d' \leqslant d$。我们将证明，引理 19 的假设对 S、$x = (2t-1)d$、$y = 2h-3$、r和 X均成立。

我们首先证明引理 19 的条件 (i) 成立。设 $v \in X$。根据 X 的极小性，存在一个 T' 在 $(G-r) - (X\backslash\{v\})$ 中的 (S,R)-有根模型。由于 $G - r - X$ 不包含任何 (S,R)-有根模型 T'，该模型的至少一个分支集中必定包含 v，因此，特别地，$(G-r) - (X \setminus \{v\})$ 中存在一条连接 v 与某个顶点 $r' \in R$ 的路径。因此，在 G –$(X \setminus \{v\})$ 中，存在一条从 v 到 r 的路径，正如所需。

接下来，我们证明引理 19 的条件 (ii) 成立。设 C 是 $G - X - r$ 的一个连通分量，且包含顶点 $r' \in R$。根据关于 X 的假设，C 不包含任何 (S,R)-有根 T'-模型。由于 T' 的高度 h' 满足 $1 \leqslant h' \leqslant h-1$，我们可以对 T'、h'、d'、C、$S \cap V(C)$ 和 r' 应用归纳假设，特别可以推出

$$\mathrm{ppw}((2t-1)d, C, S \cap V(C)) \leqslant \mathrm{ppw}((2|V(T')|-1)d', C, S \cap V(C))) \leqslant 2(h-1)-1 = 2h-3$$

利用 $d' \leqslant d$ 和 $|V(T')| \leqslant t$。因此，条件 (ii) 得以验证。

最后，我们证明引理 19 的条件 (iii) 成立。设 G' 是 G 的一个子式，使得$|V(G')| < |V(G)|$，并且存在 $\mathcal{M}$ 的一个模型 G'，位于 G 中；还有一个顶点 r' 属于 G'，其在 $\mathcal{M}$ 中的分支集包含 r。令 S' 为 G' 的顶点集中那些在 $\mathcal{M}$中的分支集包含 S中某个顶点的顶点所组成的集合。由于 $|V(G')| < |V(G)|$，且 G' 不包含任何 T的 $(S', \{r'\})$-有根模型——否则 G 将包含 T的 $(S, \{r\})$-有根模型——我们可以应用归纳假设。因此，存在一个 (G', S')的 $((2t-1)d)$-划分路径分解，其宽度至多为 $2h-1$，并且其关联划分包含 $\{r'\}$，而路径分解的第一个袋包含 $\{r'\}$。因此，条件 (iii)也得以验证。

因此，我们可以应用引理 19，如上所述，故引理得证。 □

定理 18的证明直接来自于对图的每个连通分量应用引理21：以 T 为根，使其高度等于其半径，并在每个连通分量中任取一个顶点 r 。

接下来，我们将证明定理 8。其证明依赖于定理 18 以及另外几个引理。我们先介绍下面的引理。需要指出的是，其证明改编自 [7]中引理 15 的证明所采用的思路。

引理 22。令 G 为一个连通图，令 $u \in V(G)$，令 $S := N_G(u)$ 并令 $x, y \in \mathbb{N}$。假设存在一个宽度至多为 y 的 x-划分路径分解 $\mathcal{D}$，其对象为 $(G-u, S)$，关联划分为 $\mathcal{P}$，关联导出子图为 H。进一步假设，H 的选取满足 $|V(H)|$ 是极小的。那么，对于 $G-u-V(H)$的每个连通分量 C，图 $G - V(C)$ 是连通的。

证明。假设存在某个连通分量C，使得 $G-V(C)$ 不连通。这意味着存在连通分量 C'，使得 $V(C')$ 与 $\{u\} \cup N_G(u)$ 不相交。由于 G 连通，存在一条边 $vw \in E(G)$，使得 $v \in V(C)$ 且 $w \in V(C')$。因为 C 是 $G - u - V(H)$ 的连通分量，且 $w \in N_G(V(C))$，所以我们有 $w \in \{u\} \cup V(H)$。由于 $w \in V(C')$ 且 $u \notin V(C')$，我们推得 $w \in V(H)$。

令 $A := V(H) \setminus V(C')$。由于 $w \in V(H) \cap V(C')$，我们有 $|A| < |V(H)|$。令 $\mathcal{P}' := \{P \cap A \mid P \in \mathcal{P}\} \setminus \{\emptyset\}$。令 $\mathcal{D}'$ 为由 $\mathcal{D}$ 通过替换得到的 $G[A]/\mathcal{P}'$ 的路径分解

将每个袋 B 替换为 $\{P \cap A \mid P \in B\} \setminus \{\emptyset\}$。我们的目标是证明， $\mathcal{D}'$ 是 $(G-u,\ S)$ 的一个 x-划分-路径分解，其宽度至多为 y，关联子图为 $G[A]$，关联划分为 $\mathcal{P}'$。由于 $|A| < |V(H)|$，这将与 H 的选择矛盾，从而完成该引理的证明。唯一需要证明的非平凡之处是：对于 $G-u-A$ 的每个连通分量 C''，都存在 $\mathcal{D}'$ 中的一个袋 B'，使得 B' 中各集合的并包含 $N_{G-u}(V(C''))$。

设 C'' 是 $G-u-A$ 的一个连通分量。若 $V(C'')$ 与 $V(H) \setminus A = V(C') \cap V(H)$ 不相交，则 C'' 也是 $G-u-V(H)$ 的一个连通分量。因此，存在一个袋 $B \in \mathcal{D}$，使得 $N_{G-u}(V(C'')) \subseteq \bigcup_{P \in B} P$。由于 C'' 是 $G-u-A$ 的一个连通分量，我们有 $N_{G-u}(V(C'')) \subseteq A$，因此 $N_{G-u}(V(C'')) \subseteq \bigcup_{P \in B}(P \cap A)$。此外，$\{P \cap A \mid P \in B\} \setminus \{\emptyset\}$ 是 $\mathcal{D}'$ 的一个袋，由此完成此情形的证明。

现在考虑剩余情形： $V(C'')$ 至少包含一个来自 $V(C') \cap V(H)$ 的顶点。回想一下， C 和 C' 是 $G-u-A$ 的连通子图，并且在 G 中，$V(C)$ 与 $V(C')$ 之间有一条边。因此， $V(C) \cup V(C')$ 诱导出 $G-u-A$ 的一个连通子图。此外， $N_{G-u}(V(C')) \subseteq V(C)$（因为 C' 是 $G-V(C)$ 的一个连通分量），并且 $N_{G-u}(V(C)) \subseteq V(H) \subseteq V(C') \cup A$（因为 C 是 $G-u-V(H)$ 的一个连通分量）。因此， $N_{G-u}(V(C) \cup V(C')) \subseteq A$。这意味着 $V(C) \cup V(C')$ 诱导出 $G-u-A$ 的一个连通分量。由于 $V(C'')$ 与 $V(C')$ 相交，我们推得 $V(C) \cup V(C') = V(C'')$。特别是，

$$N_{G-u}(V(C'')) \subseteq A \cap (N_{G-u}(V(C)) \cup N_{G-u}(V(C'))) \subseteq N_{G-u}(V(C)) \cap A.$$

由于 $\mathcal{D}$ 是 $(G-u,\ S)$ 的一个 x-划分路径分解，并且由于 C 是 $G-u-V(H)$ 的一个连通分量，因此在 $\mathcal{D}$中存在一个袋 B，使得 $N_{G-u}(V(C)) \subseteq \bigcup_{P \in B} P$。因此，我们得出 $N_{G-u}(V(C'')) \subseteq N_{G-u}(V(C)) \cap A \subseteq \bigcup_{P \in B}(P \cap A)$。由于 $\{P \cap A \mid P \in B\} \setminus \{\emptyset\}$ 是 $\mathcal{D}'$ 中的一个袋，这就完成了证明： $\mathcal{D}'$ 是 $(G-u,\ S)$ 的一个宽度至多为 y 的 x-划分路径分解。□

现在我们证明如下技术引理，它直接推出定理 8。

引理 23。 对于每棵具有 $t \geqslant 2$ 个顶点、半径为 h 且最大度为 d 的树 T，对于每个不包含 T^+ 作为子式的图 G，以及对于每个顶点 $u \in V(G)$，存在 $V(G)$ 的一个划分$\mathcal{P}$，其宽度至多为 $2(t-1)d$，使得 $\{u\} \in \mathcal{P}$，并且 $G/\mathcal{P}$ 具有一个宽度至多为 $4h-1$ 的树分解，使得每个包含 $\{u\}$ 的袋的大小至多为 $2h+1$。

证明。 该证明通过对 $|V(G)|$ 进行归纳法完成。基例 $|V(G)| = 1$ 是显然的。现在假设$|V(G)| > 1$。

现在进行归纳情形。若 G 不连通，我们可以对 G的每个连通分量应用归纳假设。因此，可以假设 G 是连通的。令 $S := N_G(u)$。若 $G-u$ 包含 T的一个以 S为根的模型，那么该模型与 $\{u\}$ 一起便会在 G中构成T^+的一个模型，这与假设矛盾。因此， $G-u$ 不含 T的以 S为根的模型；于是根据定理 18，存在一个$(2t-1)d$-划分路径分解$(G-u, S)$，其宽度至多为 $2h-1$。令 H、$\mathcal{P}_H$和 $\mathcal{D}_H$分别为 $G-u$的导出子图、 $V(G-u)$的划分，以及与该分解相关联的路径分解。为了证明方便，我们不把路径分解看作一列袋（如先前的证明中那样），而是将其视为树分解，其中作为分解索引的树是一条路径；记这条路径为 P。我们选择这样一个元组$(H, \mathcal{P}_H, \mathcal{D}_H, P)$，使 $|V(H)|$最小。令 C_1、C_2、.....、C_m为 $G-u-V(H)$的连通分量。根据假设，对每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，在 $\mathcal{D}_H$ 中都存在一个袋 B_i，使得 B_i 中的集合之并包含 $N_{G-u}(V(C_i))$，甚至

$N_G(V(C_i))$，因为 $N_G(u) \subseteq V(H)$。我们指出，对于 $i \neq j$， B_i 和 B_j 可能指的是同一个袋。

令 $i \in \{1, \ldots, m\}$。由 $|V(H)|$ 的极小性以及引理 22， $G - V(C_i)$ 是连通的。令 G'_i 为将 G 中由 $G - V(C_i)$ 诱导的连通子图收缩为一个顶点 u_i 后得到的图。因此， $V(G'_i) = V(C_i) \cup \{u_i\}$，且 G'_i 是 G 的一个子式，特别地，G'_i 不含 T^+ 子式。由于 G 连通且 $|V(G)| \geqslant 2$，可知 S 和 $V(H)$ 均非空，因此 $|V(G'_i)| < |V(G_i)|$。于是，由归纳假设，存在 $V(G'_i)$ 的一个划分 $\mathcal{P}_i$，其宽度至多为 $(2t-1)d$，且满足 $\{u_i\} \in \mathcal{P}_i$；并且 $G'_i/\mathcal{P}_i$ 有一个宽度至多为 $4h-1$ 、关联树为 Y_i 的树分解 $\mathcal{D}_i$，使得每个包含 $\{u_i\}$ 的袋大小至多为 $2h+1$。令 $\mathcal{D}'_i$ 为 G 中由 $V(C_i) \cup \bigcup_{Q \in B_i} Q$ 诱导的图的树分解，它由 $\mathcal{D}_i$ 得到：将每个包含 $\{u_i\}$ 的袋 B 替换为 $\big(B \setminus \big\{\{u_i\}\big\}\big) \cup B_i$。（树分解所关联的树保持不变。）对于 $\mathcal{D}'_i$ 的每个袋 W'，要么 W' 是 $\mathcal{D}_i$ 中的一个袋，因此其大小至多为 $4h$；要么 $W' = \big(W \setminus \big\{\{u_i\}\big\}\big) \cup B_i$，其中 W 是 $\mathcal{D}_i$ 的一个袋，且满足 $\{u_i\} \in W$。但此时，$|W| \leqslant 2h+1$，因此 $|W'| \leqslant (2h+1) - 1 + |B_i| \leqslant 4h$。于是，$\mathcal{D}'_i$ 的宽度至多为 $4h-1$。

现在定义 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_H \cup (\bigcup_{i=1}^m \mathcal{P}_i) \setminus \big(\bigcup_{i=1}^m \big\{\{u_i\}\big\}\big)$，并令 $\mathcal{D}$ 和 Y 分别为由以下方式从 $\mathcal{D}_H$、 P、$\mathcal{D}'_i$们和 Y_i们得到的$G/\mathcal{P}$的树分解，以及与 $\mathcal{D}$相关联的树：

(i) 将 $\{u\}$ 加入 $\mathcal{D}_H$的所有袋中。(ii) 对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，将 Y_i 中对应于一个包含$\{u_i\}$ 的 $\mathcal{D}_i$之袋的顶点，与 P 中对应的袋为 B_i的顶点相连。由此得到树 Y。

现在我们来证明 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有引理中所述的性质。根据构造， $\mathcal{P}$是 $V(G)$的一个划分，并且 $\{u\} \in \mathcal{P}$。

由于 $\mathcal{P}$的每个部分要么是 $\{u\}$，要么是 $\mathcal{P}_H$的一个部分，要么是某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$对应的 $\mathcal{P}_i$ 的一个部分，因此根据归纳法， $\mathcal{P}$ 的每个部分的大小至多为 $(2t-1)d$。

包含 $\{u\}$ 的 $\mathcal{D}$ 的所有包 W 都具有 $W = W_H \cup \big\{\{u\}\big\}$ 的形式，其中 W_H 是 $\mathcal{D}_H$ 的某个包，因此 $|W| \leqslant 2h+1$。 $\mathcal{D}$ 的其他每个包都是某个 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 的 $\mathcal{D}'_i$ 的包，因此其大小至多为 $4h$ ，因为 $\mathcal{D}'_i$ 的宽度至多为 $4h-1$。

$\mathcal{D}_H$ 与各个 $\mathcal{D}'_i$ 的分解中，可能同时出现在多个分解所对应的包里的 $\mathcal{P}$ 的部分，只有那些出现在 $\mathcal{D}_H$ 中的包。因此，容易根据构造验证：对于 $\mathcal{P}$ 的每个部分，对应于包含该部分的 $\mathcal{D}$ 的包的 Y 的顶点，在 Y 中诱导出一棵子树。因此， $\mathcal{D}$ 是 $G/\mathcal{P}$ 的一个树分解，正如所声称的那样。

这证明了 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有所需的性质，并由此完成了该引理的证明。□

5. 开放问题

我们给出的一些界尚不清楚是否为紧界：

（i）定理 $t-2$ 中膨胀里的团大小上界3 接近最优，但仍可能有小幅改进空间；正如引言中所解释的，我们目前只知道一个$\Omega(\binom{t}{h})$下界。（ii）定理 $(2t-1)\,d$ 中膨胀里的团大小上界8 很可能不是最优的。我们预计在这种情形下也应成立 $O(t)$ 上界。同样地，我们目前只知道一个 $\Omega(\binom{t}{h})$ 下界。

（iii）我们不知道定理 $4h-1$ 中的树宽上界8 是否最优，但正如引言中所提到的，我们知道它至少应为 $2h$。我们预计下界会更接近实际情况。

参考文献

[1] Daniel Bienstock、Neil Robertson、Paul D. Seymour 和 Robin Thomas。《快速排除森林》。组合理论杂志 B辑，52(2):274–283，1991。[2] Quentin Claus、Jędrzej Hodor、Gwenaël Joret 和 Pat Morin。《以尽可能快的速度排除顶点森林或扇》。arXiv 预印本，2026。arXiv:2602.03833。[3] Reinhard Diestel。《图小图 I：路径宽度定理的简短证明》。组合学、概率与计算，4(1):27–30，1995。[4]Vida Dujmović、Robert Hickingbotham、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Pat Morin 和 David R Wood。《重新审视排除树子式定理》。组合学、概率与计算，33(1):85–90，2024年。arXiv:2303.14970。[5] Vida Dujmović、Robert Hickingbotham、Jędrzej Hodor、Gwenaël Joret、Hoang La、Piotr Micek、Pat Morin、Clément Rambaud 和 David R. Wood。《重新审视网格小图子定理》。组合学，45(62)，2025。arXiv:2307.02816。[6] Vida Dujmović、Gwenaël Joret、Piotr Micek 和 Pat Morin。《树子式的 Erdős–Pósa 性质的紧界》。组合学、概率与计算，34(2):321–325，2025。arXiv:2403.06370。[7] Jędrzej Hodor、Hoang La、Piotr Micek 和 Clément Rambaud。《快速排除顶点森林》。SIAM离散数学杂志，40(1):282–307，2026。arXiv:2404.17306。[8] Alexander Leaf 和 Paul D. Seymour。《树宽与平面子式》。组合理论杂志 B辑，111:38–53，2015。[9] Chun-Hung Liu 和 Youngho Yoo。《排除顶点森林或轮作为子式的图的树宽》。arXiv 预印本，2025。arXiv:2509.09895。[10] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。《图小图 I：排除森林》。组合理论杂志 B辑，35(1):39–61，1983。[11] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。《图小图 V：排除平面图》。组合理论杂志 B辑，41(1):92–114，1986。[12] Paul D. Seymour 和 Robin Thomas。《图搜索与树宽的极小极大定理》。组合理论杂志 B辑，58(1):22–33，1993。

附录 A. 定理的简短证明5

我们再次强调，这个简短证明在很大程度上基于 [8]，中的证明，尤其是该文中的命题 4.3 和 4.4 的证明：它实质上是这些证明的副本，只删去了一些部分，并做了一些简单的调整。为凸显相似之处，我们选择尽可能贴近 [8] 中的表述方式。

首先，我们需要回顾一些定义。对于 $k\in\mathbb{N}$，图 G 中的一个阶为 k 的纠缠族，是由 G的非空连通子图组成的集合$\mathcal{B}$，满足：(i) 任意两个成员 B_1、$B_2\in\mathcal{B}$ 相接触，也就是说，或者 $V(B_1)\cap V(B_2)\neq\emptyset$，或者 G 中有一条边，其一端位于 $V(B_1)$中，另一端位于 $V(B_2)$中；(ii) 对于每个满足 $|X|<k$的 $X\subseteq V(G)$，都存在 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $X\cap V(B)=\emptyset$。文献 [12] 证明，对于每个正整数 k，图的树宽至少为 $k-1$ 当且仅当它有一个阶为 k的纠缠族。

G 的一个分离是 $V(G)$的两个子集组成的有序对 (A, B)，满足 $A \cup B = V(G)$，且 G 的每条边要么包含在 A 中，要么包含在 B中。(A, B)的阶为 $|A \cap B|$。对于X，若 $Y \subseteq V(G)$，则一条 X–Y路径是 G 中的一条路径，它要么是一条顶点属于$X \cap Y$ 的单顶点路径，要么是一条路径，其一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中，且没有内部顶点属于 $X \cup Y$。

如果 (A, B) 是 G 的一个分离，我们称 (A, B) 左包含一个 H 的模型 $\{W_v \subseteq V(G) \mid v \in V(H)\}$，若对于每个 $v \in V(H)$，$W_v \subseteq A$ 和 $|W_v \cap A \cap B| = 1$，都有 $|A \cap B| = |V(H)|$。如果存在这样的模型，我们称 (A, B) 左包含 H。

我们还需要门格尔定理：

定理 24 (门格尔定理). 设 G 是一个图，且 $X, Y \subseteq V(G)$。存在一个 G 的分离 (A, B)，使得 $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$，并且存在 $|A \cap B|$ 两两不相交的 X–Y 路径。

我们将证明以下引理，它可直接推出定理 5 （令 $G[B] - A$作为顶点）：

引理 25. 设 $w \geqslant 1$ 为整数，T 为一棵具有 $|V(T)| = w$的树，G 为一个树宽至少为 w的图。那么 G 存在一个分离 (A, B)，使得

(i) $|A \cap B| = w$，(ii) $G[B] - A$ 是连通的，且 $B \cap A$ 中的每个顶点都有一个邻居属于 $B \setminus A$，并且(iii) (A, B) 左包含 T。

证明。取 T的一个顶点 t_1，并将其余顶点 $t_2, \ldots, t_w$ 编号，使得对于 $2 \leqslant i \leqslant w$，$t_i$与 $t_1, \ldots, t_{i-1}$中的一个相邻。对于 $1 \leqslant i \leqslant w$，令 T_i 为由 $t_1, \ldots, t_i$在 T中诱导出的子树。现在设 G 为一个树宽至少为 w的图；我们知道它有一个阶至少为 $w + 1$的纠缠族 $\mathcal{B}$。取极大的 $\mathcal{B}$；因此，若 C 是 G 的一个连通子图，且包含 $\mathcal{B}$的一个成员，那么 $C \in \mathcal{B}$ （否则可将其加入 $\mathcal{B}$，与极大性矛盾）。因此，对于每个满足 $|X| \leqslant w$的 $X \subseteq V$（G），$G - X$ 中恰有一个连通分支属于 $\mathcal{B}$；记其顶点集为 β（X）。

选择 $v \in \beta(\emptyset)$；那么 $\beta(\{v\}) \subseteq \beta(\emptyset)$，而分离 $(V(G) \setminus (\beta(\emptyset) \setminus \{v\})\ \beta(\emptyset))$ 的左侧包含 T_1。因此，我们可以选择 G 的一个分离 (A, B)，使其满足以下性质：

(i) (A, B) 的阶至少为一，且至多为 w；设其阶为 k，其中 $1 \leqslant k \leqslant w$；**(ii)** (A, B) 的左侧包含 T_k；**(iii)** $\beta(A \cap B) \subseteq B$；**(iv)** G 不存在阶严格小于 k 的分离 (A', B')，满足 $A \subseteq A'$ 和 $B' \subseteq B$，且 $\beta(A' \cap B') \subseteq B'$**(v)**。在这些条件下，$|A| - |B|$ 取最大值。

断言。 G 不存在一个阶为 k 的分离（A', B'），满足 $A \subseteq A'$、$B' \subseteq B$，且 $\neq$（A', B'），其中 β（$A' \cap B'$） $\subseteq B'$。

该断言的证明。假设存在这样的分离（A', B'）。由（A, B）的最优性可知，（A', B'）不左包含 T_k。因此，不存在 k 个顶点不相交的（$A \cap B$）–（$A' \cap B'$）路径；根据门格尔定理，存在一个阶小于 k 的分离（C, D），其中 $A \subseteq C$且 $B' \subseteq D$。由于 β（$C \cap D$）与 β（$A' \cap B'$）相交，且 β（$A' \cap B'$） $\subseteq B' \subseteq D$，因此可知 β（$C \cap D$） $\subseteq D$。但这与上面的第四个条件矛盾。$\Diamond$

断言。 $G[B] - A$ 是连通的，并且 $B \cap A$ 的每个顶点在 $B \setminus A$中都有一个邻居 .

该断言的证明。现在， $\beta(A \cap B) \subseteq B \setminus A$，因此是 $G[B] - A$ 的一个连通分量的顶点集。令 $D := (A \cap B) \cup \beta(A \cap B)$，并令 $C := V(G) \setminus \beta(A \cap B)$；那么 (C, D) 是 G 的一个分离，满足上述前四个条件。由 (A, B) 的最优性可知，$(A, B) = (C, D)$，尤其是 $\beta(A \cap B) = B \setminus A$。这就证明了第一个断言。

对于第二个断言，假设某个顶点 $v \in A \cap B$ 在 $B \setminus A$ 中没有邻居。那么 $(A, B - \{v\})$ 是一个分离；由于 $\beta(A \cap (B \setminus \{v\}))$ 与 $\beta(A \cap B)$ 相接，因此包含于 $B \setminus \{v\}$ 中，这与上述第四个条件矛盾。◊

断言。 $k = w$

断言的证明。反设 $k < w$。设 $\{W_j \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是 A中 T_k的一个模型，其中对每个 $j \in \{1, \ldots, k\}$， W_j是 t_j的分支集，并且包含 $A \cap B$的唯一一个顶点v_j。设 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 满足 t_{k+1}在 T中与 t_i相邻。由第二个断言， v_i 在 $B \setminus A$中有一个邻居，记为 v_{k+1}。令 $A' := A \cup \{v_{k+1}\}$；则(A', B)是 G的一个分离，并且其左侧包含 T_{k+1}（及模型 $\{W_j \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{\{v_{k+1}\}\}$）。此外，由于 $\beta(A' \cap B)$ 与 $\beta(A \cap B)$ 相接，它是 B的子集；而(A', B)满足上文的第四个条件，这是由第一个断言可知的。但这与(A, B)的最优性矛盾，因而证明了该断言。◊

引理的证明至此结束。 □