arXiv:2603.16674v1 [math.GR] 17 Mar 2026

自由积与自由因子的有限群检测

ANDREI JAIKIN-ZAPIRAIN、HENRIQUE SOUZA 和 PAVEL ZALESSKI

Abstract. 设 G 是一个由有限生成几乎自由群构成、边群为几乎循环群的图的基本群。我们证明，若 G 是剩余有限的，则 G 上同调良好。若 G 具有局部扩张可分性（LERF），我们证明，$G\widehat{}$非平凡地分解为自由积，当且仅当其有限群完备化 G非平凡地分解为自由有限群积。此外，我们能够从 $\widehat{G}$检测出 G的单端自由因子。作为应用，我们推导出，有限生成自由群中的任何有限群意义下刚性的词都是普遍有限剩余刚性的。

1. Introduction

现代无限群论的一个核心主题是：一个群的有限商群在多大程度上能够决定其代数结构。此类问题俗称有限剩余刚性问题或有限生成检测问题，探讨有限生成剩余有限群 G 的哪些性质可以从其有限群完备化 G中恢复。在此背景下，最强的问题莫过于：给定两个有限生成的剩余有限群 G 和 H ，若它们的有限群完备化 G 和 H 同构，是否必然有 G和 H 本身同构?

满足这一性质的群称为在绝对意义上有限剩余刚性的。超越阿贝尔群的范畴后，已知在绝对意义上有限剩余刚性的群寥寥无几，近期的一些已知例子来自三维双曲几何（[BMRS20, BMRS21]）、某些灯笼群（[Bla25]）以及自由后阿贝尔群（[Wyk25]）。由 Remeslennikov 提出的一个重要公开问题是：自由群是否在绝对意义上有限剩余刚性（[LJ83, 问题 5.48]）。一种较弱的概念是相对前有限$\widehat{}$刚性，即考察有限群完备化 G是否能确定 G 在某一类 $\mathcal{C}$ 有限生成剩余有限群中的同构类。Wilton 在这一方向上取得了一项重要成果（[Wil18]）：他证明，自由群在由带有循环边群的自由群图的双曲基本群构成的类中是刚性的。后来，Morales 在 [Mor24] 中去掉了双曲性假设。

近年来，人们开始关注两个更广泛的问题。我们称有限群完备化在 $\mathcal{C}$ 中能够检测自由积，如果每个有限生成的剩余$\widehat{}$有限群 $G \in \mathcal{C}$ ，其有限群完备化 G 分解为非平凡的自由$\widehat{}$前有限积 $G = L \amalg K$ ，也能非平凡地分解为自由积 $G = H * U$。我们称有限群完备化在 $\mathcal{C}$中能够检测自由因子，如果对于每个有限生成的剩余有限群 G 及其有限生成子群 $H \leq G$ ，只要$\widehat{}$满足 $G \simeq H \amalg K$，就存在一个子群 $U \leq G$ 使得 $G \simeq H * U$。

这两种性质彼此相关，但我们没有理由相信其中一种会蕴含另一种。已知在几乎自由群这一类中，有限群完备化能够检测自由积（[dBPZ24]）和自由因子（[GJ23]）。在这

Date：2026年3月18日。

篇论文中，我们将考察虚拟循环边群的几乎自由群图的基本群这一类中的这些性质，以下记作 $\mathcal{C}$。

如果每个有限生成子群在有限群拓扑中都是闭的，则称一个群为 局部扩张可分（*locally extended residually finite*，或称 子群可分）。等价地，G 是局部扩张可分的，若对于任意 $H \leq G$ 有限生成以及任意 $x \notin H$，都存在一个有限指数子群 $N \leq G$，它包含 H 但不包含 x。如果 G 是局部扩张可分的，那么 G 的有限群拓扑在其每个有限生成子群上诱导出有限群拓扑（[Rib17，引理 11.1.4]）。本文的主要结果是：在局部扩张可分条件下，有限群完备化能够在 $\mathcal{C}$中检测自由积。

定理 1.1. 设 G 是一个有限生成的局部扩张可分群，它可分解为一个虚自由群图的基本群，其中边群是几乎循环的。若 G 可分解为一个非平凡自由有限群积，则 G 可分解为一个非平凡自由积。

目前，我们尚不清楚定理 1.1 中的局部扩张可分条件是否必要，或者它能否由剩余有限性条件替代。我们还得到如下推论：

推论 1.2。 设 $G = F_1 *_{c_1=c_2} F_2$ 是两个自由群沿非平凡真循环子群 $\langle c_i \rangle < F_i$ 合并而成的自由积。若 $G = L \amalg K$ 非平凡地分裂为一个自由有限群积，则其中一个 F_i 非平凡地分裂为一个自由积 $F_i = H_i * K_i$，使得 $c_i \in H_i$。

定理 1.1 的证明的主要组成部分之一，是对几乎自由群的一个 Kurosh 型分解的证明。

定理 1.3。 设 G 是一个有限生成几乎自由群，并假设 $\prec G \leq P = L \amalg K$。则

$$G \simeq \left(\underset{g \in L\backslash P/G}{*} G \cap {}^{g}L \right) * \left(\underset{h \in K\backslash P/G}{*} G \cap {}^{h}K \right) * F$$

其中，F 是 G的自由子群。

关于自由因子的检测问题，我们可以证明以下结论。

定理 1.4. 设 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 是一个带有虚拟循环边群的几乎自由群图的基本群。假设 G 是有限生成且具有局部扩张可分性。设 H 是 G 的有限生成子群，并进一步假设满足以下任一条件：

(1) H 至多有一个端，或 *(2)* $H \leq {}^{g}\mathcal{G}(v)$ 包含于某个顶点群的 G-共轭中。

若 H 是 G的自由有限群因子，则 H 是 G的自由因子。

我们得到的另一项结果也有独立意义，它涉及具有上同调良好（或上同调可分）这一性质；也就是说，若 A 是有限G-模，则上同调上的限制映射

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{ct}}(\widehat{G}, A) \to \mathrm{H}^*(G, A)$$

在每个次数上都是同构。有限生成局部可扩张剩余有限群 G from $\mathcal{C}$ 的有限群完备化具有非常清晰的结构：它是由 G的顶点群和边群的有限群完备化所给出的诱导有限拟群图的有限群基本群。这意味着它们是上同调良好的（例如参见 [GJZZ08，定理 3.9]）。我们将这一结果推广到类 $\mathcal{C}$中的有限生成剩余有限群。

定理 1.5。令 G为一个具有虚拟循环边群的几乎自由群图的基本群。若 G有限生成且剩余有限，$\widehat{}$则 G 是上同调良好的。特别地，若 G不是几乎自由群，则 G具有虚上同调维数 *2*。

根据 Cohen 和 Wykowski 的结果（[CW24]），当 G 是循环群有限图的基本群时，这一结果此前已为人所知。

我们还介绍了定理 1.3 在自由群中字的有限群性质方面的一项应用。沿用 Hanani、Meiri 和 Puder（[HMP20，定义 1.3]）的说法，如果有限生成自由群 F 中的一个字 w 满足：$\widehat{}$任何其他属于 w 的同一 Aut(F)-轨道的字 $u \in F$ 也属于同一 Aut(F)-轨道（等价描述见第 6 节），那么我们称该字是有限剩余刚性的。如果一个有限剩余刚性的字$w \in F$ 在 F 的任意自由扩张$F * H$ 中都具有有限剩余刚性，其中 H 是另一个有限生成自由群，则称其为普遍有限剩余刚性的。

人们曾猜想，本原词——即生成 F 的一个自由因子的词——具有有限剩余刚性；Puder 和 Parzanchesvki 在 [PP14] 中证实了这一点，并证明它们还具有普遍有限剩余刚性。Wilton 在 [Wil18] 中给出了另一种证明。后来，[HMP20] 证明，如果 $w \in F$ 具有有限剩余刚性，那么对于每个 $d \in \mathbb{Z}$，w^d 也具有有限剩余刚性；他们还证明，F 的一个基中的两个元素的基本交换子 $[x, y]$ 具有有限剩余刚性。在 [Wil21], 中，他们证明曲面字 $x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$ 和 $[x_1, x_2] \cdots [x_{2g-1}, x_{2g}]$ 分别在 F_n 和 F_{2g} 中具有有限剩余刚性。我们证明，有限剩余刚性与普遍有限剩余刚性这两个概念是等价的：

定理 1.6。设 F 是一个有限生成自由群，且 $w \in F$。那么，w 在 F 中有限剩余刚性，当且仅当对于每个有限生成自由群 H，它在 $F * H$ 中有限剩余刚性。

显然，任何非平凡元素在秩一自由群中都是有限剩余刚性的，因此定理 1.6 特别蕴含本原词的幂的有限剩余刚性。

最后，我们介绍本文的结构。我们在第 2 节汇集了全文所需的关于类 $\mathcal{C}$、抽象与前有限 Bass–Serre 理论、小取消群以及完备群代数的重要结果。在第 3 节，我们描述了 $\mathcal{C}$ 中按群图分裂且只有一个顶点的群的有限群完备化 G，并证明引理 1.5。我们还提出一个关于某些单关系群的有限群完备化的猜想，该猜想与 Remeslennikov 问题有关（见猜想 1）。

第4节的核心是引理 1.3 的证明，而第5节的核心是证明引理 1.1 的一个稍强版本，由此也可轻易推出引理 1.4 和引理 1.2。第 6 节阐述并证明了关于群字有限剩余刚性的应用，即引理 1.6。最后，我们在第7节讨论这些结果可能推广到 $\mathcal{L}$ 极限群类的情形。

致谢。我们感谢 Henry Wilton 就本主题进行的有益讨论。我们也感谢 Macarena Arenas 提供有关小消去群的参考文献，并感谢 Ashot Minasyan 提供有关单端单关系群的参考文献。

第一作者和第三作者谨此感谢剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所在“算子、图、群”项目期间给予的支持与接待，本文的相关工作即在此期间完成。本研究获得英国工程与自然科学研究委员会项目编号 EP/Z000580/1 以及西蒙斯基金会项目 SFI-MPS-T-Institutes-00006117 的资助。第一作者和第二作者的工作部分获得西班牙科学、创新与大学部项目 PID2020-114032GB-I00 的资助

；第三作者的工作获得 FAPDF 和 CNPq 的资助。

2. Preliminaries

2.1. 记号。两个集合 A 和 B 的不交并记作 $A \sqcup B$。对于两个群元素 g，$h \in G$，共轭作用是左作用：${}^g h = ghg^{-1}$。如果 G 是一个有限拟群，且 H 是 G 的闭子群，那么指数 $[G\colon H]$ 是一个超自然数，即一个形式乘积 $\prod p^{a_p}$，其中遍历所有满足 $a_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ([Rib17，第 2.3] 节）的素数 p。闭子群是开子群，当且仅当$[G\colon H]$是一个自然数，也就是说，对于所有 p，$a_p \in \mathbb{Z}$，且几乎所有 a_p 都为零。有限拟群 G 的阶是超自然数 $|G| = [G\colon \{1\}]$。

我们将两个群 H 和 U 的（抽象）自由积记为 $H * U$，并将两个有限拟群 L 和 K 的自由有限群积记为 $H \amalg K$。关于自由有限群积的定义及其基本性质，读者可参阅 [RZ10，第 9] 章。如果 G 是一个抽象群，我们用 $G = \varprojlim_{N \trianglelefteq_{f.i.} G} G/N$ 表示其有限群完备化，其中逆极限取遍所有满足指数 $[G\colon N]$ 为有限的正规子群 $N \trianglelefteq G$。

若 G 是一个抽象（分别地，有限拟）群，我们用 $\mathrm{H}^i(G,\ A)$（分别地，$\mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(G,\ A)$）表示 G-模（分别地，离散 G-模） A的第 i个上同调群（分别地，第 i个连续上同调群）。如果对于每个 $i > n$ 以及每个 p-主 G-模（分别地，p-主离散G-模） M，$\mathrm{H}^i(G,\ A)$（分别地，$\mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(G,\ A)$）都消失，我们就称 $\mathrm{cd}_p(G) \leq n$。

我们用 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的域。若 X 是任意集合，且 R 是交换含幺环，则 $R[X]$ 表示以 X 为基的自由 R-模。对于任意群 G（分别地，G-集 X），$R[G]$（分别地，$R[X]$）自然具有 R-代数（分别地，$R[X]$-模）的结构，称为 G 在 R 上的群代数。若 G 是有限拟群，则 G 在 $\mathbb{F}_p$ 上的完备群代数是有限环 $\mathbb{F}_p[\![G]\!] = \varprojlim_{U \trianglelefteq_o G} \mathbb{F}_p[G/U]$，其中 U 遍历 G 的开子群。若有限拟群 G 连续作用于有限集 $X = \varprojlim X_i$，其中每个 X_i 都是有限 G-集，则我们用 $\mathbb{F}_p[\![X]\!]$ 表示 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$-模 $\varprojlim \mathbb{F}_p[X_i]$。对于任意 G-模 M，我们用 M^G 表示其 G-不动点子模。

若 $\epsilon\colon A \to R$ 是带增广的 R-代数 A 的增广映射，我们将其核 $\ker \epsilon$ 记作 I_A，称为 A 的增广理想。众所周知，$\mathbb{F}_p[G]$（分别为 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$）的增广理想作为理想由元素 $x_i - 1$ 生成（分别由元素 $x_i - 1$ 在拓扑意义下生成），其中 $\{x_i\}$ 是 G 的任意生成集（分别为拓扑生成集）。若 H 是 G 的子群，且 M 是左 $\mathbb{F}_p[H]$-模，我们将诱导左 $\mathbb{F}_p[G]$-模 $\mathbb{F}_p[G] \otimes_{\mathbb{F}_p[H]} M$ 记作 ${}^G M$。当 G、H 和 M 都是前有限群时，$\widehat{{}^G M}$ 表示前有限诱导模 $\mathbb{F}_p[\![G]\!] \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[\![H]\!]} M$，其中 $\widehat{\otimes}$ 表示完备张量积（ [RZ10，第 5.5] 节）。

若 F 是以 x_1、.....、x_d 为基的自由群，且 $a \in F$ 是任意一个字，则 *Fox* 导数 $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ 表示 $\mathbb{Z}[F]$ 中满足下式的唯一元素

$$a - 1 = \frac{\partial a}{\partial x_1}(x_1 - 1) + \cdots + \frac{\partial a}{\partial x_d}(x_d - 1)\,.$$

2.2. 群图的基本群。A 图 $Y = V(Y) \sqcup E(Y)$ 是一个集合 $V = V(Y)$ 顶点与一个集合 $E = E(Y)$ 边的不交并，并配有两个映射 $i,\ t\colon E \to V$，它们将每条边 $e \in E$ 分别关联到其初始$i(e)$顶点和终止 $t(e)$顶点。允许存在环 $i(e) = t(e)$。换言之，我们考察有向多重图。我们称 Y 是连通的，如果它作为无向多重图是连通的。树是没有无向圈的连通图。根据佐恩引理，每个连通图都有一个极大子树。

一个群图$(Y, \mathcal{G})$由一个图 Y、顶点群 $\{\mathcal{G}(v)\colon\ v \in V(Y)\}$ 和边群 $\{\mathcal{G}(e)\colon\ e \in E(Y)\}$ 组成，并且对每条边 $e \in E(Y)$，还配有两个同态i_e，$t_e\colon\ \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(i(e))$ $\mathcal{G}(t(e))$。如果所有同态i_e，t_e 都是单射的，则称该群图是忠实的。我们将只考虑忠实的群图。

给定一个连通群图 $(Y, \mathcal{G})$ 以及 Y 的一棵极大子树 T，相对于 T，$(Y, \mathcal{G})$ 的基本群 $G = \pi(Y, \mathcal{G}, T)$ 是具有以下表示的群：

- 生成元 $\{\mathcal{G}(v)\ \ q_e\colon\ v \in V(Y)\ \ e \in E(Y)\}$；
- 每个顶点 $v \in V(Y)$ 对应的 $\mathcal{G}(v)$ 的关系；
- 每个 $e \in E(Y)$ 和 $g \in \mathcal{G}(e)$ 对应的关系 ${}^{q_e}i_e(g) = q_e i_e(g)\, q_e^{-1} = t_e(g)$；
- 每个 $e \in T$ 对应的关系 $q_e = 1$。

Bass–Serre 理论的早期结果之一（见 [DD89，第 I.7] 节）指出，任何其他极大子树都会给出一个同构的基本群。因此，$\pi(Y, \mathcal{G})$ 在同构意义下是良定义的。另一结果（[DD89，推论 I.7.5]）指出，若 $(Y, \mathcal{G})$ 连通且忠实，则典范映射 $\mathcal{G}(v) \to \pi(Y, \mathcal{G})$ 是单射，因此我们可以将每个 $\mathcal{G}(v)$ 与其像等同。

设 G 忠实地作用于一棵树 X 上，并设 $S \subset X$ 是 G-作用的一个连通横截集。这是 X 的一个子集（一般而言不是子图），与 G/X一一对应；其中任意两个顶点都由 S 中的一条路径连接，并且对每条边 $e \in S$都有$i(e) \in S$。对于每条边 $e \in S$，S 中恰有一个顶点与 $t(e)$ 位于同一个 G-轨道中，因此我们选取 $q_e \in G$ 使得 $q_e \cdot t(e) \in S$；若 $t(e) \in S$，则取$q_e = 1$。集合 $(q_e\colon\ e \in E(Y) \cap S)$ 是S的一个连接族。对于每个 $s \in S$，记其在 G中的稳定子为 G_s。注意，$G_{q_e \cdot t(e)} = {}^{q_e}G_{t_e}$，并且对每条边 $e \in S$，都有 $G_e = G_{i(e)} \cap G_{t(e)} = G_{i(e)} \cap {}^{q_e^{-1}}G_{q_e \cdot t(e)}$，因此${}^{q_e}G_e \le G_{q_e \cdot t(e)}$。这些正是群图基本群定义中出现的共轭关系。

Bass–Serre 理论的结构定理表明，$G \simeq \pi(G/X, \mathcal{G})$，其中$\mathcal{G}(s) = G_s$对于 $s \in S$和 i_e，$t_e\colon\ \mathcal{G}(e) \to \mathcal{G}(i(e))$ $\mathcal{G}(q_e \cdot t(e))$分别由 $g \mapsto g$，${}^{q_e}g$给出。此外，同构 $\varphi\colon\ \pi(G/X, \mathcal{G}) \to G$由包含映射 $\mathcal{G}(v) \to G$ 和 $q_e \mapsto q_e$ 定义，其中每个顶点 v 和每条边 e均如此。

设 X 是一个具有有限边稳定子的 G-树。若 e 是 X 的一条边，则称其为可压缩的，如果 e中的两个顶点不属于同一个 G-轨道，并且对于 e的至少一个顶点 v，有 $G_v = G_e$。否则，称边 e 为不可压缩的。如果 G-树 X 的所有边都是不可压缩的，则称其为不可压缩的（另一定义见 [DD89，引理 III.7.2]）。

2.3. 导子。 设 G 是一个群，A 是一个 G-模。导子 是一个映射$d\colon\ G \to A$，满足

$$d(gh) = d(g) + g \cdot d(h) \quad \text{for all } g, h \in G.$$

若存在一个元素 $a \in A$ 使得 d，则称导子 d 为内的

$$d(g) = (g - 1) \cdot a \quad \text{for all } g \in G.$$

从 G 到 A 的导子集合记作 $\mathrm{C}^1(G, A)$，内导子集合记作 $\mathrm{B}^1(G, A)$。我们可以将商 $\mathrm{C}^1(G, A)/\mathrm{B}^1(G, A)$与第一上同调群 $\mathrm{H}^1(G, A)$等同起来。

直接应用定义即可得到以下引理。

引理 2.1. 设 $d\colon\ G \to A$ 是从群 G 到 G-模 A的导子，并设 $h \in G$。若对于某个 $a \in A$，有 $d(h) = (h - 1)a$，则

$$d({}^g h) = ({}^g h - 1) \cdot (ga - d(g)).$$

因此，若 d 限制在子群$H \leq G$上时是内导子，那么 d 限制在 H的任意 G-共轭上时也是内导子。特别地，这适用于 $H = \ker d = \{g \in G\colon\ d(g) = 0\}$。我们还将用到 Dicks 和 Dunwoody 的以下定理（[DD89，推论 IV.2.8 和注记 IV.2.9]）：

定理 2.2. 若 $d\colon G \to P$ 是到投射的 $\mathbb{F}_p[G]$-模 P 的导子，则存在一棵 G-树 X，其边稳定子有限，并且子群 $H \leq G$ 稳定一个顶点，当且仅当 d 在 H 上的限制是内的。特别地，若 G 无挠，则这刻画了 H 是一个自由因子。

2.4.**有限拟群图的有限群基本群**。给定有限有限群群图 $(Y, \mathcal{G})$，其有限群基本群$\widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 定义为一个有限拟群，它与该图的抽象对应对象 $\pi(Y, \mathcal{G})$ 具有相同的生成元和关系（参见 [Rib17，第 6.2] 节）。这与抽象情形有一个重要区别：在有限拟群情形下，典范同态 $\mathcal{G}(v) \to \widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 一般并非嵌入，但总可以将它们替换为在 $\widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 中的像，此时嵌入便成立。从现在起，我们假设顶点子群 $\mathcal{G}(v)$ 嵌入 $\widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 中。若所有顶点子群均为有限生成，则 $\widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 同构于 $\pi(Y, \mathcal{G})$ 的有限群完备化。

给定有限廖群图的有限群基本群 $G = \pi_1(Y, \mathcal{G})$，根据 [Rib17, Thm. 6.5.2]，我们有如下左 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$-模的正合序列：

$$0 \to \bigoplus_{e \in E(Y)} \mathbb{F}_p[\![G/\mathcal{G}(e)]\!] \to \bigoplus_{v \in V(Y)} \mathbb{F}_p[\![G/\mathcal{G}(v)]\!] \to \mathbb{F}_p \to 0\,. \tag{1}$$

对于连续的 G-模 M，存在与 $(Y, \mathcal{G})$ 相关联的 Mayer-Vietoris 序列（见 [Wil24, Thm. 8.4.7]）：

$$\cdots \to \mathrm{H}^n_{\mathrm{ct}}(G, M) \to \bigoplus_{v \in V(Y)} \mathrm{H}^n_{\mathrm{ct}}(\mathcal{G}(v), M) \to \bigoplus_{e \in E(Y)} \mathrm{H}^n_{\mathrm{ct}}(\mathcal{G}(e), M) \to \mathrm{H}^{n+1}_{\mathrm{ct}}(G, M) \to \cdots \tag{2}$$

设 $(Y, \mathcal{G})$ 是一个抽象群图，并假设 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 是剩余有限的。记 $(Y, \mathcal{G})$ 为群图，其中 $\mathcal{G}(x) = \overline{\mathcal{G}(x)}$ 是 G 中 $\mathcal{G}(x)$ 的闭包 $\widehat{\ }$。如果所有顶点子群和边子群 $\mathcal{G}(x)$ 都是有限生成的，那么我们有

$$\widehat{\pi}(Y, \overline{\mathcal{G}}) \simeq \widehat{\pi(Y, \mathcal{G})}\,.$$

如果抽象群图 $(Y, \mathcal{G})$ 中每个顶点群和边群 $\mathcal{G}(x)$ 在 $\pi(Y, \mathcal{G})$ 的有限群拓扑下都是闭的，并且该拓扑在每个 $\mathcal{G}(x)$ 上诱导出完整的有限群拓扑，那么我们称该群图是有效的 。例如，如果$\pi(Y, \mathcal{G})$ 是局部扩张可分的，Y 是有限的，且所有顶点子群和边子群 $\mathcal{G}(x)$ 都是有限生成的，就会出现这种情况。

有限有限群群图的有限群基本群最简单的例子是自由有限群积：如果所有边群都是平凡的，那么基本群就是顶点群与一个自由有限子群的自由有限群积。我们将需要以下引理。

引理 2.3 ([RZ10, 命题 9.1。12])。设 G_1、.....、G_n 是有限拟群，且 $G = G_1 \amalg \cdots \amalg G_n$ 是它们的自由有限群积。那么 $G_i \cap {}^g G_i = \{1\}$ 对每个$x \in G \setminus G_i$都成立。

引理 2.4。设 $P = K \amalg L$ 是一个自由有限群积。

(i) $\widehat{I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]}} \simeq {}^P\widehat{I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}} \oplus {}^P\widehat{I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}}$ *(ii)* 设 $U \leq P$ 是一个几乎前循环群。若 $U \cap K$ 是无限的，则 $U \leq K$。

证明。 (i) 对于自由有限群积的情形，正合序列 (1) 具有如下形式：

$$0 \to \mathbb{F}_p[\![P]\!] \to \mathbb{F}_p[\![P/K]\!] \oplus \mathbb{F}_p[\![P/L]\!] \to \mathbb{F}_p \to 0\,.$$

因此，$I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]} \simeq {}^P I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]} \oplus {}^P I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}$。

(ii) 由于 $U \cap K$ 是无限的，它包含一个非平凡的无限正规原循环有限群子群 $M \trianglelefteq U$。然而，根据 [Rib17，推论 7.1.5(a)]，正规化子 $N_P(M)$ 是 K 的子群。这就完成了证明。□

引理 2.5。设 p 是一个素数，且 $P = \widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$ 是一个有限有限群群图的有限群基本群。设 U 是 P 的无挠闭子群，并假设

(1) $\mathrm{cd}_p({}^gU \cap \mathcal{G}(e)) = 0$ 对所有边 e 及每个 $g \in P$ 均成立；
(2) $\mathrm{cd}_p({}^gU \cap \mathcal{G}(v)) \leq 1$ 对所有顶点 v 及每个 $g \in P$ 均成立。
那么 $\mathrm{cd}_p(U) \leq 1$。

证明。 这是 [Rib17，推论 9.3.2]的主题。 □

2.5. **类 $\mathcal{C}$**。 本文中，$\mathcal{C}$ 表示边群为几乎循环边群的几乎自由群图的基本群所构成的类。注意，$\mathcal{C}$ 在取子群和自由积下封闭。此外，$\mathcal{C}$ 中的无挠子群是边群为循环群的自由群图的基本群。

若 G 属于 $\mathcal{C}$ 且为有限生成，则它也是一个有限生成虚自由群图的基本群，其中该图为有限图且边群为几乎循环边群。事实上，设 X 是一棵忠实的 G-树，其顶点稳定子为几乎自由群，边稳定子为几乎循环群。任一顶点的 G-轨道的凸包 X' 是 X 的一棵 G-不变子树，且 $Y = G/X'$ 是有限的。由于 G作用的边稳定子是几乎循环的，它们的 ℓ^2-Betti 数为零。若 S 是 X'上 G作用的一个连通横截集，则由 [CHK21，定理 1.5], ，我们有

$$\begin{aligned} b_1^{(2)}(G) + \sum_{v \in V(X') \cap S} \frac{1}{G_v} &= \sum_{v \in V(X') \cap S} b_1^{(2)}(G_v) + \sum_{e \in E(X') \cap S} \frac{1}{|G_e|} + \frac{1}{|G|} \\ &\geq \sum_{v \in V(X') \cap S} b_1^{(2)}(G_v)\,. \end{aligned}$$

因此，所有群 G_v 都是有限生成的，并且与 G 在 X' 上的作用相对应的群图就是所需的分解。

2.6. **类 $\mathcal{C}$ 中的剩余有限性与 LERF 性**。 我们先证明，类 $\mathcal{C}$ 中的剩余有限群含有一个无挠子群，该子群将是一个具有自由顶点群和循环边群的群图的基本群。

引理 2.6。设 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 是一个由虚有限生成自由群构成的有限群图的基本群，其边群为虚拟循环边群。若 G 是剩余有限的，则它是虚无挠的。

证明。 每个顶点群 $\mathcal{G}(v)$ 都可以写成一个有限群的有限图的基本群。令$x_{v,i}$ 表示该分解中所有有限顶点群里的元素。由于 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 是剩余有限的，因此存在一个有限指数正规子群 $N \trianglelefteq G$，使得所有元素 $x_{v,i}$ 模 N 仍然两两不同。

考虑 N 在与 $(Y,\ \mathcal{G})$ 相关联的 Bass—Serre 树上的作用。该作用为 N 定义了一个群图分解，其边群为虚拟循环群，顶点群具有 $N \cap {}^g\mathcal{G}(v)$ 的形式，其中 $g \in G$ 是某个元素。每个这样的顶点群都是共轭 ${}^g\mathcal{G}(v)$ 的正规子群，并且与该共轭中的有限

顶点群的交为平凡的，因为根据 N 的选取，相应的元素已被避开。

由此可知， $N \cap {}^{g}\mathcal{G}(v)$无挠，因此是一个自由群。因此，$N$ 是一个由有限生成自由群构成、边群为循环群的有限图的基本群，并且无挠。□

关于由有限生成自由群构成、边群为循环群的图的基本群何时是剩余有限的刻画，近期已在 [AM24]中建立。回忆一下，鲍姆斯拉格–索利塔尔群

$$BS(n,m) = \langle a, b \mid ab^n a^{-1} = b^m \rangle$$

当且仅当 $|m| = 1$、 $|n| = 1$ 或 $|m| = |n|$ ([Mol18，定理1])时是剩余有限的。此外，当且仅当 $|m| = |n|$ ([Mol18，第 4]节)时， $BS(n,\ m)$具有局部扩张可分性。

定理 2.7 ([AM24，定理 A，命题 3。6])。 设 G 是类 $\mathcal{C}$中的一个有限生成无挠群。那么，以下条件等价：

(1) G 是剩余有限的。*(2)* G 的所有鲍姆斯拉格–索利塔尔子群都是剩余有限的。

如果群 G 中的无限阶元素 g 满足存在 $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，使得 $|n| \neq |m|$，那么我们称其关于 $h \in G$ 是不平衡的，

$$hg^n h^{-1} = g^m.$$

结合 Wise 关于图中边群为循环边群、顶点群为有限生成自由群时其基本群何时具有局部扩张可分性质的刻画（ [Wis00，第 5.1] 条定理）与 [AM24，第 3.6], 条命题，我们得到以下定理。

定理 2.8。 设 G 是类 $\mathcal{C}$中的一个有限生成无挠群。以下各项等价：

(1) G 具有局部扩张可分性质。*(2)* G 的所有鲍姆斯拉格–索利塔尔子群都具有局部扩张可分性质。*(3)* G 不含有任何不平衡元素。

结合前面的两个定理，我们得到以下推论。

推论 2.9。 设 G 是一个 $\mathcal{C}$ 的有限生成剩余有限群。以下各项等价：

(1) G 是局部扩张可分的。*(2)* G 的所有鲍姆斯拉格–索利塔尔子群都是局部扩张可分的。*(3)* G 不包含任何不平衡元素。

证明。 注意到， G 包含一个来自类 $\mathcal{C}$ 的有限指数正规无挠子群 H，并且 G 是局部扩张可分的，当且仅当 H 也是局部扩张可分的。此外， G 是剩余有限的，因此它可能包含的唯一鲍姆斯拉格–索利塔尔子群是 $BS(n,\ n)$ 和 $BS(1,\ n)$，而唯一不是局部扩张可分的子群是后者（对于 $|n| > 1$）。

如果条件 (2) 成立，那么 H 也满足同样的条件，因此根据定理 2.8， H （从而 G）是局部扩张可分的。反之，如果 G 是局部扩张可分的，那么它的所有鲍姆斯拉格–索利塔尔子群也必然都是局部扩张可分的。

如果 G 不含任何非平衡元素，那么 H也不含；根据定理 2.8，它们都是局部扩张可分的。如果 G 含有一个非平衡元素，设为$hg^n h^{-1} = g^m$，且满足 $|n| \neq |m|$，通过写作 $k = [G\colon H]$，我们可以取 $y = h^k \in H$ 来

看出 $x = g^k$ 是 H的一个非平衡元素:

$$\begin{aligned} yx^{n^k}y^{-1} &= h^k g^{kn^k} h^{-k} \\ &= \left(\underbrace{h(\cdots(h(h(hg^nh^{-1})h^{-1})^n h^{-1})^n \cdots)^n h^{-1}}_{k \text{ times}} \right)^k \\ &= g^{m^k k} = x^{m^k}. \end{aligned}$$

因此， H 和 G 都不可能是局部扩张可分的。 □

稍后我们将需要以下引理。

引理 2.10. 设 $G = (Y, \mathcal{G})$ 是一个由有限图上的几乎自由群构成、边群为虚拟循环边群的图的基本群。若 B 是 G的一个 ***Baumslag–Solitar*** 子群，则 B 包含一个与某个边 e 的 Y共轭的元素 $\mathcal{G}(e)$ 。此外，若 G 是局部扩张可分的，且 G 分解为自由有限群积 $K \amalg L$，则 B 包含于 L 或 K的某个共轭中。

证明。 首先注意， B 是无挠的。因此，若 B 与任何边子群都没有交集，它就是几乎自由群的自由积，这与假设矛盾。因此， B 与某个边群有非平凡交集。为证明陈述的第二部分，注意到 B 在 G 中的闭包 $B \simeq B$ 包含一个中心循环子群，因为 $B \simeq BS(n, \pm n)$ 必须是局部扩张可分的，并且满射到 $\mathbb{Z}$；因此根据 [Rib17，命题 4.2，9]必须包含于 K 或 L的某个共轭中。□

2.7. **关于 Wilton 的一个结果**。 Wilton [Wil18] 证明，属于 $\mathcal{C}$ 类的非自由双曲群几乎收缩到一个曲面群上。结合 Bestvina 和 Feighn 的结果 [BF92]，（该结果将 $\mathcal{C}$ 中的双曲群刻画为不包含 Baumslag—Solitar 子群的群），我们得到以下定理:

定理 2.11。 设 G 是 $\mathcal{C}$ 类中的一个有限生成无挠群，且不包含任何 ***Baumslag–Solitar*** 子群。那么 G几乎收缩到一个曲面群上。

该定理对 $\mathcal{C}$中群的有限群完备化给出以下推论。

推论 2.12。 设 G 是来自 $\mathcal{C}$ 类的有限生成群，且不包含任何 ***Baumslag—Solitar*** 子群。若对于某个素数 p ，前有限完备化 G 包含一个开子群 U ，满足 $\mathrm{cd}_p(U) = 1$，则 G 几乎自由。

证明。 由引理 2.7， G是剩余有限的。因此，由引理 2.6， G包含一个有限指数的无挠子群 H 。若 H 不是自由群，根据引理 2.11， H 必定包含一个作为虚收缩的曲面子群 S 。因此， G 的有限群拓扑在 S 上诱导出完整的前有限拓扑（这也可由 G 具有局部扩张可分性推出），从而得到一个嵌入 $S \to G$。这表明 $\mathrm{vcd}_p(G) \geq 2$。□

2.8. **有限拟作用的不动点**。 我们将用到以下已知结果，其证明见 [GJ23，引理 2.2]。

引理 2.13. 设 G 是一个有限拟群，其闭子群为 A、$B \leq G$，且 p 是一个素数。那么

$$\mathbb{F}_p[\![G/B]\!]^A = \{0\} \quad \textit{if and only if} \quad p^\infty \mid [A : A \cap {}^gB] \textit{ for every } g \in G.$$

作为上述引理的一个特例，我们还需要说明在拟循环群的半单完备群代数情形下，增广映射如何分裂：

引理 2.14. 设 $C = \langle a \rangle$ 是拟循环群，p 是一个不整除 C 阶的素数。那么，不动点空间 $\mathbb{F}_p[\![C]\!]^C$ 是一维的，且增广映射 $\epsilon\colon \mathbb{F}_p[\![C]\!]^C \to \mathbb{F}_p$ 是 $\mathbb{F}_p[\![C]\!]$-模的一个同构。

证明。我们有 $C = \lim_{\longleftarrow n\in I} C/nC$，其中 I 是 $|C|$ 的自然数因子的集合。因此，$\mathbb{F}_p[\![C]\!] = \lim_{\longleftarrow} \mathbb{F}_p[C/nC]$ 且 $\mathbb{F}_p[\![C]\!]^C = \lim_{\longleftarrow} \mathbb{F}_p[C/nC]^C$。对于阶与 p 互素的有限群，众所周知，

$$\mathbb{F}_p[C/nC]^C = \mathbb{F}_p\left(\frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}}{n}\right)$$

它是一维的，由群代数的迹元素张成，该迹元素分裂增广映射 $\epsilon\colon \mathbb{F}_p[C/nC] \to \mathbb{F}_p$。因此，只需证明$\mathbb{F}_p[\![C]\!]^C$ 非平凡；为此，只需证明当 $n = mk$ 时，映射 $\mathbb{F}_p[C/nC]^C \to \mathbb{F}_p[C/mC]^C$ 对某个 $k > 1$ 是满射。然而，$\mathbb{F}_p[C/nC]$ 中迹元素在 $\mathbb{F}_p[C/mC]$ 中的像为 $(1 + \cdots + a^{m-1})/m$，故该映射如所需为满射。□

与有限群的情形一致，在引理 2.14 的设定下，我们将 $\mathbb{F}_p[\![C]\!]^C$ 中在增广映射下映到 $1 \in \mathbb{F}_p$ 的唯一元素记为 tr_C，以下称其为 $\mathbb{F}_p[\![C]\!]$ 的迹元素。与引理的证明中一样，注意迹具有函子性，也就是说，tr_C 在 $\mathbb{F}_p[C/nC]$ 中的像恰为 $\mathrm{tr}^{C/nC}$。

2.9. **有限群完备化的完备代数的平坦性**。我们主要结果证明中的一个关键工具是以下结果，它对 GJ23, 定理 5.6] 做了略微推广。

命题 2.15。设 G 是一个有限生成虚自由群。若 P 是一个包含 G 的前有限群，则左 $\mathbb{F}_p[G]$-模 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 同构于自由左 $\mathbb{F}_p[G]$-模的一个直并。

证明。令 $F \leq G$ 为有限指数的正规自由子群。根据 [Coh06, Cor. 7.11.8], ，代数 $\mathbb{F}_p[F]$ 是自由理想环，也就是说，任意左理想或右理想都是一个自由的 $\mathbb{F}_p[F]$-模。此外，[GJ23, Prop. 5.3] 证明了 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$ 作为 $\mathbb{F}_p[F]$-模是平坦的。注意，由于指数 $[G\colon F]$ 有限，F 同构于 F 作为 G 子群时的闭包 F。我们将首先证明 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 作为抽象 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$-模是平坦的。

注意，$\mathbb{F}_p[\![F]\!]$ 是半遗传的：若 $I \leq \mathbb{F}_p[\![F]\!]$ 是有限生成的左理想或右理想，则它是闭的且前有限。由于在前有限模范畴中 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$ 的整体维数为 1（[Bru66, Thm. 4.1]），I 在该范畴中是投射的。因此，任意满射 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]^n \to I$（它自动连续）都可分裂，这表明 I 是一个抽象自由模的直和项，因而作为抽象 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$-模是投射的。

根据 Chase 的一个定理（[Rot08，定理 4.32]），一个环是半遗传的，当且仅当它是相干的，且平坦模的子模也是平坦模。此外，一个环是相干的，当且仅当任意平坦模的乘积都是平坦模（[Rot08，定理 7.9]）。因此，在半遗传环中，平坦模的任意逆极限都是平坦的。由于$\frown\mathbb{F}_p[\![P]\!]$是有限生成自由 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$-模的逆极限，它必定是 $\mathbb{F}_p[\![F]\!]$上的平坦模。

然而，平坦性具有传递性，因此 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 是 $\mathbb{F}_p[F]$上的平坦模。根据 [Coh06，命题 2.3，21], 它必定是自由 $\mathbb{F}_p[F]$-模的并。现在选取一个正规开

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$子群 U，使得 $U \cap G = F \simeq F$，并令 $P_0 = GU \leq_o P$。根据前面的说明，$\mathbb{F}_p[\![U]\!]$ 是自由 $\mathbb{F}_p[F]$-模的并；又因为张量积与直和可交换，所以 $\mathbb{F}_p[\![P_0]\!] \simeq \mathbb{F}_p[G] \otimes_{\mathbb{F}_p[F]} \mathbb{F}_p[\![U]\!]$ 也是自由 $\mathbb{F}_p[G]$-模的并。作为一个 $\mathbb{F}_p[\![P_0]\!]$-模，$\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 同构于 $\mathbb{F}_p[\![P_0]\!]^{[P:\ P_0]}$。由于直和子模的性质在直和运算下保持不变，故结论成立。□

2.10. **小消去群**。设

$$G = \langle X \mid R \rangle \tag{3}$$

是一个有限群表示，其中 $R \subseteq F(X)$ 是自由群 $F(X)$ 中一组自由约化且循环约化的群字，并且 R 在循环置换和取逆元的运算下封闭。若一个非平凡的自由约化字 $u \in F(X)$ 是相对于表示(3)的一个片段，则存在两个不同的元素$r_1, r_2 \in R$，它们具有 u 作为最大公共初始段。

设 $0 < \lambda < 1$。若对任意 u 是相对于(3)的一个片段，且 u 是某个 $r \in R$ 的子字，都有.....则称上面的表示(3)满足 $C'(\lambda)$ 小消去条件。

$$|u| < \lambda |r| .$$

这里，$|v|$ 表示基 X 中一个字 v 的长度。

注意，若 $G = \langle X \mid S \rangle$ 是一个群表示，且定义关系词集合S 对循环置换或取逆元不封闭，我们总可以取集合 R，它由 $S \cup S^{-1}$ 中元素的所有循环置换构成。若此时 $G = \langle X \mid R \rangle$具有性质 $C'(1/\lambda)$，则称 $G = \langle X \mid S \rangle$ 也具有性质 $C'(1/\lambda)$。

定理 2.16. 若 $G = \langle X \mid S \rangle$ 是一个满足 $C'(1/6)$ 小重叠条件的有限表示，则 G 是剩余有限且上同调良好的。

证明. 根据 [Wis04, 定理 1]，G在 CAT(0) 立方复形 C上适当不连续地且余紧地作用。由格林德林格引理可知，G 是词双曲的。根据 [Ago13, 定理 1.1]，G包含一个有限指数子群 H，该子群在 C上忠实且特殊地作用。根据 [HW07, 第 6], 节，这意味着 H 可嵌入 RAAG 的一个有限指数子群中，作为其收缩，从而证明 H，因此 G 是剩余有限的。根据 [MZ88, 命题 3.8], ，我们还可以得出 G是上同调良好的结论。□

定义 2.17. 我们称群 G 中的元素集合 A 是自正规的，若对任意 $a_1, a_2 \in A$，只要 ${}^g\langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \neq \{1\}$，就有 $a_1 = a_2$ 且 $g \in \langle a_1 \rangle$。

以下结果是众所周知的（例如参见 [Wis12，第 9.10] 条，或 [AM24，第 5.11] 条引理）。

命题 2.18。设 F 是一个有限生成自由群，且 A 是 F 的元素组成的有限自正规集合。存在常数 C，使得对于任意满足对所有 $a \in A$ 都有 $n_a > C$ 的自然数集合 $\{n_a\}_{a \in A}$，商群

$$F / \langle\langle a^{n_a} : a \in A \rangle\rangle$$

满足小消去条件 $C'(1/6)$。

具有 $C'(1/6)$ 表示的群已知满足许多其他性质。

命题 2.19。设 $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ 是自由群 F 中元素组成的自正规化族，该自由群由 x_1、.....、x_d 自由生成，并且 A 中没有元素是真幂。假设

$$G = \langle x_1, \ldots, x_d \mid a_1^{n_1}, \ldots, a_k^{n_k} \rangle$$

是一个满足小消去条件 $C'(1/6)$ 的表示。于是:

(1) [Lyn66，推论 2。5] 该表示在组合意义下是非球面的：若 X 是~与该表示相关联的 *2*-复形，而 X 是通过消去其通用覆盖空间中的重复 *2*-胞腔得到的，则 X 是非球面的。*(2)* [Str90，定理 25] 对于每个 $1 \leq i \leq k$， a_i 在 G 中的像的阶恰为 n_i。

组合无球性的一个重要推论是，我们得到如下平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模 $\mathbb{Z}$ 的分解：

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}[G/\langle a_i \rangle] \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}[G]^d \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0\,, \tag{4}$$

其中 τ 将 $x \in \mathbb{Z}[G/\langle a_i \rangle]$ 映射到

$$x \cdot (a_i^{n_i-1} + \cdots + a + 1) \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial a}{\partial x_d} \right).$$

3. The profinite completion of finitely generated residually finitegroups in $\mathcal{C}$

本节中， $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 表示一个有限图的基本群，该图由有限生成自由群构成，且其边子群为循环群；我们假设它是剩余有限的。我们旨在理解 G 的有限群完备化，并证明对每个有限 G-模 M 及每个次数 $i \geq 0$，上同调中的限制映射 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(\widehat{G}, M) \to \mathrm{H}^i(G, M)$ 都是同构。

~如第 2 节所述，我们有 $G \cong \widehat{\pi}(Y, \mathcal{G})$。因此，~我们的任务归结为理解 $\mathcal{G}(v)$（对 Y 的每个顶点 v ）以及 $\mathcal{G}(e)$（对 Y 的每个顶点 e ）。如果 G 是局部扩张可分的，那么对所有顶点和边 x，都有 $\mathcal{G}(x) \simeq \mathcal{G}(x)$。如果 G 不是局部扩张可分的，这一点就未必成立。不过，我们将证明，仍然可以控制 G 的前有限结构。

首先，我们证明，可以将本文的讨论归约到如下情形：群图只有一个顶点 u，也就是说， G由一个基群 $\mathcal{G}(u)$经过有限次对循环子群进行 HNN 扩张得到。

事实上，任选 Y 中的一个顶点 u ，令 Y_0 为这样得到的新图：通过添加一条新边，将 u 与 Y 的每个其他顶点 v 相连。通过对每条新添加的边 e 定义 $\mathcal{G}_0(e) = \{1\}$ ，将 Y 上的群图 $\mathcal{G}$ 扩充为 Y_0 上的群图 $\mathcal{G}_0$ 。显然，我们有 $\pi(Y_0, \mathcal{G}_0) = G * F_k$ ，其中 $k = |V(Y) - 1|$ ，且F_k 是秩为 k的自由群；这一点可通过收缩 Y 中的所有旧边看出。另一方面，若 Y_1 表示收缩所有 k 新边并将 Y_0 的所有顶点与 u 合并后得到的图，那么 Y_1 是一个只有一个顶点u 的花束，其边集与 $E(Y)$一一对应。群图 $\mathcal{G}_0$ 在 Y_1 上诱导出群图 $\mathcal{G}_1$ ，使得

$$\mathcal{G}_1(u) = \underset{v \in V(Y)}{*} \mathcal{G}(v)\,.$$

~ ~于是我们有 $\pi(Y_1, \mathcal{G}_1) = G * F_k$ 和 $\widehat{\pi}(Y_1, \mathcal{G}_1) = G \amalg F_k$。抽象版本和前有限版本的 Mayer-Vietoris 序列都表明，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(\widehat{G} \amalg \widehat{F_k}, M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(G * F_k, M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(\widehat{G}, M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(G, M) \end{array}$$

其中，当 $i > 1$ 时，垂直箭头都是同构。因此， G 上同调良好，当且仅当 $G * F_k$ 上同调良好。因此，不失一般性，我们可以假设 Y 只有一个顶点 u。

现在假设顶点群 $\mathcal{G}(u)$是自由群。为了描述 $e \in E(Y)$对应的群$\mathcal{G}(u)$和 $\mathcal{G}(e)$，我们回顾一些来自 [AM24]的记号。首先，注意我们可以将 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$表示为

$$G = \left\langle a_1, \ldots, a_k, q_1, \ldots, q_l \,\middle|\, q_j u_j^{m_j} q_j^{-1} = v_j^{n_j} (1 \le j \le l) \right\rangle,$$

其中:

(1) a_1，……，a_k 是 $F = \mathcal{G}(u)$的自由生成元，(2) m_j， $n_j \in \mathbb{Z}$，(3) 集合 $A = \{u_j, v_j | 1 \le j \le l\}$ 是由循环约化元素组成的自正规化集合（其中一些 u_j 和 v_i 可能相等）。

现在我们构造与此表示相关的图 Γ 。顶点集合$V(\Gamma)$由集合 A给出，并且对每个关系

$$q_j u_j^{m_j} q_j^{-1} = v_j^{n_j}$$

我们关联一条连接 v_j 和 u_j的边。边的端标记为非零整数：对应于 u_j 的端标记为 m_j，而对应于 v_j 的端标记为 n_j。这些边端标签自然地诱导出 Γ中路径端点的标签：对于 Γ中的任意路径 γ ，我们将环路乘积 $\mathrm{lp}(\gamma) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 定义为沿着 γ各边离开端的所有标签之积。

我们用 γ 表示路径 γ 的逆路径，其中 γ 是 Γ中的路径。若圈 γ 位于 Γ 中，且满足平衡条件 $|\mathrm{lp}(\gamma)| = |\mathrm{lp}(\gamma)|$，则称其为平衡；否则称其为 不平衡。若连通分支 C位于 Γ 中，且其中所有圈均为平衡圈，则称其为干净 。

图 Γ编码了关于 G的 Baumslag–Solitar 子群的所有信息。由于 G 是剩余有限的，能够作为子群出现在 G 中的 Baumslag–Solitar 子群 $BS(n, m)$ 只能满足 $|n| = |m|$ 或 $\min\{|n|, |m|\} = 1$。对于 G的非交换 Baumslag–Solitar 子群 B ，存在唯一的 Γ 的连通分支 C ，使得 $B \simeq BS(n, m)$ 的不平衡元素在 G 中与 $\langle a \rangle$的某个元素共轭，其中 $a \in V(C)$。此外，当 $\min\{|n|, |m|\} = 1 (\neq \max\{|n|, |m|\})$ 时，该连通分支不干净。若 $B \cong \mathbb{Z}^2$ 是 G的子群，则还存在唯一的 Γ 的干净连通分支 C ，使得对每个 $a \in V(C)$，都有某个幂 a^k 在 G 中与 B的一个元素共轭。

若 G 是剩余有限的，则对 Γ的非干净分支有重要影响。

命题 3.1 ([AM24, 命题 4。9])。 若 G 是剩余有限的，则 Γ 的任意非干净分支 C 都包含唯一的嵌入环 γ。此外，环路乘积$\mathrm{lp}(\gamma)$ 或$\mathrm{lp}(\gamma)$之一等于 ± 1。

若 C 是一个非干净分支，且 γ 是上一命题中的圈，我们用 $\mathrm{lp}(C)$ 表示环路乘积 $\mathrm{lp}(\gamma)$ 或 $\mathrm{lp}(\gamma)$ 中不等于 ± 1 的那个。注意，存在 Y 的一条边 e_j ，使得 $\iota_{e_j}(\mathcal{G}(e_j))$ 在 $\mathcal{G}(u)$ 中与 $\langle u_j^{m_j} \rangle$ 共轭。令 C 为 Γ 中 u_j 的连通分支。我们定义以下素数集合:

$$P(C) = P(e_j) = \begin{cases} \varnothing, \text{ if } C \text{ is clean}, \\ \{p \text{ prime}: p \mid \mathrm{lp}(C)\}, \text{ if } C \text{ is not clean}. \end{cases}$$

若 P 是任意一组素数，我们定义

$$\widehat{\mathbb{Z}_P} = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p \ .$$

素数的补集为 P^c，且有 $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_P \times \mathbb{Z}_{P^c}$。对于无挠有限生成群中的任意元素 g，存在某个素数组 Q 使得 $\langle g\rangle \simeq \prod_{p\in Q}\mathbb{Z}_p \leq \mathbb{Z}$，我们将 g 到 $\mathbb{Z}_P$的投影记作 g_P。现在我们可以描述 G的结构了。

定理 *3.2.* 设 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$，其中 Y 有唯一顶点 u，$F = \mathcal{G}(u)$ 是有限生成自由群，且每个 $\mathcal{G}(e)$ 都是循环群。设 A 和 Γ 如前所述。那么，对于每个 $e \in E(Y)$，都有 $\mathcal{G}(e) \simeq \mathbb{Z}_{P(e)^c}$，且 $\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(u)/N$ 其中 N 是由 $\mathcal{G}(u)$ 的以下元素生成的闭正规子群

$$\{a_{P(C)} : a \in A,\, C \text{ is the component of } a \text{ in } \Gamma\}.$$

证明。我们有一个典范映射 $\phi\colon F \to \overline{F}$，并且显然 N包含于其核中。为了证明该定理，我们需要证明：

(1) $N =$ 核 ϕ，以及 (2) 对于每个 $a \in A$，若其在 Γ 中的连通分支为 C，则 $\langle a\rangle$ 在 $\overline{F^{F}}$ 中的闭包与 $\mathbb{Z}_{P(C)^c}$ 同构。

令 F_0 为 F 的一个有限商群，使得对于 Γ 的每个连通分支 C，$a \in C$ 的像的阶都相同，并且与 P 中的所有素数互素（C）。我们可以构造一个群图 $(Y, \mathcal{G}_0)$，其中 $\mathcal{G}_0(u) = F_0$，并且对于每个 $e \in E(Y)$，$\mathcal{G}_0(e)$ 同构于 $\iota_e(\mathcal{G}(e))$ 在 F_0 中的像（根据我们的条件，它也同构于 $t_e(\mathcal{G}(e))$ 在 F_0 中的像）。群 $\pi(Y, \mathcal{G}_0)$ 是 G 的一个商群；又因为 $\pi(Y, \mathcal{G}_0)$ 是剩余有限的（因为 $(Y, \mathcal{G}_0)$ 是一个由有限群构成的群图），所以 F_0 是 F 的一个商群。

现在令 $\{m_C\}$，根据引理 2.18 我们可以找到一个集合，其中 C 遍历 Γ 的各个连通分支，使得：

（1）每个 $a \in A$ 在 F_1 中的像的阶都整除 $m_a = m_C$，其中 C 是包含 a的连通分支；（2）群表示 $F_2 = F/\langle\langle a^{m_a} : a \in A\rangle\rangle$满足 $C'(1/6)$ 小消去条件。

注意，由引理 2.16，F_2 是剩余有限的。

由引理 2.19，a 在 F_2 中的像的阶恰好为 m_a。由于 F_2 是剩余有限的，存在 F 的有限商群 F_3，使得 F_1 是 F_3 的商群，并且对于任意 $a \in A$，a 在 F_3 中的阶恰好为 m_a。根据前面的论证，F_3是 F的商群，因此 F_1也是 F的商群。我们得出结论，$F \simeq F/N$。注意，我们之前的论证还表明，对于 Γ 的每个连通分支 C 以及每个 $a \in C$，$\langle a\rangle$ 在 F中的闭包与 $\mathbb{Z}_{P(C)^c}$同构。□

在下一个命题中，我们描述前一定理中的群$\mathcal{G}(u)$的一些性质。对于 $a \in F$，我们回顾一下，Fox 导数 $\frac{\partial a}{\partial x_i} \in \mathbb{Z}[F]$ 是满足以下条件的唯一元素

$$a - 1 = \frac{\partial a}{x_1}(x_1 - 1) + \cdots + \frac{\partial a}{\partial x_d}(x_d - 1).$$

命题 3.3。设 F 是由自由生成元 $x_1, \ldots, x_d$ 生成的自由群，A 是 F 中由元素构成的有限自正规集合，且 $\{P(a)\colon\ a \in A\}$ 是素数集合的真子集所组成的一个集合。设 $G = F/N$，其中 N 是由元素 $a_{P(a)}$（$a \in A$）生成的 F 的闭正规子群，并定义 $A_p = \{a \in A\colon\ p \in P(a)\}$。

那么，G 中由 a 生成的闭子群同构于 $\mathbb{Z}_{P(a)^c}$。此外，对于每个素数 p，我们有以下正合序列：

$$0 \to \bigoplus_{a\in A_p} \mathbb{F}_p[\![G/\overline{\langle a\rangle}]\!] \xrightarrow{\tau_G} \mathbb{F}_p[\![G]\!]^d \to I_{\mathbb{F}_p[\![G]\!]} \to 0 \tag{5}$$

其中

$$\tau_G(x) = x\cdot \mathrm{tr}_{\overline{a}}\cdot\left(\frac{\partial a}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial a}{\partial x_d}\right)$$

对于 $x\in \mathbb{F}_p[\![\overline{G/\langle a\rangle}]\!]$ 和$\mathrm{tr}_{\overline{\langle a\rangle}}$，$\mathbb{F}_p[\![\langle a\rangle]\!]^{\langle a\rangle}$的迹元素。特别地，对于每个素数 p，以下结论成立：

(i) $\mathrm{cd}_p(G)\le 2$; ***(ii)*** $\mathrm{cd}_p(G)=1$ 对所有不包含在任何 $P(a)$中的素数 p 均成立；***(iii)*** $\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(G,\mathbb{F}_p)-\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(G,\mathbb{F}_p)=d-|A_p|$。

证明。如前一定理的证明所示，可以证明由 $a\in A$ 在 G 中生成的闭子群同构于 $\mathbb{Z}_{P(a)^c}$。设 $n_{a,i}$ 是整除 $i!$ 且不被 $P(a)$ 中任何素数整除的最大自然数。定义

$$\Gamma_i = \langle x_1,\dots,x_d \mid a^{n_{a,i}}=1, a\in A\rangle$$

和 $G_i=\Gamma_i$。

注意到 $G\simeq \varprojlim G_i$。由引理 2.18，当 j 足够大时，群 Γ_j 的表示满足 $C'(1/6)$ 条件，因此，根据引理 2.16，Γ_j 是剩余有限且上同调良好的。于是，利用引理 2.19，对所有充分大的 $i>j$，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{a\in A}\mathbb{F}_p[\Gamma_i/\langle a\rangle] & \xrightarrow{\tau_i} & \mathbb{F}_p[\Gamma_i]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\Gamma_i] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{i,j}} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq}\\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{a\in A}\mathbb{F}_p[\Gamma_j/\langle a\rangle] & \xrightarrow[\tau_j]{} & \mathbb{F}_p[\Gamma_j]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\Gamma_j] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0
\end{array}$$

其中映射 τ_i、τ_j 和 $\gamma_{i,\,j}$ 可描述如下：τ_i 将一个元素$x\in\mathbb{F}_p[\Gamma_i/\langle a\rangle]$ 映射为

$$x\cdot(a^{n_{a,i}-1}+\cdots+1)\cdot\left(\frac{\partial a}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial a}{\partial x_d}\right)$$

并且$\gamma_{i,\,j}$ 将 x 映射为

$$x\cdot\frac{a^{n_{a,i}}-1}{a^{n_{a,j}}-1}=\frac{n_{a,i}}{n_{a,j}}\cdot x\in\mathbb{F}_p[\Gamma_j/\langle a\rangle]\,. \tag{6}$$

由于 Γ_i 和 Γ_j 是上同调良好的，且模 $\mathbb{F}_p[\Gamma_i/\langle a\rangle]$ 和$\mathbb{F}_p[\Gamma_j/\langle a\rangle]$ 都允许由有限生成的自由模构成的分解，根据 [Wil24, Thm. 7.3.12]，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{a\in A}\mathbb{F}_p[\![G_i/\overline{\langle a\rangle}]\!] & \xrightarrow{\tau_i} & \mathbb{F}_p[\![G_i]\!]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![G_i]\!] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{i,j}} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq}\\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{a\in A}\mathbb{F}_p[\![G_j/\overline{\langle a\rangle}]\!] & \xrightarrow[\tau_j]{} & \mathbb{F}_p[\![G_j]\!]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![G_j]\!] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \longrightarrow 0
\end{array}$$

根据映射 $\gamma_{i,\,j}$，我们可以构造 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$-模 $\varprojlim \mathbb{F}_p[\![G_i/\langle a\rangle]\!]$；根据式 (6)，所得模在 $p\notin P(a)$ 时为 $\{0\}$，否则与 $\mathbb{F}_p[\![G/\langle a\rangle]\!]$同构。此外，当 $p\in P(a)$ 时，我们可以将映射 τ_i 乘以因子 $n_{a\,i}^{-1}$，

（模 p），并将 $\gamma_{i,\ j}$ 乘以因子 $n_{a,\ j}\cdot n_{a\ i}^{-1}$，（模 p），作用于每个直和项 $\mathbb{F}_p[\Gamma_i/\langle a\rangle]$，以确保它们满足

$$\tau_i(x)=x\cdot \mathrm{tr}_{\overline{\langle a\rangle}}\cdot\left(\frac{\partial a}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial a}{\partial x_d}\right).$$

这就证明了公式（5）的存在。

现在将 a 视为 G中的一个元素。若 $p\in P(a)$，则由于 $\overline{\langle a\rangle}\simeq\mathbb{Z}_{P(a)^c}$，$\mathbb{F}_p$是一个投射的前有限 $\overline{\mathbb{F}_p[\![\langle a\rangle]\!]}$-模，因此

$$\mathbb{F}_p[\![G/\overline{\langle a\rangle}]\!]\simeq \mathbb{F}_p[\![G]\!]\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[\![\overline{\langle a\rangle}]\!]}\mathbb{F}_p=\widehat{{}^{G}\mathbb{F}_p}$$

是一个投射的前有限 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$-模。因此，$\mathrm{cd}_p(G)\leq 2$。断言 (ii) 显然成立；为证明 (iii)，我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\![G]\!]}(-,\ \mathbb{F}_p)$ 应用于公式（5），得到正合序列

$$0\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(G,\mathbb{F}_p)\to\mathbb{F}_p^d\to\bigoplus_{\substack{a\in A\\ p\in P(A)}}\mathbb{F}_p\to \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(G,\mathbb{F}_p)\to 0\,.$$

这就推出了所需的等式。 □

前一个定理提出了一个自然问题：对于给定的有限自正规化族 $A\subset F$ 以及给定的素数真子集集族$\{P(a)\}_{a\in A}$，我们能否判定 $\mathrm{cd}_p(G)$ 是 2 还是小于 2？ 例如，考虑这样的情形： A 由自由群 $F=\langle x_1,\ \ldots\ldots,\ x_d\,|\varnothing\rangle$中的单个元素 a 组成，而 P 是素数的某个真子集。令

$$G=\widehat{F}/\langle\!\langle a_P\rangle\!\rangle\,,$$

并且我们考虑以下各个依次蕴含的命题：

(a) 元素 a 在 F 中是本原的。(b) 存在一个秩为 $d-1$ 的自由有限子群 H，它是 G 的子群，使得

$$G=H\amalg\overline{\langle a\rangle}$$

.

(c) G 是投射的。

条件 (b) 有以下等价表述。

命题 3.4。 条件 (b) 等价于：

(b') 对任意有限群 M 及任意元素 $g\in M$，若 $o(g)$ 与 P 中的所有素数互素，则满足 $\varphi(a)=g$ 的同态 $\varphi\colon G\to M$ 的数量恰为 $|M|^{d-1}$。

证明。 显然，(b) 蕴含 (b')，因此假设 (b') 成立。 [GJ23，命题 3.1] 证明了：$\langle a\rangle$ 是 G 的拟有限自由因子，当且仅当对于每个有限群M和任意同态 $\gamma\colon\langle a\rangle\to M$，扩张 $\widetilde{\gamma}\colon G\to M$的数量与 γ无关。根据 (b')，这个数量是常数且等于 $|M|^{d-1}$，因此存在 G 的一个闭子群 H，使得 $G=H\amalg\langle a\rangle$ 并且

$$|\mathrm{Hom}(H,M)|=|M|^{d-1}$$

对于每个有限群 M。我们必须证明，这意味着 H 是秩为 $d-1$的拟有限自由群。

令 $\mathrm{Epi}(H,\ M)$ 表示从 H 到有限群 M 的满同态集合，并令 L 为由 $d-1$ 个生成元生成的拟有限自由群。注意，$|\mathrm{Hom}(L,\ M)|=$

$|\mathrm{Hom}(H,\ M)| = |M|^{d-1}$。我们断言，对于每个有限群 M，等式 $|\mathrm{Epi}(H,\ M)| = |\mathrm{Epi}(L,\ M)|$ 同样成立。事实上，我们有恒等式

$$\mathrm{Hom}(H,M) = \bigcup_{N\le M} \mathrm{Epi}(H,N)\,,$$

因此，对 $|M|$ 进行归纳即可得到所需的等式。这意味着 H 和 L 的有限商群集合相同。由于二者都是有限生成的有限群（其中 H 是 G的商群），根据 Dixon、Formanek、Poland 和 Ribes 的一个著名结果（见 [Wil24，定理 3.2.3]），它们必定同构。□

我们提出以下猜想。

猜想 1（小 Remeslennikov 猜想）。蕴含关系 (c) $\Rightarrow$ (a) 成立。

它与 Remeslennikov 问题的关系如下：(b) 加上 Remeslennikov 问题在单关系群类中的肯定解，意味着 (a)。事实上，考虑群 $\Gamma_k = F/\langle\langle a^k\rangle\rangle$，其中 $k>1$ 与 P中的所有素数互素。根据 Newman 拼写定理，它是双曲的；根据 [Wis21]，它几乎虚紧致特殊。特别地，Γ_k 是剩余有限且上同调良好的。$\widehat{\ }$如果 (b) 成立，那么 Γ_k 几乎是自由有限群：由 H 生成的闭正规子群 N是自由有限群。此外，关于横截系 $\{1,a,\dots,a^{k-1}\}$ 的 Reidemeister–Schreier 重写过程表明，$U = N\cap\Gamma_k$是一个单关系群，其有限群完备化与 N同构。因此，若自由群在单关系群类中具有刚性，则 U 是自由的，故 Γ_k 几乎自由。根据 [GJ23]，$\langle a\rangle$ 是 Γ_k 的自由因子。因此，根据 [LS01，命题 III.3.7]，a是本原的。

证明猜想 1 的一种可能方法是拓展 Wilton [Wil18] 的工作。假设 a不是本原的。不失一般性，我们可以假设 a 不包含在 F 的真自由因子中。假设 $k\ge|a|$ 大于或等于 a 的词长。于是，根据 [HW01，定理 5.7]，Γ_k 是局部拟凸的。此外，根据 [FKS72]和[LS01，命题 III.3.7] 的最后一个推论，群 Γ_k 是单端的。最后一步是证明：对于某个 $k\ge|a|$，并且它与 P 中的所有素数互素，群 Γ_k 包含一个曲面子群。由于 Γ_k 是局部拟凸且虚紧致特殊的，它将虚拟收缩到这个曲面子群上，从而在某个有限 $\mathbb{F}_p[\Gamma_k]$-模的系数上产生一个非平凡的第二上同调类，其中 $p\in P$。然而，下述命题将与 G的投射性相矛盾：

命题 3.5. 假设 G 是投射的。那么

$$\mathrm{cd}_p\left(\widehat{\Gamma_k}\right)\le 1$$

对于每个与 P 和 $p\in P$ 中所有素数互素的 k。

$\widehat{\ }$证明。注意到 Γ_k 是 G 的一个商。与命题 3.3 的证明类似，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![G/\overline{\langle a\rangle}]\!] & \xrightarrow{\tau_G} & \mathbb{F}_p[\![G]\!]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![G]\!] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}/\overline{\langle a\rangle}]\!] & \xrightarrow[\tau_{\widehat{\Gamma_k}}]{} & \mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}]\!]^d & \longrightarrow & \mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}]\!] & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$\widehat{\ }$由 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$-模构成，且各行正合，其中 γ 由商映射 $G\to\Gamma_k$诱导。此外，由于 $|\langle a\rangle|$与 p互素，顶行（分别是底行）是 $\mathbb{F}_p$ 在 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]\widehat{\ }$（分别是 $\mathbb{F}_p[\![\Gamma_k]\!]$）上的投射分解。

我们回顾映射 τ_G 和$\tau_{\widehat{\Gamma_k}}$ 的定义：若我们写作

$$a-1=\frac{\partial a}{\partial x_1}(x_1-1)+\cdots+\frac{\partial a}{\partial x_d}(x_d-d)$$

在 $\mathbb{Z}[F]$ 中，则两者均由下式给出

$$x\cdot \mathrm{tr}_{\overline{\langle a\rangle}}\left(\frac{\partial a}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial a}{\partial x_d}\right)$$

$\widehat{\ }$对于 x，在 $\mathbb{F}_p[\![G]\!]$ 中或与 $\mathbb{F}_p[\![\Gamma_k]\!]$ 一起, 相应地计算迹元素 $\mathrm{tr}_{\langle a\rangle}$。

$\widehat{\ }$最后，注意对于任意有限的 p-主 Γ_k-模 M，我们都有同构

$$M^{\overline{\langle a\rangle}}\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\Gamma_k}}(\mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}/\overline{\langle a\rangle}]\!],M)\simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}/\overline{\langle a\rangle}]\!],M)\overset{\mathrm{Hom}(\gamma)}{\simeq}\mathrm{Hom}_G(\mathbb{F}_p[\![G/\overline{\langle a\rangle}]\!],M),$$

$$M^d\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\Gamma_k}}(\mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}]\!]^d,M)\simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{F}_p[\![\widehat{\Gamma_k}]\!]^d,M)\simeq \mathrm{Hom}_G(\mathbb{F}_p[\![G]\!]^d,M).$$

因此，将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p[\![G]\!]}(-,M)$ 作用于上面的图，我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} M^d & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\tau_G)} & M^{\overline{\langle a\rangle}} & \longrightarrow & 0\\ \simeq\uparrow & & \uparrow\simeq & & \\ M^d & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(\tau_{\widehat{\Gamma_k}})]{} & M^{\overline{\langle a\rangle}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这给出了同构

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\widehat{\Gamma_k},M)\simeq \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(\tau_{\widehat{\Gamma_k}}))\simeq \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}(\tau_G))\simeq \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(G,M)$$

$\widehat{\ }$对所有有限的 p-主 Γ_k-模 M均成立。由于 G 是投射的，$\mathrm{cd}_p(G)\leq 1$，因此 $\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(G,\ M)=0$，这表明 $\mathrm{cd}_p(\widehat{\Gamma_k})\leq 1$ 也成立。□

我们通过证明引理 1.5 来结束本节。

引理 *1.5* 的证明。 不妨假设 G不是几乎自由的。此外，取一个有限指数子群后，不妨假设 G 是无挠的。由于G 的上同调维数为 2，只需证明对每个有限指数子群 $H\leq G$ 及任意素数 p，典范映射

$$\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\widehat{H},\mathbb{F}_p)\to \mathrm{H}^2(H,\mathbb{F}_p)$$

是一个同构。注意，对有限生成的 H 而言，这个映射总是单射，因此我们只需验证两个空间的维数相同。

将 H 替换为某个有限生成自由群 F_k下的 $H*F_k$ 后，不妨假设 $H=\pi(Y,\ \mathcal{G})$，其中 Y是一个只有一个顶点 u的有限图，$F=\mathcal{G}(u)$是秩为 d 的有限生成自由群，并且每个边群 $\mathcal{G}(e)$都是循环群。

根据 Mayer-Vietoris 序列

$$0\to \mathbb{F}_p^{|E(Y)|}\to \mathrm{H}^1(H,\mathbb{F}_p)\to \mathbb{F}_p^d\to \mathbb{F}_p^{|E(Y)|}\to \mathrm{H}^2(H,\mathbb{F}_p)\to 0$$

对于群图的基本群，我们得出

$$\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^2(H,\mathbb{F}_p)=\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^1(H,\mathbb{F}_p)-d.$$

群图的前有限基本群的 Mayer-Vietoris 序列给出

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\widehat{H},\mathbb{F}_p)=\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\widehat{H},\mathbb{F}_p)-|E(Y)|+\sum_{e\in E}\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(e)},\mathbb{F}_p)\\ -\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(u)},\mathbb{F}_p)+\dim_{\mathbb{F}_p}\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(u)},\mathbb{F}_p).\end{aligned}\tag{7}$$

设 Γ 为 $\pi(Y,\ \mathcal{G})$ 的标准表示所关联的图，并用 Γ_p 表示图 Γ 中满足 $p \in P(C)$ 的各连通分支 C 的并。令 $A_p = V(\Gamma_p)$ 和 $E_p = E(\Gamma_p)$。根据引理 3.1，这种连通分支的欧拉示性数为 0，因此 $|A_p| = |E_p|$。现在注意到 $|E(Y)| = |E(\Gamma)|$，因此

$$\sum_{e\in E(Y)} \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(e)}, \mathbb{F}_p) - |E(Y)| = -|E_p|\,.$$

由引理 3.3 可知

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(u)}, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\overline{\mathcal{G}(u)}, \mathbb{F}_p) = d - |A_p|\,,$$

因此，由等式 (7) 可得

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(\widehat{H}, \mathbb{F}_p) &= \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(\widehat{H}, \mathbb{F}_p) - d \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^1(H, \mathbb{F}_p) - d \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{H}^2(H, \mathbb{F}_p)\,.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4. Relative splitting theorem for virtually free groups

本节的目标是证明有限生成几乎自由群的分裂定理的相对版本。下述定理蕴含引理 1.3。

定理 4.1. 设 G 是一个有限生成虚自由群，并设 $C_1, \ldots, C_n$ 是 G 的子群。假设 $G \le P = K \amalg L$，且每个 C_i 在 P 中都共轭于 K 或 L 的某个子群。那么 G 分解为自由积

$$G \simeq \left(\underset{i\in I}{*} G_i \right) * F\,,$$

其中 F 是 G 的自由子群，每个 G_i 都包含于 P 的某个共轭子群中的 K 或 L，而每个 C_j 都包含于某个 G_i 的 G 共轭子群中。

证明. 若 G 包含于 P 的某个共轭子群中的 K 或 L，则无需证明，因此我们假设情况并非如此。设 p 为一个素数。由引理 2.4(i)，可得

$$I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]} \simeq \widehat{{}^{P}I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}} \oplus \widehat{{}^{P}I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}}\,,$$

其中该同构由自然包含诱导

$$I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}\,, I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]} \hookrightarrow I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]}\,.$$

特别地，我们得到一个导子 $d_L\colon P \to \mathbb{F}_p[\![P]\!]$，其定义为先在 $I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]}$ 中取 $g \mapsto g-1$，再模 ${}^{P}I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}$ 取商。

设 U 是 G 的子群，且包含于 K 或 L 的某个 P-共轭中。于是，根据引理 2.1，d_L 在 U 上的限制是内的。特别地，这适用于每个子群 $U = C_i$。

命题 4.2. 存在一个有限生成的 $\mathbb{F}_p[G]$-子模 N，它包含 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ $d_L(G)$，并且诱导导子 $d_L\colon G \to N$ 限制在子群 C_i 上时是内的。

证明。 由于 G 是有限生成的，设其由 $x_1, \ldots, x_k$ 生成，那么 $d_L(G)$ 包含于由 $d(x_1)\ldots, d(x_k)$ 生成的 G-子模中。此外，对每个 i，还存在一个 a_i 属于 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$，使得

$$d_L(g) = (g-1)a_i$$

对所有 $g \in C_i$ 均成立。因此，我们可以取 N 为由所有 $d(x_i)$, a_i 生成的 G-子模。□

根据引理 2.15， $\mathbb{F}_p[G]$-模 N 包含于 $\mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 的一个有限生成自由 $\mathbb{F}_p[G]$-子模 M 中。因此，我们将 d_L 视为一个导子 $d\colon G \to M < \mathbb{F}_p[\![P]\!]$。

断言 4.3。 d不是内的。

证明。 假设 d是内的。令 $a \in \mathbb{F}_p[\![P]\!]$ 满足：对所有$g \in G$， $d_L(g) = (g-1)a$。根据 d_L 的定义，我们有：

$$(g-1)a \equiv 0 \pmod{\widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}}},$$

$$(g-1)a \equiv g-1 \pmod{\widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}}}$$

对所有 $g \in G$，这意味着 a 的像是 $\mathbb{F}_p[\![P/L]\!]$ 中的一个 G-不动点，而 $1-a$的像是 $\mathbb{F}_p[\![P/K]\!]$中的一个 $\widehat{G}$-不动点。然而，根据引理 2.13，$\mathbb{F}_p[\![P/L]\!]^{\widehat{G}} = \mathbb{F}_p[\![P/K]\!]^{\widehat{G}} = 0$。因此，$a \in \widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}}$和$1-a \in \widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}}$，由此可得

$$1 = (1-a) + a \in \widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}} \oplus \widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}} = I_{\mathbb{F}_p[\![P]\!]},$$

矛盾。 □

由于 d 是到投射 $\mathbb{F}_p[G]$-模的非内导子，根据引理 2.2，存在一棵 G-树 X''，其边稳定子有限，并且子群 H 稳定 X''的某个顶点，当且仅当 d在 H上的限制是内导子。设 v_1、……、v_n分别是由 C_1、……、C_n固定的 X''的顶点。由于 G是有限生成的，存在一棵 G-子树 $X' \subseteq X''$包含 v_1、……、v_n，使得 G/X'有限。将所有可压缩的边收缩后，我们可以假设 X' 是不可压缩的。注意，每个 C_i 至少固定 X'中的一个顶点。

断言 4.4。 对于任意 $g \in P$ 以及任意满足 G_v 无限的顶点 $v \in X'$，指标$[G_v\colon \overline{G_v} \cap \overline{{}^g K}]$ 和 $[G_v\colon \overline{G_v} \cap \overline{{}^g L}]$ 要么为1，要么为$\prod_{p\ prime} p^\infty$。

证明。 只需证明 K 的情形，因为同样的论证也适用于 ${}^g K$ 或${}^g L$。若 $G_v \leq K$，则 $G_v \leq K$，因此指数为$\overline{1}$。现在假设 G_v 不包含于 K，并考虑 G_v的一个有限指数无挠正规子群 H_v。我们也不可能有 $H_v \leq K$，因为在这种情况下，由引理 2.3 可得 $N_G(H_v) \leq K$，且该正规化子包含 G_v。若 $H_v \smallsetminus K$ 中任取一个元素 x，那么由 x 生成的无限循环子群 Z 与 K 的交由引理 2.3 再次可知是平凡的。

由于 G 是循环子群可分离的，我们有 $Z = \overline{\mathbb{Z}}$ 是 G_v 的子群，此外，由引理 2.4，$\overline{Z} \cap K = \widehat{\{1\}}$。这表明对于每个素数 p，指数 $[\overline{G_v}\colon \overline{G_v} \cap K]$ 的 p-部分必定是无限的。□

断言 4.5. 对于每个 G_v，都存在 $g \in P$，使得 G_v 包含于 ${}^g K$ 或 ${}^g L$中。

证明。 若 G_v 是有限的，则由 [Rib17，推论 7.1.3(a)]，G中的 G_v 的某个共轭包含于 K 或 L中。因此，我们可以假设 G_v 是无限的。由于 d 是G_v中的内的，存在 $a \in \mathbb{F}_p[\![P]\!]$，使得对于每个 $h \in G_v$，都有 $d(h) = (h-1)a$。与引理 4.3 的证明一样，我们有：

$$(h-1)a \equiv 0 \pmod{\widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![L]\!]}}},$$

$$(h-1)a \equiv h-1 \pmod{\widehat{{}^P I_{\mathbb{F}_p[\![K]\!]}}}$$

对所有 $h \in G_v$，这意味着 a 的像是 $\mathbb{F}_p[\![P/L]\!]$ 中的一个 G_v-不动点，而 $1-a$ 的像是 $\mathbb{F}_p[\![P/K]\!]$中的一个 G_v-不动点。如果它们在那些商中实际上都为零，就会导致与引理 4.3 中相同的矛盾。因此， $\mathbb{F}_p[\![P/L]\!]$ 或 $\mathbb{F}_p[\![P/K]\!]$ 至少有一个必须包含一个非零的 G_v-不动点。根据引理 2.13，存在 $g \in P$，使得 $|\overline{G_v}\colon \overline{G_v} \cap \overline{{}^g L}|$ 或 $[\overline{G_v}\colon \overline{G_v} \cap \overline{{}^g K}]$ 不被 p^∞ 整除。因此，根据引理 4.4， G_v 包含于 ${}^g L$ 或 ${}^g K$ 中。□

令 $\mathcal{S}$ 为 P 的子群集合，其中的元素是 K 或 L 的共轭。根据引理 2.3， $\mathcal{S}$ 中任意两个不同的子群交集都是平凡的。因此，对于 X' 的每个顶点 v ，都存在唯一的子群 $U \in \mathcal{S}$ ，使得 $G_v \leq U$。此外，如果 G_e 是非平凡的边稳定子，那么其相邻顶点的稳定子都包含于 $\mathcal{S}$ 的同一个子群中。

令 X 为将 X' 中所有具有非平凡稳定子的边压缩后得到的树。反设所得的树仅由一个顶点组成。由 G 的 $\{G_v$生成的闭子群： $v \in V(X')\}$ 是正规子群，且包含于 P-共轭的 K 或 L中。因此， G 本身也包含于 K 或 L的同一个共轭中，这与我们的假设矛盾。因此， X 不是一个点。

设 v 是 X 的一个顶点，并设 $U \in \mathcal{S}$ 使得 $G_v \leq U$。若 $g \in G$ 稳定v，则 X' 中存在两个顶点 u_1 和 $u_2 = gu_1$ ，使得 G_{u_1} 和 G_{u_2} 均非平凡且包含于 U中。因此， $G_{u_1} \leq {}^{g^{-1}}U \cap U \neq \{1\}$，从而 $g \in U$。因此，我们得到了一棵无限树， G 在其上作用且边稳定子平凡；每个 C_i 都至少固定一个顶点，并且每个顶点稳定子都包含于 $\mathcal{S}$中的某个子群。这意味着 G分解为所需的自由积。□

引理 *1.3* 的证明。 设 $C_1, \ldots, C_n$ 是形如 $G \cap {}^{g}L$ 或 $G \cap {}^{h}K$且满足 $g, h \in P$的子群。那么，根据引理 4.1， G 分解为一个自由积

$$G \simeq \left(\underset{i \in I}{*} G_i \right) * F$$

其中 F 是自由群，每个 G_i 都包含在某个 P的共轭子群中，该子群为 K 或 L ；而每个 C_j 都包含在某个 G的共轭子群中，该子群属于某个 G_i。显然，若 $C_j \leq G_i$，则$C_j = G_i$。由于可能的非平凡 G_i 的数量有界，通过选取足够多个子群 C_j，我们可得所有 G_i 都具有$G \cap {}^{g}L$ 或 $G \cap {}^{h}K$的形式。□

5. 检测自由积和自由因子

本节的首要目标是证明以下定理，而该定理又蕴含引理 1.1。

定理 5.1。 设 $G = \pi(Y, \mathcal{G})$ 是一个由有限生成几乎自由群构成、边群为几乎循环群的有限图的基本群。假设 G 具有局部扩张可分性质，且 $G = L \amalg K$ 可非平凡地分解为自由有限群积。那么， G 分解为一个自由积

$$G = \left(\underset{i \in I}{*} G_i \right) * F, \tag{8}$$

其中 F 是一个自由群，且每个 G_i 都包含在某个 G共轭的 L或 K中。此外，若 $C_1 \leq \mathcal{G}(v_1) \ldots, C_n \leq \mathcal{G}(v_n)$ 是顶点群中分别包含于某个 G共轭的 L 或 K中的有限生成子群，那么我们也可以选择式 (8) 中的 G_i ，使得每个 C_j 都包含于某个 G共轭的某个 G_i 中。

证明。 回想一下，由引理 2.6， G包含一个有限指数子群 N ，它是一个由有限生成自由群构成的、边群为循环群的有限图的基本群。由引理 1.5， N 是上同调良好的。特别地， N 的前有限完备化 是无挠的，因此 N 在 G 中的闭包 $N \simeq N$ 也是无挠的。

如果边 e of Y 抛物型 相对于分裂 $L \amalg K$ 满足以下条件，我们就称其为抛物边： $\mathcal{G}(e)$ 是 无限群，并且是某个 G- 共轭的 L 或 K 的子群。由引理 2.4 可知，若 $\mathcal{G}(e)$ 与 K 或 L的某个共轭有无限交集，则 e 是抛物边。

令 Δ 为从 Y 中删除所有抛物边后得到的子图。令 $\widetilde{\mathcal{G}}(Y, \mathcal{G})$ 为如下得到的群的商图：将 Δ 的每个连通分支 X 收缩为一点 x，并令 $\mathcal{G}(x) = \pi(X, \mathcal{G})$。

断言 5.2. 顶点群 $\mathcal{G}(x)$ 几乎自由。

证明。由于 G 具有局部扩张可分性，我们有

$$\widehat{\pi(X, \widehat{\mathcal{G}})} \simeq \widehat{\pi(X, \mathcal{G})} \simeq \overline{\pi(X, \mathcal{G})} \subseteq \widehat{G}.$$

令 $U = \overline{N} \cap \overline{\pi(X, \mathcal{G})}$，并对每个 $g \in G$，令 $U_{g,L} = U \cap {}^{g}L$ 和 $U_{g,K} = U \cap {}^{g}K$。我们将 $U_{g,L}$ 和 $U_{g,K}$ 视为 $\pi(X, \mathcal{G})$ 的子群。它们与 $(X, \mathcal{G})$ 的边子群的交为平凡的，因此根据引理 2.5，$U_{g,L}$ 和 $U_{g,K}$ 中的每一个都是投射的。再次应用引理 2.5，我们推得 U 是投射的。根据引理 2.10，$\pi(X, \mathcal{G})$ 不含鲍姆斯拉格–索利塔尔子群。因此，根据引理 2.12，$\pi(X, \mathcal{G})$ 几乎自由。□

从现在起，我们假设所有边子群 $\mathcal{G}(e)$、$e \in E(Y)$ 都是无限的，并且包含于某个 G-共轭的 K 或 L 中。应用引理 1.3，我们可以将每个顶点群 $\mathcal{G}(v)$（对于 $v \in V(Y)$）分解为

$$\mathcal{G}(v) = \left(\underset{i \in I_V}{*} H_{i,v} \right) * F_v,$$

其中 F_v 是 $\mathcal{G}(v)$ 的一个自由子群，并且每个 $H_{i,v}$ 都具有 $\mathcal{G}(v) \cap {}^{g}L$ 或 $\mathcal{G}(v) \cap {}^{g}L$ 的形式，其中 $g \in G$ 是某个元素。特别地，如果 $C_j \leq \mathcal{G}(v)$，那么它与某个 $H_{i,v}$ 的子群 $\mathcal{G}(v)$-共轭。此外，如果 $\iota(e) = v$，那么 $\mathcal{G}(e)$ 与某个 $H_{i,v}$ 的子群 $\mathcal{G}(v)$-共轭；若 $t(e) = v$，则 ${}^{q_e}\mathcal{G}(e)$ 也同样如此。如有必要，通过调整 q_e，我们可以假设，如果 $v = \iota(e)$（分别地，如果 $v = t(e)$），那么 $\mathcal{G}(e)$（分别地，${}^{q_e}\mathcal{G}(e)$）属于某个 $H_{i,v}$。

这使我们能够构造另一个群图 $(Z, \mathcal{H})$：将每个顶点 $v \in V(Y)$ 替换为一条含有 $|I_v|+1$ 个顶点的直线，其顶点群为 $H_{i,v}$ 和 F_v，且这条直线上的所有边群均为平凡的。对于每个 $e \in E(Y) \subset E(Z)$，令 $\mathcal{H}(e) = \mathcal{G}(e)$，并且这些都非平凡。

令 Σ 为从 Z 中移除 $E(Y)$ 中的所有边后得到的子图，并令 $\widetilde{\mathcal{H}}(Z, \mathcal{H})$ 为如下得到的群的商图：将 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 的每个连通分支 X（属于 Σ）收缩为一点 z，并令 $\mathcal{H}(z) = \pi(X, \mathcal{G})$。于是 Z 的所有边群 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 都是平凡的；注意，所有 C_i 都与 Z 的某个顶点群共轭。

断言 5.3。 对于 Z 中的每个顶点 v，存在 $g \in G$ 使得 $\mathcal{H}(v)$ 包含于 ${}^{g}K$ 或 ${}^{g}L$。

证明。令 $\mathcal{S}$ 为 G中由 K 或 L共轭得到的子群集合。回忆一下，根据引理 2.3，$\mathcal{S}$ 中任意两个不同的子群交集平凡；并且 G 中 $\mathcal{S}$ 的任意子群的正规化子都与该子群本身重合。我们有 $\mathcal{H}(v) \simeq \pi(X, \mathcal{G})$。每个 $\mathcal{H}(u)$、$u \in V(X)$ 都包含在唯一的子群 $U_u \in \mathcal{S}$中；由于所有边群 $\mathcal{H}(e)$、$e \in E(X)$ 都非平凡，因此对所有 $u \in V(X)$，都有 $U_u = U$。于是，对任意边 $e \in E(X)$，$\mathcal{H}(e) \subseteq U \cap {}^{q_e}U$，因此 $q_e \in U$。因此，$\mathcal{H}(v) \leq U$。□

由于 $(Z, \mathcal{H})$ 的所有边群都是平凡的，定理得证。 □

现在我们证明引理 1.2 和引理 1.4。

引理 *1.2* 的证明。根据 [BBS84, Thm. 1]，可知 G 是局部扩张可分的。由引理 5.2，若 c_1 不包含在 L 或 K 的任何 G-共轭中，则 G 是自由的。在这种情况下，根据 [LS01, Prop. II.5.13], ，不失一般性，我们可以假设 $\langle c_1 \rangle$ 是一个

F_1 的自由因子，因此推论得证。若 G 不是自由的，则同样不失一般性，我们可以假设 $c_1 \in L$。由引理 5.1，可得一个非平凡的分裂

$$G = H * K$$

其中 $c_1 \in H \leq L$。如果 F_1 和 F_2 都包含在 H 中，那么我们就会得到 $K = \{1\}$，这与假设矛盾。因此，我们可以假设 $F_1 \not\leq H$，而 Kurosh 子群定理给出一个非平凡分裂 $F_1 = H_1 * K_1$，其中 $c_1 \in H_1$。□

引理 *1.4* 的证明。在引理 5.1 中假设 $L = H$。如果 H 是单端的，那么 H 属于某个 ${}^gG_i$。这个子群 ${}^gG_i$ 必须包含在 H 中；又因为 G 是局部扩张可分的，我们得出 ${}^gG_i = H$。如果 H 包含在某个顶点子群的共轭中，我们就对 $C_1 = H$ 应用引理 5.1。于是 H 又属于某个 ${}^gG_i$，因此 ${}^gG_i = H$。□

6. Profinitely rigid words

若 F 是秩为 d 的自由群，且 $w \in F$ 是一个群字，那么对于任意有限群 G，都有一个通过代入给出的词映射

$$w\colon \underbrace{G \times \cdots \times G}_{d} \to G$$

。将 G^d 上的均匀测度沿 G 推前，在 G 上定义 w-测度。若群字 w_1 和 w_2 属于 F，则称它们有限剩余等价，当且仅当在每个有限群 G 中，w_1-测度和 w_2-测度都相同。注意，如果 w_1 和 w_2 位于同一个 Aut(F)-轨道中，则该条件自动成立。以下结果给出了有限剩余等价群字的另一种描述，同时也说明了群字的有限剩余刚性定义是合理的：

命题 6.1 ([HMP20，第 2 定理2])。设 w_1 和 w_2 是 F 中的两个元素。以下条件等价：

(1) 在每个有限群中，w_1-测度和 w_2-测度都相同。*(2)* 存在一个自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$，使得 $\varphi(w_1) = w_2$。

我们回顾一下：如果同一 w 的 Aut(F)-轨道中的任意 $u \in F$ 也属于同一 w 的 Aut(F)-轨道，那么称 $w \in F$ 具有有限剩余刚性。如果 $w \in F$ 在任意有限生成自由群 H 中都具有有限剩余刚性，则称其具有普遍有限剩余刚性。

根据 [MVW07，第 3] 节，如果自由群 F 的元素 w 不被 F 的任何真自由因子包含，我们就称其为代数的。给定一个元素$w \in F$，存在唯一一个包含 w 的 F 的自由因子 U，使得 w 在 U 中是代数的（[MVW07，第 3.4] 节）。与 [MVW07] 一样，我们称 w 在 F 中的代数闭包为 U。下一个命题表明，自由群中一个字的代数闭包是一个前有限不变量。

命题 6.2. 设 F 是一个有限生成自由群，且设 $w \in F$。设 L 是 F 的一个包含 w 的自由有限群因子。那么，w 在 F 中的代数闭包包含于 L。特别地，若 U 是 w 的代数闭包，则U 是 F 中包含 w的最小有限群自由因子。

证明。设 $F = L \amalg K$。于是，根据引理 4.1，F 分解为自由积 $F = G_1 * G_2$，满足 $w \in G_1$，且 G_1 包含在某个 F-共轭的 K 或 L 中。由于 $w \in L$，唯一的可能性是 $G_1 \leq L$。因此，w 在 F 中的代数闭包包含于 L。□

现在我们可以证明引理 1.6 了。

引理 *1.6* 的证明。只需证明该定理对 F 中的 w 代数的成立。假设 w 在 F 中是有限剩余刚性的，并设 $u \in F * H$ 满足存在 $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Aut}(F * H)$，使得 $\varphi(w) = u$。我们要证明 u 和 w 属于同一个 $\mathrm{Aut}(F * H)$-轨道。

令 U 为 $F * H$ 中 u 的代数闭包。于是 $F * H = U * H'$，由引理 6.2 可得 $\varphi(F) = U$，其中 F 和 U 分别表示 $F * H$ 中 F 和 $\widehat{U}$ 的闭包。因此，$\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(U)$，从而 $\mathrm{rk}(H) = \mathrm{rk}(H')$。因此，存在一个 $F * H$ 的自同构，将 U 映到 F。于是，我们可以假设 $U = F$。由于 w 在 F 中是有限剩余刚性的，并且如前所述，$\varphi(F) = F$，故 u 和 w 属于同一个 $\mathrm{Aut}(F)$-轨道。

反过来，假设 w 在 $F * H$ 中是有限剩余刚性的，并令 $u \in F$ 为满足以下条件的 $\widehat{\ }$：存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(F)$ 使得 $\phi(w) = u$。F 的任意自同构都可以延拓为 $\widehat{F * H}$ 的一个自同构，因此我们可以找到 $\psi \in \mathrm{Aut}(F * H)$，使得 $\psi(w) = u$。令 U 为 $F * H$ 中 u 的代数闭包。于是，由引理 6.2，$\psi(F) = U \leq F$。由于 ψ 是一个自同构，我们有 $\psi(F) = F$，这表明 w 在 F 中是有限剩余刚性的，正如所需。□

7. Further directions

超越具有几乎循环边群的几乎自由群图的基本群之后，自然可以尝试将引理 1.1 扩展到以下所述的 $\mathcal{L}$ 类极限群。

设 G' 是一个群，$A \subseteq G'$ 是一个有限自正规化族。设 Y 是一个图，其顶点集为 $V(Y) = \{u\} \cup A$，边集为 $E(Y) = \{e_a \colon a \in A\}$ 其中每条边 e_a 满足 $\iota(e_a) = u$ 和 $t(e_a) = a$。通过 $\mathcal{G}(u) = G'$、$\mathcal{G}(a) = \langle a \rangle \times \mathbb{Z}^{n_a}$（其中 $n_a > 0$）以及 $\mathcal{G}(e_a) = \langle a \rangle$，在 Y 上定义群图 $\mathcal{G}$。从边群到顶点群的同态 $(Y, \mathcal{G})$ 取为自然包含。群 $\pi(Y, \mathcal{G})$ 被称为通过中心化子扩张从 G' 得到。

令 $\mathcal{D}_0$ 为自由群类，并定义 $\mathcal{D}_{i+1}$ 为由 $\mathcal{D}_i$ 中的群通过中心化子扩张得到的群类。我们用 $\mathcal{L}_i$ 表示 $\mathcal{D}_i$ 中各群的有限生成子群类。那么，极限群就是类 $\mathcal{L} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}_i$ 中的任意群。

猜想 2. 单端极限群的有限群完备化不能分解为自由有限群积。

我们的方法可以得到该猜想的若干特例。根据 Wilton 的一项结果，极限群具有局部扩张可分性质（[Wil08]）。采用与引理 5.1 证明中相同的论证，可得：

定理 7.1. 有限群完备化能够检测 $\mathcal{L}_1$ 中的自由积。

证明. 注意，极限群是无挠的，而且极限群中的任意 Baumslag–Solitar 子群都必须与 $\mathbb{Z}^2$ 同构，因此引理 2.10 的最后一个结论仍然适用。此外，引理 5.2 仍然成立，因为根据 [Rib17，命题 4.2，任何与阿贝尔顶点相连的不可压缩边都必须是抛物型的。9] –$\widehat{\ }$事实上，阿贝尔顶点群本身必须包含在同一个 G 的共轭 K 或 L 中。证明的其余部分不变。□

References

[Ago13] Ian Agol. 虚拟 Haken 猜想。 *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013。附有 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写的附录。[AM24] Adrien Abgrall 和 Zachary Munro。关于带循环边群的自由群图的剩余有限性。 *preprint*, arXiv:2410.10152, 2024。

[BBS84] A. M. Brunner、R. G. Burns 和 D. Solitar。两个自由群的自由积在循环 amalgamation 下的子群可分性。载于 Kenneth I. Appel、John G. Ratcliffe 和 Paul E. Schupp 编，*Contributions to Group Theory* 33 *Contempo-*，第 卷，页 *rary Mathematics* 90 115 码 –。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1984年。[BF92] M. Bestvina 和 M. Feighn。负曲率群的组合定理。 *J.* , ( ): *Differential Geom.* 35 1 85 101, 1992 –。[Bla25] Guy Blachar。灯笼群的有限剩余刚性。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 2025 , 7月。[BMRS20] M. A. Bridson、D. B. McReynolds、A. W. Reid 和 R. Spitler。绝对有限拟刚性与双曲几何。 *Annals of Mathematics*, 192(3), 2020年11月。[BMRS21] Martin R. Bridson、D. B. McReynolds、Alan W. Reid 和 Ryan Spitler。关于三角群的有限剩余刚性。 *Bulletin of the London Mathematical Society*, 53(6):1849–1862, 2021年12月。[Bru66] Armand Brumer。伪紧代数、有限拟群与类域形成。 *Journal of Algebra* 4 3 442 470, 1966 , ( ): – 11月。[CHK21] Indira Chatterji、Sam Hughes 和 Peter Kropholler。第一 l^2 贝蒂数与作用于树上的群。 *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 64(4):916–923, 2021年10月。[Coh06] P. M. Cohn。 *Free Ideal Rings and Localization in General Rings*。新数学专著 3。剑桥大学出版社，2006年。[CW24] William D. Cohen 和 Julian Wykowski。鲍姆斯拉格–索利塔尔群及其推广的上同调可分性。 *preprint*, arXiv:2406.03960, 2024。[dBPZ24] V. R. de Bessa、A. L. P. Porto 和 P. A. Zalesskii。有限 amalgamation 下自由积的有限拟属。 *J. Algebra*, 643:11–48, 2024。[DD89] Warren Dicks 和 M. J. Dunwoody。 *Groups Acting on Graphs*。剑桥高等数学研究 17。剑桥大学出版社，1989年。[FKS72] J. Fischer、A. Karrass 和 D. Solitar。关于含有限阶元素的单关系群。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 33:297–301, 1972年。[GJ23] Alejandra Garrido 和 Andrei Jaikin-Zapirain。自由因子与有限拟完备化。*International Mathematics Research Notices*, 2023(24):21320–21345, 2023年12月。[GJZZ08] F. Grunewald、A. Jaikin-Zapirain 和 P. A. Zalesskii。比安基群的上同调良性与有限群完备化。 *Duke Mathematical Journal*, 144(1), 2008年7月。[HMP20] Liam Hanany、Chen Meiri 和 Doron Puder。由有限群上的测度确定的若干自由词轨道。 *Journal of Algebra*, 555:305–324, 2020年8月。[HW01] G. Christopher Hruska 和 Daniel T. Wise。塔、梯子与 B. B. Newman 拼写定理。 *J. Aust. Math. Soc.*, 71(1):53–69, 2001年。[HW07] Fr ´ ´ *Geometric and Functional Analysis* 17 5 1551 1620, 2007 ederic Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形。( ): 10月。[LJ83] L. J. Leifman 和 D. J. Johnson 编。*The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory* 121 。美国数学会译丛：第二辑第 2472-3193 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，增订第 7 版（在线版），1983 年。[LS01] Roger C. Lyndon 和 Paul E. Schupp。 *Combinatorial group theory*。数学经典。施普林格出版社，柏林，2001年。1977年版重印。[Lyn66] Roger C. Lyndon。关于 Dehn 算法。 *Math. Ann.*, 166:208–228, 1966 年。[Mol18] David Moldavanskii。关于鲍姆斯拉格 – 索利塔尔群的剩余性质。 *Communications in Algebra* 46 9 3766 3778, 2018 , ( ): – 9月。[Mor24] Ismael Morales。关于自由群和曲面群的有限剩余刚性。 *Mathematische Annalen* 390 1 1507 1540, 2024 , ( ): – 9月。[MVW07] Alexei Miasnikov、Enric Ventura 和 Pascal Weil。自由群中的代数扩张。载于 *Geometric Group Theory*，第 225–253 页。Birkh¨auser Basel，2007年。[MZ88] Ashot Minasyan 和 Pavel Zalesskii。几乎紧致特殊双曲群是共轭可分的。 *Commentarii Mathematici Helvetici*, 91:419—439, 1988年12月。[PP14] Doron Puder 和 Ori Parzanchevski。保测词是本原的。 *Journal of the American Mathematical Society* 28 1 63 97, 2014 , ( ): – 4月。[Rib17] Luis Ribes。 *Profinite Graphs and Groups*。数学及其边缘领域成果。第 3 辑 / 现代数学综述丛书。施普林格国际出版公司，2017年。

[Rot08] Joseph J. Rotman。 *An Introduction to Homological Algebra*。Universitext。施普林格，第2版，2008年。[RZ10] Luis Ribes 和 Pavel Zalesskii。 *Profinite Groups*。数学及其边界领域成果。第3辑／现代数学综述丛书。施普林格·柏林·海德堡，第2版，2010年。[Str90] Ralph Strebel。附录。小消去群。载于 *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)* 83 *Progr. Math.* 227 273 ，第 卷，第 – 页。Birkh¨auser 波士顿，波士顿，马萨诸塞州，1990 年。[Wil08] Henry Wilton。极限群的霍尔定理。 *Geom. Funct. Anal.*，18 303，2008 1 271( )：–。[Wil18] Henry Wilton。图对中的本质曲面。 *J. Amer. Math. Soc.*，31 919，2018 4 893( )：–。[Wil21] Henry Wilton。关于曲面群和曲面字的有限剩余刚性。 *Comptes Rendus. Mathématique* 359 2 119 122, 2021 ，( )：–3月。

[Wil24] Gareth Wilkes。 *Profinite Groups and Residual Finiteness*。EMS 数学教材。EMS，第1版，2024年。[Wis00] Daniel T. Wise。具有循环边群的自由群图的子群可分性。 *The Quarterly Journal of Mathematics*，50(1)：107–129，2000年3月。[Wis04] D. T. Wise。小消去群的立方化。 *Geom. Funct. Anal.*，14 214，2004 1 150( )：–。[Wis12] Daniel T. Wise。 *From riches to raags: 3-manifolds right-angled Artin groups and , , , 第 卷。数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，2012年。[Wis 21] Daniel T. Wise。 *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*， *Annals of Mathematics Studies*第209卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州， [2021] ©2021年。[Wyk25] Julian Wykowski。自由亚交换群的有限剩余刚性，2025年。 *cubical geometry* 117 *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*

Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM
Email address: andrei.jaikin@icmat.es

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Email address: henrique.mendesdasilva@uam.es

Departamento de Matemática、 Universidade de Brasília
Email address: pz@mat.unb.br