arXiv:2603.16687v1 [math.OA] 17 Mar 2026

JBW*代数中算子交换元素上的二次与加性映射

GERARDO M. ESCOLANO、JAN HAMHALTER、ANTONIO M. PERALTA 和 ARMANDO R. VILLENA

摘要。设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是JBW*代数，其酉元集合分别记为 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$和 $\mathscr{U}(\mathfrak{B})$。我们证明， $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$在其自身中对算子交换对的Jordan 乘积封闭。假设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是没有I_1 型或I_2, 型直和项的JBW*代数，我们证明，对于每个双连续双射 $\Phi:\ \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$，只要对 $\mathfrak{A}$中的算子交换酉元u和v满足 $\Phi(\mathrm{u}\circ \mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{u})\circ\Phi(\mathrm{v})$，就存在一个线性Jordan *-同构 $\theta:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$、一个实线性映射 $\beta:\ \mathfrak{A}_{\mathfrak{sa}}\to \mathrm{Z}(\mathfrak{B}_{sa})$，以及一个可逆中心元$\mathrm{c}\in\mathfrak{B}_{sa}$，使得

$$\Phi(e^{ia}) = e^{i\beta(a)}\circ e^{ic\circ\theta(a)} = e^{i\beta(a)}\circ\theta\left(e^{i\theta^{-1}(c)\circ a}\right),$$

对所有的 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$ 均成立。当 $\mathfrak{A}$ 是一个非 I_2 型 JBW*-代数因子时，结论可以加强。

假设 $\mathfrak{A}$ 不含 I_2, 型直和项，我们证明任何满足以下条件的映射 $\Phi:\mathfrak{A}_{sa}\to\mathfrak{B}_{sa}$：

(a) 当 a 与 b 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中算子可交换时， $\Phi\big(U_a(b)\big) = U_{\Phi(a)}\big(\Phi(b)\big)$，

(b) Φ 在算子交换元素上可加，

具有以下性质：首先， $\Phi(\mathbf{1})$ 是 $\mathfrak{B}_{sa}$ 中的一个三幂等元，Peirce-2 子空间 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))$ 具有自然的 JBW*-代数结构，其自伴部分包含 Φ 的值域，并使相应的映射 $\Phi{:}\mathfrak{A}_{sa}\to\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}$ 成为一个保单位的（实线性）Jordan 同态。此外，若 Φ 是双射，则 $\Phi(\mathbf{1})$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的一个中心对称元，且 Φ 是从 $\mathfrak{A}_{sa}$ 到 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}$ 的等距实线性约当同构。

1. 引言

在量子理论中，可观测量由希尔伯特空间上的自伴算子表示H，或者更一般地，由冯·诺伊曼代数的自伴部分表示。通常认为，同时可测性等价于可观测量的交换性；然而，有几位作者指出，即使处处不交换的可观测量也可以同时测量 [28]。两个不交换的自伴算子之和定义了一个合法的可观测量，它与原来的每个算子都满足不确定性关系。从这一观点看，只有当涉及的算子彼此交换时，可观测量的加法才具有明确的物理意义。可观测量的乘法则有更大的难题，因为此类冯·诺伊曼代数的自伴部分未必

2010数学学科分类。 主要分类 46L05；46L10；46H05；17C65。关键词和短语。 Jordan–Banach代数；酉元；保交换元素乘积映射；分段 Jordan 同态。

一般而言，对底层的结合积封闭。因此，这些考量促使人们提出了分段结构这一概念，例如 C. Heunen 和 M. L. Reyes 在 [22], 中引入了该概念，其基本思想是将交换关系形式化，并且只对处于该关系中的元素对考虑代数运算。本文将考察一般代数中较弱的分段闭子集变体。设 $\mathfrak{A}$ 是一个实或复代数（不一定是结的），其乘积记作“$a \bullet b$”。分段闭子集 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{A}$ 的一个子集，并配有一个可共测关系（即一个自反对称二元关系） $\Sigma \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$，使得$a \bullet b \in \mathcal{N}$对所有$(a,b) \in \Sigma$都成立。

含幺 C*-代数A的分片闭子集示例包括所有投影、正规元、自伴元、酉元、正元和正可逆元组成的集合，分别记作 Proj(A)、 $\mathcal{N}(A)$、A_{sa}、 $\mathcal{U}(A)$、A^{+}, 和 A^{++}，其中可共测性由交换性给出。

设 $(\mathcal{N}_1, \Sigma_1)$ 和 $(\mathcal{N}_2, \Sigma_2)$ 是实或复代数 $(\mathfrak{A}, \bullet)$ 的两个分片闭子集。从 $(\mathcal{N}_1, \Sigma_1)$ 到 $(\mathcal{N}_2, \Sigma_2)$ 的分段同态 是一个映射Φ: $\mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$，满足以下性质：

(1) $(a,b) \in \Sigma_1 \Rightarrow (\Phi(a), \Phi(b)) \in \Sigma_2$;
(2) $\Phi(a \bullet b) = \Phi(a) \bullet \Phi(b)$, for all $(a,b) \in \Sigma_1$.

若 Φ 是双射，且 Φ 和 Φ^{-1} 都是分段同态，则 Φ 称为分段同构。

关于分段同构研究的一些最新成果包括以下结论：设 M 和 N 是不含 I_1 型或 I_2型直和项的冯·诺伊曼代数。那么，对于每个双连续分段同构 Φ: $M^{++} \to N^{++}$，都存在一个 Jordan *-同构 $\theta : M \to N$、一个从 M_{sa} 映到 N 的中心的自伴部分的有界线性映射 ψ，以及 M 中一个非零中心自伴元 c，使得对所有 $a \in \mathcal{M}^{++}$[17, , $\Phi(a) = e^{\psi(\log a)}\theta(a^c)$，定理 4.3]。若 Φ: $\mathcal{U}(M) \to \mathcal{U}(N)$ 是双连续分段同构，则存在 N 中一个非零中心自伴元 $z \in$、一个 Jordan *-同构 $\theta : M \to N$，以及一个从 M_{sa} 映到 N 的中心的自伴部分的有界线性映射 ψ，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$、$a \in M_{sa}$ [17, , $\Phi(e^{ita}) = e^{it\psi(a)}e^{izt\theta(a)}$，定理 5.2]。因此，对于不含 I_1 型或 I_2, 型直和项的冯·诺伊曼代数，其正可逆元拓扑群和酉元拓扑群是完备的 Jordan 不变量。

正如 Alfsen 和 Shultz 在 [1], 第6章的引言中所指出的，与结合代数相比，在 Jordan代数 上建立量子力学模型更为自然；因此，在 Jordan代数的框架内研究分段结构是自然的。在 JBW*-代数的背景下，这类代数不一定是结合的，但以自然的方式包含所有冯·诺伊曼代数（定义见下文第 2 节），我们可以用自然且经过充分研究的“算子交换性”概念替代“交换性”，并以类似于上述方式考察分段 Jordan 同态和同构。本文第二作者最近的一项研究表明，对于每个双连续分片约当同构 $\Phi: \mathfrak{A}^{+} \to \mathfrak{B}^{+}$，其中

$(\mathfrak{A},\ \circ)$ 和 $(\mathfrak{B},\ \circ)$ 是不含 I型$_1$ 或I_2, 型直和项的 JBW*-代数，存在一个 Jordan *-同态 $\theta:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$、一个可逆中心元$c\in\mathfrak{A}$以及一个从 $\mathfrak{A}_{sa}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的中心（简写为 $Z(\mathfrak{B})$）的有界线性映射 ψ，使得恒等式

$$\Phi(a)=\exp(\psi(\log a))\circ\theta(a^{c}),$$

对所有$a\in\mathfrak{A}^{++}$ [18, 定理 3.2]。自然会问，对于两个 JBW*-代数的酉元集之间的分段同构，若这两个代数不含I_1 型或I_2型直和项，能得出什么结论?

本文的目标之一是完成对两个 JBW*-代数酉元集之间分段 Jordan 同构的研究。若元素u 属于含幺 JB*-代数，且其可逆（在 Jordan 意义下）并且逆元为u^*，则称其为酉元。与含幺 C*-代数中两个酉元的结合积仍为酉元这一事实相反，两个酉元的 Jordan 乘积通常并非酉元。两个算子交换酉元的 Jordan 乘积仍为酉元，这一点并非显而易见。在第 2 节中，我们重新探讨 JB*-代数中算子交换元素的基本结果，旨在证明任意 JBW $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$,-代数中所有酉元组成的集合*（即同时也是对偶 Banach 空间的 JB $\mathfrak{A}$ -代数）是一个分片闭子集（参见引理2.2）。

在第 3 节的主要结果中，我们证明，只要 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$是没有 I_1 型或 I_2, 型直和项的 JBW*-代数，那么对于每个双射双连续的分段 Jordan 同构 $\Phi:\ \mathscr{U}(\mathfrak{A})\to\mathscr{U}(\mathfrak{B})$，都存在一个线性 Jordan *- 同构 $\theta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$、一个实线性映射 $\beta:\mathfrak{A}_{\mathfrak{sa}}\to Z(\mathfrak{B}_{sa})$，以及一个可逆中心元 $c\in\mathfrak{B}_{sa}$，使得

$$\Phi(e^{ia})=e^{i\beta(a)}\circ e^{ic\circ\theta(a)}=e^{i\beta(a)}\circ\theta\left(e^{i\theta^{-1}(c)\circ a}\right),$$

对于所有 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$均成立。因此，在这些条件下，$\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 Jordan *-同构的（见定理 3.7）。这一结果的证明基于近期对如下线性双射的研究：它们在不含 I_1 型和 I_2 型中心直和项的 JBW*-代数之间保持算子交换性，且其逆映射也保持算子交换性；相关研究见 [8],。此外，证明还依赖于一项更新的 Bunce-Wright-Mackey-Gleason 定理，该定理针对没有 I_2 型直和项的 JB W*-代数投影格上的有限可加有界向量测度，已在 [9] 中建立。定理 3.4 运用后一结果，得出如下推论；这一推论似乎具有独立的研究价值。设 $f:\mathfrak{A}_{sa}\to X$ 是一个齐次映射，并且在 $\mathfrak{A}$ 中的算子交换元素对上可加，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个没有 I_2, 型直和项的 JBW*-代数，X 是一个实赋范空间。则以下陈述等价：

(a) f 是线性且连续的；(b) f 在 $\mathfrak{A}_{sa}$的闭单位球上有界。

假设 $\mathfrak{A}$ 是一个 JBW*-代数因子，且不属于 I_2, 型，我们在定理 3.10中证明：双连续双射 Φ 从 $\mathfrak{A}$到另一个 JBW*-代数 $\mathfrak{B}$ 是分段 Jordan 同构，当且仅当存在一个 Jordan *-同构 $\theta:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$使得对于所有 u 属于 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$，以下条件之一成立：

(a) $\Phi(u) = \theta(u)$，对于所有 $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。
(b) $\Phi(u) = \theta(u^{-1})$，对于所有 $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。

第4节旨在将我们的研究与 Y. Friedman 和 J. Hakeda 关于 JBW*-代数之间二次映射的先前研究联系起来（参见 [11]）。为回顾所需概念，我们只需指出，对于 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的每一对元素 a、b，算子 $U_{a,b}$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 定义为 $U_{a,b}(x) = (a \circ b)\circ c + (c \circ b)\circ a - (a \circ c)\circ b$。我们将 U_a 简记为 $U_{a,a}$。若将 C*-代数 A 视为配备自然 Jordan 乘积的 JB*-代数，则 $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$，且 $U_{a,b}(c) = \frac{1}{2}(acb + bca)$（a、b、c ∈A）。根据 [25] 的定义，每个 JB*-代数都可视为配备三元乘积 $\{a, c, b\} = U_{a,b}(c^*)$ 的 JB*-三元组（a、b、c $\in \mathfrak{A}$）。设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 JBW*-代数，且 $\mathfrak{A}$ 不含 I_1 型直和项。由 Friedman 和 Hakeda 的一项结果（参见 [11, 命题 2.14、定理 2.15]）可知，任何满足以下条件的双射 Φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

$$\Phi(\{a,b,a\}) = \Phi\left(U_a(b^*)\right) = U_{\Phi(a)}(\Phi(b)^*)) = \{\Phi(a),\Phi(b),\Phi(a)\},$$

对所有a、$b \in \mathfrak{A}$ 而言，都是实线性等距映射。

在定理 4.3 中，我们证明下面这个刚刚评论结果的变体：设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 JBW*-代数，满足 $\mathfrak{A}$ 不含有类型I_2的直和项。假设 Φ： $\mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$ 是一个满足以下假设的映射：

(a) Φ 在算子交换元素上保持二次乘积，等价地，当a 和b 是 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的算子交换元素时，$\Phi(U_a(b)) = U^{\Phi(a)}(\Phi(b))$。$(b)$ Φ 在算子交换元素上是可加的，即，当a 和b 是 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的算子交换元素时，$\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$,

那么，$\Phi(\mathbf{1})$ 是 $\mathfrak{B}_{sa}$ 中的三幂等元，Peirce-2 子空间 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))$ 自然地带有 JBW*- 代数结构，其自伴部分包含 Φ 的像，并使映射 Φ: $\mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}$ 成为一个含单位的（实线性）Jordan 同态。此外，如果 Φ是双射的，我们可以得出结论：$\Phi(\mathbf{1})$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的中心对称元，并且 Φ是从 $\mathfrak{A}_{sa}$ 到 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}$的等距实线性 Jordan 同构。

最后，在例4.4 中，我们证明关于类型I_2 求和项的假设不能在定理3.4 和4.3中放宽。

2. JB*-代数分段闭子集上的 Jordan 乘积保持映射

Kaplansky 于 1976 年预见了其定义的 JB*-代数，恰好是 Jordan Banach *-代数；对于 Jordan 结构而言，它们所起的作用正如 C*-代数对于结合算子代数所起的作用。这些代数提供了一个适当的非结合框架，在其中可以以与 C*-代数情形高度平行的方式进行泛函分析、谱理论和状态空间几何研究。一个 *JB**-代数是一个复 Banach 空间 $\mathfrak{A}$，配备一个双线性且交换的乘积（记作 $a \circ b$）以及一个代数对合（$a \mapsto a^*$），并满足以下公理：

(1) $(a \circ b) \circ b^2 = (a \circ b^2) \circ b \quad (\forall a, b \in \mathfrak{A})$ (*Jordan identity*),

(2) $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 (\forall a \in \mathfrak{A})$，其中 $U_a(b) = 2(a \circ b) \circ a - a^2 \circ b$（$\forall a,b \in \mathfrak{A}$）。该定义等价于：自伴部分 $\mathfrak{A}$（记作 $\mathfrak{A}_{sa}$）在通常意义下是一个实 JB 代数（见 [15, 31]）。JB- 代数和 JB*-代数的基本理论可参见 [1, 15, 3, 31]，以及近期论文 [9, 18] 的引言。

这里简要回顾一下：如果存在一个元素$\mathbf{1} \in \mathfrak{A}$，使得对所有$a = a \circ \mathbf{1} = a$，，则称 JB*-代数为含幺的。若将 Jordan 乘积定义为$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$，则每个 C*-代数都是 JB*-代数。然而，JB*-代数类严格大于 C*-代数类。JBW*-代数是同时也是对偶 Banach 空间的 JB*-代数。JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的二次对偶 $\mathfrak{A}^{**}$ 是一个 JBW*-代数，其中原结构作为 JB*-子代数包含在内[15, 4。4.3 定理 4.4。3], 每个 JBW*-代数都是含幺的，具有唯一的等距预对偶，且其乘积分别弱*连续 [15, 推论 4.1.6、引理 4.1.7 和定理 4.4。16]

在每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 上，我们都可以考虑由 $\{a, b, c\} = (a \circ b^*) \circ c + (c \circ b^*) \circ a - (a \circ c) \circ b^*$ 定义的三元乘积。该三元乘积在 $\mathfrak{A}$ 上诱导出 JB*- 三元结构（参见 [25]）。若将 C*-代数 A 视为带有其自然 Jordan 乘积的代数，则导出的三元乘积满足 $\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a)$，对所有 $a, b, c \in A$ 均成立。

正如引言中所述，在寻求 C*-代数的代数不变量时，作者考察了一些特殊子集：尽管它们既不是子空间，也不对乘积封闭，却包含其某些元素对的乘积。我们首先观察，在算子交换性所给出的可共测性关系下，含幺 JB*-代数的某些子集如何呈分段封闭。

Jordan代数 $\mathfrak{A}$ 的乘积按定义是交换的，因此，如果仅采用“通常”的含义，那么 $\mathfrak{A}$ 中任意一对元素都可交换。然而，若假设结合代数 A 配备其自然的 Jordan 乘积 $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$，则很容易验证：若 $a、b \in A$ 关于结合积可交换（即 $ab = ba$），那么相应的 Jordan 乘法算子 $M_a(x) = a \circ x$ 和 $M_b(x) = b \circ x$（$x \in \mathfrak{A}$）可交换。根据标准文献，Jordan代数 $\mathfrak{A}$中的元素 a 和 b 若算子可交换，是指算子 M_a, M_b 可交换（即对每个 $c \in \mathfrak{A}$，都有 $(a \circ c) \circ b = a \circ (c \circ b)$）。例如，Jordan恒等式等价于：JB*-代数中的每个元素 a 都与其平方算子可交换。一般而言，结合性的缺失促使人们使用由三个元素 $a、b、c \in \mathfrak{A}$ 定义的结合子$[a, c, b] := [M_a, M_b](c) = (a \circ c) \circ b - a \circ (c \circ b)$。显然，在 $\mathfrak{A}$ 中，a 和 b 算子可交换，当且仅当 $[a\ \mathfrak{A}, b] = 0$.

与人们可能自然预期的相反，在一般的 Jordan代数中，“a 和b 算子可交换”与“a 和b 生成一个交换结合代数”这两个命题完全相互独立（参见 [15, 2.5.1 和例 2.5.2]）。已知（见 [30, 定理]），当a 和b 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的自伴元时，以下命题等价：

(a) a和b算子可交换。

(*b*) a 和b 生成一个结合的 JB*-代数，等价地说，是一个交换的 C*-代数。
(*c*) a 和b 生成一个由两两算子交换元素构成的结合 JB*-代数。

此外，在这种情况下 a 和 b 按照通常意义彼此可交换，即作为任意包含由 *-代数中的元素，其中 JB*-子代数由 $\mathfrak{A}$ 生成，a 和 b 作为 Jordan 自伴子代数 [29, 命题 1]。

JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的中心 由这样的元素构成：$z \in \mathfrak{A}$ ，它们与 $\mathfrak{A}$中的每个元素都算子可交换。符号$Z(\mathfrak{A})$表示 $\mathfrak{A}$的中心，其元素称为中心的。JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 的中心是一个交换 C*-代数，并且在 $\mathfrak{A}$ 存在单位元时包含其单位元（见 [1, 命题 1.52]）。JBW*-代数的中心是一个交换冯·诺依曼代数（见 [1, 命题 2.36], [7]）。如果$Z(\mathfrak{A}) = \mathbb{C}\,\mathbf{1}$，我们称 $\mathfrak{A}$ 为 JBW*-因子。

含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素a 称为可逆，如果存在一个（唯一的）$b \in \mathfrak{A}$ 满足$a \circ b = \mathbf{1}$ 且$a^2 \circ b = a$。元素b 称为a的逆元，记作a^{-1}（参见 [15, 3.2.9] 或 [3, §4.1.1]）。元素a 在 $\mathfrak{A}$ 中的（*Jordan*-）谱（记作 J-$\sigma(a)$）是所有使$a - \lambda\mathbf{1}$不可逆的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 所构成的集合。与结合巴拿赫代数的情形一样，J-$\sigma(a)$是复平面的非空紧子集（见 [3, 定理 4.1.17]。

现在我们给出一些 JB*-代数中分片闭子集的例子。JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素p 称为投影，如果$p = p^* = p^2$。我们用 Proj($\mathfrak{A}$) 表示 $\mathfrak{A}$中所有投影构成的集合。若元素$a \in \mathfrak{A}$ 满足$a^* = a$ 且其（Jordan）谱包含于 $\mathbb{R}_0^+$，则称其为正的（简记为$a \geq 0$）；等价地，a 是某个厄米元素的平方（见 [15, 3.3.3] 和 [3, §3.1.27]）。符号 $\mathfrak{A}^+$ 和 $\mathfrak{A}^{++} = \mathfrak{A}_{sa}^{++}$分别表示 $\mathfrak{A}$中所有正元和所有正可逆元素构成的集合。由上述性质可知，对于每个含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$，集合 Proj($\mathfrak{A}$) $\mathfrak{A}^+$,和$\mathfrak{A}^{++}$ 都是 $\mathfrak{A}$的分片闭子集。

本文中，JB-代数和 JB*-代数的分片闭子集也称为分片 *Jordan* 闭子集，而分段同态也称为分段 *Jordan* 同态。

我们称两个投影p，$q \in \mathfrak{A}$正交 （简写为$p \perp q$），当$p \circ q = 0$时。已知 p 和q 在正交时算子可交换（参见 [30, 定理]或 [15, 引理 2.5。5]）。

JB*-代数$\mathfrak{A}$ 中由单个厄米元素a 生成的 JB*-子代数，在等距 Jordan *-同构意义下同构于由定义在a的（Jordan）谱上的所有连续复值函数构成的交换 C*-代数；并且a 可视为其谱在 $\mathbb{C}$ 中的包含映射（参见 [15, §3。2], [1, 推论 1.19 和定义 1。20] 或 [3, 推论 4.1.72 和推论 4.1。74]）。因此，我们可以在元素a处定义连续函数演算。本文中将使用该演算，而不再特别说明。

设 A 和 B 是两个 C*-代数，且 $\mathscr{N}$是A的分片闭子集。假设 $\Delta : \mathscr{N} \to B$ 只是一个在成对

可交换元素上具有乘法性的映射。若a,b 是 $\mathscr{N}$中的两个可交换元素，则它们的像 $\Delta(a)$ 和 $\Delta(b)$,在B中自动可交换。在 JB*-代数的情形下，结论就不那么显然了。我们从 JB 代数的分片闭子集开始。

此后，给定巴拿赫空间 X 的子集 $\mathscr{S}$，我们用 $span(\mathscr{S})$ 表示 X 的闭线性张成。

命题 2.1。 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是一对 JB^*-代数，且 $\mathscr{N}_1 \subset \mathfrak{A}_{sa}$ 是一个分段 *Jordan* 闭子集。假设 $\Delta : \mathscr{N}_1 \longrightarrow \mathfrak{B}_{sa}$ 是一个映射，它保持 $\mathscr{N}_1$ 中算子可交换元素对的 *Jordan* 乘积。那么，对于 $\mathscr{N}_1$ 中任意一对算子可交换元素 a 和 b，元素 $\Delta(a)$ 和 $\Delta(b)$ 在 $\mathfrak{B}$ 中算子可交换。

证明。固定两个算子可交换元素 a、b $\in \mathscr{N}_1$。令 JB(a,b) 表示由 a 和 b 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中生成的 JB-子代数。正如上文所述，由于 a 和 b 算子可交换，JB 代数 JB(a, b) 是一个结合代数（参见 [30,定理]）。关于 $\mathscr{N}_1$ 的假设保证 JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$ 也是关于算子交换性的分段闭子集。注意，根据构造和假设，JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$ 对其元素的 Jordan 乘积封闭，因此其实线性张成的范数闭包是 $\mathfrak{A}_{sa}$ 的一个 JB-子代数。由于 a、b $\in$ JB(a, b) $\cap \mathscr{N}_1$，可知 span (JB(a, b) $\cap \mathscr{N}_1$) = JB(a, b)。考虑到这些性质，我们推得，对于 JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$ 中任意两个元素 c、d，有 c $\circ$ d $\in$ JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$，并且

$$\Delta(c)\circ\Delta(d) = \Delta(c\circ d) \in \Delta\left(\mathrm{JB}(a,b)\cap\mathscr{N}_1\right). \tag{2.1}$$

因此，Δ(JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$) 对其元素的 Jordan 乘积是闭的。现在，令 $\mathscr{C}$ 表示由 Δ(JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$) 生成的 $\mathfrak{B}_{sa}$ 的 JB-子代数。我们将证明 $\mathscr{C}$ 是结合的。为证明这一事实，只需证明 Δ(JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$) 是结合的。给定 x,y,z $\in$ JB(a,b) $\cap \mathscr{N}_1$，由 (2.1) 及 JB(a, b) 的结合性可得

$$\begin{aligned}(\Delta(x)\circ\Delta(y))\circ\Delta(z) &= \Delta(x\circ y)\circ\Delta(z) = \Delta((x\circ y)\circ z) = \Delta(x\circ(y\circ z))\\ &= \Delta(x)\circ\Delta(y\circ z) = \Delta(x)\circ(\Delta(y)\circ\Delta(z)),\end{aligned}$$

这就得到了所需的结论。现注意到，由 Δ生成的 $\mathfrak{B}_{sa}(a)$ 和 $\Delta(b)$ 的 JB-子代数必包含于 $\mathscr{C}$ 中，因此它必为 $\mathfrak{B}_{sa}$ 的一个结合子代数。 [30] 中的主要定理保证 $\Delta(a)$ 和 $\Delta(b)$ 算子可交换。 □

为了给出 JB*−代数中分片闭子集的更多例子，我们回顾一下：含单位元的 JB*−代数 $\mathfrak{A}$ 中的元素 u 若为可逆元（即存在唯一的 b $\in \mathfrak{A}$，称为 a 的逆元，使得 a $\circ$b = **1** 且 $a^2 \circ b = a$），且其逆元与 u^* 重合，则称 u 为酉元（参见 [3, §4.1.1，定理 4.2.28] 或 [5, §2]）。 $\mathfrak{A}$ 中的所有酉元构成的集合记为 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$。 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的元素 s 若满足 $s^2 = \mathbf{1}$，则称为对称元。 $\mathfrak{A}$ 中的所有对称元构成的集合记为 Symm($\mathfrak{A}$)。酉元集合的基本性质汇总于 [5, 引理 2.1]。目前，读者应注意，两个酉元的 Jordan 乘积可能不是另一个酉元；然而，当 u 和 v 为酉元时，U_u(v) 总是一个酉元。

我们继续讨论 JBW*−代数中酉元关于算子交换性的一个技术引理。

引理 2.2. 设 u、v 是 JBW^* 代数 $\mathfrak{A}$ 中的酉元。则以下条件等价：

(a) u 和 v 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换，即 u 和 v 可交换；(b) 存在 h、$k \in \mathfrak{A}_{sa}$，使得 h 和 k 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换，且 $u = e^{ih}$、$v = e^{ik}$；(c) u 与 v 及 v^* 算子可交换；(d) 由 u 和 v 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB^* 子代数是结合的。

证明。由于 $\mathfrak{A}$ 是一个 JBW* 代数，我们可以找到厄米元素 $h_1, k_1 \in \mathfrak{A}$，使得 $u = e^{ih_1}$ 且 $v = e^{ik_1}$（参见 [5, 注 3。2]）。请注意，即使假设 u 与 v 算子可交换，我们也没有直接的方法证明 h_1 与 k_1在 $\mathfrak{A}$中算子可交换。

(a) $\Rightarrow$ (b) 令 $\mathfrak{A}_{h_1,k_1}$ 和 $\mathfrak{A}_{u,v}$ 分别表示由 $\{h_1, k_1\}$ 和 $\{u, v\}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中生成的 JB*-子代数。$\mathfrak{A}_{u,v}$ 在 $\mathfrak{A}$ 中的弱*-闭包记作 $\mathfrak{A}_{u,v}^{w^*}$，它是一个 JBW*-子代数。根据 Shirshov-Cohn 定理（参见 [15,定理 2.4.14] 和 [31]），存在一个含单位元 1 的含幺 C*-代数 A，其中 $\mathfrak{A}_{h_1,k_1}$ 是一个 JB*-子代数。显然，$u, v \in \mathfrak{A}_{u,v} \subseteq \mathfrak{A}_{h_1,k_1} \subseteq A$ 是 JB*-子代数。由于 u 和 v 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换，由 [8, 命题 1.2] 可知，u 和 v 作为 A 中的元素可交换。记 $A_{u,v}$ 为 A 中由 u 和 v 生成的 C*-子代数；由于 u 和 v 在 A 中可交换，它必为交换代数。由于$\mathfrak{A}_{u,v} \subseteq A_{u,v}$，可推知 $\mathfrak{A}_{u,v}$ 必为结合的，因此 $\mathfrak{A}_{u,v}^{w^*}$ 是一个结合的 JBW*-代数，故为交换冯·诺伊曼代数。根据 [24, 命题 4.4.10]（或根据 [5, 注 3.2]），存在 $h, k \in \left(\mathfrak{A}_{u,v}^{w^*}\right)_{sa} \subseteq \mathfrak{A}_{sa}$，使得 $u = e^{ih}$ 且 $v = e^{ik}$。鉴于 h 和 k 是 $\mathfrak{A}$ 中的自伴元，且属于结合的 JBW*-代数 $\mathfrak{A}_{u,v}^{w^*}$，van de Wetering 提出的相关结果（参见 [30, 定理]）保证 h 和 k 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换，证毕。

$(b) \Rightarrow (c)$ 在（b）的假设下，再次应用 [30, 定理]可知，h 和k 的任意两个幂算子可交换。现在注意到

$$[M_u, M_{v^*}] = [M_{e^{ih}}, M_{e^{-ik}}] = \sum_{j,n=0}^{\infty} \frac{i^{j-n}}{j!n!} [M_{h^j}, M_{k^n}] = 0,$$

这证明了u和v^* 算子可交换。类似的论证可得出结论：u和v算子可交换。

蕴含关系（c）$\Rightarrow$（a）和（b）$\Rightarrow$（d）显然成立（后一蕴含关系参见 [30, 定理]）。

$(d) \Rightarrow (b)$ 现在假设由 u 和 v生成的 $\mathfrak{A}$ 中的 JB*-子代数（记作 $\mathfrak{A}_{u,v}$）是结合的。因此，$\mathfrak{A}_{u,v}$ 是一个交换 C*-代数，其在 $\mathfrak{A}$ 中的弱*-闭包是一个交换冯·诺伊曼代数。与 $(a) \Rightarrow (b)$ 的证明类似，存在 $h_{k_1} \in (\mathfrak{A}_{u,v}^{w^*})_{sa}$，它们在 $\mathfrak{A}$ 中算子对易，使得$u = e^{ih_1}$ 且 $v = e^{ik_1}$。□

注 2.3。 在含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$中，集合 $\{e^{ih}: h\in\mathfrak{A}_{sa}\}$ 可以是 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$(参见 [5, 注 3。2])。引理 2.2 只需考虑 在 内部的情形，即可证明对所有 u、$v\in\mathscr{U}(\mathfrak{A})$，以下命题等价： $\mathfrak{A}$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$内:
(1) u 与v 在 $\mathfrak{A}$中算子可交换，即u 与v可交换；(2) 存在$h,k\in\mathfrak{A}_{sa}^{**}$，使得$h$ 与 k 在 $\mathfrak{A}^{**}$中算子可交换，$u=e^{ih}$ 且$v=e^{ik}$；(3) u 与v算子可交换，且v^*；(4) 由u 与v生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*子代数是结合的。

事实上，对于所有$h,k\in\mathfrak{A}_{sa}$，以下陈述等价:
(a) 对所有 $t\in\mathbb{R}$，e^{ith} 与 e^{itk} 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换；(b) h 与 k 算子可交换；(c) 由 h 与 k 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*子代数是结合的；(d) 对所有 s,t $\in\mathbb{R}$，$U_{e^{ith}}\left(e^{2isk}\right)=\{e^{ith},e^{-i2sk},e^{ith}\}=\{e^{isk},e^{-i2th},e^{isk}\}=U_{e^{isk}}\left(e^{2ith}\right)$。

由 [30, 定理]可得等价关系 (b) $\Leftrightarrow$ (c)。刚才引用的结果还保证，若 h 与 k 算子可交换，则对任意实数 t，th 与 tk 的任意两个幂都算子可交换，因此 e^{ith} 与 e^{itk} 在 $\mathfrak{A}$对所有 $t\in\mathbb{R}$均算子可交换。也就是说，(b) $\Rightarrow$ (a)。

假设 (a) 成立，我们可推出

$$[M_h,M_k]=\left[M_{\lim_{t\to0}\frac{e^{itk}-\mathbf{1}}{t}},M_{\lim_{t\to0}\frac{e^{ith}-\mathbf{1}}{t}}\right]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left[M_{e^{itk}}-M_{\mathbf{1}},M_{e^{ith}}-M_{\mathbf{1}}\right]=0,$$

因此 h 与 k 在 $\mathfrak{A}$中算子可交换。因此，$(a)\Rightarrow(b)$。

显然，$(b)\Rightarrow(d)$。为证明 $(d)\Rightarrow(b)$，令 $s\in\mathbb{R}$, 固定，并定义两个映射ω_1, $\omega_2:\mathbb{C}\to\mathfrak{A}$ 如下:

$$\omega_1(\lambda)=U_{e^{\lambda h}}(e^{2isk}),\text{ and }\omega_2(\lambda)=U_{e^{isk}}(e^{2\lambda h}),\ (\lambda\in\mathbb{C}).$$

显然， ω_1 和 ω_2 是全纯映射，根据假设，它们在虚轴上相同，因此在 $\mathbb{C}$上定义的是同一个函数。$s\in\mathbb{R}$ 的任意性保证

$$U_{e^{\lambda h}}(e^{2isk})=U_{e^{isk}}(e^{2\lambda h}),\ (\lambda\in\mathbb{C},s\in\mathbb{R}),$$

也就是说，若固定 $\lambda\in\mathbb{C}$，全纯映射 $\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2:\mathbb{C}\to\mathfrak{A}$, $\tilde{\omega}_1(\mu)=Ue^{\lambda h}(e^{2\mu k})$ $\tilde{\omega}_2(\mu)=Ue^{\mu k}(e^{2\lambda h})$ 在虚轴上相同，因此在整个复平面上也相同。因此，

$$U_{e^{\lambda h}}(e^{2\mu k})=U_{e^{\mu k}}(e^{2\lambda h}),\text{ for all }(\lambda,\mu\in\mathbb{C}),$$

因此 $Ue^{\frac{th}{2}}(e^{tk})=Ue^{tk2}(e^{th})$。 [18]中的命题 1.1 保证，对于所有实数$t$，$e^{th}$和 e^{tk} 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中（从而在 $\mathfrak{A}$上）算子可交换。与上述论证类似，可以证明h 和k 算子可交换。

注 2.4。 设u 是含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$中的一个酉元。虽然我们并不总能将$u=e^{ih}$ 写成某个$h\in\mathfrak{A}_{sa}$ 的形式（参见前一条注释），但总能找到$h\in\mathfrak{A}_{sa}^{**}$，使得$u=e^{ih}$ 在 $\mathfrak{A}^{**}$中成立。$\mathfrak{A}^{**}$的 JB*-子代数 $\mathfrak{A}^{**}(h,\mathbf{1})$ 是结合的，因此与某个交换冯·诺伊曼代数 JB*-同构。

显然， $\mathfrak{A}^{**}(h,\mathbf{1})$ 包含u 以及由u 和$\mathbf{1}$生成的整个 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数。因此，由u 和 $\mathbf{1}$ 生成的 $\mathfrak{A}$的 JB*-子代数是结合的。

由上述引理 2.2 可知，对于每个 JBW*-代数 $\mathfrak{A}$，集合$\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 是分片闭的。下面给出关于 JBW2.1 中酉元集合的一个版本*-代数。

命题 2.5。 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 *JBW**-代数。假设 $\Delta:\ \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{B}$ 是一个在 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$中保持算子交换元素的 *Jordan* 乘积的映射。那么，对于 $U(\mathfrak{A})$中的任意一对算子交换元素 u、v，其对应的像 $\Delta(u)$和 $\Delta(v)$ 在 $\mathfrak{B}$中算子可交换。

证明。沿用上述记号，令符号 JB*(u, v) 和 JB*(Δ(u) Δ(v)) 分别表示由 {u,v **1**} 和 {Δ(u) Δ(v) **1**} 生成的 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 的 JB*-代数。由于 u 和 v 是算子交换的，根据引理 2.2，JB*(u, v) 是结合的，因此是一个交换且含酉元的 C*-代数。

注意到集合 $\mathscr{U}$(JB$^*(u,v)$) $=\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \cap$JB$^*(u,v) \subseteq \mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 是自伴的，并且对 Jordan 乘积封闭，且包含 $u,v,$和 $\mathbf{1}$。因此，JB$^*(u,v)$ $=span$(JB$^*(u,v) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{A})$)。

给定 $w_1,w_2,w_3 \in \mathscr{U}$(JB$^*(u,v)$)，关于 Δ 的假设保证了

$$\Delta(w_1)\circ\Delta(w_2) = \Delta(w_1\circ w_2) \in \Delta\left(\mathscr{U}\left(\text{JB}^*(u,v)\right)\right),$$

and

$$\begin{aligned}\Delta(w_1)\circ(\Delta(w_2)\circ\Delta(w_3)) &= \Delta(w_1)\circ\Delta(w_2\circ w_3) = \Delta(w_1\circ(w_2\circ w_3))\\ &= \Delta((w_1\circ w_2)\circ w_3) = \Delta(w_1\circ w_2)\circ\Delta(w_3) = (\Delta(w_1)\circ\Delta(w_2))\circ\Delta(w_3).\end{aligned}$$

综上可证明， Δ($\mathscr{U}$(JB*(u, v))) 对其元素的 Jordan 乘积封闭，并且 Jordan 乘积在其中任意三个元素上满足结合律。由于显然有Δ(u) Δ(v) $\in$ Δ($\mathscr{U}$(JB*(u,v)))，因此，由 Δ(u) Δ(v) 和单位元生成的 $\mathfrak{B}$ JB*-子代数必然是结合的。最后，引理 2.2 保证Δ(u) 和 Δ(v) 算子可交换。□

3. JBW*-代数中酉元集合上的 Jordan 乘积保持映射

我们在上一节已经看到，JBW*-代数中的酉元集合相对于算子交换性是一个分片闭子集。本节研究含幺 JB*-代数中某些酉元集合之间的分段 Jordan 同态。

根据格尔范德–奈马克定理，每个酉元 u 在一个含幺C^*-代数 A 中都可以被视为代数 $B(H)$中的一个酉元，其中该代数由复希尔伯特空间 H上的所有有界线性算子构成，且 u 自身作为酉算子作用于H。因此，A 中的单参数酉群符合斯通单参数定理等著名结果的假设。然而，含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 中的酉元并不总能被视为某个复希尔伯特空间 H上的酉元。得益于 [5, 定理 3。1] （另见

[12])，我们现在得以获得一致连续单参数酉群的斯通定理的一个真正的 Jordan 类比，适用于含幺 JB*-代数。

命题 3.1。设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为含幺 *JB**-代数。设 $\mathscr{N}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的一个分片闭子集，包含 $\exp(i\mathfrak{A}_{sa})$。最后假设

$$\Phi : \mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{U}(\mathfrak{B})$$

是一个连续的分段 *Jordan* 同态。那么存在一个映射 $f\colon \mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$，它是齐次的，在算子交换元素上可加，保持算子交换性，并满足以下恒等式：

$$\Phi(e^{ita}) = e^{if(a)t}, \textit{ for all } a \in \mathfrak{A}_{sa} \textit{ and } t \in \mathbb{R}.$$

证明。设我们选取一个 $\in \mathfrak{A}_{sa}$，并定义一个映射

$$q : \mathbb{R} \to \exp(i\mathfrak{A}_{sa}) \subseteq \mathscr{N}, \ q(t) = e^{ita}.$$

因此，q 的值域包含于由*生成的结合 JB*-子代数中，该子代数由a 和单位元生成。因此，$q(\mathbb{R})$由$\mathscr{N}$中的算子可交换酉元组成（参见注2.3）。现在考虑映射$Q = \Phi q : \mathbb{R} \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$。映射 Φ 和$q$ 的性质保证了

$$Q(t+s) = \Phi(q(s) \circ q(t)) = \Phi(q(s)) \circ \Phi(q(t)) = Q(s) \circ Q(t),$$

因此，Q 是 $\mathfrak{B}$ 中酉元构成的连续单参数群。考虑到由集合 $\{\Phi(e^{ita}) : t \in \mathbb{R}\}$ 生成的 JB*-子代数必为交换 C*-代数（参见命题 2.5），或者应用 [5, 定理 3.1]，我们可推出存在唯一的 f (a) $\in \mathfrak{B}_{sa}$，使得对所有 t $\in \mathbb{R}$，均有 $\Phi(e^{iat}) = Q(t) = e^{it} f(a)$。因此，我们定义了一个函数 f : $\mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$，它满足结论中的最后一个恒等式。接下来我们将证明 f 的其他性质。

取两个算子交换元素 a、b $\in \mathfrak{A}_{sa}$。根据构造，我们有

$$e^{itf(a+b)} = \Phi(e^{it(a+b)}) = \Phi(e^{ita}) \circ \Phi(e^{itb}) = e^{itf(a)} \circ e^{itf(b)} = e^{it(f(a)+f(b))} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

这保证了 $f(a+b) = f(a) + f(b)$，也就是说，f在算子交换元素上是可加的。f 的实数 1-齐次性更容易验证。

关于 Φ 的假设意味着，对于上述 a 和 b，$\Phi(e^{ita}) = e^{it} f(a)$ 以及$\Phi(e^{isb}) = e^{is} f(b)$ 对任意 s,t $\in \mathbb{R}$ 都是算子交换的。由注 2.3 可得，f (a) 和 f (b) 是算子交换的。□

下一个引理表明，两个含单位 JB*-代数的酉元集之间的分段 Jordan 同态是保单位的。

引理 3.2。设 $\Phi\colon \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是两个含单位 *JB**-代数的酉元集之间的分段 *Jordan* 同态。那么 $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

证明。由于 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 中的 1 与每个其他酉元都算子可交换，尤其是与其自身算子可交换，因此由假设可得 $\Phi(1) = \Phi(\mathbf{1}^2) = \Phi(1)^2$。也就是说，$\Phi(1)$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的酉元和幂等元。如注 2.4 所示，由 $\mathfrak{B}$ 生成的、以 $\Phi(1)$ 为生成元的 JB*-子代数是一个含幺交换 C*-代数，因此 $\Phi(1) = \mathbf{1}$. □

接下来，我们刻画两个 JBW*-代数的酉元集之间的分段 Jordan 同构。

定理 3.3。 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是两个 *JBW**-代数，并设 $\Phi: \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是相应酉元集合之间的双连续双射。那么，以下条件等价：

(i) Φ 是分段 *Jordan* 同构；*(ii)* 对于所有满足 u 与 v 算子可交换的 u、$v \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$，有 $\Phi(U_u(v)) = U^{\Phi(u)}(\Phi(v))$，且对于所有满足 u'、$v' \in \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 且 u' 与 v' 算子可交换的 u、v，有 $\Phi^{-1}(U_{u'}(v')) = U_{\Phi^{-1}(u')}(\Phi^{-1}(v'))$；*(iii)* 存在一个双射 $f: \mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$，它是齐次的，在算子交换元素上可加，且双向保持算子交换性，并满足

$$\Phi(e^{ita}) = e^{itf(a)}, \text{ and } \Phi^{-1}(e^{itb}) = e^{itf^{-1}(b)},$$

对所有的 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$、$b \in \mathfrak{B}_{sa}$ 和 $t \in \mathbb{R}$。

证明。 引理 3.2 推出 $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$。

$(i) \Rightarrow (ii)$ 取两个算子交换元素 u 和 v 属于 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$。考虑由 $\mathfrak{A}$ 中的 u、v 和 $\mathbf{1}$ 生成的 *JBW**-子代数，它是一个结合代数（见注 2.3），尤其是一个交换冯·诺伊曼代数，由此可容易推出

$$U_u(v) = u^2 \circ v.$$

因此，由于 Φ 是分段 Jordan 同构，我们得到 $\Phi(u^2 \circ v) = \Phi(u)^2 \circ \Phi(v)$，其中 $\Phi(u^2) = \Phi(u)^2$，并且根据假设，$\Phi(u)$ 与 $\Phi(v)$ 算子可交换（参见引理 2.2）。在由 $\Phi(u)$ $\Phi(v)$ 和 1 生成的结合 JBW*-子代数中进行论证，可得 $U^{\Phi(u)}(\Phi(v)) = \Phi(u)^2 \circ \Phi(v)$。因此，$\Phi(U_u(v)) = U^{\Phi(u)}(\Phi(v))$，这正是我们要证明的结论。对 Φ^{-1} 应用类似论证，即可证明 (ii) 中陈述的第二部分。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 取两个算子交换元素 u,v $\in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。由引理 2.2，存在两个算子交换元素 h, k $\in \mathfrak{A}_{sa}$，使得 u $= e^{ih}$，v $= e^{ik}$。根据关于 Φ 的假设可得 $\Phi(u^2) = \Phi(U_u(1)) = U^{\Phi(u)}(\Phi(1)) = U^{\Phi(u)}(1) = \Phi(u)^2$。通过归纳论证可得，对于每个 n $\in \mathbb{N}$，都有 $\Phi(u^n) = \Phi(u)^n$。接下来我们将证明 Φ 保持单参数酉群。

元素 $w = e^{ih/2} \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 算子与 u 及 u^{-1}（例如，参见引理 2.2），并满足 $w^2 = u$。上一段的结论意味着 $\Phi(w)^2 = \Phi(w^2) = \Phi(u)$。关于 Φ 的假设给出

$$\mathbf{1} = \Phi(\mathbf{1}) = \Phi(U_w(u^{-1})) = U_{\Phi(w)}(\Phi(u^{-1})).$$

由 Shirshov-Cohn 定理，由 $\Phi(u^{-1})$、$\Phi(w)$ 和 $\mathbf{1}$ 生成的 JBW*-子代数是 C*-代数 A 的 JB*-子代数，因此考虑 A 上的结合乘积（记作并置乘法），我们可以写成

$$\mathbf{1} = U_{\Phi(w)}(\Phi(u^{-1})) = \Phi(w)\Phi(u^{-1})\Phi(w),$$

这意味着

$$\Phi(u^{-1}) = \Phi(w)^{-2} = (\Phi(w)^2)^{-1} = \Phi(u)^{-1}.$$

因此，对所有自然数u^{-n}， $= \Phi((u^{-1})^n) = \Phi(u^{-1})^n = \Phi(u)^{-n}$，进而得到 $\Phi(u^k) = \Phi(u)^k$，对每个$k \in \mathbb{Z}.$。现在取n，$n' \in \mathbb{Z}$以及m，$m' \in \mathbb{N}$。由前面的结论可推得

$$\begin{aligned}\Phi\left(e^{i(\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'})h}\right) &= \Phi\left(e^{i\frac{nm'+n'm}{mm'}h}\right) = \Phi\left(e^{i\frac{1}{mm'}h}\right)^{nm'+n'm} \\ &= \Phi\left(e^{i\frac{1}{mm'}h}\right)^{nm'} \circ \Phi\left(e^{i\frac{1}{mm'}h}\right)^{n'm} = \Phi\left(e^{i\frac{n}{m}h}\right) \circ \Phi\left(e^{i\frac{n'}{m'}h}\right).\end{aligned}$$

Φ 的连续性保证了前述单位元等式在n m 和n' m' 被一般实数s，t替换时仍然成立，即，

$$\Phi\left(e^{i(s+t)h}\right) = \Phi\left(e^{ish}\right) \circ \Phi\left(e^{ith}\right) \quad (s,t \in \mathbb{R}),$$

这意味着映射 $t \mapsto \Phi\left(e^{ith}\right)$ 是一个连续的单参数酉群，对k也同样成立。根据 [5, 定理3.1] 存在自伴元h'，$k' \in \mathfrak{B}_{sa}$使得 $\Phi\left(e^{ith}\right) = e^{ith'}$且 $\Phi\left(e^{itk}\right) = e^{itk'}$对所有$t \in \mathbb{R}$均成立。现在考虑等式

$$U_{e^{ith}}\left(e^{2sik}\right) = U_{e^{isk}}\left(e^{i2th}\right), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

通过 Φ 变换为

$$U_{e^{ith'}}\left(e^{2sik'}\right) = U_{e^{isk'}}\left(e^{i2th'}\right), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

由注 2.3 可推得，对于所有 s,t $\in \mathbb{R}$，元素 $\Phi(e^{ith}) = e^{ish'}$ 和 $\Phi(e^{isk}) = e^{isk'}$ 算子可交换；特别地， $\Phi(e^{ih}) = \Phi(u)$ 与 $\Phi(e^{ik}) = \Phi(v)$ 算子可交换。因此，我们可以将 (ii) 中的单位元等式改写为

$$\Phi(u^2 \circ v) = \Phi(U_u(v)) = U_{\Phi(u)}(\Phi(v)) = \Phi(u)^2 \circ \Phi(v) = \Phi(u^2) \circ \Phi(v).$$

由于在 JBW*-代数中，任意酉元都可以写成另一个酉元的平方（参见注 2.4），我们得到 Φ是一个分段 Jordan 同态。对 Φ^{-1}应用相同的论证，可得 Φ^{-1} 也是一个分段 Jordan 同态。

$(i) \Rightarrow (iii)$ 根据命题 3.1，存在齐次映射 $f\colon \mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$ 和 $g\colon \mathfrak{B}_{sa} \to \mathfrak{A}_{sa}$，它们在算子交换元素上可加，保持算子交换性，并满足 $\Phi(e^{ith}) = e^{it f(h)}$，以及 $\Phi^{-1}(e^{itk}) = e^{itg(k)}$，对所有$h \in \mathfrak{A}_{sa}$、$k \in \mathfrak{B}_{sa}$和 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。由此可得

$$e^{ith} = \Phi^{-1}(\Phi(e^{ith})) = \Phi^{-1}(e^{itf(h)}) = e^{itg(f(h))}, \text{ for all } t \in \mathbb{R}.$$

因此，我们得出，对于所有$h \in \mathfrak{A}_{sa}$，$g(f(h)) = h,$。类似地，对于所有$k \in \mathfrak{B}_{sa}$，可得$f(g(k)) = k,$。因此，f和g 是双射，且$f = g^{-1}$，其余部分显然。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 u 和 v 是 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 中的两个算子交换元素。根据引理 2.2，存在算子交换元素 h、k $\in \mathfrak{A}_{sa}$，满足 u $= e^{ih}$，且 v $= e^{ik}$。关于 Φ 和 f 的假设保证 f(h) 和 f(k) 的算子

可交换，$\Phi(u) = \Phi(e^{ih}) = e^{if(h)}$ 且 $\Phi(v) = \Phi(e^{ik}) = e^{if(k)}$ 算子可交换，$f(h+k) = f(h)+f(k)$，且

$$\Phi(u)\circ\Phi(v) = e^{if(h)}\circ e^{if(k)} = e^{i(f(h)+f(k))} = e^{if(h+k)} = \Phi(e^{i(h+k)}) = \Phi(u\circ v).$$

这表明 Φ 是一个分段 Jordan 同态。类似地，我们可以证明 Φ^{-1} 是一个分段 Jordan 同态。□

证明在定理 *3.3*(iii)中得到的映射 f 是连续的，将需要更深入的论证。

关于保持映射的持续研究正在深入探讨：何时可以在假设中放宽对某些映射线性的要求。例如，[18]中的定理 3.1 保证，若 $\mathfrak{M}$ 是一个不含 I_2 型直和项的 JBW 代数，且 $\mathfrak{J}$ 是一个 JB 代数，则每个在算子交换元素上可加的正齐次映射 g：$\mathfrak{M}\to\mathfrak{J}$ 都是有界线性映射。注意，每个这样的映射 g 都满足 $\|g(p)\| \le \|g(\mathbf{1})\|$，因此它在 $\mathfrak{M}$的投影集上是有界的。

本文需要用到一个工具：对于 JBW 代数之间的齐次映射，只要它在算子交换元素上可加，并且在闭单位球上有界，那么线性就是其自动具备的性质。事实上，这一结果是 JBW*-代数的 Mackey–Gleason–Bunce–Wright 定理的推论。经过数十年的等待，这一猜想最近终于在 [9] 中得到证实。

定理 3.4. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个不含 I_2, 型直和项的 *JBW**代数，X 是一个实赋范空间。假设 $f:\mathfrak{A}_{sa}\to X$ 是一个在算子交换元素上可加的齐次映射，也就是说，只要 a 和 b 在 $\mathfrak{A}$中算子可交换，就有 $f(a+b) = f(a)+f(b)$。那么以下陈述等价：

(a) f 是线性且连续的；(b) f 在 $\mathfrak{A}_{sa}$的闭单位球上有界。

证明。显然，(a) ⇒(b)。现在假设 f 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 的闭单位球上有界，也就是说，存在一个正数 L，使得对所有满足 $\|a\| \le 1$ 的 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$，都有 $\|f(a)\| \le L$。由齐次性可得，对所有 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$，都有 $\|f(a)\| \le L\|a\|$。考虑映射 $\mu = f|_{\text{投影集}(\mathfrak{A})}$：投影集$(\mathfrak{A}) \to X$ $\mu(p) = f(p)$。由于 $\mathfrak{A}$ 算子可交换中的正交投影具有相应性质，由 f 的性质可知，该映射 μ 是一个有限可加测度。显然，对所有 $p \in$投影集$(\mathfrak{A})$，都有 $\|\mu(p)\| \le L$。根据 [9] 中的定理 6.2，存在一个有界线性映射 $T:\mathfrak{A}_{sa}\to X$，使得对所有 $p \in$ 投影集$(\mathfrak{A})$，都有 $f(p) = \mu(p) = T(p)$。

最后，我们将证明 $T = f$。固定 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$。由 a 和**1**生成的 JBW*-子代数 ${\mathfrak{A}_a}^{W^*}$,是一个交换冯·诺伊曼代数。根据前面对算子交换元素的讨论，${\mathfrak{A}_a}^{W^*}$ 自伴部分中的任意两个元素在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换（参见 [30, 定理]及上一节）。对于每个正的 ε，我们都能找到两两正交的投影 $p_1,\ldots,p_m$，它们属于 ${\mathfrak{A}_a}^{W^*}$，以及实数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$，使得

$\left\|a-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j\right\|<\dfrac{\varepsilon}{2\max\{L,\|T\|\}}$. The above properties assure that

$$f\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j f(p_j)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j T(p_j)=T\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j\right),$$

$$\left\|f\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j\right)-f(a)\right\|=\left\|f\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j-a\right)\right\|\leq L\left\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j-a\right\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$\left\|T\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p_j\right)-T(a)\right\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, and thus $\|f(a)-T(a)\|<\varepsilon$. It follows from the arbitrariness of $\varepsilon>0$ that $f(a)=T(a)$. □

我们将在例 4.4 中看到，前述定理 3.4对于 I 型 JBW*- 代数I_2并不成立。

我们接下来给出一个主要借鉴自 [17]的技术引理。因此，以下用符号 $\mathbb{T}$ 表示 $\mathbb{C}$的单位球面。

引理 3.5。设 u 是含幺 *JBW**-代数 $\mathfrak{A}$中的一个酉元，且 n 是满足 $n\|u-\mathbf{1}\|<2$. 的自然数。那么 $n\|u-\mathbf{1}\|\leq\frac{\pi}{2}\|u^n-\mathbf{1}\|$.

证明。在 [17, 定理5.2 的证明（第 13] 页）中已证明，对于 $z\in\mathbb{T}$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 条件 $n|z-1|<2$ 意味着 $n|z-1|\leq\frac{\pi}{2}|z^n-1|$.。由于我们可以将由$u$ 和$\mathbf{1}$ 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数识别为某个紧豪斯多夫空间 Ω上的形如$C(\Omega)$的含幺交换冯·诺伊曼代数，因此，将这一识别与上述针对 $\mathbb{T}$ 中元素的结论简单结合，可得

$$n\|u-\mathbf{1}\|\leq\frac{\pi}{2}\|u^n-\mathbf{1}\|.$$

□

接下来我们证明，酉元集之间的每个连续含幺分段Jordan同态在单位元处都是局部利普希茨连续的。

引理 3.6. 设 $\Phi:\mathscr{U}(\mathfrak{A})\to\mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是两个 *JBW**-代数的酉元集之间的一个连续含幺分段 *Jordan*同态。则 Φ 在$\mathbf{1}$处局部利普希茨连续，也就是说，存在 r、$L>0$ 满足以下性质：

$$\textit{For all } u\in\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \textit{ with } \|u-\mathbf{1}\|<r, \textit{ we have } \|\Phi(u)-\mathbf{1}\|\leqslant L\|u-\mathbf{1}\|.$$

证明。 反证法：我们假设存在一个序列 $(u_k)_k\subseteq\mathscr{U}(\mathfrak{A})$，满足：

$$\|u_k-\mathbf{1}\|<\frac{1}{k}, \text{ and } 1\geq\varepsilon_k=\|\Phi(u_k)-\mathbf{1}\|>k\|u_k-\mathbf{1}\|.$$

Φ 的连续性意味着 $\varepsilon_k\to 0$。令 $(m_k)_k$ 为一个自然数序列，使得

$$\frac{1}{m_k+1}<\varepsilon_k\leq\frac{1}{m_k}.$$

不等式

$$\|u_k^{m_k}-\mathbf{1}\| \leq \|u_k-\mathbf{1}\|\,\|u_k^{m_k-\mathbf{1}}+\cdots+\mathbf{1}\| \leq m_k\|u_k-\mathbf{1}\| \leq \frac{m_k\varepsilon_k}{k} \leq \frac{1}{k},$$

可确保$u^{m_k}{}_k \to \mathbf{1}$ 在范数意义下成立，因此 $\Phi(u_k)^{m_k+1} \to \mathbf{1}$。

由于显然可以假设$m_k > 2$ 对所有k, 成立，我们推得

$$2(m_k+1)\|\Phi(u_k)-\mathbf{1}\| = 2(m_k+1)\varepsilon_k \leq 2\left(1+\frac{1}{m_k}\right) < 3,$$

因此$(m_k+1)\|\Phi(u_k)-\mathbf{1}\| < 2$. 现在，引理3.5 可确保

$$1 = \frac{1}{\varepsilon_k}\|\Phi(u_k)-\mathbf{1}\| \leq (m_k+1)\|\Phi(u_k)-1\| \leq \frac{\pi}{2}\|\Phi(u_k)^{m_k+1}-\mathbf{1}\|,$$

这与 $\Phi(u_k)^{m_k+1} \to \mathbf{1}$ 矛盾。 □

现在我们可以精确描述 JBW*代数的酉元集之间所有双连续分片约当同构。

定理 3.7。 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为不含 I_1型和 I_2型直和项的 *JBW**代数。设 Φ： $\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 为双射且双连续的分段 *Jordan* 同构。则存在一个线性 *Jordan* *同构 θ： $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$、一个实线性映射 β： $\mathfrak{A}_{\mathfrak{sa}} \to Z(\mathfrak{B}_{sa})$，以及一个可逆中心元 $c \in \mathfrak{B}_{sa}$，使得

$$\Phi(e^{ia}) = e^{i\beta(a)} \circ e^{ic\circ\theta(a)} = e^{i\beta(a)} \circ \theta\left(e^{i\theta^{-1}(c)\circ a}\right),$$

对所有 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$均成立。特别地，这种分段同构 Φ： $\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 的存在保证 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ *Jordan* *同构。

证明。 我们知道 $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ (参见引理 3.2)。

引理 3.6保证 Φ 在 $\mathbf{1}$ 处具有局部 Lipschitz 性质，r、$L > 0$为某些正的常数。由定理 3.3 我们还知道存在一个双射f： $\mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$ 它是齐次的，在算子交换元素上可加，双向保持算子交换性，并且满足

$$\Phi\left(e^{ita}\right) = e^{itf(a)}, \text{ for all } t \in \mathbb{R}, a \in \mathfrak{A}_{sa}.$$

我们的下一个目标是应用定理f，证明其有界且线性。为此，我们需要证明f 在 $\mathfrak{A}_{sa}$的单位球上有界。固定 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$。利用引理 3.6中的局部 Lipschitz 性质，对于 $t \in \mathbb{R}$ 满足 $|t|$ 足够小时，我们有

$$\|e^{itf(a)}-\mathbf{1}\| = \|\Phi(e^{iat})-\mathbf{1}\| \leq L\|e^{iat}-\mathbf{1}\|,$$

and

$$\left\|\frac{e^{itf(a)}-\mathbf{1}}{t}\right\| \leq L\left\|\frac{e^{ita}-\mathbf{1}}{t}\right\|, \text{ for all real } t \text{ with } |t| \text{ small.}$$

令 $t \to 0$取极限，可得 $\|f(a)\| \leq L\ \|a\|$. 定理 3.4 蕴含 f是一个有界线性映射。类似地，我们可以证明 f^{-1} 也是连续的。

现在，根据 [8, 定理 8。10] 存在一个可逆元素 $c \in Z(\mathfrak{B})_{sa}$、一个 Jordan 同构 $\theta\colon \mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$，以及一个线性映射 $\beta\colon \mathfrak{A}_{sa} \to Z(\mathfrak{B}_{sa})$ 满足

$$f(a) = c \circ \theta(a) + \beta(a)$$

对所有$a \in \mathfrak{A}_{sa}$均成立。显然，θ 可延拓为从 $\mathfrak{A}$ 到$\mathfrak{B}$的线性 Jordan *-同构。此外，考虑到 $\beta(a)$是一个中心元，我们得出

$$\Phi(e^{ia}) = e^{if(a)} = e^{i(c\circ\theta(a)+\beta(a))} = e^{i\beta(a)} \circ e^{ic\circ\theta(a)} = e^{i\beta(a)} \circ \theta\left(e^{i\theta^{-1}(c)\circ a}\right),$$

对所有$a \in \mathfrak{A}_{sa}$均成立，证毕。 □

对于非I_1 型的 JBW*-因子，或I_2 型的 JBW*-因子，有如下推论。

推论 3.8. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是既非 I_1 型也非 I_2,型的 *JBW**代数因子，且$\Phi\colon \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是满足前一个定理假设的映射。那么，存在一个 *Jordan* *同构 $\theta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$、$\mathfrak{A}_{sa}$ 上的实线性泛函 β，以及一个非零实数 α，使得

$$\Phi(e^{ia}) = e^{i\beta(a)}e^{i\alpha\theta(a)} = e^{i\beta(a)}\theta\left(e^{i\alpha a}\right) = e^{i\beta(a)}\theta\left((e^{ia})^{\alpha}\right),$$

对所有 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$均成立。

接下来给出几个技术结果。

引理 3.9. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是含幺 *JB**代数，且 $\Phi\colon \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是一个双射分片 *Jordan* 同构。则以下结论成立：
(a) $\Phi(Z(\mathfrak{A}) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{A})) = Z(\mathfrak{B}) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{B})$；*(b)* $\Phi(Symm(\mathfrak{A})) = Symm(\mathfrak{B})$，并且存在一个保持算子交换性的双射映射 $\Psi : Proj(\mathfrak{A}) \to Proj(\mathfrak{B})$，定义为对所有 $p \in Proj(\mathfrak{A})\backslash\{0, \mathbf{1}\}$，$\Phi(\mathbf{1} - 2p) = \mathbf{1} - 2\Psi(p)$，且 $\Psi(1) = \mathbf{1}$ 和 $\Psi(0) = 0$；*(c)* $\Phi(Z(\mathfrak{A}) \cap Symm(\mathfrak{A})) = Z(\mathfrak{B}) \cap Symm(\mathfrak{B})$；*(d)* $\mathfrak{A}$ 是因子，当且仅当 $\mathfrak{B}$ 是因子。

证明。(*a*) 假设 $u \in Z(\mathfrak{A}) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。由假设可知，$\Phi(u)$ 与 $\Phi(\mathscr{U}(\mathfrak{A})) = \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 中的每个元素算子可交换。由于 $\mathfrak{B}$ 中的每个元素都可以表示为 $\mathfrak{B}$ 中的四个酉元的线性组合，$\Phi(u)$ 必须是一个中心元，即 $\Phi(u) \in Z(\mathfrak{B}) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{B})$。对 Φ^{-1}应用类似论证即可得到所需的单位元。

(b) 取 $\mathrm{u} \in \mathrm{Symm}(\mathfrak{A}) = \mathscr{U}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{A}_{sa}$。根据 Φ的性质以及引理 3.2，我们还可得 $\Phi(\mathrm{u})^2 = \Phi(\mathrm{u}^2) = \Phi(1) = \mathbf{1}$。由此可知，$\Phi(\mathrm{u})^* = \Phi(\mathrm{u})$ 是一个对称元（参见注 2.4）。由于 JBW*-代数中的每个对称元都可唯一地写成 $\mathbf{1} - 2\mathrm{p}$（其中 p 为一个投影），结合前面的结论以及关于 Φ的假设即可得证。

(c) 是 (a) 和 (b) 的推论。(d) 若 $\mathfrak{A}$是因子，则 $\mathrm{Z}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Symm}(\mathfrak{A}) = \{\pm\mathbf{1}\}$。由 (d)（另见引理 3.2）可知，$\mathrm{Z}(\mathfrak{B}) \cap \mathrm{Symm}(\mathfrak{B}) = \{\pm\mathbf{1}\}$，因此 $\mathfrak{B}$ 也为因子。□

关于 JBW*-因子的酉元集合之间的双连续分段同构，最优结论见下一个结果；该结果也改进了 [17,定理 54]中关于冯·诺伊曼因子的结论。

定理 3.10. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个非 I 型 *JBW**因子， $\mathfrak{B}$ 是一个 *JBW**代数。设 Φ: $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ $\to \mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 是一个双连续双射。当且仅当存在一个 *Jordan* * 同构 $\theta:\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$，使得对所有 $u\in\mathscr{U}(\mathfrak{A})$，以下条件之一成立时， Φ 是分段 *Jordan* 同构：

（a） $\Phi(u)=\theta(u)$，对所有 $u\in\mathscr{U}(\mathfrak{A})$。
（b） $\Phi(u)=\theta(u^{-1})$，对所有 $u\in\mathscr{U}(\mathfrak{A})$。

证明。引理 3.9 保证 $\mathfrak{B}$是一个 JBW*-因子。如果 $\mathfrak{A}$ 是 I_1, 型，我们有$\mathscr{U}(\mathfrak{A})=\mathbb{T}$. 由于 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})\subseteq Z(\mathfrak{A})$，引理 3.9 保证了

$$\mathscr{U}(\mathfrak{B})=\Phi(\mathscr{U}(\mathfrak{A})\cap Z(\mathfrak{A}))\subseteq Z(\mathfrak{B}).$$

由于 $\mathfrak{B}$中所有酉元的线性张成是整个代数，因此可知$\mathfrak{B}$ 是结合的。因此 $\mathfrak{B}=\mathbb{C}$。注意，根据假设，映射 $\Phi:\mathbb{T}\mathbf{1}=\mathscr{U}(\mathfrak{A})\to\mathscr{U}(\mathfrak{B})=\mathbb{T}\mathbf{1}$ 是一个双连续群同构（注意 $\mathfrak{A}$ 是结合的）。因此， Φ 是 $\mathbb{T}$上的单位元或共轭，并且 （a）或（b）成立 [23,（23.31）]。

接下来假设 $\mathfrak{A}$ 是一个非I_1 或 I_2型的 JBW*-因子。由上一段的结论可知, $\mathfrak{B}$ 是一个非I_1型的 JBW*-因子。现在证明 $\mathfrak{B}$ 不是一个I_2型 JBW*-因子。也就是说，I_2 型因子（也称为自旋因子） $\mathfrak{S}$除了平凡投影外，只包含极小投影。显然，0 和 **1** 与任意其他投影都算子可交换；然而，若 p 和 q是 $\mathfrak{S}$ 中的两个算子可交换的极小投影，则可知

$$\lambda p=U_p(q)=p\circ q=U_q(p)=\mu q,$$

对于某些 λ、$\mu\in\mathbb{C}$，因此 $\mathrm{p}=\mathrm{q}$ 或 $\mathrm{pq}=0$。也就是说，在 $\mathfrak{S}$中，与非平凡（极小）投影 p 算子可交换的所有投影构成的集合归结为$\{0,\mathbf{1},\mathrm{p}\ \mathbf{1}-\mathrm{p}\}$。根据引理 3.9(b)，我们可以找到一个保算子交换性的双射 Ψ: Proj($\mathfrak{A}$) $\to$Proj($\mathfrak{B}$)，满足 $\Psi(1)=\mathbf{1}$ 且 $\Psi(0)=0$。由于 $\mathfrak{A}$ 是一个非 I_1 或 I_2, 型的 JBW*-因子，我们至少可以找到三个非零且两两正交的投影 $\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\mathrm{p}_3$。注意到 $\mathfrak{A}$ 中与 p_1算子可交换的投影集包含 $\{0,\mathbf{1},\mathrm{p}_2,\mathrm{p}3,\mathbf{1}-\mathrm{p}_1\}$，由此可知 $\Psi(0)=0$、$\Psi(1)=\mathbf{1}$、 $\Psi(\mathrm{p}_2)$ $\Psi(\mathrm{p}_3)$以及 $\Psi(\mathbf{1}-\mathrm{p}_1)$都与非平凡投影 $\Psi(\mathrm{p}_1)$算子可交换。但这在 I_2型 JBW*-因子中是不可能的。

接下来可以假设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 JBW*-因子，且不属于 I_1 型或 I_2型。根据推论 3.8，存在一个 Jordan *-同构 $\theta:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$，一个定义在 β 上的实线性泛函 $\mathfrak{A}_{sa}$，以及一个非零实数 α 使得

$$\Phi(e^{ia})=e^{i\beta(a)}e^{i\alpha\theta(a)}=e^{i\beta(a)}\theta\left(e^{i\alpha a}\right), \tag{3.1}$$

对所有 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$。

取一个非平凡投影 $p\in\mathfrak{A}$。于是 $\theta(p)$ 也是非平凡投影。(3.1) 中的恒等式推出

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{1}-2p)&=\Phi(\mathbf{1}-p+e^{i\pi}p)=\Phi(e^{i\pi p})=e^{i\pi\beta(p)}e^{i\alpha\pi\theta(p)}\\&=e^{i\pi\beta(p)}[\mathbf{1}-\theta(p)+e^{i\alpha\pi}\theta(p)].\end{aligned}$$

令 $\lambda = e^{i\pi\beta(p)}$。由于 Φ 保持对称元（见引理 3.9），我们推得

$$\lambda^2(\mathbf{1}-\theta(p)) = \mathbf{1}-\theta(p), \text{ and } \lambda^2 e^{i2\alpha\pi}\theta(p) = \theta(p).$$

因此，$\lambda = \pm 1$，这意味着 $\beta(p)$ 是一个整数。此外，元素$\mathbf{1}-\theta(p) + e^{i\alpha\pi}\theta(p)$ 也是一个对称元，因此 $e^{i\alpha\pi} = \pm 1$，所以 α 必须是一个整数。$e^{i\alpha\pi} = 1$ 的情形是不可能的，因为在这种情况下 $\Phi(\mathbf{1}-2p) = \pm\mathbf{1} = \pm\Phi(\mathbf{1}) = \Phi(\pm\mathbf{1})$，这与 Φ 是一个双射相矛盾。因此，$e^{i\alpha\pi} = -1$，也就是说，$\alpha \in 1+2\mathbb{Z}$。由此我们证明了

$$\begin{cases} \Phi(s) \in \{\pm\theta(s)\} = \{\theta(\pm s)\}, \text{ for all } s \in \mathrm{Symm}(\mathfrak{A}), \\ \alpha \in 1+2\mathbb{Z}, \text{ and } \beta(p) \in \mathbb{Z} \text{ for every projection } p \in \mathfrak{A}. \end{cases} \tag{3.2}$$

取两个非零的算子可交换投影 p、q $\in \mathfrak{A}$，它们由一个对称元交换；也就是说，存在一个对称元 s $\in \mathfrak{A}$，满足 U_s(p) = q（通常记作 p $\sim_1$ q [15, 5.1.4]）。注意，对于某个 $\sigma \in \{\pm 1\}$，有 Φ(s) = $\sigma\theta$(s)（参见 (3.2)）。显然，e^{ip} 与 e^{iq} 算子可交换，由 (3.1) 和定理 3.3 可得

$$\begin{aligned} e^{i\beta(q)}\theta\left(e^{i\alpha q}\right) &= \Phi\left(e^{iq}\right) = \Phi\left(U_s\left(e^{ip}\right)\right) = U_{\Phi(s)}\left(\Phi(e^{ip})\right) \\ &= U_{\sigma\theta(s)}\left(e^{i\beta(p)}\theta\left(e^{i\alpha p}\right)\right) = e^{i\beta(p)}U_{\theta(s)}\left(\theta\left(e^{i\alpha p}\right)\right) \\ &= e^{i\beta(p)}\theta\left(U_s\left(e^{i\alpha p}\right)\right) = e^{i\beta(p)}\theta\left(e^{i\alpha q}\right), \end{aligned}$$

这尤其意味着 $e^{i\beta(q)} = e^{i\beta(p)}$，等价地，$\beta(q) - \beta(p) \in 2\pi\mathbb{Z}$。然而，根据我们上面所见，$\beta$ 在非零投影上取整数值，因而 $\beta(q) = \beta(p)$。我们已经证明，对于 $\mathfrak{A}$ 中每一对非零算子可交换投影 p，q，有

$$p \sim_1 q \Rightarrow \beta(q) = \beta(p). \tag{3.3}$$

结合 $\mathfrak{A}$和 $\mathfrak{B}$是 JBW*-因子这一事实以及引理3.9(a)，我们得出结论，$\Phi|_{Z(\mathfrak{A})\cap\mathscr{U}(\mathfrak{A})}$：$Z(\mathfrak{A})\cap\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \to Z(\mathfrak{B})\cap\mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 在 $\mathbb{T}$上诱导一个连续自同构，且由 (3.1) 可知其为

$$\Phi\left(e^{it}\mathbf{1}\right) = \Phi\left(e^{it\mathbf{1}}\right) = e^{it(\beta(\mathbf{1})+\alpha)}\mathbf{1}.$$

正如我们上面所述，圆群的唯一连续自同构是变换 $z \to z$、$z \to z^{-1} = \bar{z}$，因此我们得出以下恒等式恰有一个成立：

(a) $\beta(\mathbf{1}) + \alpha = 1$;
(b) $\beta(\mathbf{1}) + \alpha = -1$.

我们的下一个目标是证明 $\beta = 0$。首先，假设 $\mathfrak{A}$ 是一个 I_n 型的 JBW*因子，且 $2 < \mathrm{n} < \infty$。$\mathfrak{A}$ 中的每个投影都可以写成 $\mathfrak{A}$中至多 n 个两两正交的极小投影之和。此外，根据引理 5.3.2(ii)], $\mathfrak{A}$ 中的任意两个极小投影都可以通过一个对称元 [15, 互相置换。显然，$\beta \neq 0$ 当且仅当存在某个极小投影 p $\in \mathfrak{A}$使得 β(p) $\neq 0$。由 (3.3) 可知，$\mathfrak{A}$中所有极小投影处的 β 都取相同的非零整值。具体而言，由于 n > 2，给定 $\mathfrak{A}$中的两个极小投影 e、f，我们可以找到第三个与 e、f 都正交的（极小）投影 g。于是，β(e) = β(g) = β(f)。

根据结构理论，我们可以找到两两正交的极小投影 $p_1,\ldots,p_n$ 属于 $\mathfrak{A}$ [15, 5.3.3]。如果 $\mathbb{Z}\ni\alpha\neq\pm1$，我们可以找到至少两个不同的单位复数 $\lambda_1=e^{it}$ 和 $\lambda_2=e^{is}$，$s\neq t\in\mathbb{R}$，使得 $\lambda^{\alpha}_j=1$ 对所有 $j=1$，2都成立。考虑以下不同的酉元

$$u_1=\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\mathbf{1}-p_1-p_2=e^{ia}$$
$$u_2=\lambda_2p_1+\lambda_1p_2+\mathbf{1}-p_1-p_2=e^{ib}$$

与 $a=tp_1+sp_2$, 以及 $b=sp_1+tp_2$. 根据构造，$u_1^{\alpha}=u_2^{\alpha}=\mathbf{1}$，并且

$$\beta(a)=\beta(b)=(s+t)\beta(p_1)+(n-2)\beta(p_1).$$

因此 $\Phi(\mathrm{u}_1)=\mathrm{e}^{i\beta(a)}\theta(\mathrm{u}_1^{\alpha})=\mathrm{e}^{i\beta(b)}\theta(\mathrm{u}_2^{\alpha})=\Phi(\mathrm{u}_2)$，这与 Φ 是单射这一事实矛盾。这证明了 $\alpha\in\{\pm1\}$。然而，$\{\pm1\}\ni\alpha+\beta(\mathbf{1})=\alpha+\mathrm{n}\beta(\mathrm{p}_1)$，等价地，$\mathrm{n}\beta(\mathrm{p}_1)\in\{-2,0,2\}$，这不可能，因为 $\mathrm{n}\beta(\mathrm{p}_1)\in\mathrm{n}(\mathbb{Z}\backslash\{0\})$，且 $2<\mathrm{n}$。因此 $\beta=0,\alpha\in\{\pm1\}$，我们就此情形得证。

如果 $\mathfrak{A}$ 是 I_∞型 JBW*-因子，那么 $\mathfrak{A}$ 中的每个投影都是形如 $\sum_{i\in\Gamma}\mathrm{p}_i$的弱*-极限，其中 p_i是$\mathfrak{A}$中的两两正交的极小投影。我们不能像之前那样论证，因为泛函 β 不一定是弱*-连续的。然而，由于 $\mathfrak{A}$中所有投影的线性张成的稠密性，如果 β不为零，就存在一个投影 $\mathrm{p}\in\mathfrak{A}$ 使得 $\beta(\mathrm{p})\neq0$。如果 p 可分解为有限个两两正交的极小投影之和，我们便可像上一段那样论证并导出矛盾；否则，$\mathrm{p}=\mathrm{w}^*\text{-}\sum_{i\in\Gamma}\mathrm{p}_i$，其中 Γ 是无限的。根据选择公理，我们可以将 Γ 写成两个子集Γ_1 和 Γ_2 的不交并，使它们的基数都与 Γ相同。定义 $\mathrm{p}_k=\mathrm{w}^*\text{-}\sum_{i\in\Gamma_k}\mathrm{p}_i$，其中 $\mathrm{k}=1,2$，我们得到 $\mathfrak{A}$ 中的两个正交投影。根据 [15, 引理 5.3.2 和引理 5.2.9], , 它们满足对所有 $\mathrm{k}=1,2$ 均有 $\mathrm{p}\sim_1\mathrm{p}_k$。由 (3.3) 可得 $\beta(\mathrm{p}_1)+\beta(\mathrm{p}_2)=\beta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)=\beta(\mathrm{p})=\beta(\mathrm{p}_1)=\beta(\mathrm{p}_2)$，这不可能。因此，$\beta=0$ 正如我们所期望的。

最后，我们假设 $\mathfrak{A}$ 是一个非 I 型 JBW* 因子。与前面一样，设对于某个投影 $\mathrm{p}\in\mathfrak{A}$，有 $\beta(\mathrm{p})\neq0$。由于 $\mathrm{U}_p(\mathfrak{A})$ 中的阿贝尔投影在 $\mathfrak{A}$ 中也是阿贝尔投影，JBW* 代数 $\mathrm{U}_p(\mathfrak{A})$ 不含 I 型直和项，因此二等分引理证明存在两个投影 p_1，$\mathrm{p}_2\in\mathfrak{A}$，使得 $\mathrm{p}_1\sim_1\mathrm{p}_2$ 且 $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2=\mathrm{p}$。归纳论证保证，对于每个自然数 m，都存在两两正交投影 $\mathrm{p}1,\ldots,\mathrm{p}_m$，它们属于 $\mathfrak{A}$，满足 $\mathrm{p}_1+\ldots+\mathrm{p}_m=\mathrm{p}$，且对于所有 $\mathrm{i},\mathrm{j}\in\{1,\ldots,\mathrm{m}\}$，都有 $\mathrm{p}_i\sim_1\mathrm{p}_j$。(3.3) 中的结论意味着，对于所有 $\mathrm{i},\mathrm{j}\in\{1,\ldots,\mathrm{m}\}$，都有 $\beta(\mathrm{p}_i)=\beta(\mathrm{p}_j)\in\mathbb{Z}$。因此，

$$0\neq\beta(p)=\sum_{j=1}^{m}\beta(p_j)=m\beta(p_1)\in m\mathbb{Z},$$

这是不可能的。因此 $\beta=0$，证明完毕。 □

或许现在正适合结束本节，并对以下联系作些评论：两个对称元集合之间的分段 Jordan 同构

两个含幺 JB*-代数，以及它们的投影偏序集之间保持交换性与对称差的双射变换；这条脉络始于引理 3.9(*b*)。

设 $\mathfrak{A}$ 是一个含幺 JB*-代数，其投影格记为 Proj($\mathfrak{A}$)。我们已指出，集合 Proj($\mathfrak{A}$) 与 Symm($\mathfrak{A}$) 之间存在由 $p \overset{\Upsilon}{\mapsto} \mathbf{1} - 2p$ 给出的双射对应。Proj($\mathfrak{A}$) 中 p、q 的对称差定义为 $p\Delta q := p + q - 2p \circ q$。若 p 与 q 算子可交换，则 p 与 q 的对称差是 $\mathfrak{A}$ 中的一个投影（事实上，$p\Delta q \in$Proj($\mathfrak{A}$) 当且仅当 p 与 q 算子可交换）。此外，容易验证在这种情况下，$\Upsilon(p)$ 与 $\Upsilon(q)$ 算子可交换，并且

$$\Upsilon(p\Delta q) = \Upsilon(p) \circ \Upsilon(q).$$

此外，若 $\mathfrak{B}$ 是另一个含幺 JB*-代数，且 Φ: Symm($\mathfrak{A}$) $\to$ Symm($\mathfrak{B}$) 是一个双射，则 Φ 是分段 Jordan 同构，当且仅当映射 Ψ_Φ: Proj($\mathfrak{A}$) $\to$ Proj($\mathfrak{B}$) $\Psi_\Phi(p) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Phi(\mathbf{1} - 2p))$ 是保算子交换性以及算子可交换投影的对称差（双向）的双射。

在冯·诺伊曼代数的背景下，所谓投影正交同构可作为保持投影格之间交换性和对称差的双射的例子。我们回顾一下，冯·诺伊曼代数 A 与 B 之间的投影正交同构，是指在它们的投影格之间建立的保持正交性的双射对应（见 [6]）。Dye 的一个著名结果证明，若 A 和 B 是非 I 型$_{2n}$ 因子且 Φ: $\mathscr{U}$(A) $\to$ $\mathscr{U}$(B) 是群同构（因此 Φ(Symm(A)) =Symm(B)），则相应的映射 $\Psi_\Phi|_{\text{Symm}(A)}$: Proj(A) $\to$ Proj(B) 保持

交换性以及交换投影的对称差 [6, 引理9], ，并且它还是一个投影正交同构 [6, 引理 13]。自然会想到，类似结果在 JBW*-因子中能在多大程度上成立。后一情形的困难在于，两个酉元的 Jordan 乘积一般并非酉元。

4. 二次映射

按照 [11], ，如果任意集合G 存在一个二次半群 映射$G \times G \to G$，$(a,b) \mapsto Q(a)(b)$满足以下条件，我们就称该集合为二次半群

$$Q(Q(a)(b))(c) = Q(a)Q(b)Q(a)(c), \text{ for all } a,b,c \in G,$$

其中，对每个 $x \in G$，$Q(x)$表示由前述映射在$G \times G$ 上固定元素a 为x而得到的映射。若A 是一个 C*-代数，并定义$Q(a)(b) = aba$ （或$Q(a)(b) = ab^*a$），则易见A 在此映射下是一个二次半群。若 $\mathfrak{A}$ 是一个 JB*-代数，根据约旦代数基本恒等式（见 [15, 2.4.18]），我们有

$$U_a U_b U_a(c) = U_{U_a(b)}(c) \quad (a,b,c \in \mathfrak{A}),$$

因此，通过定义 Q(a)(b) $=$ U$_a$(b) 或 Q(a)(b) $=$U$_a$(b*)，我们在 $\mathfrak{A}$ 上引入了二次半群结构。这还可以推广到更广泛的 JB*-三重系（参见 [11]）。在含幺 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 上采用这种二次半群结构的优点是，尽管 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})\circ\mathscr{U}(\mathfrak{A}) \not\subseteq \mathscr{U}(\mathfrak{A})$，对于所有 u、v $\in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$，根据 [5, 引理 2.1]，我们仍有 U$_u$(v),U$_u$(v*) $\in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。因此，$\mathscr{U}(\mathfrak{A})$对于上述定义的二次乘积构成一个二次半群。

根据 [11, 定义 2.1], ，如果两个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$和 $\mathfrak{B}$ 之间的映射 Φ 满足恒等式，则称其为二次映射

$$\Phi(\{a,b,a\}) = \Phi(U_a(b^*)) = U_{\Phi(a)}(\Phi(b)^*)) = \{\Phi(a),\Phi(b),\Phi(a)\}, \tag{4.1}$$

该恒等式对所有 a、$b \in \mathfrak{A}$均成立。类似地，我们可以将 JB-代数之间保持形如U_a(b)的二次乘积的映射定义为二次映射。注意，二次映射本质上由三元乘积决定。

Friedman 和 Hakeda 的一项里程碑式成果（参见 [11, 命题 2.14、定理 2.15]）证明了：两个 JBW*-代数之间的每个二次双射（特别是两个冯·诺伊曼代数之间的二次双射） $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$，其中 $\mathfrak{A}$ 不含 I 型直和项，都是实线性等距映射。实际上，该结果更为深刻：当 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是没有“阿贝尔”直和项的 JBW*-三元组时，也能得到适当的结论。

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 JB*-代数。若映射 Φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，或从 $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ 到 $\mathscr{U}(\mathfrak{B})$ 的映射，仅当 a 与 b 在 $\mathfrak{A}$ 中算子可交换时才满足 (4.1) 中的恒等式，我们就称其为定义在算子交换元素上的二次映射。注意，$\mathfrak{A}_{sa}$ 中的每个 a 都与自身算子可交换，因此对所有 a $\in \mathfrak{A}_{sa}$，都有 Φ{a,a,a} $=\{\Phi$(a) Φ(a) Φ(a)$\}$。JB 代数之间（特别是 C*-代数的自伴部分之间）定义在算子交换元素上的二次映射也类似定义。

由此自然引出两个问题：在上文提到的 Friedman 和 Hakeda 的结果中，我们能否将关于 Φ 的假设弱化为它是定义在算子交换元素上的二次映射？此外，我们能否研究 JB 代数之间的映射？

这是本文中唯一用到每个 JB*-代数所蕴含的 JB*-三元系结构之处。回顾一下，JB*-三元系是一个复 Banach 空间 E，它配有一个（连续的）三元乘积 $\{.,.,.\}: E^3 \to E$；该三元乘积对外侧变量对称且双线性，对中间变量共轭线性，并满足以下公理：

(1) 对所有 a、b、x、y $\in$E，L(x, y)L(a, b) $=$L(L(x, y)(a), b) $-$L(a, L(y, x)(b)) $+$L(a, b)L(x, y)，其中对于 a、b $\in$E，符号 L(a, b) 表示 E 上由 L(a, b)(x) $=$ {a, b, x} (x $\in$E) 给出的（线性）算子；(2) 对每个 a $\in$E，算子 L(a, a) 都是具有非负谱的厄米算子；(3) $\|\{a, a, a\}\| = \|a\|^3$，对于 a $\in$E。

每个 C*-代数都是一个 JB*-三元系，其三元乘积为 $\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$。同一三元乘积也可在复希尔伯特空间 H

和 K 之间所有有界线性算子构成的空间 B(H，K) 上诱导出 JB-三元系结构。就本文而言，我们注意到，每个 JB*-代数 $\mathfrak{A}$ 都是一个 JB*-三元系，其三元乘积定义为 $\{x,y,z\}=(x\circ y^*)\circ z+(z\circ y^*)\circ x-(x\circ z)\circ y^*$(见 [3,定理 4.1.45])。

C*-代数中的部分等距元恰好是上文所给三元乘积的不动点。若 JB*-三重系统E 中的元素e 满足$e=\{e,e,e\}$，则称其为三幂等元。任意此类元素$e\in E$都诱导出E的 Peirce 分解，形式如下

$$E=E_2(e)\oplus E_1(e)\oplus E_0(e),$$

其中，$E_i(e)$对应于$L(e,e)$的特征值i 2对应的特征子空间（参见 [3, §4.2.2] 和 [4, §5.7]）。E 到$E_j(e)$的自然投影称为*Peirce-j*投影，记作$P_i(e)$。已知这些投影由以下表达式确定：

$$P_2(e)=L(e,e)(2L(e,e)-Id_E)=Q(e)^2,$$

$$P_1(e)=4L(e,e)(Id_E-L(e,e))=2\left(L(e,e)-Q(e)^2\right),$$

$$\text{and } P_0(e)=(Id_E-L(e,e))(Id_E-2L(e,e)).$$

若三幂等元$e\in E$ 满足$E=E_2(e)$，则称其为酉元。

值得注意的是，含单位元的 JB*-代数与具有酉元的 JB*-三重系统一一对应。更具体地，对于 JB*-三重系统 E 中的每个三幂等元 e，Peirce-2 子空间 $E_2(e)$ 是一个以 e 为单位元的含单位 JB*- 代数，其乘法为 $a\circ_e b:=\{a,e,b\}$，对合为 $a^{*_e}:=\{e,a,e\}$。根据 Kaup 的著名结果（见 [25, 命题 5.5]），$E_2(e)$ 上的三元乘积由下列表达式唯一确定

$$\{a,b,c\}=(a\circ_e b^{*_e})\circ_e c+(c\circ_e b^{*_e})\circ_e a-(a\circ_e c)\circ b^{*_e}, \tag{4.2}$$

对任意 a、b、c $\in E_2(e)$ 成立。此外，如果 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位 JB*-代数，则在 $\mathfrak{A}$ 的 JB*- 代数结构下的酉元，与在 JB*- 三重系统结构下的酉三幂等元相同（参见 [5, 引理 2.1(d)]）。如果 u 是 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_2(u)$ 中的酉元，我们将 $\mathfrak{A}(u)=(\mathfrak{A},\circ_u,*_u)$ 记作上述定义的含单位 JB*-代数。注意，正如上文所述，$\mathscr{U}(\mathfrak{A})=\mathscr{U}((\mathfrak{A},\circ_u,*_u))$。我们应注意到，存在含单位 JB*-代数 $\mathfrak{A}$，它具有酉元 u，使得对于 $\mathfrak{A}$ [2, 上的每个满射线性等距映射 T，都有 T (1) $\neq$ u，例见 5.7]。

引理 4.1. 设 $\Phi\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ 是两个 *JBW** 代数中算子可交换元素之间的二次映射。则以下结论成立：

(a) Φ 将 $\mathfrak{A}$ 中的酉元映射为 $\mathfrak{B}$中的三幂等元。特别地，$\Phi(1)$是$\mathfrak{B}$中的三幂等元，且 $\Phi(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$；*(b)* Φ 分别将 $\mathfrak{A}$中的自伴（分别地，正的）元素映射为 *JBW**代数 $\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$中的自伴（分别地，正的）元素。此外，Φ将 $\mathfrak{A}$ 中的对称元映射为 $\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$中的自伴三幂等元；*(c)* 若 a 和 b 是 $\mathfrak{A}$中的算子可交换正元素，则 $\Phi(a)$和 $\Phi(b)$在 *JBW**代数 $\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$中算子可交换，并且

$$\Phi(a\circ b)=\Phi(a)\circ_{\Phi(1)}\Phi(b).$$

因此， $\Phi|_{\mathfrak{A}^+}$ ： $\mathfrak{A}^+ \to(\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))^+$ 是一个分段 *Jordan* 同态。

(d) 若 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}$ 在算子交换元素上也可加，则 $\Phi(0) = 0, \Phi(-a) = -\Phi(a)$，对所有 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$， Φ 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 的每个结合子代数上的限制，相对于 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))$ 的乘积是 *Jordan* 乘法的，并且其像中的所有元素在后一个 *JBW**-代数中算子可交换。

证明。 (a) 取 $u \in \mathscr{U}(\mathfrak{A})$。由于 u 和 u^* 算子可交换（见引理 2.2），由假设可得

$$\Phi(u) = \Phi(U_u(u^*)) = U_{\Phi(u)}(\Phi(u)^*) = \{\Phi(u), \Phi(u), \Phi(u)\},$$

也就是说， $\Phi(u)$ 是 $\mathfrak{B}$ 中的三幂等元。特别地， $\Phi(\mathbf{1})$ 是三幂等元。为简化记号，我们将记 $w = \Phi(\mathbf{1})$。

每个元素 $a \in \mathfrak{A}$ 都与 $\mathbf{1}$ 算子可交换，因此

$$\Phi(a) = \Phi(U_{\mathbf{1}}(a)) = U_{\Phi(\mathbf{1})}(\Phi(a^*)^*) = \{w, \Phi(a^*), w\} \in \mathfrak{B}_2(w),$$

对所有$a \in \mathfrak{A}$。

(b) 若取$a = a^* \in \mathfrak{A}$，则如上所述，我们可推得

$$\Phi(a) = \Phi(a^*) = \Phi(U_{\mathbf{1}}(a^*)) = \{w, \Phi(a), w\} = \Phi(a)^{*_w},$$

这表明 $\Phi(a)$ 在 $\mathfrak{B}_2(w)$ 中是自伴的。若a 是 $\mathfrak{A}$ 中的正元素，则可写作$a = b^2$，其中$b \in \mathfrak{A}_{sa}$ 满足$a, b,$ 和$\mathbf{1}$ 算子可交换，因此

$$\Phi(a) = \Phi(b^2) = \Phi(U_b(\mathbf{1})) = \{\Phi(b), w, \Phi(b)\} = \Phi(b) \circ_w \Phi(b).$$

注意， $\mathfrak{A}$ 中的对称元恰好是自伴酉元。因此，(b)中的最终结论是由(a)中已经证明的结果推得的。

(c) 注意，对每个 $a \in \mathfrak{A}^+$，我们都可以通过函数演算定义一个 $a^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}^+$，它属于由 a 生成的 $\mathfrak{A}$ 的 JB*-子代数，并满足 $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$。由 (b)，$\Phi(a) = \Phi(a^{\frac{1}{2}}) \circ_w \Phi(a^{\frac{1}{2}})$，因此 $\Phi(a)$ 属于由正元素 $\Phi(a^{\frac{1}{2}})$ 和 $\Phi(a^{\frac{1}{2}}) = \Phi(a)^{\frac{1}{2}}$，生成的 $\mathfrak{B}_2(w)$ 的 JB*-子代数，其中后者是在 $\mathfrak{B}_2(w)$ 中计算的。为避免混淆，我们将 $\mathfrak{B}_2(w)$ 这个 JBW*-代数中的 U 算子记为 U^w。

现在取两个算子交换元素 a 和 b，属于 $\mathfrak{A}^+$。注意，a和 $b^{\frac{1}{2}}$（分别是，b 和 $a^{\frac{1}{2}}$）在 $\mathfrak{A}$中算子可交换（参见 [30,定理 3。12]）。根据 [18, 命题 1。1] 单位元 $U_{a^{1/2}}(b) = U_{b^{1/2}}(a)$ 成立。因此，根据前面的说明和假设，我们得到：

$$\begin{aligned} U^w_{\Phi(a)^{1/2}}(\Phi(b)) &= U^w_{\Phi(a^{1/2})}(\Phi(b)) = \{\Phi(a^{1/2}), \Phi(b), \Phi(a^{1/2})\} = \Phi(\{a^{\frac{1}{2}}, b, a^{\frac{1}{2}}\}) \\ &= \Phi(U_{a^{1/2}}(b)) = \Phi(U_{b^{1/2}}(a)) = \Phi(\{b^{\frac{1}{2}}, a, b^{\frac{1}{2}}\}) \\ &= \{\Phi(b^{\frac{1}{2}}), \Phi(a), \Phi(b^{\frac{1}{2}})\} = U^w_{\Phi(b^{1/2})}(\Phi(a)) = U^w_{\Phi(b)^{1/2}}(\Phi(a)), \end{aligned}$$

其中第二个和倒数第二个等式应用了（4.2）。再次应用 [18, 命题 1。1] 在 JBW*-代数 $\mathfrak{B}_2$（w）可证明 Φ（a）和

Φ（b）在 $\mathfrak{B}_2$（w）中算子可交换。因此，

$$\Phi(a^2 \circ b) = \Phi(U_a(b)) = \Phi\{a,b,a\} = \{\Phi(a),\Phi(b),\Phi(a)\} = U^w_{\Phi(a)}(\Phi(b))$$
$$= (\Phi(a) \circ_w \Phi(a)) \circ_w \Phi(b).$$

考虑到 $\mathfrak{A}$ 中的每个正元素都有平方根，再结合该命题证明第一段中的结论，我们最终得到

$$\Phi(a \circ b) = \Phi(a) \circ_w \Phi(b),$$

对于任意满足算子可交换条件的a，$b \in \mathfrak{A}_+$，即a，b $\Phi|_{\mathfrak{A}^+}$： $\mathfrak{A}^+ \to (\mathfrak{B}_2(w))^+$是一个分段 Jordan 同态。

(*d*) 由于 0 与自身算子可交换，因此有 $\Phi(0) = \Phi(0+0) = \Phi(0) + \Phi(0)$，这证明了 $\Phi(0) = 0$。每个$a \in \mathfrak{A}_{sa}$ 都与其相反元算子可交换，因此 $0 = \Phi(0) = \Phi(a + (-a)) = \Phi(a) + \Phi(-a)$。

取两个算子交换元素 a、b $\in \mathfrak{A}_{sa}$。由 a、b 和 1 生成的 JB*-子代数 $\mathfrak{J}$ 是一个交换含幺 C*-子代数，因此其中任意两个元素在 $\mathfrak{A}$ 中都算子可交换（参见 [30, 定理 3.12]）。在 $\mathfrak{J}$ 中运用这一点，我们可以找到两两算子可交换的正元素 a^+、a^-、b^+、b^-，使得 $a = a^+ - a^-$ 且 $b = b^+ - b^-$。应用 (c)，可推出 $\Phi(a^+)$ $\Phi(a^-)$ $\Phi(b^+)$ 和 $\Phi(b^-)$ 在 $\mathfrak{B}_2(w)$ 中两两算子可交换。因此 $\Phi(a) = \Phi(a^+) - \Phi(a^-)$ 与 $\Phi(b) = \Phi(b^+) - \Phi(b^-)$ 算子可交换。最后，

$$\begin{aligned}\Phi(a) \circ_w \Phi(b) &= \Phi(a^+ - a^-) \circ_w \Phi(b^+ - b^-) \\ &= (\Phi(a^+) - \Phi(a^-)) \circ_w (\Phi(b^+) - \Phi(b^-)) \\ &= \sum_{\sigma,\tau \in \{\pm\}} \sigma\,\tau\, \Phi(a^\sigma) \circ_w \Phi(b^\tau) = \Phi\left(\sum_{\sigma,\tau \in \{\pm\}} \sigma\,\tau\, a^\sigma \circ b^\tau\right) \\ &= \Phi(a \circ b).\end{aligned}$$

□

引理证明中的论证4.1 可用于推出以下结论。

引理 4.2。设 $\Phi : \mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$ 是定义在算子交换元素上的二次映射，其中 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 *JBW**-代数。则下述陈述成立：

(a) Φ将 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的对称元映射为 $\mathfrak{B}_{sa}$ 中的三幂等元（即可写成两个正交投影之差的元素）。特别地，$\Phi(1)$是 $\mathfrak{B}_{sa}$中的三幂等元，且 $\Phi(\mathfrak{A}_{sa}) \subseteq \mathfrak{B}_2(\Phi(1))_{sa} \cap \mathfrak{B}_{sa}$；*(b)* Φ 将 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的正元素映射为 *JBW**-代数$\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$中的正元素；*(c)* 若 a 和 b 是 $\mathfrak{A}$中的算子可交换正元素，则元素 $\Phi(a)$和 $\Phi(b)$在 *JBW**-代数 $\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$中算子可交换，并且

$$\Phi(a \circ b) = \Phi(a) \circ_{\Phi(\mathbf{1})} \Phi(b).$$

因此，$\Phi|_{\mathfrak{A}^+}$： $\mathfrak{A}^+ \to (\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))^+$ 是分段 *Jordan* 同态。

(d) 如果 Φ 在算子交换元素上也可加，那么 $\Phi(0)=0, \Phi(-a)=-\Phi(a)$，对所有 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$，Φ 在$\mathfrak{A}_{sa}$ 的每个结合子代数上的限制，相对于$(\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))_{sa}$的乘积都是 *Jordan* 乘法的，且其像中的所有元素在后一个 *JBW* 代数中彼此交换。

现在，我们可以陈述 Friedman 和 Hakeda 在 [11]中关于 JBW 代数结果的一个推广。即使在冯·诺伊曼代数的情形下，这一结果也是新的。

定理 4.3. 设 Φ: $\mathfrak{A}_{sa}\to\mathfrak{B}_{sa}$ 是定义在算子交换元素上的二次映射，其中 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 *JBW**代数，且 $\mathfrak{A}$ 不含 I_2型直和项。此外，假设 Φ 在算子交换元素上可加。那么，$\Phi:\mathfrak{A}_{sa}\to\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}$ 是一个含幺 *Jordan* 同态。此外，若 Φ 是双射，则可得出结论：$\Phi(\mathbf{1})$ 是 $\mathfrak{B}$中的一个中心对称元，且 Φ 是从 $\mathfrak{A}_{sa}$ 到 $(\mathfrak{B},{}^{\circ_{\Phi(1)}},{}^{*_{\Phi(1)}})$的 *Jordan* 同构。

证明。与前一个引理 4.1 的证明一样，我们记 $w=\Phi(1)$，它是 $\mathfrak{B}$ 中的一个自伴三幂等元（参见引理 4.2）。由于 1 与自身算子可交换，根据假设及简单的归纳论证，对于所有自然数 n，均有 $\Phi(n1)=n\Phi(1)=nw$；根据引理 4.2(d)，对于所有 $q\in\mathbb{Q}$，均有 $\Phi(q1)=q\Phi(1)=qw$。注意到，Φ 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中对算子交换元素具有 Jordan 乘法性（只需注意，对于所有 $t\le s$，$\Phi(t1)\le\Phi(s1)$ 在 $\mathbb{R}$中成立），容易验证，对于所有 $t\in\mathbb{R}$，均有 $\Phi(t1)=t\Phi(1)=tw$。

取$a=a^*\in\mathfrak{A}$。由于a 与算子$\mathbf{1}$ 可交换，且 Φ 在算子交换元素上可加，我们可推得

$$\Phi(t^2a)=\Phi(\{t\mathbf{1},a,t\mathbf{1}\})=\{\Phi(t\mathbf{1}),\Phi(a),\Phi(t\mathbf{1})\}=\{tw,\Phi(a),tw\}=t^2\Phi(a),$$

对所有实数 t，并由引理 4.2(d)，$\Phi(ta)=t\Phi(a)$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$，即 Φ 是 1-齐次的，并且显然根据假设在算子交换元素上可加。

给定一个 $a=a^*$ 且满足 $\|a\|\le 1$。我们可以写成 $a=a^+-a^-$，其中 $0\le a^+$、a^- 且 $a^+\circ a^-=0$。我们还知道，在这种情况下 $0\le a^+a^-\le\mathbf{1}$。由于 1、a^+ 和 a^-算子可交换，再次应用引理 4.2(d) 和 (b) 可得

$$0\le\Phi(a^+)=\Phi(\mathbf{1}-(\mathbf{1}-a^+))=\Phi(\mathbf{1})-\Phi(\mathbf{1}-a^+)\le\Phi(\mathbf{1})=w.$$

同理可证 $0\le\Phi(a^-)\le w$，因此

$$\|\Phi(a^+)\|,\|\Phi(a^-)\|\le\|w\|=1.$$

由于 a^+ 和 a^- 算子可交换，关于 Φ 的第一个假设以及前面的结论推出 $\|\Phi(a)\|=\|\Phi(a^+)-\Phi(a^-)\|\le\|\Phi(a^+)\|+\|\Phi(a^-)\|\le 2$。由此我们证明了 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}:\mathfrak{A}_{sa}\to(\mathfrak{B}_2(\Phi(1)))_{sa}$ 在 $\mathfrak{A}_{sa}$ 的闭单位球上有界。因此，我们可以对映射 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}:\mathfrak{A}_{sa}\to(\mathfrak{B}_2(\Phi(1)))_{sa}$ 应用定理 3.4，从而得出该映射是线性且连续的。

由于每个 $a\in\mathfrak{A}_{sa}$ 算子都与自身算子可交换，引理 4.2(d) 还保证 $\Phi(a^2)=\Phi(a)\circ_w\Phi(a)$，因此 Φ 是从 $\mathfrak{A}_{sa}$到 $\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))$的含幺 Jordan 同态。

对于最后一个结论，注意到若 Φ 是满射，则有 $\mathfrak{B}_{sa}=\Phi(\mathfrak{A}_{sa})\subseteq\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))_{sa}\cap\mathfrak{B}_{sa}\subseteq\mathfrak{B}_{sa}$. 由此可知，$\Phi(\mathbf{1})$是 $\mathfrak{B}$中的一个对称元。只剩下

证明 $\Phi(\mathbf{1})$是中心的。为此，我们写作 $\Phi(\mathbf{1}) = p - q$，其中p和q是 $\mathfrak{B}$ 中的两个正交投影，且$p + q = \mathbf{1}$；注意到，根据关于 Φ的假设，对每个$a \in \mathfrak{A}_{sa}$，我们都有

$$\begin{aligned} U_p(\Phi(a)) + U_q(\Phi(a)) + 2\{p, \Phi(a), q\} &= \Phi(a) = \Phi(\{\mathbf{1}, a, \mathbf{1}\}) \\ &= \{\Phi(\mathbf{1}), \Phi(a), \Phi(\mathbf{1})\} = U_p(\Phi(a)) + U_q(\Phi(a)) - 2\{p, \Phi(a), q\}. \end{aligned}$$

Φ的满射性蕴含 $\{p\ \mathfrak{B}_{sa},\ q\} = \{0\}$，从而 $\mathfrak{B}_{sa} = U_p(\mathfrak{B}) \oplus U_q(\mathfrak{B})$，这保证了 p、q，以及 $\Phi(\mathbf{1})$ 均为中心元。□

例 4.4。我们将给出一个例子，说明前述定理 3.4 和 4.3 对 I型*JBW_2-代数不成立。最简单的情形是一个 I型*JBW_2, -代数因子，也称为自旋因子。自旋因子已得到非常深入的研究和描述（例如，见 [19, 20, 21, 10, 15], [3, §2.5.9]以及 [8, §1.4]中的讨论）。其一种表示如下：自旋因子 V 由一个复希尔伯特空间 (H $\langle\cdot|\cdot\rangle$) 构造而成，其中 dim(H) ≥ 3，并在 H 上配备一个共轭（即一个周期为 2 的共轭线性等距映射）x $\mapsto$x，以及一个范数为 1 的元素$\mathbf{1} = \mathbf{1}$，该元素是 Jordan 乘积的单位元

$$x \circ y = \langle x|\mathbf{1}\rangle y + \langle y|\mathbf{1}\rangle x - \langle x|\bar{y}\rangle \mathbf{1} \quad (x, y \in V),$$

其中V 上的对合和范数分别定义为

$$x^* = 2\langle \mathbf{1}|x\rangle \mathbf{1} - \bar{x}, \text{ and } \|x\|^2 = \|x\|_2^2 + \left(\|x\|_2^4 - |\langle x|\bar{x}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (x \in V),$$

。

已知 $V_{sa} = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus H^-$，其中 $H^- = \{h \in H : \langle \mathbf{1}, h\rangle = 0, h = -\bar{h}\}$，它是 H 的一个维数为 ≥ 2 的实子空间。我们总能找到一个双射映射 $F : H^- \to H^-$，它是 1-齐次但非可加的。映射$\Phi: V_{sa} \to V_{sa}$定义为 $\Phi(\lambda\mathbf{1} + h) = \lambda\mathbf{1} + F(h)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, h \in H^-$)，是一个定义良好的双射，显然是 1-齐次但非可加。

接下来我们将证明，Φ 在 V_{sa} 中的算子交换元素上是可加的。为此，回顾一下，元素 a,b $\in$V 算子可交换，当且仅当 b 是 a 和 1 的线性组合，或 a 是 b 和 1 的线性组合（参见 [8, 备注 1.5]）。因此，若 a 和 b 在 V_{sa} 中算子可交换，我们可将问题归结为 a $= \alpha\mathbf{1} + h$ 且 b $= t\mathbf{1} + sa = (t + s\alpha)\mathbf{1} + sh$ 的情形，其中 s,t $\alpha \in \mathbb{R}, h \in H^-$。根据 Φ的定义可得

$$\Phi(a+b) = (t + s\alpha + \alpha)\mathbf{1} + F((s+1)h) = (t + s\alpha)\mathbf{1} + (s+1)F(h) = \Phi(a) + \Phi(b).$$

事实上，Φ 在$\mathbf{1}$ 和h的线性张成上是线性的。

我们还可以假设映射 $F : H^- \to H^-$ 满足 $\|F(k)\| = \|k\|$，对所有 $k \in H^-$均成立。在这种情况下，对于上述 a 和 b，我们有

$$\begin{aligned} U_a(b) = \{a, b, a\} &= \{\alpha\mathbf{1} + h, (t + s\alpha)\mathbf{1} + sh, \alpha\mathbf{1} + h\} \\ &= \left(\alpha^2 t + s\alpha^3 + (2\alpha s + t)\|h\|^2\right)\mathbf{1} + \left(2\alpha t + 3s\alpha^2\right)h. \end{aligned}$$

注意到 Φ 在线性张成的 $\mathbf{1}$ 和 h上是线性的，且 $\|\Phi(h)\| = \|h\|$，我们可得

$$\begin{aligned}\Phi(U_a(b)) &= \left(\alpha^2 t + s\alpha^3 + (2\alpha s + t)\|h\|^2\right)\mathbf{1} + \left(2\alpha t + 3s\alpha^2\right)F(h)\\ &= \left(\alpha^2 t + s\alpha^3 + (2\alpha s + t)\|F(h)\|^2\right)\mathbf{1} + \left(2\alpha t + 3s\alpha^2\right)F(h)\\ &= U_{\alpha\mathbf{1}+F(h)}\left((t+s\alpha)\mathbf{1} + sF(h)\right) = U_{\Phi(a)}(\Phi(b)).\end{aligned}$$

因此， Φ 是可加映射，并且是 V_{sa} 上算子交换元素的二次映射。

本节最后，我们列举 JBW*-代数之间算子交换元素上的二次映射的一些附加性质，以作总结（参见引理4.1）。若w 是 JB*-代数 $\mathfrak{A}$中的一个三幂等元，对于每个$a \in \mathfrak{A}_2(w)$，我们记U_{wa}为与元素$a \in \mathfrak{A}_2(w)$相关联的 $\mathfrak{A}_2(w)$ 上的U-算子。

引理4.5. 设 Φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是两个 *JBW**-代数之间作用于算子交换元素的二次映射，且 $\mathfrak{A}$不含 I_2型直和项。则以下陈述成立：

(a) 若 $\Phi(\mathfrak{A}_{sa}) = (\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))_{sa}$，且 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}$ 在算子交换元素上是可加的，则存在一个中心投影 $z \in \mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1}))$ 满足

$$\Phi(i\mathbf{1}) = i(z - (\Phi(\mathbf{1}) - z)).$$

(b) 若 Φ 满足(a) 中的假设，且 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}} : \mathfrak{A}_{sa} \to (\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))_{sa}$ 是双射，则存在一个中心投影 $r \in \mathfrak{A}$，使得 $\Phi(r) = z$， $\Phi(\mathbf{1} - r) = \Phi(\mathbf{1}) - z$，

$$\Phi(ia) = i\Phi(a)\ (\forall a \in U_r(\mathfrak{A}_{sa})),\ \Phi(ib) = -i\Phi(b)\ (\forall b \in U_{\mathbf{1}-r}(\mathfrak{A}_{sa})),$$

$\Phi(r \circ \mathfrak{A}_{sa}) \subseteq z \circ_w \mathfrak{B}_2(\Phi(1))_{sa}$，且 $\Phi((\mathbf{1} - r) \circ \mathfrak{A}_{sa}) \subseteq (w - z) \circ_w \mathfrak{B}_2(\Phi(1))_{sa}$.$(c)$ 若 Φ 满足 (a) 和 (b) 中的假设，且对所有 a、$b \in \mathfrak{A}_{sa}$，都有 $\Phi(a + ib) = \Phi(a) + \Phi(ib)$，那么 $\Phi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_2(\Phi(1))$ 是一个实线性 *Jordan* *-同构；实际上， Φ 是适当的弱*-闭理想 $\mathfrak{A}$与 $\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$ 之间的线性 *Jordan* *-同构和共轭线性 *Jordan* *-同构的直和。

证明。(a) 由引理 4.1(a) 可知， $\Phi(\mathrm{i}1)$ 是 $\mathfrak{B}_2(\mathrm{w})$ 中的一个三幂等元，其中，与前一个引理一样，我们用 w 表示三幂等元 $\Phi(1) \in \mathfrak{B}$。对应于 JBW*-代数 $\mathfrak{B}_2(\mathrm{w})$ 的 U 算子记为 U^w。由于 i1 与 1 算子可交换，因此我们有

$$\Phi(-i\mathbf{1}) = \Phi(\{\mathbf{1}, i\mathbf{1}, \mathbf{1}\}) = \{w, \Phi(i\mathbf{1}), w\} = \Phi(i\mathbf{1})^{*_w}.$$

因此，我们可以写成 $\Phi(i\mathbf{1}) = i(z - q)$，其中 z和 q是 $\mathfrak{B}_2(w)$ 中两个正交的投影集。此外，

$$\begin{aligned}-\Phi(\mathbf{1}) = \Phi(-\mathbf{1}) &= \Phi(\{i\mathbf{1}, \mathbf{1}, i\mathbf{1}\}) = \{\Phi(i\mathbf{1}), w, \Phi(i\mathbf{1})\}\\ &= \Phi(i\mathbf{1}) \circ_w \Phi(i\mathbf{1}) = -(z + q),\end{aligned}$$

这保证了 $q = w - z = \Phi(\mathbf{1}) - z$。根据假设，对于每个 $b \in (\mathfrak{B}_2(w))_{sa}$，都存在 $a \in \mathfrak{A}_{sa}$，使得 $\Phi(a) = b$。由于 a和$i\mathbf{1}$ 算子

可交换，考虑到引理4.1(d)，我们有

$$\begin{aligned}-U_z^w(b)-U_q^w(b)-2\{z,b,q\} &= -b=-\Phi(a)=\Phi(\{i\mathbf{1},a,i\mathbf{1}\})\\ &=\{i(z-q),\Phi(a),i(z-q)\}\\ &=-U_z^w(b)-U_q^w(b)+2\{z,b,q\},\end{aligned}$$

因此 $\{z,\ b,\ q\}=0$，对所有$b\in(\mathfrak{B}_2(w))_{sa}$均成立，因而$z$是$\mathfrak{B}_2(w)$中的中心投影。

(b) 现在假设 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}:\mathfrak{A}_{sa}\to(\mathfrak{B}_2(\mathrm{w}))_{sa}$ 是一个双射。因此，我们可以选取满足 $\Phi(\mathrm{r})=\mathrm{z}$ 的 $\mathrm{r}\in\mathfrak{A}_{sa}$。根据假设，$\Phi(\mathrm{r}^2)=\Phi(\{\mathrm{r},1,\mathrm{r}\})=\{\mathrm{z},\mathrm{w},\mathrm{z}\}=\mathrm{z}=\Phi(\mathrm{r})$，这证明了 $\mathrm{r}^2=\mathrm{r}$ 是一个投影。由引理 4.1(d)可推得$\Phi(\mathbf{1}-\mathrm{r})=\Phi(1)-\Phi(\mathrm{r})=\mathrm{w}-\mathrm{z}$。

为说明r 是中心的，我们回顾一下：JBW*-代数 $\mathfrak{M}$ 中的投影$p\circ a=U_p(a)$ 对所有$a\in\mathfrak{M}_{sa}$（参见 [15,引理 2.5。5]）。注意，z 在 $\mathfrak{B}_2(w)$中是中心的，这可用于恒等式

$$\begin{aligned}\Phi(U_r(a)) &= \{\Phi(r),\Phi(a),\Phi(r)\}=U_z^w(\Phi(a))=z\circ_w\Phi(a)\\ &=\Phi(r)\circ_w\Phi(a)=(\text{by Lemma 4.1}(d))=\Phi(r\circ a),\end{aligned}$$

其中a 是 $\mathfrak{A}_{sa}$ 中的任意元素。Φ 的单射性保证了对于所有$a\in\mathfrak{A}_{sa}$，$U_r(a)=r\circ a$，因此r是中心的。我们还证明了 $\Phi(U_r(a))\in U_z^w(\mathfrak{B}_2(\Phi(\mathbf{1})))$。

由上述结论可知

$$\Phi(-i\mathbf{1})=\Phi(\{\mathbf{1},i\mathbf{1},\mathbf{1}\})=\Phi(i\mathbf{1})^{*_w}=-\Phi(i\mathbf{1}).$$

为说明最后一个结论，取$c\in U_r(\mathfrak{A})$，并注意到，由于c 与$i\mathbf{1}$算子可交换，因此有

$$\begin{aligned}\Phi(ic^2)&=\Phi(\{c,-i\mathbf{1},c\})=\{\Phi(c),\Phi(-i\mathbf{1}),\Phi(c)\}=\{\Phi(c),-i(z-(w-z)),\Phi(c)\}\\ &=i\{\Phi(c),\Phi(r),\Phi(c)\}-i\{\Phi(c),\Phi(\mathbf{1}-r),\Phi(c)\}\\ &=i\Phi(\{c,r,c\})-i\Phi(\{c,\mathbf{1}-r,c\}=i\Phi(c^2).\end{aligned}$$

$c\in U_r(\mathfrak{A})$ 的任意性使我们可以推出，对于所有$a\in U_r(\mathfrak{A}_{sa})$，有 $\Phi(ia)=i\Phi(a)$, 。类似地，对于所有 $a\in U_{\mathbf{1}-r}(\mathfrak{A}_{sa})$，我们可以得到 $\Phi(ia)=-i\Phi(a)$.

(c) 根据定理 4.3，映射 $\Phi|_{\mathfrak{A}_{sa}}:\mathfrak{A}_{sa}\to(\mathfrak{B}_2(\Phi(1)))_{sa}$ 是一个 Jordan 同构。附加假设与 (a) 和 (b) 一起保证映射 $\Phi_1=\Phi|_{r\circ\mathfrak{A}}:\mathrm{r}\circ\mathfrak{A}\to\mathrm{z}\circ_w\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$ 是一个定义良好的复线性 Jordan *-同构；类似地，$\Phi_2=\Phi|_{(\mathbf{1}-r)\circ\mathfrak{A}}:(\mathbf{1}-\mathrm{r})\circ\mathfrak{A}\to(\mathrm{w}-\mathrm{z})\circ_w\mathfrak{B}_2(\Phi(1))$ 是一个定义良好的共轭线性 Jordan *-同构。回顾 $\mathrm{w}=\Phi(1)$。每个 $\mathrm{x}\in\mathfrak{A}$ 都与 r 和 $\mathbf{1}-\mathrm{r}$ 算子可交换，因此

$$U_z(\Phi(x))^{*_w}=\{\Phi(r),\Phi(x),\Phi(r)\}=\Phi\{r,x,r\}=\Phi(r\circ x^*)=\Phi_1(r\circ x)^{*_w},$$

以及 $U_{w-z}(\Phi(x))=\Phi_2((\mathbf{1}-r)\circ x)$。最后，

$$\Phi(x)=U_z(\Phi(x))+U_{w-z}(\Phi(x))=\Phi_1(r\circ x)+\Phi_2((\mathbf{1}-r)\circ x),$$

这表明 Φ 是线性 Jordan *-同构与共轭线性 Jordan *-同构的直和。□

最后，我们给出以下推论。

推论 4.6. 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是 JBW^*-代数，且 $\mathfrak{A}$ 不含 I型$_2$直和项。则下列陈述等价：

(a) $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ $Jordan$ *-同构。(b) 存在一个双射 Φ: $\mathfrak{A}_{sa} \to \mathfrak{B}_{sa}$，它是可加映射，并且是定义在算子交换元素上的二次映射。

致谢

G.M. Escolano、A.M. Peralta 和 A.R. Villena 获得了 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 以及“欧洲区域发展基金：建设欧洲的一种方式”资助项目 PID2021-122126NB-C31 的部分支持，也获得了 IMAG–María de Maeztu 资助项目 CEX2020- 001105-M/AEI/10.13039/ 501100 011033 以及安达卢西亚自治区政府资助项目 FQM185 和 FQM375 的支持。第一作者获得了大学部（西班牙）设立的格拉纳达大学资助项目 FPU21/00617 的支持。

数据可用性声明 本文不适用数据共享，因为论文撰写期间未生成或分析任何数据集。

声明

利益冲突作者声明，其不存在利益冲突。

参考文献

[1] E. M. Alfsen 和 F.W. Shultz，算子代数状态空间的几何，数学：理论与应用，Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2003年。 [2] R. Braun、W. Kaup、H. Upmeier，Jordan C*-代数的全纯刻画，《数学杂志》**161** (1978)，3，277–290。 [3] M. Cabrera、A. Rodríguez Palacios，《非结合赋范代数》第*1*卷：*Vidav-Palmer*定理与*Gelfand-Naimark*定理。《数学百科全书及其应用》第154卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014年。 [4] M. Cabrera、A. Rodríguez Palacios，《非结合赋范代数》第*2*卷：表示理论与*Zel'manov*方法，《数学百科全书及其应用》第167卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。 [5] M. Cueto-Avellaneda 、 A. M. Peralta，能否通过两个含幺 *JB**- 代数的酉元集合所确定的度量空间来辨别它们？，《线性与多重线性代数》**70** 22，7702 2022 7727 ( )，第 – 期。 [6] H.A. Dye：关于某些算子代数中投影的几何，《数学年刊》**61** (1955)，(2) 73–89。[7] C.M. Edwards，关于Jordan W*-代数，《数学科学通报》**104** (1980)，393–403。 [8] G. M. Escolano、A. M. Peralta、A. R. Villena，算子交换性的保持映射，《数学分析及其应用杂志》**552**(2025年)，第2期，论文编号129796，共64页。 [9] G. M. Escolano、A. M. Peralta、A. R. Villena，*JBW*投影上向量值测度的*Mackey–Gleason–Bunce–Wright*问题 * 2509 03213 -代数，arXiv：。 [10] Y. Friedman，齐次球的物理应用。Tzvi Scarr协助编写。《数学物理进展》第40卷。美国马萨诸塞州波士顿：Birkhäuser，2005年。 [11] Y. Friedman、J. Hakeda，二次映射的可加性，《数学科学研究所出版物》**24** (1988)，第5期，707–722。[12] J.J. Garcés、A.M. Peralta，JB*-代数上正交性保持映射的单参数半群，《算子理论进展》**6** (2021)：论文编号43。

[13] J. Hakeda、J.， *-半群同构的可加性， *-代数之间，《伦敦数学会会刊》18 (1986年)，51–56。 [14] J. Hakeda、K. Saito，算子代数之间Jordan *-映射的可加性，《日本数学会》38 (1986年)，403–408。[15] H. Hanche-Olsen、E. Størmer，《Jordan算子代数》，Pitman，伦敦，1984年。 [16] J. Hamhalter，C*-代数与因子冯·诺伊曼代数上的分片 *-同态及Jordan映射，《数学分析及其应用杂志》462 (2018年)，第1期，1014–1031。 [17] J. Hamhalter，冯·诺伊曼代数中保持可交换元素乘积的映射，《数学分析及其应用杂志》523 (2023年)，第2期，论文编号127044。 [18] J. Hamhalter，保持算子交换元素乘积的JBW代数及冯·诺伊曼代数正锥态射，预印本，2025年。 [19] L.A. Harris，无限维空间中的有界对称齐性域。载于《无限维全纯性会议论文集》，列克星敦，1973年，《数学讲义》364 (1974年)，13-40。 [20] L.A. Harris，C*-代数的一种推广，《伦敦数学会论文集》42 (1981年)，331–361。 [21] F.J. Hervés、J.M. Isidro，旋量空间的等距变换与自同构，《马德里康普顿斯大学数学杂志》5 (1992年)，第2-3期，193–200。 [22] C. Heunen、M.L. Reyes，活格决定AW*-代数，《数学分析及其应用杂志》416 (2014年)，第1期，289–313。 [23] E. Hewitt、K.A. Ross，《抽象调和分析》第I卷：拓扑群结构、积分理论、群表示。第2版。《数学科学基础丛书》第115卷。柏林：Springer-Verlag，1994年。 [24] R.V. Kadison、J.R. Ringrose，《算子代数理论基础》第I卷。纽约：学术出版社，1983年。 [25] W. Kaup，复巴拿赫空间中有界对称域的黎曼映射定理，《数学杂志》183 (1983)，503–529。 [26] S. Kochen、E.P. Specker，量子力学中的隐变量问题，《数学与力学杂志》17 (1967年)，59-87。[27] L. Molnár，一般的Mazur-Ulam型定理及若干应用。载于《算子半群与复分析、调和分析及数理物理相遇》（Arendt, Wolfgang 等编）。会议论文集，德国赫恩胡特，2013年6月3?7日。《算子理论进展》250，311-342 (2015)。 [28] M. Ozawa，普适不确定性原理、同时可测性与弱值。载于Ralph, Timothy（编）等，《量子通信、测量与计算》（QCMC）。第十届国际会议，澳大利亚布里斯班，2010年7月19?23日。纽约州梅尔维尔：美国物理联合会（AIP）。《美国物理联合会会议论文集》1363，53-62 (2011)。 [29] D.M. Topping，自伴算子的Jordan代数，《美国数学会回忆录》53，1965年。 [30] J. van de Wetering，Jordan算子代数中的交换性，《纯粹与应用代数杂志》224 (2020年)，第11期，106407。[31] J.D.M. Wright，Jordan C* 代数，《密歇根数学杂志》24 (1977年)，291–302。

格拉纳达大学理学院数学分析系，西班牙格拉纳达18071。

电子邮箱：gemares@correo.ugr.es

捷克布拉格捷克理工大学电气工程学院数学系，特克尼茨卡街2号，166 27，布拉格6区，布拉格，捷克共和国。

电子邮箱：hamhalte@math.feld.cvut.cz

数学分析系，理学院，格拉纳达大学，18071 格拉纳达，西班牙。格拉纳达大学数学研究所（IMAG）。

电子邮件地址：aperalta@ugr.es

数学分析系，理学院，格拉纳达大学，18071 格拉纳达，西班牙。格拉纳达大学数学研究所（IMAG）。

电子邮件地址：avillena@ugr.es