arXiv:2603.16695v1 [math.CO] 17 Mar 2026

图的独立多项式

Takayuki Hibi、Selvi Kara 和 Dalena Vien

Abstract. 本文研究有限简单图 G 的独立集多项式 $P_G(x)$，重点关注其在 $x=-1$ 处的取值、对称性，以及它与 G的边理想的 h-多项式之间的联系。对于大星图，我们精确确定 $P_G(-1)$何时取值为 0、1 或 -1，刻画伪戈伦斯坦* 成员，并证明存在唯一一个具有对称独立多项式的大星图。我们还研究通过向图 H 的选定顶点添加叶子而得到的图。我们推导出所得独立多项式的显式公式，确定其在 -1 处的相应取值，并证明若 H 的每个顶点至少接收一片叶子，则独立多项式对称当且仅当每个顶点恰好接收两片叶子。作为应用，我们得到毛毛虫图中 $P_G(-1)$ 的取值以及伪戈伦斯坦* 成员的精确判据。对于余弦图，我们分类了所有对称独立多项式。最后，对于有 n 个顶点且独立数较小的连通图，我们确定 $P_G(-1)$可能取值的精确范围。

Introduction

对于有限简单图 G， G 的独立集多项式为

$$P_G(x)=\sum_{i=0}^{\alpha(G)} g_i(G)x^i,$$

其中 $g_i(G)$表示中大小为 i的 G独立集的数量。该多项式是与图相关联的基本计数不变量之一。独立集多项式除了具有纯粹的组合学意义外，还作为统计物理中硬核模型的配分函数出现，其零点在与 Lov´asz 局部引理以及概率组合学中的无零区域相关的问题中发挥着重要作用 [21]。因此，独立集多项式处于图枚举、统计物理、概率组合学和交换代数的交汇处；例如，参见 [2, 8, 13, 16]。

本文聚焦于 $P_G(x)$ 的两个方面：在 $x=-1$ 处的取值和对称性。数值 $P_G(-1)$ 是独立集的交错计数，等价于独立复形 Ind(G) 的约化欧拉示性数的相反数。这一量已从多个角度得到研究，包括关于图结构、去圈数及可实现性问题的界；参见 [3, 4, 17, 19]。第二个主题——独立多项式的对称性——属于对回文性、单峰性、对数凹性和根的更广泛研究范畴。关于构造出对称性的已有大量文献，尤以 Stevanovi´c 的双悬挂叶构造及其后续扩展和改进为代表；

2020 数学主题分类。05C38,05C31。关键词和短语。图的独立集多项式、弦图、余弦图。本文是在第一作者于2026年2月28日至3月21日期间访问宾夕法尼亚州布林莫尔学院时完成的。

参见 [18, 20, 22]。即使对于树，这些问题仍然颇为微妙：例如，若 T 是一棵树，则 $P_T(-1) \in \{-1, 0, 1\}$ 由 [17], 给出，但究竟哪些树能实现哪些取值，仍远未明了。

研究独立多项式的第二个动机来自交换代数。令 $I(G)$ 为 G 的边理想，并令 $h_G(t)$ 表示 $S/I(G)$ 的 h-多项式。作者在 [13] 中讨论了 $P_G(-1)$ 的值如何决定 $h_G(t)$ 的最高次项系数。此外，-1 作为 $P_G(x)$ 的根的重数，记作 $M(G)$，根据定理 4.4]，决定了 h-多项式的次数 [2, 。

$$\deg h_G(t) = \alpha(G) - M(G).$$

因此，-1 作为 $P_G(x)$ 的根的重数决定了 $S/I(G)$ 的 $\mathfrak{a}$-不变量。此外，G 是伪戈伦斯坦 * 的条件——这是作者在 [13], 中引入并研究的一个新概念——等价于以下简单恒等式

$$P_G(-1) = (-1)^{\alpha(G)}.$$

因此，在 -1 处取值自然成为独立集组合学与边理想代数之间的交汇点。

我们首先关注大星图，它们由若干条路径在同一个中心处粘合而成。对于这些图，我们证明 $P_G(-1$是否为零完全由模 3 的同余类决定，而非零情形下的符号则由模 6 的同余类决定；参见定理 2.4 和2.5。随后，我们在推论 2.8 中完整刻画了伪戈伦斯坦* 大星图。我们还研究了对称性，并在定理 2.9 中证明，在所有大星图中，恰有一个具有对称独立集多项式。

我们的第二个关注点是加悬挂叶（即附加叶子）的影响。在命题 3.1 中，我们给出了一个通用公式，用于计算从基图 H 中选定的顶点 f_i 上附加 x_i个叶子后所得图的独立多项式 -1。当多项式在 $C \subseteq V(H)$处取值时，会出现一个显著的简化：只有实际附加了叶子的顶点集合 $P_G(-1) = 0$ 才起作用，除非 C 是 H的独立集；而当C 是独立集时，我们得到

$$P_G(-1) = (-1)^{|C|} P_{H-N_H[C]}(-1).$$

我们还在定理 3.2 中证明，如果 H 的每个顶点都至少附加一个叶子，那么所得图具有对称独立多项式，当且仅当每个顶点恰好附加两个叶子。这一结果重现了 Stevanovi´c 的双悬挂叶构造，[22], 该构造后来被证明不仅能得到对称性，还能得到单峰性；[20], 同时也表明，在我们的叶子附加情形中，这实际上是唯一的对称情形。

作为加悬挂叶的一项应用，我们研究毛毛虫图，即通过向路径附加叶子得到的图。沿路径对腿的位置进行编码，可得到$P_G(-1)$的乘积公式，见定理3.5。由此我们确定 $0, \pm 1$ 何时出现；见推论3.6和3.9。此外，我们在推论* 中刻画了伪戈伦斯坦3.10毛毛虫图。

我们还研究余弦图，也就是其补图为弦图的图。这一类图在组合学和代数中都很自然：G 的独立集是G的团，而余弦图在线性自由分解的边理想研究中发挥着核心作用[6, 11]。由于弦图的团复形是准森林，[12], 余弦图的独立多项式可以通过 h-序列描述来研究。

来自 [10]的准森林。利用 [10], 我们证明，余弦图 G 具有 $d = \alpha\ (G)\ \geq 2$当且仅当其具有对称独立多项式

$$P_G(x) = (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2}$$

对于某个 $m \geq 0$。特别地，余弦图的每个对称独立多项式都是单峰的。我们还回顾一下，$P_G(-1) = 1-k$ 其中 k 是 G的连通分支数；参见推论4.5。

最后，我们研究当独立数较小时， $P_G(-1)$ 的最大值或最小值。对于有 n 个顶点且满足 $\alpha(G) \leq 2$的连通图，定理 5.4 表明，区间内的每个整数

$$\left[-(n-1), \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1\right]$$

都可以作为 $P_G(-1)$。上界由对补图应用 Mantel 定理得到，而通过一个由两个团构成的显式连通弦图族，可以实现整个区间。这样，我们的最后一节可以视为对早期关于 $P_G(-1)$ 的可实现性结果的对应研究，例如 Cutler 和 Kahl 在 [3]提出的连通构造。

1. Preliminaries

本文中，所有图都是有限简单图。对于图 G，我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示其顶点集和边集，用 $\alpha(G)$ 表示其独立数，并用 $\overline{G}$ 表示其补图。我们将 G 的独立复形记为 $\mathrm{Ind}(G)$，即其面为 $V(G)$ 的独立子集的单纯复形。对于 $W \subseteq V(G)$，令 $N_G(W)$ 和 $N_G[W] = W \cup N_G(W)$ 分别表示 W 的开邻域和闭邻域，并令 $G-W$表示 $V(G) \setminus W$ 上的诱导子图。特别地， $G-v := G-\{v\}$且 $G-N[v] := G-N_G[v]$。我们用 $G \sqcup H$表示图 G 和 H的不交并。对于 $n \geq 0$，令 P_n表示具有 n 个顶点的路径，并约定 P_0 为空图。

G 的独立多项式为

$$P_G(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(G)} g_i(G)x^i = \sum_{F \in \mathrm{Ind}(G)} x^{|F|},$$

其中， $g_i(G)$表示 G 中大小为 i的独立集的数量。当上下文中的图明确时，我们简写为 g_i。

我们称 $P_G(x)$为对称 的，若

$$x^{\alpha(G)} P_G(1/x) = P_G(x),$$

等价地，若对所有 i， $g_i(G) = g_{\alpha(G)-i}(G)$。我们反复使用乘法性

$$P_{G \sqcup H}(x) = P_G(x)P_H(x).$$

设 G 的顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_n\}$，设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$，并设

$$I(G) = (x_i x_j : \{x_i, x_j\} \in E(G))$$

是 G的边理想。

回顾一下， $h_G(t)$表示 $S/I(G)$的 h-多项式，并且

$$h_G(t) := h_{S/I(G)}(t) = \sum_{i=0}^{\alpha(G)} h_i(G)t^i,$$

其中 $h_i(G) = 0$ 对 $i >$ 次 $h_G(t)$。我们用 $\mathfrak{a}(G)$ 表示 $S/I(G)$ 的 $\mathfrak{a}$ 不变量，其中 e

$$\mathfrak{a}(G) := \mathfrak{a}(S/I(G)) = \deg h_G(t) - \alpha(G).$$

最后，我们用 $M(G)$ 表示 $x = -1$ 作为独立多项式 $P_G(x)$ 的根的重数。

现在我们回顾一组标准结果及其推论（参见 [13]）。

命题 1.1。设 $\alpha = \alpha(G)$。则

$$h_G(t) = (1-t)^\alpha P_G\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

特别地， $h_\alpha(G) =(-1)^\alpha P_G(-1)$。

下一个定理（在 [2, 定理 4.4], 中证明）将 $h_G(t)$ 的次数与 -1 作为 $P_G(x)$ 的根的重数联系起来。

定理 1.2. *[2,定理 4.4]对于每个有限简单图 G,*

$$\deg h_G(t) = \alpha(G) - M(G).$$

因此，由上述结果可知，对于每个有限简单图 G， $\mathfrak{a}(G) = -M(G)$。此外， $\mathfrak{a}(G) = 0$ 当且仅当 $P_G(-1) \neq 0$。

接下来，我们回顾文献 [13] 中伪戈伦斯坦* 图的定义。

定义 1.3. 设 G 是一个有限简单图，且令 $\alpha = \alpha(G)$。我们称 G 为伪戈伦斯坦*，如果 $\mathfrak{a}(G) = 0$ 且 $h_\alpha(G) = 1$。

于是，图 G 是伪戈伦斯坦* 当且仅当 $P_G(-1) =(-1)^{\alpha(G)}$。

下面这个用于计算独立多项式的标准顶点删除递推非常有用。

引理 1.4. 设 G 是一个有限简单图，且 $v \in V(G)$。则

$$P_G(x) = P_{G-v}(x) + xP_{G-N[v]}(x).$$

为便于后文引用，我们记录树的独立多项式在 $x = -1$处的值的以下一般事实。

定理 1.5. *[17, 定理 2.4]若 T是一棵树，则 $P_T(-1) \in \{-1, 0, 1\}$。*

P_{P_n}的值 关于路径的（-1）已有相关文献研究；例如，参见 [14]。

引理 1.6. 设 $p_n := P_{P_n}(-1)$ 对于 $n \geq 0$。则

$$p_0 = 1, \qquad p_1 = 0, \qquad p_n = p_{n-1} - p_{n-2} \quad \textit{for } n \geq 2.$$

因此， p_n 的周期为6，且

$$p_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 5 \pmod 6, \\ 0, & n \equiv 1, 4 \pmod 6, \\ -1, & n \equiv 2, 3 \pmod 6. \end{cases}$$

2. Big Stars

本节研究大星图的独立多项式。大星图是通过将若干条路径粘合在一个公共中心处得到的。这一类图为研究局部路径结构与全局分支之间的相互作用提供了一个自然的试验场，而且这种相互作用仍可进行显式分析。利用中心处的顶点删除递推，以及$P_{P_n}(-1)$的周期性行为，我们精确确定独立多项式在 -1 处取值为 0、1 或 -1的条件。随后，我们刻画伪戈伦斯坦* 大星图。最后，我们转而研究对称性，并证明只有一个大星图的独立多项式是对称的。

定义 2.1。设 $q \geq 3$ 为一个整数， n_1、 . . . 、 n_q 为正整数。令 Γ_i 表示顶点集为 $V_i = \{x, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\}$ 的路径，其中 $1 \leq i \leq q$。对于每个 i， Γ_i 是一条长度为 n_i 的路径。我们假设 $V_i \cap V_j = \{x\}$，其中 $i \neq j$。令 $G(n_1, \ldots, n_q) = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_q$。采用 [1, 定义 5.9] 中的术语，我们称 $G(n_1, \ldots, n_q)$为以中心顶点x为中心的大星图。

在本节余下部分，令 $r := |\{i : n_i \text{ 为奇数}\}|$ ，并令 x 为$G(n_1, \ldots, n_q)$的中心顶点。

引理 2.2. 设 $G(n_1, \ldots, n_q)$ 为一个大星图。那么

$$P_G(x) = \prod_{i=1}^{q} P_{P_{n_i}}(x) + x \prod_{i=1}^{q} P_{P_{n_i-1}}(x).$$

证明。 记 $G := G(n_1, \ldots, n_q)$，并令 x 为其中心顶点。删除中心顶点x后，我们得到

$$G - x = \bigsqcup_{i=1}^{q} P_{n_i}, \qquad G - N[x] = \bigsqcup_{i=1}^{q} P_{n_i-1}.$$

因此，根据引理 1.4 以及不交并上的乘法性，

$$P_G(x) = \prod_{i=1}^{q} P_{P_{n_i}}(x) + x \prod_{i=1}^{q} P_{P_{n_i-1}}(x)$$

约定 $P_{P_0}(x) = 1$。 □

注 2.3。 由引理 2.2可知

$$P_G(-1) = \prod_{i=1}^{q} p_{n_i} - \prod_{i=1}^{q} p_{n_i-1},$$

其中 $p_m := P_{P_m}(-1)$，如引理 1.6所述。由此，为了确定 $P_G(-1)$ 何时为 0、1 或 -1，

$$p_m = 0 \iff m \equiv 1 \pmod 3,$$
$$p_{m-1} = 0 \iff m \equiv 2 \pmod 3,$$

and

$$m \equiv 0 \pmod 3 \implies p_m = p_{m-1} \in \{\pm 1\}.$$

我们从 $P_G(-1) = 0$ 情形开始。

定理 2.4. 设 $G := G(n_1, \ldots, n_q)$ 是一个大星图。那么 $P_G(-1) = 0$ 当且仅当以下条件之一成立：

(1) 对所有 i，$n_i \equiv 0$ (模 3)，或者

(2) 存在 $i \neq j$，使得 $n_i \equiv 1$ (模 3) 且 $n_j \equiv 2$ (模 3)。

证明。遵 循备注 2.3中的讨论，我们有 $P_G(-1) = 0$ 当且仅 f

$$\prod_{i=1}^{q} p_{n_i} = \prod_{i=1}^{q} p_{n_i - 1}.$$

首先，假设存在 $i \neq j$，使得 $n_i \equiv 1$ （模 3）且 $n_j \equiv 2$ （模 3）。那么$p_{n_i} = 0$，所以第一个乘积为零；并且 $p_{n_j - 1} = 0$，所以第二个乘积为零。因此$P_G(-1) = 0$。接下来，假设对所有 i，都有 $n_i \equiv 0$ （模 3）。那么对每个 i，都有 $p_{n_i} = p_{n_i - 1}$。因此 $\prod_{i=1}^{q} p_{n_i} = \prod_{i=1}^{q} p_{n_i - 1}$。所以同样有 $P_G(-1) = 0$。

反过来，假设 $P_G(-1) = 0$。如果两个乘积都为零，那么某个因子 p_{n_i} 必为零，因此对于某个 i，有 $n_i \equiv 1$ （模 3）；并且某个因子 $p_{n_j - 1}$ 必为零，因此对于某个 j，有 $n_j \equiv 2$（模 3）。于是条件 (ii) 成立。如果两个乘积都不为零，那么没有 p_{n_i} 为零，也没有 $p_{n_i - 1}$ 为零。因此没有 $n_i \equiv 1$ （模 3），也没有 $n_i \equiv 2$ （模 3）。所以对所有 i，都有$n_i \equiv 0$ （模 3），故条件 (i) 成立。

因此，$P_G(-1) = 0$ 当且仅当 (i) 或 (ii) 成立。正如开头所观察到的，这等价于 $\mathfrak{a}(G) < 0$。□

根据定理 1.5，已知 $P_G(-1) \in \{-1, 0, 1\}$。在确定了何时 $P_G(-1) = 0$ 之后，我们的目标是确定对于哪些大星图，有 $P_G(-1) = 1$ 以及 $P_G(-1) = -1$。正如我们在定理 2.4 中所见，模 3 的数据恰好能确定何时发生 $P_G(-1) = 0$。然而，当 $P_G(-1) \neq 0$ 时，模 3 并不能确定其符号。正如我们将看到的，符号由模 6 的同余类以及一个奇偶性条件共同决定。

定理 2.5. 设 $G = G(n_1, \ldots, n_q)$ 是一个大星图。设

$$c_k := |\{i : n_i \equiv k \pmod 6\}|$$

对于 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$。那么

$$P_G(-1) = \begin{cases} (-1)^{c_2 + c_3}, & \text{if } c_1 = c_4 = 0 \text{ and } c_2 + c_5 > 0, \\ (-1)^{c_3 + c_4 + 1}, & \text{if } c_2 = c_5 = 0 \text{ and } c_1 + c_4 > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 如注释 2.3所示，我们有 $P_G(-1) = \prod_{i=1}^{q} p_{n_i} - \prod_{i=1}^{q} p_{n_i-1}$ 其中

$n_i \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
p_{n_i}	1	0	-1	-1	0	1
p_{n_i-1}	1	1	0	-1	-1	0

现在考虑这两个乘积。
如果 $c_1 + c_4 > 0$，那么 $\prod_i p_{n_i} = 0$。如果 $c_2 + c_5 > 0$，那么 $\prod_i p_{n_i-1} = 0$。

因此需要考虑四种情形。

情形 1： $c_1 + c_4 > 0$ 和 $c_2 + c_5 > 0$。于是两个乘积都为零，且 $P_G(-1) = 0$。

情形 2： $c_1+c_4 = 0$和 $c_2+c_5 = 0$。于是每个 $n_i \equiv 0$或 3（模 6），且对于所有 i，
$p_{n_i} = p_{n_i-1} \in \{\pm 1\}$。因此这两个乘积相等。所以 $P_G(-1) = 0$。

情形 3： $c_1 + c_4 = 0$ 和 $c_2 + c_5 > 0$。于是 $\prod_i p_{n_i-1} = 0$，而 $\prod_{i=1}^{q} p_{n_i} = (-1)^{c_2+c_3}$，因为$p_{n_i} = -1$ 仅当 $n_i \equiv 2$ 或 3（模 6）时才成立。因此

$$P_G(-1) = (-1)^{c_2+c_3}.$$

情形 4： $c_2 + c_5 = 0$ 和 $c_1 + c_4 > 0$。那么 $\prod_i p_{n_i} = 0$，而 $\prod_{i=1}^{q} p_{n_i-1} = (-1)^{c_3+c_4}$ 仅当$p_{n_i-1} = -1$ $n_i \equiv 3$ 或 4（模 6）时成立。因此

$$P_G(-1) = -(-1)^{c_3+c_4} = (-1)^{c_3+c_4+1}.$$ □

下面给出了 $P_G(-1) = 1$ 成立以及 $P_G(-1) = -1$ 成立的条件 .

推论 2.6。 设 $G = G(n_1, \ldots, n_q)$ 为一个大星图。

(1) $P_G(-1) = 1$ 当且仅当以下条件之一成立：

(a) 对所有 i， $n_i \not\equiv 1$ （模 3），至少一个 $n_i \equiv 2$ （模 3），且 $c_2 + c_3$ 为偶数；或者

(b) 对所有 i，$n_i \not\equiv 2$ （模 3），至少一个 $n_i \equiv 1$ （模 3），且 $c_3 + c_4$ 为奇数。

(2) $P_G(-1) = -1$ 当且仅当以下情况之一成立

(a) $n_i \not\equiv 1 \pmod 3$ *for all* i, *at least one* $n_i \equiv 2 \pmod 3$ *and* $c_2 + c_3$ *is odd, or*

(b) $n_i \not\equiv 2 \pmod 3$ *for all* i, *at least one* $n_i \equiv 1 \pmod 3$ *and* $c_3 + c_4$ *is even.*

现在我们确定大星图的独立数。

引理 2.7. 设 $G(n_1, \ldots, n_q)$ 是一个大星图。那么

$$\alpha\big(G(n_1, \ldots, n_q)\big) = \sum_{i=1}^{q} \lfloor n_i/2 \rfloor + \max\{1, r\}$$

其中 $r = |\{i\colon \ n_i$ 为奇数$\}|$。

证明。设 $G := G(n_1, \ldots, n_q)$，其中心顶点为 x。G 的一个最大独立集要么包含 x，要么不包含 x。若包含 x，则在第 i 条臂上至多可选

$$\alpha(P_{n_i-1}) = \left\lceil \frac{n_i - 1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$$

附加顶点。因此，这样的最大独立集的大小为 $1 + \sum_{i=1}^{q} \lfloor n_i/2 \rfloor$。如果它不包含 x，那么在第 i 条臂上至多可以选择 $\alpha(P_{n_i})$ 个 $= \lceil n_i/2 \rceil$ 顶点。因此，这样的最大独立集的大小为 $\sum_{i=1}^{q} \lceil n_i/2 \rceil$。因此

$$\alpha(G) = \max\left\{1 + \sum_{i=1}^{q} \lfloor n_i/2 \rfloor, \sum_{i=1}^{q} \lceil n_i/2 \rceil\right\} = \sum_{i=1}^{q} \lfloor n_i/2 \rfloor + \max\{1, r\}$$

其中最后一个等式由 $\sum_{i=1}^{q} \lceil n_i/2 \rceil = \sum_{i=1}^{q} \lfloor n_i/2 \rfloor + r$ 得出。 □

现在我们可以描述哪些大星图是伪戈伦斯坦的*，利用定理 2.5 和引理2.7。

推论 2.8。设 $G = G(n_1, \ldots, n_q)$ 为一个大星图。那么 G 是伪戈伦斯坦的*当且仅当以下条件之一成立：

(1) $n_i \neq 1$（模 3) 对所有 i，至少有一个 $n_i \equiv 2$ (模 3)，并且 $\alpha(G) \equiv c_2 + c_3$ (模 2)；

(2) $n_i \not\equiv 2$ (模 3) 对所有 i，至少有一个 $n_i \equiv 1$ (模 3)，并且 $\alpha(G) \equiv c_3 + c_4 + 1$ (模 2) .

最后，我们确定哪些大星图具有对称独立多项式。令人惊讶的是，恰好只有一个大星图具有这一性质。

定理 2.9。设 $G = G(n_1, \ldots, n_q)$ 是一个大星图。那么 $P_G(x)$ 是对称的，当且仅当 $G \cong G(1, 1, 5)$。

证明。令 $\alpha := \alpha(G)$。如果 $P_G(x)$ 是对称的，那么 $g_\alpha = g_0 = 1$。这意味着 G 具有唯一的最大独立集。

回忆一下，$r = |\{i : n_i \text{ 为奇数}\}|$。如果 $r = 1$，那么存在一个包含中心的最大独立集，也存在一个避开中心的最大独立集，矛盾。如果 $2 \leq r \leq q - 1$，那么每个最大独立集都避开中心，并且每条偶数臂 P_{2a} 至少贡献两种最大选择，再次矛盾。因此，要么所有臂都是偶数，要么所有臂都是奇数。

首先假设 $n_i = 2a_i$ 对所有 i均成立。在这种情况下，$g_1 = 1 + 2\sum_{i=1}^{q} a_i$ 并且 $\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{q} a_i$ 根据引理 2.7。大小为 $\alpha - 1$ 的独立集要么避开中心，要么包含中心。如果避开中心，那么在第 i条臂上 $x_1^{(i)} - x_2^{(i)} - \cdots - x_{2a_i}^{(i)}$ 必须选择一个大小为 P_{2a_i}的最大独立集。因此每条臂 P_{2a_i} 恰好贡献 a_i 个顶点，而 a_i 在 P_{2a_i} 中大小为 $\binom{2a_i+1-a_i}{a_i} = a_i + 1$的独立集数量为 $\prod_{i=1}^{q}(a_i + 1)$。

如果它包含中心，那么每条臂上都不能出现 $x_1^{(i)}$。因此，在第 i条臂上，我们只能选择来自 $x_2^{(i)} - x_3^{(i)} - \cdots - x_{2a_i}^{(i)} \cong P_{2a_i-1}$的顶点。由于中心已经贡献了一个顶点，因此所有臂合计必须贡献 $\sum_{i=1}^{q} a_i - 1$。所以，恰好有一条臂（设为第j条）贡献 $a_j - 1$ 个顶点，而其他每条臂都贡献 a_i，这必然是唯一的

最大独立集 $\{x_2^{(i)}, x_4^{(i)}, \ldots, x_{2a_i}^{(i)}\}$。在例外的第 j条臂上， P_{2a_j-1} 中大小为 a_j-1 的独立集数量为 $\binom{(2a_j-1}{a_j-1}^{)+1-\ a_j-1}) = \binom{a_j+1}{2}^{()}$。因此，这些合计贡献$\sum_{j=1}^{q}\binom{a_j+1}{2}$。所以

$$g_{\alpha-1} = \prod_{i=1}^{q}(a_i+1) + \sum_{i=1}^{q}\binom{a_i+1}{2}.$$

由于 $\binom{a_i+1}{2} \geq a_i$，并且因为 $q \geq 3$且每个 $a_i \geq 1$，我们有 $\prod_{i=1}^{q}(a_i+1) > 1+\sum_{i=1}^{q} a_i$。因此， $g_{\alpha-1} > 1+2\sum_{i=1}^{q} a_i = g_1$，这与对称性矛盾。这意味着所有臂都是奇数长度。

令 $n_i = 2a_i+1$ 对所有 i。由引理 2.7，我们有 $\alpha = q+\sum_{i=1}^{q} a_i$。现在令 I 为一个包含中心 x的独立集。那么对每个 i都有 $x_1^{(i)} \notin I$，因此在第 i 条臂上，我们只能从 $x_2^{(i)} - x_3^{(i)} - \cdots - x_{2a_i+1}^{(i)} \cong P_{2a_i}$ 中选取顶点。因此，该臂至多有 a_i 个顶点。于是，由于 $q \geq 3$，可得 $|I| \leq 1+\sum_{i=1}^{q} a_i \leq \alpha-2$。所以，没有大小为 $\alpha-1$ 的独立集包含中心。由此可知，计入 $g_{\alpha-1}$ 的每个独立集都避开中心。在第 i 条臂上，可能的最大贡献为 a_i+1。因此，这样的集合必须在除恰好一条臂之外的所有臂上都是极大的，而在剩下的那条臂上（设为第 i 条臂），其大小必须为 a_i。对于 $j \neq i$， P_{2a_j+1} 的唯一最大独立集是 $\{x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, \ldots, x_{2a_j+1}^{(j)}\}$；而 P_{2a_i+1} 中大小为 a_i 的独立集数量为 $\binom{(2a_i+1}{a_i}^{+1-a_i}) = \binom{a_i+2}{2}$。对特殊臂的选择求和，得到

$$g_{\alpha-1} = \sum_{i=1}^{q}\binom{a_i+2}{2}.$$

由于 $P_G(x)$ 是次数为 α 的对称多项式，我们有

$$g_{\alpha-1} = \sum_{i=1}^{q}\binom{a_i+2}{2} = q+1+2\sum_{i=1}^{q} a_i = g_1.$$

由于 $\binom{a_i+2}{2} = \binom{a_i}{2}+2a_i+1$，该等式变为 $\sum_{i=1}^{q}\binom{a_i}{2} = 1$。该等式迫使恰有一项为 1，其余各项均为 0。因此，经过重新排序后，恰有一个 a_i 为 2，而其余每个 a_j 均为 0 或 1。由于 $n_i = 2a_i+1$，这意味着恰有一条臂的长度为 5，而其余每条臂的长度为 1 或 3。

若 $q = 3$，则唯一的可能性是 $G(1, 1, 5)$、 $G(1, 3, 5)$ 和 $G(3, 3, 5)$，而直接计算表明，只有 $G(1, 1, 5)$ 是对称的。

现在假设 $q \geq 4$。由上一段可知，经过重新排序后，我们可以写成

$$G \cong G(\underbrace{1, \ldots, 1}_{b}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{t}, 5)$$

其中 $q = b+t+1$ 且 $\alpha = b+2t+3$。

令 $S(x) := (1+x)^b(1+3x+x^2)^t$。那么，我们有

$$P_G(x) = S(x)\underbrace{(1+5x+6x^2+x^3)}_{A(x)} + \underbrace{x(1+4x+3x^2)(1+2x)^t}_{B(x)}.$$

由于 $S(x)$ 是 $b+2t = \alpha-3$ 次对称的，我们有 $x^{\alpha-3}S(x^{-1}) = S(x)$。该 n

$$[x^{\alpha-k}]S(x)A(x) = [x^k]S(x)x^3A(x^{-1}).$$

因此

$$[x^k]S(x)A(x) - [x^{\alpha-k}]S(x)A(x) = [x^k]S(x)\big(A(x) - x^3A(x^{-1})\big)$$

其中 $A(x) - x^3A(x^{-1}) = x(x-1)$。因此

$$[x^k]S(x)A(x) - [x^{\alpha-k}]S(x)A(x) = [x^k]\big(x(x-1)S(x)\big).$$

接下来，$B = t+3 = \alpha-(q-1)$的次数。因此，若 $k \le q-2$，则 $\alpha - k > \deg B$。于是 $[x^{\alpha-k}]B(x) = 0$。由此可知，对每个 $k \le q-2$，都有

$$g_k - g_{\alpha-k} = [x^k]\Big(B(x) + x(x-1)S(x)\Big).$$

考虑 $k = 2$。可以根据 x^2 在 $B(x)$ 和 $x(x-1)S(x)$ 中的系数，得出 $g_2 - g_{\alpha-2} = 6 - q$。若 $P_G(x)$ 是对称的，则 $q = 6$ 和 $b + t = 5$。

现在考虑 $k = 3$，并利用 $b = 5 - t$ 来推导 x^3 在 $B(x)$ 和$x(x-1)S(x)$ 中的系数。因此，我们有 $g_3 - g_{\alpha-3} = t - 2$。对称性要求 $t = 2$。因此 $b = 3$。于是，满足 $q \ge 4$ 的唯一可能是 $G \cong G(1, 1, 1, 3, 3, 5)$。直接计算得到以下多项式，它不是对称的：

$$P_G(x) = 1 + 15x + 91x^2 + 296x^3 + 577x^4 + 714x^5 + 575x^6 + 296x^7 + 91x^8 + 15x^9 + x^{10}.$$

因此，当且仅当 $G \cong G(1, 1, 5)$ 时，$P_G(x)$ 具有对称性。 □

3. Whiskering and Independence Polynomials

本节研究加悬挂叶（即向选定的顶点附加叶子）对独立多项式的影响。我们推导独立多项式的一般公式，得到其在 -1 处取值的一个简单表达式，并证明：如果基图的每个顶点都至少附加一个叶子，则当且仅当每个顶点附加两个叶子时，才具有对称性。

命题 3.1。设 H 是一个顶点为 x_1、……、x_n 的有限简单图，且 f_1、……、f_n 为非负整数。令 G 为从 H 得到的图：对每个 $i \in [n]$，向 x_i 附加 f_i 个叶顶点。设 $C := \{x_i \mid f_i > 0\} \subseteq V(H)$。则

$$P_G(x) = \sum_{\substack{S \subseteq V(H) \\ S \text{ is independent in } H}} x^{|S|} \prod_{x_i \notin S} (1+x)^{f_i}.$$

此外，我们还有以下结论：

(a) 如果 C 不是 H 的独立集，则 $P_G(-1) = 0$。

(b) 若 C 是 H的独立集，则 $P_G(-1) = (-1)^{|C|} P_{H-N_H[C]}(-1)$。

(c) 有 $\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \alpha(H - C)$。

证明。令 L_i 表示连接到 x_i 和 $|L_i| = f_i$的叶子集合。给定 G的一个独立集 I，令 $S := I \cap V(H) = \{x_i \in V(H) : x_i \in I\}$。则 S 是H的一个独立集。反过来，若 S 在 H中是独立的，那么对于每个 $i \in S$，都不能选取 L_i 中的任何顶点；而对于每个 $i \notin S$，则可以选取 L_i 的任意子集。因此，所有具有这个固定集合 S 的独立集 I 的总贡献为

$$x^{|S|} \prod_{x_i \notin S} (1+x)^{f_i},$$

这就证明了 $P_G(x)$ 的所示公式。

现在聚焦于 $P_G(-1)$。注意，对于 H的一个独立集 S，每当 $i \in C$（即 $f_i > 0$）但 $i \notin S$时，S 对应的加项就为零。因此，要使一个加项不为零，每个 $x_i \in C$ 都必须包含在 S中。所以，一个加项非零，当且仅当对于每个 $i \notin S$，$f_i = 0$，也就是说，当且仅当 $C \subseteq S$。因此，如果 C 在 H中不是独立的，那么没有任何独立集 S 能包含 C。于是 $P_G(-1) = 0$。这就证明了 (a)。

现在假设 C 在 H中是独立的。那么，保留下来的集合 S 恰好是形如 $S = C \sqcup T$的集合，其中 T是 $H - N_H[C]$的一个独立集。因此

$$P_G(-1) = \sum_{T \in \mathrm{Ind}(H - N_H[C])} (-1)^{|C|+|T|} = (-1)^{|C|} P_{H-N_H[C]}(-1),$$

这就证明了 (b)。

最后，设 I 是 G的一个最大独立集。如果对于某个满足 $f_i > 0$的 i，有 $x_i \in I$，那么用 L_i 的所有顶点替换 x_i，既能保持独立性，也不会降低基数。对每个 i重复这一操作，我们得到一个不包含C中任何顶点的最大独立集 J。由于 L_i 中的每个叶子都只与 x_i相邻，极大性迫使对于每个满足$f_i > 0$的 i，都有 $L_i \subseteq J$。因此，J 由所有与$H - C$相连的 $\sum_i f_i$ 以及$H - C$的一个独立集组成。反过来，$H - C$的任意独立集与所有相连的叶子合在一起，在 G 中仍是独立的。因此

$$\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \alpha(H - C),$$

这就证明了 (c)。 □

接下来，我们讨论加胡须操作何时会产生对称独立多项式。此结果推广并恢复了 Stevanovi´c 从 [22] 保证对称独立多项式的构造之一。

定理 3.2。 假设在命题 *3.1* 的条件下，$f_i \geq 1$ 对每个 $i \in [n]$，因此$C = V(H)$。那么 $P_G(x)$ 是对称的，当且仅当

$$f_1 = \cdots = f_n = 2.$$

证明。 令 $F := \sum_{i=1}^{n} f_i$。由于 $C = V(H)$，命题 3.1(c) 得出 $\alpha(G) = F$。再次由命题 3.1，

$$P_G(x) = \sum_{S \in \mathrm{Ind}(H)} C_S(x) \tag{1}$$

其中 $C_S(x) := x^{|S|}(1+x)^{F - \sum_{x_i \in S} f_i}$，而 $\mathrm{Ind}(H)$ 表示H的所有独立集构成的集合。于是

$$\deg C_S = F - \sum_{x_i \in S} (f_i - 1).$$

令 $R := \{x_i \in V(H) : f_i = 1\}$。那么，$\deg C_S = F$当且仅当 $S \subseteq R$。令 $H|_R$表示 H在 R上的诱导子图。因此，x^F 在 $P_G(x)$中的系数（大小为 F 的独立集数量）为

$$g_F = |\mathrm{Ind}(H|_R)| = P_{H|_R}(1).$$

如果 $P_G(x)$ 是对称的，那么 $g_F = g_0 = 1$。由于每个至少有一个顶点的图都有至少两个独立集，即 $\varnothing$ 和任意一个单点集，因此必有 $R = \varnothing$。于是，对所有 i，都有 $f_i \geq 2$ 。

现在令 $T := \{x_i \in V(H) : \ f_i = 2\}$。由于对所有 i 都有 $f_i \geq 2$ ，因此式 (1) 中次数为 F 的唯一加项是对应于 $S = \varnothing$ 的那一项，即 $(1+x)^F$。此外，$\deg C_S = F-1$ 当且仅当对于某个 $x_i \in T$ 有 $S = \{x_i\}$。因此， x^{F-1} 在 $P_G(x)$ 中的系数只来自加项 $C_\varnothing(x) = (1+x)^F$，以及满足 $x_i \in T$ 的加项 $C_{\{x_i\}}(x)$。$C_\varnothing(x)$ 的贡献为 $\binom{F}{F-1} = F$。对于每个 $x_i \in T$，有 $C_{\{x_i\}}(x) = x(1+x)^{F-2}$。由于这样的顶点有 $|T|$ 个，这些项总共贡献 $|T|$。因此

$$g_{F-1} = F + |T|.$$

另一方面， $g_1 = |V(G)| = n + F$。如果 $P_G(x)$ 是对称的，那么 $g_{F-1} = g_1$。因此

$$F + |T| = n + F.$$

因此 $|T| = n$，这意味着对于每个 i， $f_i = 2$

反过来，如果 $f_i = 2$ 对于每个 i，那么 $F = 2n$，并且 (1) 变为

$$P_G(x) = \sum_{S \in \mathrm{Ind}(H)} x^{|S|}(1+x)^{2(n-|S|)} = (1+x)^{2n} P_H\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right).$$

Thus

$$x^{2n} P_G(1/x) = x^{2n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2n} P_H\left(\frac{1/x}{(1+1/x)^2}\right) = (1+x)^{2n} P_H\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right) = P_G(x).$$

因此 $P_G(x)$是对称的。 □

3.1. 应用：毛毛虫图。作为加悬挂叶的一项应用，我们现在聚焦于毛毛虫图。由于毛毛虫图是通过沿中心脊柱附加叶子从一条路径得到的，本节的一般结果可转化为关于各腿位置的显式公式。将这些位置编码为相邻支撑顶点之间的间隙后，我们可以把 $P_G(-1)$ 表示为路径贡献的乘积，由此立即得到取值为 0、1 和 -1 的判据。我们还给出了伪戈伦斯坦* 毛毛虫图的一个刻画。

定义 3.3。 图 G 称为毛毛虫图 ，如果 G 是一棵树，并且存在一条路径x_1，.....， x_n，称为中心路径，使得 G 的每个顶点要么是某个 x_i，要么与某个 x_i相邻。 G 中不在中心路径上的每个顶点称为腿。

记号 3.4。 设 G 是一条中心路径为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的毛毛虫图。对于每个 $i \in [n]$，令 L_i表示与 x_i相邻的所有腿所组成的集合，即

$$L_i := \{v \in V(G) \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} : \{v, x_i\} \in E(G)\}.$$

置 $f_i := |L_i|$。因此，对于每个 $i \in [n]$，通过向 x_i 连接 f_i 个叶子即可得到 G 。

令 $B := \{x_i : f_i > 0\}$。因此， B 记录了中心路径上承载至少一条腿的位置。

如果 $B = \varnothing$，那么 $G = P_n$。在这种情况下，我们设 $r := 0$， $m_0 := n$ 并设 $\ell_0 := n$。现在假设$B \neq \varnothing$并写作 $B = \{x_{b_1} < \cdots < x_{b_r} : \quad b_1 < \cdots < b_r\}$。

中心路径上不带腿的顶点构成 $r+1$ 个连续的间隙。设它们的长度为 $m_0, m_1, \ldots, m_r$，其中：

- m_0 是 x_{b_1}之前的顶点数；
- m_r 是 x_{b_r}之后的顶点数；
- 对于 $1 \leq j \leq r-1$, m_j 是严格位于 x_{b_j} 和 x_{b_j}之间的顶点数 $_{+1}$.

等价地，

$$m_0 = b_1 - 1, \qquad m_j = b_{j+1} - b_j - 1 \ \ (1 \leq j \leq r-1), \qquad m_r = n - b_r.$$

接下来，从中心路径中删除每个顶点 x_{b_j} 及其在中心路径上的邻居。剩余顶点再次构成 $r+1$ 个路径段。令 ℓ_0、 ℓ_1、……、 ℓ_r 表示这些路径段的长度。等价地，

$\ell_0 =$ 最大值$\{m_0 - 1, 0\}$, $\qquad \ell_j = \max\{m_j - 2, 0\} \ \ (1 \leq j \leq r-1), \qquad \ell_r = \max\{m_r - 1, 0\}.$

定理 3.5。 设 G 是记号 *3.4*中的毛毛虫图。那么

$$P_G(-1) = \begin{cases} 0, & \text{if } b_{j+1} = b_j + 1 \text{ for some } j, \\ (-1)^r \prod_{j=0}^{r} p_{\ell_j}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $p_m : = P_{P_m}(-1)$ 如引理 *1.6*所述。

证明。 将命题 3.1 应用于中心路径 $H = P_n$，并回想 $B = \{x_{b_1}, \ldots, x_{b_r}\}$。若 B 中的两个元素相邻，则 B 在 P_n中不是独立的。因此，根据命题 $P_G(-1) = 0$，由命题3.1(a)可知。现在假设 B 中没有两个元素相邻。那么 B 是 P_n的一个独立集。根据构造，删除 $N_{P_n}[B]$ 后恰好留下 $r+1$ 个长度为 ℓ_0、……、 ℓ_r的路径段。因此

$$P_n - N_{P_n}[B] \cong \bigsqcup_{j=0}^{r} P_{\ell_j}.$$

因此，命题 3.1 （b）及不交并上的乘法性给出

$$P_G(-1) = (-1)^r \prod_{j=0}^{r} P_{P_{\ell_j}}(-1) = (-1)^r \prod_{j=0}^{r} p_{\ell_j}.$$

□

推论 3.6。 设 G 是记号 *3.4*中所述的毛毛虫图。那么 $P_G(-1) = 0$ 当且仅当以下条件之一成立：对于某个 $b_{j+1} = b_j + 1$， j；或者对于某个 $\ell_j \equiv 1$ （模 *3*）， j。

等价地， $\mathfrak{a}(G) = 0$当且仅当集合 B 中没有两个连续的顶点，且对所有 j 均满足 $\ell_j \not\equiv 1$ (模 3)。

证明。 根据定理 3.5，非平凡情形是集合 B 中没有两个连续元素，此时

$$P_G(-1) = (-1)^r \prod_{j=0}^{r} p_{\ell_j}.$$

现在，引理1.6 指出， $p_m = 0$ 当且仅当 $m \equiv 1$ （模 3）。这证明了第一个断言。第二个结论由以下事实得出：对于 $\mathfrak{a}(G) = 0$ ，只要 $P_G(-1) \neq 0$，就有□

推论 3.7。设 G 是记号*3.4*中所述的毛毛虫图，并定义

$$\lambda := \Big|\{j \in \{0, \ldots, r\} : \ell_j \equiv 2, 3 \pmod 6\}\Big|.$$

若 $P_G(-1) \neq 0$，则 $P_G(-1) = (-1)^{r+\lambda}$。

证明。根据推论3.6，假设 $P_G(-1) \neq 0$ 意味着每个 $p_{\ell_j} \in \{\pm 1\}$。由引理1.6，可得 $p_{\ell_j} = -1$ 当且仅当 $\ell_j \equiv 2$，3（模 6）。因此 $\prod_{j=0}^{r} p_{\ell_j} = (-1)^{\lambda}$，且定理3.5 给出

$$P_G(-1) = (-1)^r (-1)^{\lambda} = (-1)^{r+\lambda}.$$

□

推论 3.8。 设 G 是记号 *3.4* 中的毛毛虫图。那么

$$\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{j=0}^{r} \left\lceil \frac{m_j}{2} \right\rceil.$$

证明。 由命题 3.1(c) 以及 $H = P_n$，可得 $\alpha(G) = \sum_{i=1}^{n} f_i + \alpha(P_n - B)$。由于 $P_n - B \cong \bigsqcup_{j=0}^{r} P_{m_j}$，因此

$$\alpha(P_n - B) = \sum_{j=0}^{r} \alpha(P_{m_j}) = \sum_{j=0}^{r} \left\lceil \frac{m_j}{2} \right\rceil.$$

□

以下结论直接由推论 3.6 和 3.7 得出。

推论 3.9。 设 G 是记号 *3.4* 中的毛毛虫图。那么：

(1) $P_G(-1) = 1$ 当且仅当

(a) 中心路径上任意两个相邻顶点不会同时带有腿；

(b) $\ell_j \not\equiv 1$ （模 3）对每个 $0 \leq j \leq r$ 都成立；并且

(c) $r + \lambda$ 是偶数。

(2) $P_G(-1) = -1$ 当且仅当

(a) 中心路径上没有两个相邻的顶点都带有腿；

(b) $\ell_j \not\equiv 1$ （模 3）对每个 $0 \leq j \leq r$ 都成立；并且

(c) $r + \lambda$ 为奇数。

最后，通过应用推论* 3.7和3.8，我们可以得出毛毛虫图何时为伪戈伦斯坦图。

推论 3.10。 设 G是记号 *3.4*中所述的毛毛虫图。则 G 是伪戈伦斯坦的*当且仅当以下条件全部成立：

(1) B 中没有两个顶点相邻；

(2) 对所有 $j = 0, \ldots, r$， $\ell_j \neq 1$（模 3）；

(3) $\sum_{x_i \in B} f_i + \sum_{j=0}^{r} \left\lceil \frac{m_j}{2} \right\rceil \equiv r + \lambda \pmod 2$.

我们以讨论毛毛虫图何时具有对称独立集多项式来结束本节。以下结果直接由定理 3.2得出。

推论 3.11。 设 G 是记号 *3.4* 中所述的毛毛虫图，且 $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$。则$P_G(x)$ 是对称的，当且仅当对每个 $f_i = 2$ i。

4. Independence polynomial of cochordal graphs

本节研究余弦图的独立多项式。利用弦图的团复形的准森林结构及相关的 b-序列[10]，，我们对称情形进行分类，证明对称性蕴含单峰性，并记录了 $P_G(-1)$的公式，以及根 -1 的重数与图不变量之间的关系。

我们首先回顾准森林的定义。

定义 4.1。 设 Δ是一个单纯复形，其极大面为 $F_1, \ldots, F_s$。

若面 F 属于 Δ ，则称其为叶；如果 F 是 Δ的唯一面，或者存在一个面$B \neq F$ 属于 Δ ，使得

$$F \cap H \subseteq F \cap B$$

对于 Δ的每个面 $H \neq F$ 均成立。在这种情况下，称 B 为 F的分支。

Th单纯复形 Δ称为准森林，如果其极大面可以排列为

$$F_1, \ldots, F_s$$

使得对于每个 $i = 1$、.....、 s，面 F_i 都是由 F_1、.....、 F_i生成的子复形中的叶。

此外，若 Δ 连通，则称 Δ 为拟树。具有上述性质的排序 F_1、.....、 F_s 称为叶序。

接下来我们回顾弦图与准森林之间的关系。

定理 4.2。 *[9,* 定理 *9.2*。*12]* 设有限简单图 G 具有 n 个顶点且不是完全图，则以下命题等价：

(i) G是弦图；

(ii) G的团复形是准森林。

我们研究 当余弦图的独立集多项式对称时 c.

注 4.3. 注意，当 $\alpha(G) = 1$ 时， G 的独立多项式为 $P_G(x) = 1 + |V(G)|x$。因此，要使 $P_G(x)$ 对称，我们需要 $|V(G)| = 1$。所以，对称性迫使$G = K_1$。

定理 4.4. 设 G 是一个余弦图，且 $d = \alpha(G) \geq 2$。那么，当且仅当存在一个整数 $m \geq 0$ 使得

$$P_G(x) = (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2}.$$

此外，当独立多项式对称时，它是单峰的。最后，对于每个$m \geq 0$，图

$$(d-2)K_1 \sqcup (K_{m+2} - e)$$

是余弦图，且其独立多项式为此多项式。

证明. 设 Δ 是 G的独立复形。由于 G 是余弦图，G 是弦图，并且Δ 是 G的团复形。因此， Δ由引理 1 可知是准森林。 [12, 1]。特别地，$\dim \Delta = d-1$，且对于 $1 \leq i \leq d$，有 $g_i = f_{i-1}(\Delta)$。

根据 [10, 定理 1.1]，，存在正整数 $b_1, \ldots, b_d$ 使得

$$\sum_{i=1}^{d} g_i (x-1)^{i-1} = \sum_{i=1}^{d} b_i x^{i-1}.$$

Then

$$P_G(x) = 1 + \sum_{i=1}^{d} g_i x^i = 1 + x \sum_{i=1}^{d} b_i (1+x)^{i-1}. \tag{2}$$

由 (2) 可知， x^d, x^{d-1}和 x在 $P_G(x)$ 中的系数为

$$g_d = b_d, \qquad g_{d-1} = b_{d-1} + (d-1)b_d, \qquad g_1 = \sum_{i=1}^{d} b_i.$$

假设 $P_G(x)$是对称的。由于 $g_0 = 1$，由对称性可得 $g_d = g_0 = b_d = 1$.
由对称性还可得 $g_{d-1} = g_1$。因此

$$b_{d-1} + (d-1)b_d = \sum_{i=1}^{d} b_i.$$

由于 $b_d = 1$，这就变成了 $\sum_{i=1}^{d-2} b_i = d-2$。由于每个 b_i 都为正，因此$b_1 = \cdots = b_{d-2} = 1$。

写出 $b_{d-1} = m+1$，并代入 $m \geq 0$。代入（2）后，得到

$$\begin{aligned} P_G(x) &= 1 + x\Big(\sum_{i=1}^{d-2}(1+x)^{i-1} + (m+1)(1+x)^{d-2} + (1+x)^{d-1}\Big) \\ &= 1 + \big((1+x)^{d-2} - 1\big) + (m+1)x(1+x)^{d-2} + x(1+x)^{d-1} \\ &= (1+x)^{d-2}\big(1 + (m+2)x + x^2\big) \\ &= (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2}. \end{aligned}$$

注意，多项式 $P_G(x) = (1+x)^{d-2}\big(1+(m+2)x+x^2\big)$ 是单峰的。为此，注意到当 $m \geq 0$ 时， $1+(m+2)x+x^2$ 有两个负实根。因此， $P_G(x)$ 是实根多项式，且系数非负。由此可知，它是对数凹的，因而是单峰的。

反之，假设对于某个 $m \geq 0$，有 $P_G(x) = (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2}$。如下所示， $P_G(x)$ 是对称的：

$$x^d P_G(1/x) = x^d\left((1+1/x)^d + m(1/x)(1+1/x)^{d-2}\right) = (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2} = P_G(x).$$

最后，考虑从 K_{m+2} 中删除一条边（例如 e）后得到的图 G。于是

$$P_G(x) = P_{K_{m+2}-e}(x) = 1 + (m+2)x + x^2.$$

现在考虑图 H，它是不交并，由 G 和 $(d-2)$ 个孤立顶点 $(d-2)K_1$ 构成。因此， $H = (d-2)K_1 \sqcup (K_{m+2}-e)$。所以

$$P_H(x) = (1+x)^{d-2}\big(1+(m+2)x+x^2\big) = (1+x)^d + mx(1+x)^{d-2}.$$

此外，$G = \overline{K_{m+2} - e}$ 是一条边与 m 个孤立顶点的并。因此是弦图。在 G 上添加 $(d-2)$ 个孤立顶点，相当于在补图中添加 $(d-2)$ 个顶点，并且这些顶点与 G 中的每个顶点都相连，这保持了弦性。因此， H 是余弦图，且其独立多项式与所需的对称形式一致。□

推论 4.5。 设 G 是一个有限简单图，并假设 G 是具有 k 个连通分支的弦图。那么 $P_G(-1) = 1-k$。

证明。 设 $H := \overline{G}$。对于每个 $i \geq 1$，令 $s(K_i, H)$ 表示 H中大小为 i 的团的数量。由于 G 的独立集恰好是 H的团，因此有

$$P_G(x) = 1 + \sum_{i\geq 1} s(K_i, H)x^i.$$

因此，我们得到

$$P_G(-1) = 1 + \sum_{i\geq 1}(-1)^i s(K_i, H).$$

由于 H 是弦图，由 [15,引理 2] 可知

$$\mathrm{cc}(H) = \sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1} s(K_i, H).$$

因此 $P_G(-1) = 1 - \mathrm{cc}(H) = 1-k$。 □

注 4.6。 推论4.5是对 [15, 引理 2]的直接改述。如其中所述，弦图的团计数恒等式早已见于 [23, 练习 5.3。22]。

除了上述关于独立多项式在 $x=-1$ 处取值的优美推论外，人们也一直关注余弦图中重数 $M(G)$ 的求解。特别是， $M(G)$ 已在 [5] 中根据图结构加以表示。下面我们回顾他们的结果，并补充关于余弦图的 h-多项式次数的相关推论。

推论 4.7。 *[5, 推论 2.8]* 设 G 为余弦图，且 G 是 r-连通的。那么$M(\overline{G}) = r$。因此， G 的边理想的 h-多项式的次数为

$$\deg h_G(t) = \alpha(G) - r.$$

5. Values of the independence polynomial at $x = -1$ for small $\alpha(G)$

本节研究满足 $\alpha(G) \le 2$ 的连通图中 $P_G(-1)$ 可能取到的值。对于每个 $n \ge 3$，我们考虑

$$\mathcal{R}_n^{(\le 2)} := \{P_G(-1) : \ G \text{ 是一个具有 } n \text{ 个顶点且满足 } \alpha(G) \le 2\}. \text{的连通图}$$

我们明确确定这个集合，证明其中每个值都能由一个连通弦图实现，随后指出，$|P_G(-1)|$ 在连通弦图类中就已经可以呈指数级增长。

我们先给出以下构造。

定义 5.1. 取整数 $n \ge 3$、$1 \le a \le \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $1 \le t \le n-a$。令

$$A = \{u_1, \dots, u_a\}$$
$$B = \{v_1, \dots, v_{n-a}\}$$

是互不相交的集合。令 $G_n(a,t)$ 表示这样得到的图：取顶点集为 A 和 B 的完全图的不交并，再添加边 $\{u_1, v_j\}$（其中 $1 \le j \le t$）。换言之，$G_n(a,t)$ 是由两个完全图构造而成的：将第一个团中一个指定顶点与第二个团中的一个 t-团相连。

命题 5.2. 图 $G_n(a,t)$ 是连通弦图。此外，

$$P_{G_n(a,t)}(x) = 1 + nx + \big(a(n-a) - t\big)x^2.$$

特别地，$P_{G_n(a,t)}(-1) = (a-1)(n-a-1) - t$。

证明。设 $b := n - a$。首先注意到，$G_n(a,t)$ 是连通的，因为 u_1 与 v_1 相邻，且 $t \ge 1$。

接下来，我们证明 $G_n(a,t)$ 是弦图。为此，我们证明

$$u_2, \dots, u_a,\ v_{t+1}, \dots, v_b,\ u_1,\ v_1, \dots, v_t$$

是一个完美消去序。事实上，每个满足 $i \ge 2$ 的顶点 u_i，其余下的所有邻点都在团 A 内；每个满足 $j > t$ 的顶点 v_j，其余下的所有邻点都在团 B 内。删除这些顶点后，顶点集 $\{u_1, v_1, \dots, v_t\}$ 上剩余的图是团 K_{t+1}。因此，$G_n(a,t)$ 是弦图。

由于 A 和 B 都是团，$G_n(a,\ t)$ 的每个独立集的大小至多为 2。因此

$$P_{G_n(a,t)}(x) = 1 + nx + g_2 x^2,$$

其中 g_2 是大小为 2 的独立集的数量。任何这样的顶点对都必须由 A 中的一个顶点和 B中的一个顶点组成。这样的顶点对总共有 $ab = a(n-a)$ 个，其中恰有 t个，也就是 $1 \le j \le t$对应的 $\{u_1, v_j\}$，是边。因此 $g_2 = a(n-a) - t$。于是

$$P_{G_n(a,t)}(x) = 1 + nx + \big(a(n-a) - t\big)x^2.$$

因此，

$$P_{G_n(a,t)}(-1) = 1 - n + a(n-a) - t = (a-1)(n-a-1) - t. \qquad \square$$

注记 5.3. 注意，如果 $\alpha(G) \leq 2$，那么补图 G 是三角形自由的。Mantel 给出了这类图的边数上界，这是一个众所周知的结果。它指出，具有 n 个顶点的三角形自由图的边数最多为 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。当且仅当该图是 $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 时，等号成立。

利用上述提到的 Mantel 结果，我们得到如下描述。

定理 5.4。令 $n \geq 3$。则

$$\mathcal{R}_n^{(\leq 2)} = \left[-(n-1), \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1 \right] \cap \mathbb{Z}$$

其中 $\mathcal{R}_n^{(\leq 2)} = \{P_G(-1)\colon\ G$ 是一个具有 n 个顶点和 $\alpha(G) \leq 2\}$的连通图。

证明。设 G 是一个具有 n 个顶点和 $\alpha(G) \leq 2$的连通图。则每个独立集的大小至多为 2。因此

$$P_G(x) = 1 + nx + g_2 x^2,$$

其中 g_2 是大小为 2 的独立集数量。这些独立点对恰好是 G的边。因此，$g_2 = e(G)$。所以，

$$P_G(-1) = 1 - n + e(\overline{G}).$$

由于 $\alpha(G) \leq 2$，补图 G 是三角形自由的。因此，根据 Mantel 定理，

$$e(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

此外，等号不可能成立，因为那样 G 就会是完全二部图，因此 G 就会是两个团的不交并，这与 G 的连通性矛盾。因此

$$e(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1.$$

由此可得

$$P_G(-1) \leq 1 - n + \left(\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1 \right) = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1.$$

另一方面，$e(G) \geq 0$，因此

$$P_G(-1) \geq 1 - n = -(n-1).$$

因此

$$\mathcal{R}_n^{(\leq 2)} \subseteq \left[-(n-1), \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1 \right] \cap \mathbb{Z}.$$

为证明反向包含，固定满足 $1 \leq a \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 的 a，并令

$$I_a := [(a-1)(n-a-1) - (n-a), (a-1)(n-a-1) - 1] \cap \mathbb{Z}.$$

根据命题 5.2，当 t 依次取 1、……、$n-a$ 时，图 $G_n(a,\ t)$ 恰好实现 I_a 中的整数。

注意，$I_1 = [-(n-1)\ -1] \cap \mathbb{Z}$。如果 U_a 表示 I_a 的右端点，L_{a+1} 表示 I_{a+1}的左端点，那么

$$U_a - L_{a+1} = \big((a-1)(n-a-1) - 1\big) - \big(a(n-a-2) - (n-a-1)\big) = a - 1 \geq 0.$$

注意， $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{\lfloor n/2 \rfloor}$ 是一个整数区间，因为对每个$1 \le a < \lfloor n/2 \rfloor$， $I_a \cap I_{a+1} \neq \varnothing$ 都成立。因此，它的最大端点在 $a = \lfloor n/2 \rfloor$ 处取得，因为当 $1 \le a \le \lfloor n/2 \rfloor$时，$(a-1)(n-a-1)$递增。所以

$$\max(I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{\lfloor n/2 \rfloor}) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) - 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1.$$

Thus

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{\lfloor n/2 \rfloor} = \left[-(n-1), \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1\right] \cap \mathbb{Z}.$$

由于每个 $G_n(a,\ t)$ 都是连通弦图，并满足 $\alpha(G_n(a,\ t)) \le 2$，故反向包含关系成立。□

推论5.5。对于某个连通弦图 G，每个整数都可以作为 $P_G(-1)$ 出现。事实上，

$$\bigcup_{n \ge 3} \{P_G(-1) : G \text{ connected chordal on } n \text{ vertices with } \alpha(G) \le 2\} = \mathbb{Z}.$$

证明。由定理 5.4，对于每个 $n \ge 3$，我们得到完整区间

$$\left[-(n-1), \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor - 1\right] \cap \mathbb{Z}.$$

随着 n 变化，左端点趋于 $-\infty$，右端点趋于 $+\infty$。因此每个整数都能实现。□

接下来我们证明 $|P_G(-1)|$ 在一般的连通弦图情形下可以大得多 .

定义 n 5.6. 设 $q \ge 1$，且 $r_1, \ldots, r_q$ 为正整数。团花束 t

$$H(r_1, \ldots, r_q)$$

是由团 $K_{r_1+1}, \ldots, K_{r_q+1}$ 得到的图：将每个团中选定的一个顶点识别为同一个公共顶点 x。

Pro命题 5.7. 图 $H(r_1, \ldots, r_q)$ 是连通弦图。此外 $r,$

$$P_{H(r_1,\ldots,r_q)}(x) = x + \prod_{i=1}^{q}(1 + r_i x)$$

和 $P_{H(r_1,\ldots,r_q)}(-1) = \prod_{i=1}^{q}(1 - r_i) - 1$。

证明。该图是连通的，因为每个顶点都与公共顶点 x 相邻。它是弦图，因为每个块都是一个团。

H（r_1、……、r_q）的一个独立集要么包含 x，此时贡献项为x；要么不包含 x。后一种情况下，从每个团 $K_{r_i+1} \setminus \{x\}$ 中可以选择不含任何顶点，或恰好选择一个顶点。因此，第 i 个团的贡献为 $1 + r_i x$。这些选择彼此独立。因此

$$P_{H(r_1,\ldots,r_q)}(x) = x + \prod_{i=1}^{q}(1 + r_i x),$$

并在 $x = -1$ 处求值即可得到该公式。 □

下一个定理表明，全连通弦图类中的极值行为是指数级的，而非二次级的。

定理 5.8。设

$$M_n := \max\{|P_G(-1)| : G \text{ is a connected chordal graph on } n \text{ vertices}\}.$$

那么对每个 $n \geq 3$,

$$M_n \geq 4^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1.$$

特别地， M_n 随 n指数级增长。

证明。对于 $n \leq 5$，所述界显然成立。假设 $n \geq 6$，并将 $n-1 = 5q + r$ 写作$0 \leq r \leq 4$。我们如下构造一个具有 n 个顶点的团花：

$$\begin{cases} H(\underbrace{5, \ldots, 5}_{q}) & \text{if } r = 0, \\ H(\underbrace{5, \ldots, 5}_{q-1}, 3, 3) & \text{if } r = 1, \\ H(\underbrace{5, \ldots, 5}_{q}, 2) & \text{if } r = 2, \\ H(\underbrace{5, \ldots, 5}_{q}, 3) & \text{if } r = 3, \\ H(\underbrace{5, \ldots, 5}_{q}, 4) & \text{if } r = 4. \end{cases}$$

在每种情况下，所示参数之和为 $n-1$，因此该图有 n 个顶点。由命题 5.7 可得

$$P_G(-1) = \prod_i (1 - r_i) - 1.$$

此外，在五种情形 $r = 0$，1、2、3、4 中，我们有

$$\left| \prod_i (1 - r_i) \right| = 4^q,\ 4^q,\ 4^q,\ 2 \cdot 4^q,\ 3 \cdot 4^q.$$

因此

$$|P_G(-1)| \geq 4^q - 1 = 4^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1. \qquad \square$$

注 5.9。 Engstr¨om 在 [4, 推论 3.2] 中证明了 $|P_G(-1)| \leq 2^{\varphi(G)}$，其中$\varphi(G)$ 表示 G 的去圈数。去圈数是指从 G 中删除最少数量的顶点，使其变成森林。

注意

$$4^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1 = 2^{2\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1.$$

由于，对于 $n \geq 3$,

$$2 \left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor \leq \frac{2n-2}{5} \leq n - 2,$$

由此可得

$$4^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1 \leq 2^{n-2} - 1 < 2^{n-2}.$$

另一方面，若 G 是一个有 $n \geq 2$ 个顶点的任意连通图，则 $\varphi(G) \leq n-2$。事实上，由于 G是连通的，它包含一条边 uv；删除除 u 和 v 以外的所有顶点后，得到的图 K_2 是无环的。因此，一般界 $|P_G(-1)| \leq 2^{\varphi(G)}$给出 $|P_G(-1)| \leq 2^{n-2}$。因此，结合

$$M_n := \max\{|P_G(-1)| : G \text{ is a connected chordal graph on } n \text{ vertices}\},$$

我们得到

$$4^{\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor} - 1 \leq M_n \leq 2^{n-2}.$$

因此，尽管下界与上界 2^{n-2}相差甚远，但它表明，在连通弦图类中， M_n 已经随着 n 呈指数级增长。

References

[1] K. Bhaskara、M. Y. Chong、T. Hibi、N. Ragunathan 和 A. Van Tuyl。可分级图。*arXiv*预印本 *arXiv:2504.02065*，2025年。[2] J. Biermann、T. Chau、S. Kara、A. O'Keefe、J. Skelton、G. S. Castillo 和 D. Vien。通过独立多项式实现覆盖理想的 (reg, deg h) 对。*arXiv*预印本 *arXiv:2602.10376*，2026年。[3] J. Cutler 和 N. Kahl。关于独立多项式在 -1处的取值的一则注记。*DiscreteMath.*，339(11):2723–2726，2016年。[4] A. Engstr¨om。利用离散Morse理论为超对称晶格模型中的 Witten指标给出上界。*European J. Combin.*，30(2):429–438，2009年。[5] H. T. Faal。2-连通 K_5-自由弦图的团多项式。*J. Algebra Comb.Discrete Struct. Appl.*，8(1):23–29，2021年。[6] R. Fr¨oberg。关于 Stanley-Reisner环。载于代数专题，第*2*部分（华沙，*1988*年），第26卷，第2部分，*Banach Center Publ.*，第57–70页。PWN，华沙，1990年。[7] A. Galanis、Q. Ge、D. ˇStefankoviˇc、E. Vigoda 和 L. Yang。改进硬核模型中独立集计数问题的不可近似性结果。*Random StructuresAlgorithms*，45(1):78–110，2014年。[8] I. Gutman 和 F. Harary。匹配多项式的推广。*Utilitas Math.*，24:97–106，1983年。[9] J. Herzog 和 T. Hibi。单项式理想，数学研究生教材第260卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011年。[10] J. Herzog、T. Hibi、S. Murai、N. V. Trung 和 X. Zheng。由弦图和强弦图导出的团复形的 Kruskal-Katona 型定理。*Combinatorica*，28(3):315–323，2008年。[11] J. Herzog、T. Hibi 和 X. Zheng。幂具有线性自由分解的单项式理想。*Math. Scand.*，95(1):23–32，2004年。[12] J. Herzog、T. Hibi 和 X. Zheng。Cohen-Macaulay弦图。*J. Combin. TheorySer. A*，113(5):911–916，2006年。[13]T. Hibi、S. Kara 和 D. Vien。伪戈伦斯坦* 图。*arXiv*预印本 *arXiv:2603.08502*，2026年。[14]S. Kara 和 D. Vien。悬挂操作下边理想的代数不变量。*arXiv*预印本 *arXiv:2603.05657*，2026年。[15]J. M. Klusowski 和 Y. Wu。通过子图抽样估计图的连通分支数。*Bernoulli*，26(3):1635–1664，2020年。

[16] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。图的独立多项式——综述。载于第一届代数信息学国际会议论文集，第233–254页。塞萨洛尼基亚里士多德大学，塞萨洛尼基，2005年。[17] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。图的独立多项式在-1处的取值。*arXiv*预印本 *arXiv:0904.4819*，2009年。[18] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。独立多项式的对称性。*Symmetry*，3(3):472–486，2011年。[19] V. E. Levit 和 E. Mandrescu。图的圈秩及其独立多项式在 -1处的取值。*Graphs Combin.*，29(2):259–273，2013年。[20] E. Mandrescu。通过回文性证明某些独立多项式的单峰性。*Australas. J. Combin.*，53:77–82，2012年。[21] A. D. Scott 和 A. D. Sokal。排斥晶格气体、独立集多项式与 Lov´asz 局部引理。*J. Stat. Phys.*，118(5-6):1151–1261，2005年。[22] D. Stevanovi´c。具有回文独立多项式的图。第34卷，第31–36页。1998年。纽约图论日，第34届（1997年）。[23] D. B. West。图论导论。Prentice Hall, Inc.，上萨德尔河，新泽西州，1996年。

（T. Hibi） Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565–0871, Japan
电子邮件地址：hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

（S. Kara） Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010
电子邮件地址：skara@brynmawr.edu

(D.Vien) Department of Mathematics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010
电子邮件地址：dvien@brynmawr.edu