arXiv:2603.16704v1 [math.OA] 17 Mar 2026

离散量子群的自由作用

PEKKA SALMI

Abstract. R. Ellis 于 1960 年证明，每个离散群都在其 Stone–Čech 紧化上自由作用。我们将这一结果推广到具有低对偶的离散量子群。证明方法不同于经典情形中的早期证明，而是采用 D. A. Ellwood 在非交换几何框架下给出的自由作用定义。

1. Introduction

群 G 在集合 X 上的作用称为自由作用，若 G 中除单位元 e 外，没有任何元素在 X 中有不动点；也就是说，对于每个 $s \in G\backslash\{e\}$ 和 $x \in X$， $sx \neq x$ 。显然，每个群都在自身上自由作用。˘ 离散群 G 在自身上的作用可延拓为 G 在其 Stone–Čech 紧化 βG 上的连续作用。R. Ellis [6] 证明了这一作用总是自由的，从而证明每个离散群都在某个紧空间上自由作用。

D. A. Ellwood [7] 将自由作用的概念推广到了非交换几何的框架中。特别是，这一概念适用于局部紧量子群在非交换空间上的作用。已有多位作者研究紧量子群的自由作用；例如参见 [4, 14, 15]。特别是，P. F. Baum、K. De Commer 和 P. M. Hajac [3] 针对紧量子群作用于紧非交换空间的情形，给出了自由作用的三种不同刻画。另一方面，离散量子群的自由作用尚未引起太多关注。最近，B. Anderson-Sackaney 和 R. Vergnioux [1] 采用另一种对自由性的非交换推广，证明离散量子群 $\mathbb{F}$ 在 $\ell^\infty(\mathbb{F})$ 上的作用是自由的，当且仅当 $\ell^\infty(\mathbb{F})$ 是交换的。正如我们将要说明的，采用 Ellwood 对自由性的定义时，情况则有所不同。

本文的主要结果是，低对偶的离散量子群在其泛紧化上自由作用。所谓泛紧化，是指 Stone–˘Cech 紧化的自然非交换类比：若一个非交换空间对应于 C*-代数 A，则其泛紧化对应于乘子代数 $M(A)$。注意，当 $A = C_0(X)$ 为交换时， $M(A) \cong C(\beta X)$。离散量子群 $\mathbb{F}$ 的作用自然延拓到其泛紧化上，也就是说，延拓到与 $\ell^\infty(\mathbb{F})$相关联的非交换空间上。我们证明，在离散量子群具有低对偶这一假设下，此作用是自由的。若离散量子群 $\mathbb{F}$ 的对偶 G（一个紧量子群）中所有不可约表示的维数都被某个常数统一界定，则称其具有低对偶。在经典情形中，这类紧群几乎阿贝尔。在量子群情形中，不可约表示维数有界的紧量子群实例则更加多样：正如 [5, 注 1.6],中所述，可以利用双交叉积构造此类实例；而正如 [11], 中所述，这类实例也自然出现在非交换几何中 [2, 8]。注意，J. Krajczok 和 P. M. So-ltan [11] 证明了，任何具有此性质的紧量子群都是 Kac型。

2. Notation and preliminaries

紧量子群 $\mathbb{G}$由一个含幺 C*-代数 $C(\mathbb{G})$ 和一个余乘法 Δ:$C(\mathbb{G}) \to C(\mathbb{G}) \otimes C(\mathbb{G})$ 构成，该余乘法是余结合的，并满足消去性质（详情请参见[16], [12]或 [13]）。当 $C(\mathbb{G})$为交换时，C*-代数 $C(\mathbb{G})$是

Date：2026年3月18日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：46L67，次要分类：20G42，46L55。

isom同构于某个紧群上的连续函数 C*-代数，这解释了
记
号。

接下来，我们固定有关紧量子群表示论的记号。更多细节请参见 [13] 第 1 章和第 2 章。紧量子群 G 在有限维希尔伯特空间 H 上的一个表示 是一个可逆算子 $u \in B(H)\otimes C(\mathsf{G})$，满足 $(\mathrm{id}\otimes\Delta)u = u_{12}u_{13}$，其中我们采用标准腿编号记法。除了逆变表示之外，我们只关注酉表示。给定一个表示 u，其底层希尔伯特空间记作 H_u，而H_u 上的恒等算子记作 1_u。若 u 和 v 是 G 的两个表示，则 u 与v 之间的交织算子 是一个线性映射 $T\colon H_u \to H_v$，满足

$$(T\otimes 1)u = v(T\otimes 1).$$

u 与 v 之间的交织算子集合记作 $\mathrm{Mor}(u,\ v)$。若 $\mathrm{Mor}(u,\ v)$ 中包含一个等距算子，则表示 u 是 v的子表示，记作 $u \subset v$。表示 u 和 v 的张量积 定义为

$$u\otimes v = u_{13}v_{23}.$$

对于希尔伯特空间 H，将共轭希尔伯特空间记为 $\overline{H}$，并定义 $J\colon B(H)\to B(H)$，使得 $J(A)\xi = \overline{A^*\xi}$。表示 u 的逆变表示 定义为 $u^c = (J\otimes\mathrm{id})(u^{-1})$。按照 [13, 第 1.4], 节的记号，令 ρ_u 表示 $\mathrm{Mor}(u, u^{cc})$ 中唯一的可逆正算子，使得 $\mathrm{Mor}(u,u)$上的 $\mathrm{Tr}(\cdot\rho_u) = \mathrm{Tr}(\cdot\rho_u^{-1})$，其中 Tr 表示 $B(H_u)$上的迹。逆变表示不一定是酉的，但由下式定义的共轭表示

$$\overline{u} = (J(\rho_u)^{1/2}\otimes 1)u^c(J(\rho_u)^{-1/2}\otimes 1)$$

is u酉。从现在起，“表示”指有限维 al
Hil希尔伯特空间上的表示。

若表示 u 满足 $\mathrm{Mor}(u$不可约 $u) = \mathsf{C}$，则称其为不可约表示。对每个不可约表示等价类选取一个代表元，并将这些代表元组成的集合记为 Irr(G)。我们将等价类与其代表元等同。平凡表示记为 1。

对于 $u \in$Irr(G)，固定一个 H_u 的正交归一基 $\{e_i\}$，并定义

$$t_u = \sum_i \rho_u^{1/2} e_i\otimes\overline{e_i} \qquad \text{and} \qquad s_u = \sum_i \overline{e_i}\otimes\rho_u^{-1/2}e_i.$$

于是 $t_u \in \mathrm{Mor}(\mathbb{1},\ u\otimes u)$，$s_u \in \mathrm{Mor}(\mathbb{1},\ u\otimes u)$，且它们满足共轭方程

$$(1_u\otimes s_u^*)(t_u\otimes 1_u) = 1_u \qquad \text{and} \qquad (s_u^*\otimes 1_{\overline{u}})(1_{\overline{u}}\otimes t_u) = 1_{\overline{u}}. \tag{1}$$

定义 $j\colon B(H_{\overline{u}}) \to B(H_u)$ 为

$$j(A) = \rho_u^{1/2}J^{-1}(A)\rho_u^{-1/2},$$

使得

$$(j(A)\otimes 1_{\overline{u}})t_u = (1_u\otimes A)t_u \tag{2}$$

对每个 $A \in B(H_u)$ 均成立。

我们将研究离散量子群，它们可以视为紧量子群的对偶，参见 [16, 12, 13]。离散量子群 $\mathbb{\Gamma}$ 与一个可能不含幺的 C*- 代数 $c_0(\mathbb{\Gamma})$ 及余乘法 $\Delta\colon c_0(\mathbb{\Gamma}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma})\otimes c_0(\mathbb{\Gamma}))$ 相关联，其中 M 表示乘子代数。记作 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) = M(c_0(\mathbb{\Gamma}))$。注意，对于实际的离散群 Γ，C*- 代数 $\ell^\infty(\Gamma)$ 同构于 Stone–Čech 紧化 Γ 上连续函数的 C*- 代数 $C(\beta\Gamma)$。因此，与 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 相关联的非交换空间可以视为$\mathbb{\Gamma}$ 的 Stone–Čech 紧化的非交换类比，我们称之为 $\mathbb{\Gamma}$ 的 泛紧化（其他紧化则对应于 $\ell^\infty(\Gamma)$ 的含幺 C*- 子代数 A，满足 $c_0(\mathbb{\Gamma}) \subset A \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$）。

我们可以将 $c_0(\mathbb{\Gamma})$ 描述为有限维 C*-代数的 c_0直和：

$$c_0(\mathbb{\Gamma}) = \bigoplus_{u\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})} B(H_u).$$

那么 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 同构于相应的直积:

$$\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) = \prod_{u\in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} B(H_u).$$

将从 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 到 $B(H_u)$ 的投影记为 p_u。我们可以将 p_u 视为 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 和 $B(H_u) \subset \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$的一个元素。若对每个 $u \notin I$都有 $ap_u = 0$，则称元素 $a \in \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 由 $I \subset$ 不可约表示(G) 支撑。

$\mathbb{\Gamma}$ 的余乘法定义为

$$\Delta(a) = \sum_{v\in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{w\in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{T:u\subset v\otimes w} Tap_uT^*$$

其中，最后一个求和遍历 $v\otimes w$ 分解为不可约子表示 u时出现的等距交织算子 T: $H_u \to H_v\otimes H_w$，并计入重数。例见 [17], ; 类似公式的推导见 [11]。$\mathbb{\Gamma}$的余单位是线性映射 ϵ: $c_0(\mathbb{\Gamma}) \to \mathbb{C}$，满足对每个 $a \in c_0(\mathbb{\Gamma})$都有 $ap_{\mathbb{1}} = \epsilon(a)p_{\mathbb{1}}$。注意，离散量子群 $\mathbb{\Gamma}$ 的反粒子 S 定义为 $S(a)p_u = j(ap_u)$，其中 $a \in c_0(\mathbb{\Gamma})$ 满足 $S(a) \in c_0(\mathbb{\Gamma})$。我们不会明确使用这一事实，而将直接使用映射 j 和恒等式 (2)。

D. A. Ellwood [7] 扩展了自由作用的概念，使其适用于（局部紧）量子群在非交换空间上的作用。我们回顾离散量子群作用于紧致非交换空间时的这一概念，并将在全文中使用这一自由性概念。紧致非交换空间 X 是与含幺 C*-代数 $C(\mathbb{X})$ 相关联的虚拟对象，该代数可视为 X 上连续函数的 C*-代数。离散量子群 $\mathbb{\Gamma}$ 在紧致非交换空间 X 上的作用是一个含幺 $*$-同态 $\alpha\colon C(\mathbb{X}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes C(\mathbb{X}))$，满足 $(\Delta \otimes \mathrm{id})\alpha = (\mathrm{id} \otimes \alpha)\alpha$，且 $\alpha(C(\mathbb{X}))(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes 1)$ 的线性张成在 $c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes C(\mathbb{X})$ 中稠密。按照 D. A. Ellwood [7], 的定义，作用 α 是自由的，如果其像

$$\Phi : C(\mathbb{X}) \otimes_{alg} C(\mathbb{X}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes C(\mathbb{X})), \quad \Phi(x \otimes y) = \alpha(x)(1 \otimes y),$$

在 $M(c_0(\mathbb{\Gamma})\otimes C(\mathbb{X}))$ 中严格稠密。回顾一下，C*-代数 A 的乘子代数 $M(A)$ 上的严格拓扑由所有半范数 $x \mapsto \|xa\|$ 和 $x \mapsto \|ax\|$ 定义，其中 $a \in A$。

本文考虑离散量子群 $\mathbb{\Gamma}$ 对其泛紧化的作用。该作用如下得到。$\mathbb{\Gamma}$ 的余乘法是一个非退化的 $*$-同态 $\Delta\colon c_0(\mathbb{\Gamma}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes c_0(\mathbb{\Gamma}))$，因此它具有一个严格连续延拓 Δ: $M(c_0(\mathbb{\Gamma})) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes c_0(\mathbb{\Gamma}))$。回顾一下，$M(c_0(\mathbb{\Gamma})) = \ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$，并注意到作为赋范空间，$M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes c_0(\mathbb{\Gamma}))$ 和 $M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}))$ 相同，尽管它们的严格拓扑不同。因此，Δ: $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma}) \to M(c_0(\mathbb{\Gamma}) \otimes \ell^\infty(\mathbb{\Gamma}))$ 定义了 $\mathbb{\Gamma}$ 对其泛紧化 $\ell^\infty(\mathbb{\Gamma})$ 的（左）作用。对于实际的离散群 Γ，该作用就是 $\check{}\Gamma$ 对其 Stone–Čech 紧化 $\beta\Gamma$ 的左作用。

3. A new look at the Ellis theorem

$\check{}$ 本节利用 Ellwood 对自由性的刻画，证明埃利斯定理：每个离散群都在其 Stone–Čech 紧化上自由作用。这样便为这一结果提供了一种新的证明（尽管该结果本身并不难证明），但主要目的是为离散量子群及其低对偶情形下的证明提供动机。

离散群 Γ 在其 Stone–Čech 紧化 $\beta\Gamma$ 上的（左）作用由余乘法给出

$$\Delta : \ell^\infty(\Gamma) \to \ell^\infty(\Gamma, \ell^\infty(\Gamma)) \cong M(c_0(\Gamma) \otimes \ell^\infty(\Gamma)),$$

其中 $\ell^\infty(\Gamma,\ \ell^\infty(\Gamma))$ 表示 Γ上取值于 $\ell^\infty(\Gamma)$ 的有界函数空间。$M(c_0(\Gamma) \otimes \ell^\infty(\Gamma))$ 上的严格拓扑与有限集上的一致收敛拓扑重合，其中$M(c_0(\Gamma) \otimes \ell^\infty(\Gamma))$ 被识别为 $\ell^\infty(\Gamma,\ \ell^\infty(\Gamma))$。

以下引理归功于 Kat$\check{}$etov [10]; 另见 [9, 引理 3.33]。注意，经典的埃利斯定理可由此引理轻松推出；例如，参见 [9, 引理 6.28]，其中讨论了具有消去性质的半群这一更一般的情形。下一节中，我们将把 Kat$\check{}$etov 引理推广到多值函数，并将其应用于离散量子群的情形。

引理 1。设 X 为一个集合，$f\colon X \to X$ 为一个没有不动点的函数。那么存在一个划分 $X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$，使得 $f(A_i) \cap A_i = \varnothing$ 对每个 $i = 1, 2$、3均成立。

反复应用前面的引理，便得到以下结果。

引理 2. 设 X 为一个集合，且 $f_k\colon X \to X$，$k = 1, 2, \ldots, n$ 是无不动点的函数。那么存在一个划分 $X = \bigsqcup_{i=1}^{3^n} A_i$，使得对于每个 $k = 1,2, \ldots, n$ 和$i = 1, 2, \ldots, 3^n$，都有 $f_k(A_i) \cap A_i = \varnothing$。

下一个定理借助 Ellwood 对自由性的刻画，重新表述了埃利斯定理。结合埃利斯定理与 Ellwood 的定理 2.9 [7]，可知该定理成立。然而，我们给出这一结果的直接构造性证明，这也为我们在离散量子群情形下的论证提供了思路。

定理 3. 设 Γ 是一个离散群。映射的像

$$\Phi : (f, g) \mapsto \Delta(f)(1 \otimes g) : \ell^\infty(\Gamma) \otimes_{alg} \ell^\infty(\Gamma) \to \ell^\infty(\Gamma, \ell^\infty(\Gamma))$$

在有限集上的一致收敛拓扑中稠密。

证明。在此证明中，1_A 表示 $A \subset \Gamma$ 的示性函数，并在 $v \in \Gamma$时将 $1_{\{v\}}$ 记作 1_v；这与前面的记号一致。记 Φ 的像的闭包为 X。只需证明 $1_v \otimes 1 \in X$，因为这样一来，形如 $1_v \otimes h$ 且满足 $h \in \ell^\infty(\Gamma)$ 的函数也属于 X，进而形如 $k \otimes h$ 且满足 $k \in c_0(\Gamma)$ 和 $h \in \ell^\infty(\Gamma)$ 的函数也属于 X。

对任意有限集合 $F \subset \Gamma$，应用引理 2，可得一个有限划分$\Gamma = \bigsqcup_{i \in I_F} A_i$，使得

$$sA_i \cap A_i = \varnothing$$

对每个 $s \neq e$，若 $s \neq e$ 属于 F且 $i \in I_F$，则成立。定义

$$g_F = \sum_{i \in I_F} \Delta(1_{vA_i})(1 \otimes 1_{A_i}).$$

那么，对每个 $s,\ t \in \Gamma$，我们有

$$g_F(s, t) = \sum_{i \in I_F} 1_{s^{-1}vA_i \cap A_i}(t).$$

接下来，我们将证明当 $Fuparrow\Gamma$时，$g_F \to 1_v \otimes 1$ 在有限集合上一致成立。

设 $K \subset \Gamma$ 为有限集合，并设 F 为 Γ 的任意有限子集，满足 $K^{-1}v \subset F$。那么，对每个满足 $s \neq v$的 $s \in K$，我们有

$$g_F(s, t) = \sum_{i \in I_F} 1_{s^{-1}vA_i \cap A_i}(t) = 0$$

如 $s^{-1}v \in F$和 $s^{-1}v \neq e$。另一方面，如果 $s = v \in K$，那么

$$g_F(v, t) = \sum_{i \in I_F} 1_{s^{-1}vA_i \cap A_i}(t) = \sum_{i \in I_F} 1_{A_i}(t) = 1.$$

由此可得 $g_F|_{K \times \Gamma} = (1_v \otimes 1)|_{K \times \Gamma}$，结论得证。 □

4. The Ellis theorem for discrete quantum groups with low duals

本节证明我们的主要结果：低对偶的离散量子群在其泛紧化上自由作用。正如上一节所述，这一结果的经典版本——埃利斯定理——可以借助 Katˇetov 提出的组合引理（引理 1）证明。接下来，我们将 Katˇetov 的引理推广到多值函数的情形，以便将其应用于我们的研究框架。我们用 $|X|$表示集合 X 的基数。以下引理的证明改编自 [9, 中给出的 Katˇetov 引理证明（引理 3）。33]

引理 4. 设 X 是一个集合，$f\colon X \to X$ 是一个多值函数。假设存在自然数 N，使得 $|f(x)| \leqslant N$，并且对每个 $x \in X$ 都有 $|f^{-1}(x)| \leqslant N$。那么存在一个划分

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{2N+1} A_i$$

使得

$$y \notin f(x) \text{ whenever } x, y \in A_i,\ x \neq y.$$

证明。考虑函数 g： $X \supset D_g \to \{1, 2, \ldots\ldots, 2N+1\}$，使得

(i) $f(D_g) \subset D_g$（左边表示集合 $f(x)$ 与 $x \in D_g$ 的并集），

(ii) 对每个 $x \in D_g$ 和 $y \in f(x)$，若 $y \neq x$，则有 $g(y) \neq g(x)$。

这类函数的集合按包含关系构成偏序。由佐恩引理可知，该集合有一个极大元 g（注意，该集合非空，因为定义域为空的函数属于该集合）。

我们将用反证法证明 $D_g = X$。为此，假设存在 $x \in X \backslash D_g$。我们将把 g 扩展为函数 h，使得 h 满足上述条件，并且其定义域还包含 x。首先，在 D_g 上定义 $h = g$。然后，我们定义 $h(x) \in \{1, 2, \ldots\ldots, 2N+1\}$，使得对每个满足 $h(y)$ 已经有定义的 $y \in f(x) \backslash \{x\}$，都有 $h(x) \neq h(y)$。于是 h 在 $D_g \cup \{x\}$ 上定义，这样条件 (ii) 也得到满足，但我们仍需扩展该函数，以确保条件 (i) 也得到满足。

令 $f^0(x) = \{x\}$，并对每个 $k = 0, 1, \ldots\ldots$，定义

$$f^{k+1}(x) = \bigcup \{f(y) \mid y \in f^k(x)\}.$$

假设 h 已在 $\bigcup_{k=0}^{n} f^k(x)$ 上定义良好，接下来我们将其定义扩展到 $f^{n+1}(x)$。对每个 $y \in f^{n+1}(x)$，定义 $h(y) \in \{1, 2, \ldots\ldots, 2N+1\}$，使得 $h(y) \neq h(w)$ 对每个 $w \in f(y) \cup f^{-1}(y)$ 都成立，其中 $h(w)$ 已有定义且 $w \neq y$。这是可行的，因为根据关于 f 的假设，$|f(y) \cup f^{-1}(y)| \leqslant 2N$。由此可知，$h$ 定义在

$$D_g \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(x)$$

并满足 (i) 和 (ii)，这与 g 的极大性矛盾。因此 $D_g = X$，我们通过对每个 $i = 1, 2, \ldots\ldots, 2N+1$ 令 $A_i = g^{-1}(i)$，从而得到所需的划分。□

注1：假设 f 满足前一个引理的条件，此外$x \notin f(x)$对任意 x 都成立。那么可以对划分作出调整，使得 $y \notin f(x)$在 $x,\ y \in A_i$ 时成立。这种表述更接近 Katˇetov 引理（引理 1），但不适用于我们的情形。

设 G 是一个紧量子群。对于 $u,\ v \in$ G(的不可约表示) 以及 G(的一个有限集合 $F \subset$ Irr)，记

$$I_{u \otimes v} = \{w \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \mid w \subset u \otimes v\}$$

and

$$I_{F \otimes v} = \bigcup_{u \in F} I_{u \otimes v}.$$

我们将它们视为多重集，也就是说，允许同一元素出现多次的集合。在这种情况下，$I_{u \otimes v}$ 中一个元素的重数与它作为 $u \otimes v$ 的子表示时的重数相同。

引理 5。设 $F \subset$不可约表示$(\mathbb{G})$ 是一个有限集合。存在一个有限划分

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}) = \bigsqcup_i Y_i$$

使得

$$I_{F \otimes v} \cap I_{F \otimes v'} = \varnothing$$

对于任意不同的 v、$v' \in Y_i$，都有。

证明。定义一个多值函数

$$f : \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \to \mathrm{Irr}(\mathbb{G}), \quad f(v) = \{u \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \mid u \subset \overline{w} \otimes y \otimes v \text{ for some } w, y \in F\}.$$

若 $u \in f(v)$，则对于某个不可约 $z \subset w \otimes y$，有 $u \in I_{\overline{z} \otimes v}$；对于某个 $w,\ y \in F$。由 [13,命题 2.7. 4] 可知，$|I_{z \otimes v}|$ 有一个上界常数 C_z，该常数取决于 z，但不取决于 v。由于$z \subset w \otimes y$对于某个 $w,\ y \in \overline{F}$成立，表示 z取自一个固定的有限集合。因此，$|f(v)|$ 有一个与 v无关的上界常数。

另一方面，若 $u \in f^{-1}(v)$，则对于某个不可约 $z \subset w \otimes y$，有 $v \subset z \otimes u$，且满足 $w, \overline{y} \in F$。于是，根据弗罗贝尼乌斯互反律 [13, 定理 2.2.6]，$u \subset z \otimes v$。与上述情况类似，我们可以为 $|f^{-1}(v)|$ 找到一个与 v无关的上界。

现在我们可以将引理 4 应用于函数 f，并得到一个划分

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}) = \bigsqcup_i Y_i$$

使得

$$v \notin \{u \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \mid u \subset \overline{w} \otimes y \otimes v' \text{ for some } w, y \in F\} \tag{3}$$

对于任意互异的 v，$v' \in Y_i$。现在假设 v，$v' \in Y_i$ 互异，且

$$u \in I_{F \otimes v} \cap I_{F \otimes v'}.$$

那么，对于某个 w，$y \in F$，有 $u \subset w \otimes v$ 和 $u \subset y \otimes v'$。因此 $v \subset w \otimes u \subset w \otimes y \otimes v'$。这与 (3) 矛盾。□

回忆一下，若存在一个对离散量子群 $\mathbb{F}$ 的不可约表示维数的统一上界，则称其具有低对偶；其中 G 是 $\mathbb{F}$ 的对偶量子群。

The定理 6. 每个具有低对偶的离散量子群都在其通用紧化上的作用是自由的

证明。取一个具有低对偶的离散量子群 $\mathbb{F}$，并将 $\mathbb{F}$ 的对偶量子群记为 G。令 $u \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$，并令 $c_u \in \ell^\infty(\mathbb{F})$ 由 $\{u\}$ 支持。对于每个 $v \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$，我们有

$$\Delta(c_u)(1 \otimes p_{\overline{v}}) = \sum_{w \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \sum_{T : u \subset w \otimes \overline{v}} T c_u p_u T^*$$

其中求和遍历 u 在 $w \otimes v$ 中的重数，且 $T\colon\ H_u \to H_w \otimes H_v$ 表示相应的等距交织算子。由于 $u \subset w \otimes v$，由弗罗贝尼乌斯互反律 [13, 定理 2.2.6] 可知 $w \subset u \otimes v$。正如引理 5 的证明中所指出的，集合的基数

$$I_{u \otimes v} = \{w \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \mid w \subset u \otimes v\}$$

有一个常数 K_u 作为上界，该常数仅取决于 u，而不取决于 v。于是我们可以写成

$$\Delta(c_u)(1 \otimes p_{\overline{v}}) = \sum_k A_k^v \otimes B_k^v \tag{4}$$

其中 $A_k^v \in B(H_{w_k^v})$ 和 $B_k^v \in B(H_v)$ 满足 $\|A_k^v\| \leqslant \|c_u\|$ 和 $\|B_k^v\| \leqslant 1$。由于 $\mathbb{F}$ 具有低对偶，且 $|I_{u \otimes v}| \leqslant K_u$，(4) 中的求和项数可由一个普适常数 N 控制。必要时补上零项后，我们可以假设对每个 v，求和都从 1 到 N。

令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ 的所有有限子集组成的集合，并假设 $F \in \mathcal{F}$ 固定且 $u \in F$。应用引理 5，得到一个有限划分

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}) = \bigsqcup_i Y_i$$

使得

$$I_{F \otimes v} \cap I_{F \otimes v'} = \varnothing \tag{5}$$

对于任意不同的 v，$v' \in Y_i$。暂且固定 i。特别地，对于不同的 v，$v' \in Y_i$，有 $I_{u \otimes v} \cap I_{u \otimes v'} = \varnothing$，因此我们可以定义 $a_k \in \ell^\infty(\mathbb{F})$、$k = 1$，2，.....，$N$，如下：

$$a_k p_s = \begin{cases} A_k^v & \text{if } s = w_k^v \text{ for some } v \in Y_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 $\mathbb{F}$ 具有低对偶，根据 [11]，它属于Kac型。因此，映射 j 是等距映射，我们可以定义$b_k \in \ell^\infty(\mathbb{F})$、$k = 1$、2、.....、$N$，如下：

$$b_k p_s = \begin{cases} j(B_k^v) & \text{if } s = v \text{ for } v \in Y_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

给定 $w\in F$，我们有

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta(a_k)(1\otimes b_k)(p_w\otimes 1)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{v\in Y_i}\sum_{T:s\subset w\otimes v}Ta_kp_sT^*(1_w\otimes j(B_k^v)).$$

假设 $a_kp_s\neq 0$ for $s\subset w\otimes v_\circ$ 那么，对于某个 $v'\in Y_i$ 和 $a_kp_s=A_k^{v'}$，有 $s=w_k^{v'}$。现在$s=w_k^{v'}\subset u\otimes v'_\circ$ 由于 w 和 u 都属于 F，由 (5) 可得 $v'=v_\circ$ 因此，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\Delta(a_k)(1\otimes b_k)(p_w\otimes 1)&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{v\in Y_i}\sum_{T:w_k^v\subset w\otimes v}TA_k^vT^*(1_w\otimes j(B_k^v))\\&=\sum_{v\in Y_i}\sum_{k=1}^{n_v}\big(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\big)(1_w\otimes j(B_k^v)).\end{aligned}\tag{6}$$

令 $t_v\in\mathsf{Mor}(1,\ v\otimes\overline{v})$，如前所设。由 (2) 可得

$$\sum_{k=1}^{n_v}\Big(\big(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\big)\big(1_w\otimes j(B_k^v)\big)\otimes 1_{\overline{v}}\Big)(1_w\otimes t_v)=\sum_{k=1}^{n_v}(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\otimes B_k^v)(1_w\otimes t_v).$$

Now

$$\sum_{k=1}^{n_v}(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\otimes B_k^v)=(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(c_u))(p_w\otimes p_v\otimes p_{\overline{v}})=(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(c_u))(p_w\otimes p_v\otimes p_{\overline{v}}).$$

记

$$\Delta(c_u)(p_w\otimes 1)=\sum_{\ell}C_\ell\otimes d_\ell$$

where $C_\ell\in B(H_w)$、$d_\ell\in\ell^\infty(\mathbb{F})$，且该和是有限的。继续前面的计算，我们有 e

$$\sum_{k=1}^{n_v}\Big(\big(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\big)\big(1\otimes j(B_k^v)\big)\otimes 1_{\overline{v}}\Big)(1_w\otimes t_v)=\sum_{\ell}\sum_{T:s\subset v\otimes\overline{v}}(C_\ell\otimes Td_\ell p_sT^*)(1_w\otimes t_v).$$

现在 $T^*t_v\in\mathsf{Mor}(\mathbb{1},\ s)$，且 s 是不可约的，因此除非 $s=\mathbb{1}$，否则 $T^*t_v=0_\circ$ 在这种情况下，我们有 $T=\lambda t_v$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$ 且 $|\lambda|=\|t_v\|^{-1}$，因此 $Td_\ell p_{\mathbb{1}}T^*t_v=\epsilon(d_\ell)t_{v\circ}$ 由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_v}\Big(\big(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\big)\big(1\otimes j(B_k^v)\big)\otimes 1_{\overline{v}}\Big)(1_w\otimes t_v)&=\sum_{\ell}(C_\ell\otimes\epsilon(d_\ell)1_v\otimes 1_{\overline{v}})(1_w\otimes t_v)\\&=(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\big(\Delta(c_u)\big)p_w\otimes 1_v\otimes 1_{\overline{v}})(1_w\otimes t_v)=(c_up_w\otimes 1_v\otimes 1_{\overline{v}})(1_w\otimes t_v).\end{aligned}$$

由于 $(1_v\otimes s_v^*)(t_v\otimes 1_v)=1_v$，可得

$$\sum_{k=1}^{n_v}\big(\Delta(A_k^v)(p_w\otimes p_v)\big)\big(1_w\otimes j(B_k^v)\big)=c_up_w\otimes 1_v.$$

将其代入方程 (6)，得到

$$\sum_{k=1}^{N}\Delta(a_k)(1\otimes b_k)(p_w\otimes 1)=\sum_{v\in Y_i}c_up_w\otimes p_v=(c_u\otimes p_{Y_i})(p_w\otimes 1)$$

其中 $p_{Y_i}=\sum_{v\in Y_i}p_{v\circ}$ 由于 $w\in F$ 是任意的，可得

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\Delta(a_k)(1\otimes b_k)\Big)(f\otimes 1)=(c_u\otimes p_{Y_i})(f\otimes 1)$$

对每个由 F 支持的 f 都如此。对每个 i 重复这一构造，并将所得元素记为 a_k^i 和 b_k^i，令

$$X_F=\sum_i\sum_{k=1}^{N}\Delta(a_k^i)(1\otimes b_k^i).$$

由于网 $(X_F)_{F\in\mathcal{F}}$ 有界，由上述结果可知， $X_F \to c_u \otimes 1$ 在 $M(c_0(\Gamma)\otimes \ell^\infty(\Gamma))$ 中严格成立。这进而意味着 $\Delta(\ell^\infty(\Gamma))(1\otimes \ell^\infty(\Gamma))$ 的线性张成在 $M(c_0(\Gamma)\otimes \ell^\infty(\Gamma))$ 中严格稠密。

□

References

[1] B. Anderson-Sackaney、R. Vergnioux，离散量子群的 C^*-单纯性与边界作用，预印本，见 arXiv:2411.05178, 2024。[2] M. Banacki、M. Marciniak，作为量子对称群的多个非交换环面， *J. Geom. Phys.* **131** (2018)，1–22。[3] P. F. Baum、K. De Commer、P. M. Hajac，紧量子群在含幺 C*-代数上的自由作用，*Doc. Math.* **22** (2017)，825–849。[4] K. De Commer、M. Yamashita，由紧量子群的自由作用构造有限指数 C*-代数包含，
Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013)，709–735。[5] M. Daws、A. Skalski、A. Viselter，关于量子群的性质 (T)，
Comm. Math. Phys. **353** (2017)，69–118。[6] R. Ellis，泛最小集， *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960)，540–543。[7] D. A. Ellwood，主作用的一种新刻画， *J. Funct. Anal.* **173** (2000)，49–60。[8] P. Hajac、T. Masuda，量子双环面， *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998)，553–558。[9] N. Hindman、D. Strauss，
Algebra in the Stone–Čech compactification，Walter de Gruyter & Co.，柏林，2012。[10] M. Katˇetov，关于映射的一个定理， *Comment. Math. Univ. Carolinae* **8** (1967)，431–433。[11] J. Krajczok、P. M. So

J. Operator lt

Theory **80** 2018 415 428
an，具有有界次数表示的紧量子群，( )，–。[12] A. Maes、A. Van Daele，紧量子群札记， *Nieuw Arch. Wisk. (4)* **16** (1998)，73–112。[13] S. Neshveyev、L. Tuset， *Compact quantum groups and their representation categories*，法兰西数学会，巴黎，2013。[14] S. Neshveyev、M. Yamashita，范畴论莫里塔等价的紧量子群， *Doc. Math.* **23**(2018)，2165–2216。[15] K. Schwieger、S. Wagner，第三部分，紧量子群在 C*-代数上的自由作用， *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **13** 2017 062, 19 ( ),

论文编号 pp[16] S. L. Woronowicz，紧量子群， *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*，845–884，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1998。[17] S. Yamagami，紧量子群的酉表示理论，
Comm. Math. Phys. **167** (1995)，509–529。

Research Unit of Mathematical Sciences, University of Oulu, PL 8000, FI-90014, Finland
Email address: pekka.salmi@oulu.fi