常平均曲率与时空常平均曲率曲面的曲率不等式及刚性

ALEJANDRO PEÑUELA DIAZ

arXiv:2603.16707v1 [math.DG] 17 Mar 2026

摘要。我们为黎曼几何和洛伦兹几何中满足常平均曲率类条件的曲面建立了曲率不等式和刚性结果。在黎曼情形下，我们研究标量曲率有界的三维流形中的常平均曲率（CMC）曲面。基于 Christodoulou–Yau 不等式 $H^2 \leq 16\pi/|\Sigma|$ （其中 H 为平均曲率， $|\Sigma|$ 为面积），我们证明，相关的刚性现象在一种更弱的稳定性概念下依然成立；该概念仅控制二阶变分的常值模态，并结合外在曲率符号条件。这一结果无需假设内蕴对称性或近圆性，即可得到欧几里得刚性，并可推广至高维以及双曲和球面情形。

在洛伦兹情形下，我们考察时空常平均曲率（STCMC）曲面，这是常平均曲率曲面的自然推广。我们为 STCMC 曲面引入一种稳定性理论，并在主导能量条件下证明尖锐不等式 $|\vec{H}|^2 \leq 16\pi/|\Sigma|$ 。我们还针对等号情形得到了刚性结果：在适当的几何假设下，该曲面内禀圆形，且其所围成的时空区域是平坦的，其极大整体双曲发展等距于闵可夫斯基时空中的一个因果菱形。最后，我们证明，在类空和零情形下已知的典范渐近 STCMC 叶状结构，其叶片相对于这一稳定性概念都是稳定的。

1. 引言与结果

将常平均曲率（CMC）曲面视为面积泛函在体积约束下的临界点，是微分几何中的核心主题。稳定常平均曲率曲面不仅是等周曲面，还满足基本的几何不等式，将环境流形的曲率与曲面的内蕴性质联系起来。Christodoulou 和 Yau [11], 建立了这一方向上的里程碑式结果：他们证明，若 (M, g) 是一个具有非负标量曲率的三维黎曼流形，且$\Sigma \subset M$ 是一个稳定常平均曲率曲面，那么

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}, \tag{1}$$

其中 H 表示 Σ的平均曲率， $|\Sigma|$ 表示其面积。欧几里得空间中的圆球面可取到等号。这自然引出了相应的刚性问题：如果等号成立，所围区域是否必定与欧几里得球等距?

在标量曲率下界条件下的刚性现象已在黎曼几何中得到广泛研究。在许多情况下，稳定极小超曲面和常平均曲率超曲面的理论起着核心作用，因为稳定性不等式将环境标量曲率与内蕴几何量联系起来。关于这类刚性结果及其几何背景的概述，参见 Brendle [4]的综述。

对于不等式 (1) 的特定情形，在附加几何假设下已得到刚性结果。具体而言，Sun [35] 证明，若一个稳定常平均曲率球面满足

等号且足够接近圆形，则该曲面等距于一个圆球面，且所围区域等距于一个欧几里得球。这些结果表明，不等式 (1) 中的等号蕴含着丰富的几何信息，不过现有方法依赖于内蕴意义下的近圆性或对称性假设 [32, 35]。请注意，不等式 (1) 最初受广义相对论启发，因为它保证霍金准局域能量非负，而等号情形则为全测地超曲面中的霍金准局域能量提供了一个刚性结论。

本文的第一个目标是改进并推广这些结果。我们证明，在纯粹的外在曲率符号条件与弱稳定性假设相结合的情况下，可以恢复欧几里得刚性；这里的弱稳定性假设仅控制二阶变分的常值模态，而无需施加内蕴对称性或近似圆性假设。此外，在适当的标量曲率下界条件下，我们还建立了双曲和球面情形中的相应刚性结果，以及高维类比结果。在每种情形中，刚性背后的机制都是曲率下界与尖锐边界不等式之间的相互作用。刚性论证最终依赖于带边流形的几何刚性定理，尤其是 Shi 和 Tam [33]的布朗–约克质量刚性定理及其推广。

随后我们转向洛伦兹情形，考虑满足主导能量条件的四维洛伦兹流形（$\mathcal{M}$ g）。对于类空二维曲面 $\Sigma \subset \mathcal{M}$，相关的曲率量是平均曲率向量的平方范数，

$$|\vec{H}|^2 = -\theta_\ell \theta_k,$$

其中 θ_ℓ 和 θ_k 表示 Σ的零膨胀。具有常值 $|\vec{H}|$ 的曲面——称为时空常平均曲率（STCMC）曲面——是黎曼几何中常平均曲率曲面的自然类比。尽管 STCMC 曲面已出现在数学相对论的若干研究背景中，但此前尚未建立这类曲面的稳定性理论。本文提出一种自然的稳定性概念，并证明它导出一个尖锐的曲率不等式

$$-\theta_\ell \theta_k = |\vec{H}|^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}. \tag{2}$$

此外，我们针对等号情形建立了一个刚性定理：在特定的曲率符号条件下（或假设具有偶对称性或内禀近圆性），曲面 Σ 在内禀意义下是圆形的。在附加假设它围住一个没有其他边界分支的类空区域后，所围区域是平坦的，其极大整体双曲发展与闵可夫斯基时空中的标准因果菱形等距。这个刚性结论的证明基于 Liu 和 Yau 的定理 [19, 20], ，并结合对所围区域的极大整体双曲发展的分析。

这些结果在广义相对论中可自然地解释为霍金拟局域能量（或拟局域质量）。

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} \left(1 + \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma \theta_\ell \theta_k \, d\mu\right). \tag{3}$$

不等式 (2) 与主导能量条件下 $\mathcal{E}(\Sigma)$ 的非负性完全等价，而等号情形对应于霍金能量为零时的刚性。

除了这种能量解释之外，时空常平均曲率曲面在渐近平坦时空的几何中也发挥着重要作用。特别是，已有研究表明

渐近平坦初始数据集在无穷远附近存在由 STCMC 曲面构成的典范叶层 [6], ，它为孤立引力系统的质心提供了几何刻画。这些叶层是经典常平均曲率叶层的自然洛伦兹类比， [16] 后者用于在时间对称情形下定义质心。近年来，研究者还在渐近施瓦西型零超曲面 [17]上构造了 STCMC 叶状结构。

在本文中，我们证明了这些已知的渐近时空常平均曲率叶状结构的叶片相对于本文引入的稳定性概念是稳定的。因此，我们的结果将霍金能量的正性与刚性性质同渐近平坦时空的几何结构联系起来，并同时涵盖类空和零情形。这些应用还表明，本文建立的稳定性理论确实由渐近平坦几何中自然出现的 STCMC 曲面所实现。更广泛地说，它们阐明了洛伦兹稳定性理论的几何意义，并将其与经典黎曼稳定常平均曲率曲面理论置于直接类比之中。

主导能量条件在洛伦兹情形中所发挥的作用，类似于标量曲率下界在黎曼理论中的作用。特别地，不等式（2）可被视为稳定常平均曲率曲面的 Christodoulou-Yau 不等式在时空中的对应形式。这揭示了两种情形之间的直接平行关系：曲率条件分别对具有常平均曲率和时空常平均曲率的曲面导出尖锐的几何不等式，而等号则刚性地确定了它们所包围区域的几何结构。

1.1. 主要结果。 我们首先介绍常平均曲率曲面的结果，并给出一个欧几里得刚性结果。

定理 2.3。 设(M, g) 是一个具有非负标量曲率的3维黎曼流形。设 $\Sigma \subset M$ 是一个平均曲率为 $H \geq 0$的闭曲面，并满足以下条件之一：

(i) 面积二次变分满足 $\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))\,d\mu \geq -\frac{1}{2}H^2|\Sigma|$，或

(ii) Σ 在拓扑上是球面，且变分稳定。

$Then$

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}. \tag{4}$$

进一步假设 Σ 是一个相对紧域$\Omega \subset M$的边界，其外单位法向量为 ν，且$\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)$ 沿着 Σ 不变号。如果式 ***(4)*** 中等号成立，那么Ω与 $\mathbb{R}^3$中的一个欧几里得球等距。特别地， Σ 与一个圆球面等距。

这项结论在假设（i）下通过定理 2.5 推广到高维 .

双曲情形： 当双曲空间作为参考几何时，也有类似的刚性结论

定理 2.6。 设(M, g) 是一个3维黎曼流形，其标量曲率$\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$ 对于某个常数 $\Lambda \leq 0$。设 $\Sigma \subset M$ 是一个具有常平均曲率$H \geq 0$的闭曲面，并满足以下条件之一

(i) 面积二次变分满足

$$\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))d\mu \geq -\Big(\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\Big)|\Sigma|, \ or$$

(ii) Σ 在拓扑上是球面且变分稳定。

Then

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|} - \frac{4}{3}\Lambda. \tag{5}$$

此外，假设 Σ 是相对紧域$\Omega \subset M$的边界，其外单位法向量为 ν，且$\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{2}{3}\Lambda$沿着 Σ不变号。若式（*5*）中取等号，则 Σ 与圆球面等距，且Ω 与双曲空间中半径为 $3/\Lambda$, $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$ 的测地球等距。

球面情形： 我们还考虑以球面作为参考几何的情形。

与欧氏情形和双曲情形不同，球面情形中的刚性需要里奇曲率下界。

定理 2.9. 设(M,g) 为一个标量曲率$\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$ 为常数 $\Lambda \geq 0$的三维黎曼流形。设 $\Sigma \subset M$ 为一闭合平均曲率为$H \geq 0$的常平均曲率曲面，满足以下条件之一：

(i) 面积二次变分满足

$$\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))d\mu \geq -\Big(\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\Big)|\Sigma|, \ or$$

(ii) Σ 拓扑上为球面且变分稳定。

Then

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|} - \frac{4}{3}\Lambda. \tag{6}$$

进一步假设 Σ 是相对紧域 $\Omega \subset M$的边界，外单位法向量为 ν，且 Ω上的 $\mathrm{Ric}^M \geq \frac{2}{3}\Lambda\, g$。若式 *(6)* 中等号成立，则 Σ 是全测地的（$B = 0$），与圆球面等距，且Ω 与半球$\mathbb{S}^3_+\Big(\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}\Big)$等距。

与欧几里得情形一样，在假设（i）下，这一结果在定理 2.10 中推广到高维。

STCMC 曲面的结果。 我们在主导能量条件下建立上述刚性结果的时空对应。

定理 4.1。 设 (M,g) 是一个满足主导能量条件的四维洛伦兹流形。设 Σ 是一个闭类空*STCMC*曲面，且 $\theta_\ell\theta_k \leq 0$，满足以下条件之一

(i) Σ *is constant-mode stable* ($\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| \geq 0$), *or*

(ii) Σ 拓扑上为球面，且按照定义 *3.2* 的意义是变分稳定的。

$Then$

$$-\theta_\ell\theta_k = |\vec{H}|^2 \le \frac{16\pi}{|\Sigma|}. \tag{7}$$

若式 *(7)* 中等号成立，且 $\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k)$ 沿着 Σ不变号，则 Σ 与一个圆球面等距，并且任何边界为 $\partial\Omega = \Sigma$的紧致类空超曲面 $\Omega \subset M$ 均可等距嵌入闵可夫斯基时空，成为一个类空超曲面。此外，Ω 上诱导的初始数据的极大整体双曲发展与闵可夫斯基时空中的一个标准因果菱形等距。

定理 4.5 在对称性或近圆性假设下证明了另一种刚性判据。

定理 4.1 中出现的稳定性假设对于类空情形和零情形中已知的典范STCMC叶状结构均得到满足。在渐近欧几里得初始数据集上，我们证明，Cederbaum 和 Sakovich 构造的典范STCMC叶状结构 [6]的叶片同时是常数模稳定和变分稳定的，前提是环境爱因斯坦张量沿该叶状结构满足 $|\mathrm{Ein}(\nu_\sigma,\ \nu_\sigma)| = O(r^{-2})$；见定理 5.3。我们还证明，Kröncke 和 Wolff 构造的渐近 Schwarzschild 光锥的渐近 STCMC 叶状结构 [17]的叶片同时是常数模稳定和变分稳定的；见定理 5.4。

本文的结构如下。第 2 节引入了一种控制二阶变分常值模态的弱稳定性条件，并利用该条件在适当的曲率界下恢复欧几里得、双曲和球面刚性。第 3 节发展了适用于类空曲面的洛伦兹框架，介绍了 STCMC 曲面，并推导了相关的稳定性算子。第 4 节中，我们在主导能量条件下证明稳定 STCMC 曲面的尖锐曲率不等式和刚性定理。最后，第 5 节给出了洛伦兹稳定性理论的示例和应用，包括渐近欧几里得初始数据集上典范STCMC叶状结构的稳定性，以及渐近施瓦西型零超曲面上渐近 STCMC 叶状结构的稳定性。

2. 标量曲率有界的黎曼流形中的常平均曲率曲面

我们回顾非负标量曲率黎曼流形中稳定常平均曲率（CMC）曲面的一些重要性质。这些曲面也可以视为满足优势能量条件的环境洛伦兹流形中的全测地超曲面。这些结果也为本文发展的时空常平均曲率理论提供了重要动机。

常平均曲率曲面是在保体积变分下的面积泛函临界点，也就是说，在法向速度 α 满足以下条件的变分下

$$\int_\Sigma \alpha\, d\mu = 0. \tag{8}$$

在此情形下，稳定性是指法向方向 ν、$\delta^2_{\alpha\nu}|\Sigma|$ 上的面积二次变分满足

$$\delta^2_{\alpha\nu}|\Sigma| = \int_\Sigma \left(|\nabla\alpha|^2 - \left(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\right)\alpha^2\right) d\mu \ge 0$$

对于满足（8）的所有光滑函数 α 。

稳定常平均曲率曲面具有若干显著的几何性质。特别地，Christodoulou 和 Yau 证明，在具有非负标量曲率的流形中，此类曲面满足一个尖锐的曲率不等式。

定理 2.1 (Christodoulou-Yau [11])。 设 (M, g) 是一个具有非负标量曲率的 3 维黎曼流形。若 $\Sigma \subset M$ 是稳定常平均曲率曲面，则

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}.$$

这里，稳定性按上文回顾的通常保体积意义理解。

在广义相对论初始数据集的时间对称情形下，曲面 Σ 的霍金能量可化为

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma H^2 \, d\mu\right).$$

因此，Christodoulou-Yau 不等式意味着稳定常平均曲率曲面的霍金能量非负。在不同于稳定性的假设下，关于常平均曲率曲面霍金能量的相关正性结果见 [27]。

2.1. 欧几里得情形： 定理 2.1 中的不等式表明，在非负标量曲率的条件下，欧几里得空间是模型几何。事实上，在 $\mathbb{R}^3$ 中，圆球面的霍金能量界取等号。因此，自然会问：在什么附加条件下，取等号可以推出所围区域与一个欧几里得球等距？我们先回顾以下刚性结果。

定理 2.2 ([32, 35, 定理 2，定理 1])。 设 (M, g) 为一个具有非负标量曲率的 *3* 维黎曼流形，设 $\Omega \subset M$ 为一个边界光滑的相对紧域 $\Sigma = \partial\Omega$。假设 Σ 是一个稳定的常平均曲率球面，满足

$$H^2 = \frac{16\pi}{|\Sigma|}.$$

若任一方

- ***(i)*** Σ具有偶对称性，即存在一个等距变换 $\rho:\ \Sigma \to \Sigma$，使得 $\rho^2 = id$且 $\rho(x) \neq x$，其中 $x \in \Sigma$，或者
- ***(ii)*** 它的高斯曲率 K_Σ 是 C^0-接近于 $\frac{4\pi}{|\Sigma|}$，即对于某个 $\delta_0 \ll$，有 $|K_\Sigma - \frac{4\pi}{|\Sigma|}|_{C^0} < \delta_0 1.$

那么 Ω 等距于 $\mathbb{R}^3$中的一个欧几里得球。特别地， Σ等距于 $\mathbb{R}^3$中的圆球面。

刚才回顾的刚性定理依赖于等号之外的辅助假设，即存在无不动点等距变换（偶对称性），或者要求高斯曲率充分接近常数。这些本质上是关于 Σ 几何的内在条件。相比之下，下面的定理表明，只要曲面满足两个变分判据之一，欧几里得刚性也可由纯粹的外在曲率符号条件推出。第一个判据，即条件 (*i*)，是一项“弱稳定性”假设，它针对常值法向变分为面积二次变分规定了一个下界。该条件的限制明显弱于完整的变分稳定性，因为它只控制雅可比算子的“常值模态”，而非整个谱。具体而言，我们用 $\delta^2_{\alpha\nu}|\Sigma|$ 表示沿速度为 α 的法向量场方向的面积二次变分；条件 (*i*) 讨论的是 $\alpha \equiv 1$ 为常数的情形。

定理 2.3。 设 (M, g) 是一个具有非负标量曲率的 3 维黎曼流形。设 $\Sigma \subset M$ 是一常平均曲率为 $H \geq 0$ 的闭曲面，且满足以下条件之一

*(i)*面积二次变分满足 $\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu, \nu))\, d\mu \geq -\frac{1}{2}H^2|\Sigma|$，或者

(ii) Σ 在拓扑上是球面，且变分稳定。

Then

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}. \tag{9}$$

此外，假设 Σ 是相对紧域 $\Omega \subset M$ 的边界，其外单位法向量为 ν，并且 $\mathrm{Ric}^M(\nu, \nu)$ 沿着 Σ 不变号。如果（*9*）中的等号成立，则 Ω 与 $\mathbb{R}^3$ 中的一个欧几里得球等距。特别地，Σ 与一个圆球面等距。

证明。 我们首先证明，在任一假设下，不等式（9）成立，且等号成立意味着 $\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{1}{2}H^2$。

(i) 注意，关于二阶变分的条件可化简为

$$\int_\Sigma |\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu, \nu)\, d\mu \leq 0 \tag{10}$$

回忆高斯方程

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu, \nu) + \frac{1}{2}H^2 - |\mathring{B}|^2, \tag{11}$$

其中 B 是无迹第二基本形式。然后对方程积分并利用 (10)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 d\mu &= \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu - \int_\Sigma \mathrm{Sc}^M d\mu + 2\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu, \nu) + |\mathring{B}|^2 d\mu - \int_\Sigma |\mathring{B}|^2 d\mu \\ &\leq 8\pi \end{aligned} \tag{12}$$

其中我们还用到了 $\mathrm{Sc}^M \geq 0$，以及由高斯-博内定理可知 $\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu \leq 8\pi$。现在若 $\frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 d\mu = 8\pi$，则 $\int_\Sigma \frac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu = 4\pi$，$\Sigma$是拓扑球面，且 $|\mathring{B}|^2 = \mathrm{Sc}^M = 0$。现在由 (10)

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu, \nu) d\mu = 0$$

且由于 $\mathrm{Ric}^M(\nu, \nu)$ 不变号，我们得到 $\mathrm{Ric}^M(\nu, \nu) = 0$ 在 Σ上。这意味着

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{1}{2}H^2.$$

(ii) 首先注意到，由于定理 2.1，$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|}$。现在来看刚性结果。注意，由一致化定理，$\Sigma$ 与圆球面共形等价。此外，由 Hersch 引理（另见 [18]），存在一个共形映射

$$\varphi : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

使得

$$\int_\Sigma \varphi\, d\mu = 0.$$

特别是，每个坐标函数 φ_i 的均值为零，因此是常平均曲率曲面稳定性不等式中的一个可接受试函数。

$$\int_\Sigma |\nabla \varphi_i|^2 \, d\mu \geq \int_\Sigma \Big(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\Big)\varphi_i^2 \, d\mu. \tag{13}$$

对于与 $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 共形的曲面，我们有

$$\sum_{i=1}^3 \int_\Sigma |\nabla \varphi_i|^2 d\mu = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla x_i|^2 \, d\mu_{S^2} = \sum_{i=1}^3 -\int_{\mathbb{S}^2} x_i \Delta x_i \, d\mu_{S^2} = \sum_{i=1}^3 2\int_{\mathbb{S}^2} x_i^2 \, d\mu_{S^2} = 8\pi. \tag{14}$$

由于每个 φ_i 都位于球面上，它们满足 $\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = 1$；相加后得到

$$8\pi \geq \int_\Sigma \Big(|B|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu)\Big) \, d\mu = \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 d\mu + \int_\Sigma \Big(|\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\Big) \, d\mu. \tag{15}$$

于是，在假设（i）下，我们得到不等式（10）

$$\int_\Sigma |\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) \, d\mu \leq 0 \tag{16}$$

然后，与之前一样，我们得到：

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{1}{2}H^2$$

由于 H 为常数，Sc^Σ 也是满足 $\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{1}{2}H^2$ 的正常数，特别地，$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{2}{r^2}$，其中 r 是 Σ 的面积半径。现在利用这一点，我们可以应用定理 A.1（Brown-York 质量）的刚性结果。由于高斯曲率为正常数，Σ 与半径为 r 的圆球面等距，因此其到 $\mathbb{R}^3$ 中的等距嵌入就是标准球面，并且 $H_0 = \frac{2}{r}$。又由于 $H = \frac{2}{r}$，由定理 A.1 可得我们的结论。□

注 2.4。如果 $\partial\Omega$ 具有有限个连通分支，且其中一个分支 Σ 满足定理 2.3 的假设，则同样的结论仍然成立。假设所有其他边界分支关于外法向都具有正的高斯曲率和正的平均曲率。则定理 A.1 表明，只有当 $\partial\Omega$ 连通时，等式（87）才可能成立。因此，Ω 与一个欧几里得球等距。

在假设 (i) 下，我们可以将这一结果推广到高维。

定理 2.5. 设(M, g) 是一个维数为 $n \geq 3$ 、具有非负标量曲率的黎曼流形。设 $\Sigma \subset M$ 是平均曲率为 $H \geq 0$ 的闭超曲面，且其面积二次变分满足

$$\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)) \, d\mu \geq -\frac{H^2}{n-1}|\Sigma|. \tag{17}$$

Then

$$H^2 \leq \frac{(n-1)\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu}{(n-2)|\Sigma|}. \tag{18}$$

另外，假设 Σ 是相对紧域 $\Omega \subset M$ 的边界，其外单位法向量为 ν，并且 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)$ 沿 Σ 不变号。若 Σ 可以等距嵌入 $\mathbb{R}^n$ 中成为凸超曲面，且 (18) 中等号成立，则 Ω 与 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得球等距。特别地，Σ 与圆球面等距。

证明。 注意到，关于二阶变分的条件可化为

$$\int_\Sigma \Big(|\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\Big)\, d\mu \le 0. \tag{19}$$

在我们的情形中，高斯方程为

$$\begin{aligned} \mathrm{Sc}^\Sigma &= \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + H^2 - |B|^2 \\ &= \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + \frac{n-2}{n-1}H^2 - |\mathring{B}|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

将平均曲率项单独移出，对 Σ积分，并利用 (19)，得到 :

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma H^2 d\mu &= \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu - \int_\Sigma \mathrm{Sc}^M d\mu + 2\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + |\mathring{B}|^2 d\mu - \int_\Sigma |\mathring{B}|^2 d\mu \\ &\le \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu \end{aligned} \tag{21}$$

其中我们用到了 $\mathrm{Sc}^M \ge 0$、 $-\int_\Sigma |\mathring{B}|^2\, d\mu$的非正性以及弱稳定性条件 (19)。

现在，若 $\frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma H^2\, d\mu = \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu$，这些不等式必为等式。于是 $|\mathring{B}|^2 = \mathrm{Sc}^M = 0$，并由 (19) 得

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\, d\mu = 0.$$

由于 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)$ 不变号，我们得到 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)$ 在 Σ 上逐点 $= 0$。将这些消失项代回高斯方程可知

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{n-2}{n-1}H^2.$$

由于 H 为常数，Sc^Σ 是一个正的常数。根据 Ros 常标量曲率刚性定理 A.5，欧几里得空间中标量曲率为常数的闭嵌入超曲面只有圆球面。因此， Σ 到 $\mathbb{R}^n$ 的凸等距嵌入是一个圆球面。由于 $\mathbb{R}^n$ 中的圆球面是全脐的（$|\mathring{B}_0|^2 = 0$），其高斯方程给出 $\frac{n-2}{n-1}H_0^2 = \mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{n-2}{n-1}H^2$，其中 H_0是该等距嵌入的平均曲率。因此，我们可以应用定理 A.3 的刚性结果，得出 Ω 等距于 $\mathbb{R}^n$中的一个欧几里得球。□

2.2. **双曲情形：** 前述刚性结果表明，在标量曲率非负的情形下，欧几里得空间是模型几何。在标量曲率下界为 $\mathrm{Sc} \ge 2\Lambda$ with $\Lambda < 0$ 时，若以双曲空间作为参考几何，则有类似的刚性结论。在这种情形下，Shi-Tam 的 Brown-York 质量刚性定理（见附录中的定理 A.6）表明，相应边界不等式取等号时，该区域必等距于双曲空间中的一个区域。

利用这一刚性结果，文献 [32, 35, 中的定理 3、定理 2]得到了与定理 2.2 类似的结果。类似地，在适当的外在曲率符号条件下，可以得到定理 2.3 的双曲对应版本。

定理 2.6。 设(M, g) 为一个3维黎曼流形，其标量曲率$\mathrm{Sc}^M \ge 2\Lambda$ ，其中常数为 $\Lambda \le 0$。设 $\Sigma \subset M$ 为一常平均曲率为$H \ge 0$的闭曲面，满足以下条件之一:

(i) 面积二次变分满足

$$\delta_\nu^2|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))d\mu \geq -\Big(\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\Big)|\Sigma|,\ or$$

（*ii*） Σ在拓扑上为球面且变分稳定。

Then

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|} - \frac{4}{3}\Lambda. \tag{22}$$

进一步假设 Σ 是相对紧域 $\Omega \subset M$的边界，外单位法向量为 ν，且$\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{2}{3}\Lambda$沿 Σ 不变号。如果式（*22*）中等号成立，则 Σ 等距于圆球面，且Ω 等距于双曲空间中的半径为 $3/\Lambda$的测地球 $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$。

证明。我们首先将看到，在这两个假设下，可得 Sc^Σ 为正常数；随后证明的其余部分对这两个假设采用相同的方法。

（i）二阶变分条件归结为

$$\int_\Sigma |\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{2}{3}\Lambda\, d\mu \leq 0 \tag{23}$$

通过对高斯方程积分

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}H^2 - |\mathring{B}|^2, \tag{24}$$

并利用式（23）

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 d\mu &= \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu - \int_\Sigma \mathrm{Sc}^M d\mu + 2\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + |\mathring{B}|^2 d\mu - \int_\Sigma |\mathring{B}|^2 d\mu \\ &\leq 8\pi + (\frac{4}{3}\Lambda - 2\Lambda)|\Sigma| = 8\pi - \frac{2}{3}\Lambda|\Sigma|\end{aligned} \tag{25}$$

这里我们还用到了 $\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$，以及由高斯-博内定理可知 $\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu \leq 8\pi$。现在，若 $\frac{1}{2}\int_\Sigma H^2 d\mu = 8\pi - \frac{2}{3}\Lambda|\Sigma|$，则 $\int_\Sigma \frac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu = 4\pi$， Σ是一个拓扑球面， $|\mathring{B}|^2 = \mathrm{Sc}^M = 0$，且 $\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) - \frac{2}{3}\Lambda d\mu = 0$。由于 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) - \frac{2}{3}\Lambda$在 Σ上不变号，因此 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) = \frac{2}{3}\Lambda$在 Σ上逐点成立。将 $|\mathring{B}| = 0$、$\mathrm{Sc}^M = 2\Lambda$ 和 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) = \frac{2}{3}\Lambda$代入高斯方程，得到 Sc^Σ 是一个正的常数。因此，$(\Sigma,\ h)$ 是内禀圆形的。

(*ii*) 根据一致化和 Hersch 引理 [15] （另见 [18]），存在一个共形映射 $\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^2$，其坐标函数的平均值为零。将这些函数用作保体积稳定性不等式中的试验函数，可得（参见 (15)）

$$8\pi \geq \int_\Sigma \Big(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\Big)\, d\mu = \frac{1}{2}\int_\Sigma H^2\, d\mu + \int_\Sigma \Big(|\mathring{B}|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\Big)\, d\mu. \tag{26}$$

利用高斯方程

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}H^2 - |\mathring{B}|^2,$$

结合高斯-博内定理 $\int_\Sigma \frac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma\, d\mu = 4\pi$ 和下界 $\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$，不等式（26）推出

$$8\pi \geq -4\pi + \int_\Sigma \Big(\frac{3}{4}H^2 + |\mathring{B}|^2 + \Lambda\Big)\, d\mu,$$

因此

$$\int_\Sigma H^2\,d\mu \le 16\pi - \frac{4}{3}\Lambda|\Sigma| - \int_\Sigma |\mathring{B}|^2\,d\mu \le 16\pi - \frac{4}{3}\Lambda|\Sigma|.$$

现在假设等号成立：$\int_\Sigma H^2\,d\mu = 16\pi - \frac{4}{3}\Lambda|\Sigma|$。那么前述不等式迫使$|\mathring{B}| \equiv 0$ 在 Σ 上成立，并且 $\mathrm{Sc}^M = 2\Lambda$ 沿着 Σ成立。对高斯方程积分得

$$\int_\Sigma \left(2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{4}{3}\Lambda\right) d\mu = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}\Lambda - \mathrm{Sc}^\Sigma\right) d\mu = 0.$$

由于 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) - \frac{2}{3}\Lambda$ 在 Σ上不变号，因此 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) = \frac{2}{3}\Lambda$ 在 Σ上逐点成立。如前所述，我们得到 Sc^Σ 是一个正的常数，且 $(\Sigma,\ h)$ 是内禀圆形的。

设 $r := \sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}$ 为其面积半径，因此 $\mathrm{Sc}^\Sigma = 2/r^2$。根据定理 A.6，$\Sigma$ 可凸等距嵌入到 $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$ 中，其平均曲率为 H_0。由于诱导度量是圆形的，其像是$\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$中的一个测地球面，且其平均曲率满足

$$H_0^2 = -\frac{4}{3}\Lambda + \frac{16\pi}{|\Sigma|}.$$

利用等号假设，右侧等于 H^2；由于 $H,\ H_0 > 0$ 我们得到$H_0 = H$。因此 $\int_\Sigma (H_0 - H)\,d\mu = 0$，而 Shi-Tam 刚性定理（定理 A.6）蕴含 Ω 与 $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$中的一个区域等距。由于 Σ是圆的且 H 是常数，该区域是一个测地球。□

注 2.7。在相关工作中 [29], ，作者针对面积约束的 *Willmore* 曲面（即满足以下方程的曲面）得到了类似的刚性结果

$$0 = \lambda H + \Delta H + H|\mathring{B}|^2 + H\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu), \tag{27}$$

其中某个常数为 λ。在这种情形下，可以得到几何不等式

$$\int_\Sigma H^2\,d\mu \le 16\pi,$$

其等号情形在欧几里得和双曲情形下导出与上述相同的刚性结论。然而，考虑球面背景时，刚性情形迫使曲面为极小曲面，而上述方程随即退化，因为$H = 0$。因此，Willmore 框架难以直接导出球面刚性结果，而本文采用的常平均曲率方法仍然适用，正如我们接下来将看到的。

2.3. 球面情形：最后，还可以考虑具有正曲率的模型几何。令 $\mathbb{S}^n(r)$ 表示半径为 r 的标准 n 球面，并

$$\mathbb{S}^n_+(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r,\ x_n \ge 0\}$$

其上半球。

与欧几里得情形和双曲情形不同，球面情形中的刚性需要里奇曲率下界。在这一情形下，Melo 为稳定常平均曲率球面建立了以下刚性结果。

定理 2.8 ([24, 定理 1.1，定理 1.2])。设(M, g) 为一个标量曲率为$\mathrm{Sc}^M \ge 6$的三维黎曼流形，并设$\Omega \subset M$ 是一个边界为 $\Sigma = \partial\Omega$的相对紧域，且边界光滑。假设 Σ 是一个稳定的常平均曲率球面，满足

$$\int_\Sigma (H^2 + 4)\,d\mu = 16\pi.$$

如果任一方面

（*i*） Σ 具有偶对称性，或

（*ii*）高斯曲率 K_Σ 与 $\frac{4\pi}{|\Sigma|}$ 在 C^0 意义下充分接近，

则 Σ 与半径为 $\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}$ 的圆球面等距。此外，若 $\mathrm{Ric}^M \geq 2g$，则 Ω 与半球 $\mathbb{S}^3_+\left(\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}\right)$ 等距。

最后，我们将看到，条件 $\mathrm{Ric}^M \geq 2g$ 足以证明刚性，且在这种情形下，近圆性或对称性条件并非必要。

定理 2.9。设 (M, g) 为一个 3维黎曼流形，其标量曲率$\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$，其中 $\Lambda \geq 0$为常数。设 $\Sigma \subset M$ 为一个平均曲率为$H \geq 0$的闭曲面，且满足以下任一条件

（*i*）面积二次变分满足

$$\delta^2_\nu|\Sigma| = \int_\Sigma -(|B|^2 + \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))d\mu \geq -(\frac{1}{2}H^2 + \frac{2}{3}\Lambda)|\Sigma|, \ or$$

(ii) Σ 在拓扑上为球面且变分稳定。

Then

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|} - \frac{4}{3}\Lambda. \tag{28}$$

此外，假设 Σ 是相对紧域 $\Omega \subset M$的边界，其外单位法向量为 ν，且Ω上的$\mathrm{Ric}^M \geq \frac{2}{3}\Lambda\, g$。若等号成立于 ***(28)***，则 Σ 是全测地的（$B = 0$），与圆球面等距，而Ω与半球$\mathbb{S}^3_+\left(\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}\right)$等距。

证明。 如定理 2.6 的证明所示，在推导该不等式时， Λ 的符号不起作用。在假设（i）或（ii）下，同样的论证可得

$$\int_\Sigma H^2\, d\mu \leq 16\pi - \frac{4}{3}\Lambda|\Sigma| - \int_\Sigma |\mathring{B}|^2\, d\mu,$$

从而

$$H^2 \leq \frac{16\pi}{|\Sigma|} - \frac{4}{3}\Lambda.$$

现在假设等号成立，且 Ω 上 $\mathrm{Ric}^M \geq \frac{2}{3}\Lambda\, g$。

则必有

$$|\mathring{B}|^2 = 0 \quad \text{on } \Sigma, \qquad \mathrm{Sc}^M = 2\Lambda \quad \text{along } \Sigma.$$

对高斯方程进行积分

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}H^2 - |\mathring{B}|^2,$$

并利用前一个估计中的等号可得

$$0 = \int_\Sigma \left(\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{2}{3}\Lambda\right) d\mu.$$

由于在 Σ 上 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)\geq \frac{2}{3}\Lambda$，因此可得

$$\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)=\frac{2}{3}\Lambda \quad \text{pointwise on } \Sigma.$$

将 $|\mathring{B}|=0$、$\mathrm{Sc}^M=2\Lambda$ 和 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)=\frac{2}{3}\Lambda$ 代入高斯方程，得到

$$\mathrm{Sc}^\Sigma=\frac{2}{3}\Lambda+\frac{1}{2}H^2=\frac{8\pi}{|\Sigma|}=\frac{2}{r^2},\qquad r:=\sqrt{\frac{|\Sigma|}{4\pi}}.$$

因此，Σ 具有常正标量曲率，并且等距于一个圆球面（根据 Weyl-Nirenberg-Pogorelov 定理 A.2）。由于 Σ 的第二基本形式非负，我们因此可以应用定理 A.7（将度量按 $\tilde{g}:=R^{-2}g$ 缩放，其中 $R=\sqrt{\frac{6}{2\Lambda}}$使得 $\mathrm{Ric}^{\tilde{g}}\geq 2\tilde{g}$）。由此可知，$(\Omega,\bar{g})$ 等距于半球 $\mathbb{S}^3_+\Big(\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}\Big)$，并且 Σ 是半径为 $r=\sqrt{|\Sigma|/(4\pi)}$ 的圆球面。这意味着 $\mathrm{Sc}^M=2\Lambda=6/r^2$，进而$\Lambda=\frac{12\pi}{|\Sigma|}=\frac{3}{r^2}$ 和 $H^2=\frac{16\pi}{|\Sigma|}-\frac{4}{3}\Lambda=0$。□

与欧几里得情形一样，在假设(*i*)的弱稳定性条件下，该结果可推广到高维。

定理 2.10. 设(M,g) 是一个维数为 $n\geq 3$ 、标量曲率$\mathrm{Sc}^M\geq 2\Lambda$ 为常数 $\Lambda\geq 0$的黎曼流形。设 $\Sigma\subset M$ 是一个平均曲率为常数 $H\geq 0$的闭超曲面，且其面积二次变分满足

$$\delta^2_\nu|\Sigma|=\int_\Sigma -(|B|^2+\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu))\,d\mu\geq -\Big(\frac{H^2}{n-1}+\frac{2}{n}\Lambda\Big)|\Sigma|. \tag{29}$$

Then

$$H^2\leq \frac{(n-1)\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu}{(n-2)|\Sigma|}-\frac{2(n-1)}{n}\Lambda. \tag{30}$$

再假设 Σ 可等距嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中，成为一个凸超曲面，且它是一个相对紧域$\Omega\subset M$的边界，并且$\mathrm{Ric}^M\geq\frac{2}{n}\Lambda\, g$在$\Omega$上满足相应条件。若式 *(30)* 中等号成立，则 Σ 是全测地的（$B=0$），与圆球面等距，且Ω与半球 $\mathbb{S}^n_+\Big(\sqrt{|\Sigma|/\omega_{n-1}}\Big)$等距，~~其中 ω_{n-1}~~ 表示$n-1$维圆球面的体积。

证明。 二阶变分的条件化简为

$$\int_\Sigma\Big(|\mathring{B}|^2+\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)-\frac{2}{n}\Lambda\Big)\,d\mu\leq 0. \tag{31}$$

高斯方程为

$$\mathrm{Sc}^\Sigma=\mathrm{Sc}^M-2\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)+\frac{n-2}{n-1}H^2-|\mathring{B}|^2. \tag{32}$$

分离出平均曲率项，在 Σ上积分，并利用（31）式可得:

(33)

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma H^2 d\mu&=\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu-\int_\Sigma \mathrm{Sc}^M d\mu+2\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu)-\frac{2}{n}\Lambda+|\mathring{B}|^2 d\mu-\int_\Sigma|\mathring{B}|^2 d\mu+\frac{4}{n}\Lambda|\Sigma|\\&\leq\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu-2\Lambda|\Sigma|+\frac{4}{n}\Lambda|\Sigma|=\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu-\frac{2(n-2)}{n}\Lambda|\Sigma|\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$ 和（31）式。

现在，若（33）中等号成立，则 $|\mathring{B}|^2 = 0$。$\mathrm{Sc}^M = 2\Lambda$，由（31）可得，

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) - \frac{2}{n}\Lambda d\mu = 0.$$

由于 $\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) \geq \frac{2}{n}\Lambda$ 在 Σ 上，因此可得

$$\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) = \frac{2}{n}\Lambda \quad \text{pointwise on } \Sigma.$$

将这些消失项代回高斯方程可推出

$$\mathrm{Sc}^\Sigma = 2\Lambda - \frac{4}{n}\Lambda + \frac{n-2}{n-1}H^2 = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu.$$

那么 Sc^Σ 是常数。根据 Ros 常标量曲率刚性定理 A.5，欧几里得空间中标量曲率为常数的闭嵌入超曲面只有圆球面。因此，Σ 到 $\mathbb{R}^n$ 的凸等距嵌入是一个圆球面。设 $r = \left(|\Sigma|/\omega_{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ 为其面积半径，则 $\mathrm{Sc}^\Sigma = (n-1)(n-2)\ r^2$。由于 $H \geq 0$ 且 $\mathring{B} = 0$，Σ 的第二基本形式非负，因此我们可以应用定理 A.7（将度量按 $\tilde{g} := R^{-2}g$ 缩放，其中 $R = \sqrt{n(n-1)\ 2\Lambda}$，使得 $\mathrm{Ric}^{\tilde{g}} \geq (n-1)\tilde{g}$。这意味着 $(\Omega\ g)$ 等距于半球 $\mathbb{S}^n_+(r)$，且 Σ 是半径为 r 的圆球面。

由于 $(\Omega\ g)$ 与半径为 r 的 n 维半球严格等距，其环境标量曲率恰为 $\mathrm{Sc}^M = n(n-1)\ r^2$。根据先前的等号条件，我们还得出了 $\mathrm{Sc}^M = 2\Lambda$。将二者相等可得：

$$2\Lambda = \frac{n(n-1)}{r^2} \implies \Lambda = \frac{n(n-1)}{2r^2}.$$

最后，将 Λ 的这个值以及标量曲率 $\mathrm{Sc}^\Sigma = (n-1)(n-2)\ r^2$ 代入 H^2 的表达式，得到 $H = 0$。因此，第二基本形式为零（Σ 为全测地曲面），证明至此完全完成。□

在双曲和球面情形中，选择归一化 $\mathrm{Sc}^M \geq 2\Lambda$，使其符合宇宙学常数为 Λ 的时空所满足的主导能量条件；在时间对称情形中，这正是使所得不等式和刚性结论与带宇宙学常数的霍金能量的正性与刚性相一致的归一化。现在我们转向 STCMC 曲面：下一节将在一般时空背景下介绍相应的稳定性框架，随后几节将建立类似的正性与刚性结果。

3. 类空曲面与 STCMC 曲面的几何

本节将介绍洛伦兹流形中类空曲面的几何框架，并定义本文将全篇研究的时空常平均曲率（STCMC）曲面。我们首先回顾四维时空中类空曲面的零几何，并介绍与之相关的零膨胀。随后，我们定义 STCMC 曲面，并证明它们关于面积泛函具有自然的变分刻画。最后，我们推导与沿类空平均曲率方向变化相应的稳定性算子。

我们的论述遵循研究洛伦兹流形中曲面时所采用的标准框架；例如参见 [23]。

3.1. 类空曲面与零几何。 设 (M, g) 是一个 4 维时空，且 $\Sigma \subset M$ 是一条光滑闭类空曲面。我们将

$$\Phi_\Sigma : \Sigma \hookrightarrow M$$

表示 Σ 到 M 的嵌入，并且通常将 Σ 与其像视为同一对象。

Σ 上的诱导黎曼度量记为 h。在每个点 $p \in \Sigma$ 处，时空的切空间正交分解为 $T_pM = T_p\Sigma \oplus N_p\Sigma$。给定切向量场 $X,\ Y \in T\Sigma,\ \Sigma$ 在 (M, g) 中的第二基本形式定义为

$$\chi(X, Y) := -(\nabla_X Y)^\perp,$$

其中 ∇ 表示 (M, g) 的列维-奇维塔联络。其关于 h 的迹定义了平均曲率向量

$$\vec{H} := \mathrm{tr}_h\, \chi \in N\Sigma.$$

对于法向量场 $n \in N\Sigma$，我们定义沿方向 n 的第二基本形式为

$$\chi_n(X, Y) = \langle \chi(X, Y), n \rangle,$$

及其迹

$$\theta_n = \mathrm{tr}_h\, \chi_n$$

称为 沿 n的膨胀。当 n 为零时， θ_n 称为零膨胀。

法丛 $N\Sigma$ 存在一个由两个指向未来的零向量场$\{\ell, k\}$组成的标架，我们将其归一化为

$$\langle \ell, k \rangle = -2.$$

这种归一化保留了通常的 boost 自由度 $\ell' = f\,\ell$、 $k' = f^{-1}k$，其中f 是 Σ上的任意正函数。相应的零膨胀定义为

$$\theta_\ell := \mathrm{tr}_h\, \chi_\ell, \qquad \theta_k := \mathrm{tr}_h\, \chi_k.$$

与零标架的选择相对应的是法丛联络1-形式

$$s_\ell(X) = -\tfrac{1}{2}\langle k, \nabla_X \ell \rangle, \qquad X \in T\Sigma.$$

Wit关于零标架$\{\ell, k\}$，平均曲率向量可写为 s

$$\vec{H} = \tfrac{1}{2}(\theta_k\, \ell + \theta_\ell\, k),$$

且其平方范数满足

$$\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = -\theta_\ell \theta_k.$$

若我们将范围限制在 $\theta_\ell\theta_k < 0$，则平均曲率向量是类空的，因此可以定义向量场

$$U := \frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{\theta_k}{\theta_\ell}}\, \ell + \sqrt{-\frac{\theta_\ell}{\theta_k}}\, k \right). \tag{34}$$

由于 $\theta_\ell\theta_k < 0$，根号下的量均为正，且 U 定义良好。直接计算可得

$$\langle U, U \rangle = -1, \qquad \langle U, \vec{H} \rangle = 0.$$

因此， U 是一个与时空平均曲率向量正交的单位类时向量场。

从几何上看，切空间 $T\Sigma$ 与类空向量 H 共同张成 TM中的一个三维类空子空间，而 U是与该子空间正交的唯一未来指向的单位类时法向量。此外， U 在 boost 变换下保持不变，因此它定义了与 Σ相关联的典范观察者场。

3.2. **时空常平均曲率曲面**。

定义 3.1（STCMC 曲面）。 类空曲面 Σ 称为时空常平均曲率曲面，如果

$$\theta_\ell \theta_k = \text{const.}$$

这些曲面称为*STCMC* 曲面 （时空常平均曲率曲面），因为它们是黎曼几何中常平均曲率（CMC）曲面的自然洛伦兹类比。

在时空分解为 $M \times \mathbb{R}$ 且切片 M 全测地的时间对称情形下，有 $\theta_\ell = \theta_k = H$，而 STCMC 条件则退化为经典的常平均曲率条件。

STCMC 条件可以通过平均曲率向量得到自然的几何解释。由于

$$\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = -\theta_\ell \theta_k,$$

这等价于要求平均曲率向量的长度沿着 Σ保持不变。特别是，当 $\theta_\ell \theta_k \le 0$ 时，平均曲率向量为类空且其范数为常数。

这些曲面自然地出现在数学相对论中，并已在近期的一些研究中得到探讨。例如，参见 [6, 17, 25, 37, 38, 39]。这些研究还考察了若干由此类曲面构成的几何构造和叶状结构。

STCMC 曲面具有简单的变分解释。考虑 Σ的法向变分，其形式为 $v = \alpha \vec{H}$，其中 $\alpha \in C^\infty(\Sigma)$。

沿此方向的面积泛函一阶变分为

$$\delta_{\alpha\vec{H}} |\Sigma| = -\int_\Sigma \langle \vec{H}, \alpha \vec{H} \rangle d\mu = \int_\Sigma \alpha\, \theta_\ell \theta_k \, d\mu.$$

施加约束

$$\int_\Sigma \alpha \, d\mu = 0,$$

我们看到， Σ 是面积泛函在此类变分下的临界点，当且仅当$\theta_\ell \theta_k$ 为常数。因此，STCMC 曲面恰好是面积泛函在平均曲率的类空方向上进行无穷小保体积变分时的临界点；这正是经典常平均曲率曲面变分刻画的洛伦兹类比。

3.3. **面积二次变分**。 为了研究 STCMC 曲面的稳定性，我们需要计算面积泛函在此类变分下的二阶变分。为此，我们回顾零膨胀的变分公式。

设 ξ 是沿 Σ的法向变分向量场， φ_τ 表示相应流，其变形曲面为 $\Sigma_\tau = \varphi_\tau(\Sigma)$。选取沿 Σ_τ 的一族相应零法向量 ℓ_τ，我们将零膨胀 θ_ℓ的一阶变分定义为 $\delta_\xi \theta_\ell = \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau^*(\theta_{\ell_\tau})\big|_{\tau=0}$。我们将沿零标架的变分场分解为 $\xi|_\Sigma = \alpha\, \ell - \frac{\psi}{2}\, k$，其中 α， $\underline{\psi} \in C^\infty(\overline{\Sigma})$。

θ_ℓ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta_\xi\theta_\ell =& -\Delta_h\psi + 2\,s_\ell\cdot\nabla_h\psi + \psi\Big(\operatorname{div}_h s_\ell - \|s_\ell\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\theta_\ell\theta_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma - \tfrac{1}{2}\mathrm{Ein}(\ell,k)\Big)\\ &-\alpha\Big(\mathrm{Ein}(\ell,\ell) + \|\chi_\ell\|_h^2\Big) + \kappa_\xi\,\theta_\ell,\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\kappa_\xi := -\frac{1}{2}\langle k,\ \nabla_\xi \ell_{(\xi)}\rangle$。交换 ℓ 和 k 的角色，θ_k 沿 $\xi = \alpha k - \frac{\psi}{2}\ell$ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta_\xi\theta_k =& -\Delta_h\psi - 2\,s_\ell\cdot\nabla_h\psi + \psi\Big(-\operatorname{div}_h s_\ell - \|s_\ell\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\theta_\ell\theta_k + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma - \tfrac{1}{2}\mathrm{Ein}(\ell,k)\Big)\\ &-\alpha\Big(\mathrm{Ein}(k,k) + \|\chi_k\|_h^2\Big) - \kappa_\xi\,\theta_k.\end{aligned} \tag{36}$$

利用上述变分公式，可以得到沿类空平均曲率方向的面积泛函二阶变分。对于形如 $v=\alpha H$ 的变分，直接计算可得

$$\begin{aligned}\delta^2_{\alpha\vec{H}}|\Sigma| =& \int_\Sigma \alpha\Big[\theta_k\,\Delta_h(\alpha\theta_\ell) + \theta_\ell\,\Delta_h(\alpha\theta_k) - 2\theta_k s_\ell(\nabla^h(\alpha\theta_\ell)) + 2\theta_\ell s_\ell(\nabla^h(\alpha\theta_k))\\ &-\frac{\alpha\theta_k^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(\ell,\ell) + \|\chi_\ell\|_h^2\Big) - \frac{\alpha\theta_\ell^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(k,k) + \|\chi_k\|_h^2\Big)\\ &+2\alpha\theta_\ell\theta_k\Big(\|s_\ell\|_h^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma + \tfrac{1}{2}\mathrm{Ein}(\ell,k)\Big)\Big]d\mu\\ =& \int_\Sigma \alpha\,\mathcal{L}\alpha\,d\mu,\end{aligned} \tag{37}$$

通过分部积分，二阶变分公式可写成如下形式

$$\delta^2_{\alpha\vec{H}}|\Sigma| = \int_\Sigma \Big(-2\theta_\ell\theta_k\,|\nabla^h\alpha|^2 + W\,\alpha^2\Big)\,d\mu, \tag{38}$$

其中

$$\begin{aligned}W =& \theta_k\Delta_h\theta_\ell + \theta_\ell\Delta_h\theta_k - 2\theta_k s_\ell(\nabla^h\theta_\ell) + 2\theta_\ell s_\ell(\nabla^h\theta_k) - \frac{\theta_k^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(\ell,\ell) + \|\chi_\ell\|^2\Big)\\ &-\frac{\theta_\ell^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(k,k) + \|\chi_k\|^2\Big) + 2\theta_\ell\theta_k\Big(\|s_\ell\|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Sc}^\Sigma + \frac{1}{2}\mathrm{Ein}(\ell,k)\Big).\end{aligned} \tag{39}$$

在满足 Σ 且 $\theta_\ell\theta_k\neq 0$ 的 STCMC 曲面上，势函数可以表示为更具几何意义的形式。由于 $\theta_\ell\theta_k$ 为常数，对 $\log|\theta_\ell\theta_k|$ 取梯度可得

$$\frac{\nabla^h\theta_k}{\theta_k} = \nabla^h\log|\theta_k| = -\nabla^h\log|\theta_\ell| = -\frac{\nabla^h\theta_\ell}{\theta_\ell}. \tag{40}$$

此外，

$$\frac{\Delta_h\theta_\ell}{\theta_\ell} = \Delta_h\log|\theta_\ell| + \|\nabla^h\log|\theta_\ell|\|_h^2, \qquad \frac{\Delta_h\theta_k}{\theta_k} = \Delta_h\log|\theta_k| + \|\nabla^h\log|\theta_k|\|_h^2. \tag{41}$$

提出常数乘积 $\theta_\ell\theta_k$，并利用（40）和（41），我们得到

$$W = \theta_\ell\theta_k\left[2\|\nabla^h\log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 - \mathrm{Sc}^\Sigma + 2\,\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\chi_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\chi_k\|_h^2\right]. \tag{42}$$

这里我们利用了爱因斯坦张量项可以用（34）中定义的典范类时向量场 U 表示，因为

$$2\,\mathrm{Ein}(U,U) = \mathrm{Ein}(\ell,k) - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\mathrm{Ein}(\ell,\ell) - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\mathrm{Ein}(k,k). \tag{43}$$

因此，稳定性算子具有如下形式

$$\mathcal{L} = \theta_\ell\theta_k(2\Delta_h + V). \tag{44}$$

其中

$$V = 2\|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 - \mathrm{Sc}^\Sigma + 2\,\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\chi_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\chi_k\|_h^2.$$

特别地，面积泛函的二阶变分可写为

$$\delta^2_{\alpha\vec{H}}|\Sigma| = \int_\Sigma \alpha\,\mathcal{L}\alpha\,d\mu,$$

对于满足 $\theta_\ell\theta_k \neq 0$ 的曲面 Σ 。由于 $\mathcal{L}$ 是二阶椭圆算子，且 Σ 是紧的，其谱是离散的。这种变分结构自然引出了 STCMC 曲面稳定性的概念。

3.4. STCMC 曲面的稳定性。 受算子 $\mathcal{L}$相关二次型的启发，我们引入以下稳定性概念。与经典常平均曲率曲面理论一样，稳定性通过要求在对变分函数 α施加适当约束时，面积的二阶变分非负来定义。

定义 3.2 （STCMC 曲面的稳定性）。 设 Σ 是一个类空 STCMC 曲面。

(i**)** 若对所有满足以下条件的 $\alpha \in C^\infty(\Sigma)$，我们称 Σ 是变分稳定的

$$\int_\Sigma \alpha\,d\mu = 0,$$

$\vec{}$沿方向 αH 的面积二次变分满足

$$\delta^2_{\alpha\vec{H}}|\Sigma| \geq \frac{16\pi}{|\Sigma|}\,|\vec{H}|^2 \int_\Sigma \alpha^2\,d\mu.$$

(ii**)**若平均曲率向量方向上的二阶变分满足以下条件，我们称 Σ 是常数模稳定的

$$\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| \geq 0.$$

在 $\theta_\ell\theta_k \neq 0$ 的情形下，$\mathcal{L}$ 在 $L^2(\Sigma)$ 上的谱是离散的，变分稳定性可解释为限制在零均值子空间上的二次型的谱下界

$$\mathcal{H}_0 = \left\{\alpha \in C^\infty(\Sigma) : \int_\Sigma \alpha\,d\mu = 0\right\}.$$

更准确地说，

$$\inf_{\alpha\in\mathcal{H}_0\setminus\{0\}} \frac{\int_\Sigma \alpha\,\mathcal{L}\alpha\,d\mu}{\int_\Sigma \alpha^2\,d\mu} \geq \frac{16\pi}{|\Sigma|}\,|\vec{H}|^2.$$

变分稳定性和常数模稳定性控制着$\mathcal{L}$谱的不同部分：变分稳定性为零均值子空间$\mathcal{H}_0$，上的二次型提供下界，而常数模稳定性则检验常值模态 $\alpha \equiv 1$。一般而言，这两个条件彼此独立。

然而，在球面情形下，常平均曲率与 STCMC 的情形之间出现了一个重要差异。对于常平均曲率曲面，变分稳定性通常并不能控制

常值模态。相比之下，对于拓扑上为球面的 STCMC 曲面，变分稳定性不等式的尖锐形式确实蕴含常数模稳定性。

引理 3.3。 设 Σ 是一个 4 维洛伦兹流形中的光滑 *STCMC* 曲面，并假设 Σ 拓扑上为球面。若 Σ 是变分稳定的，则它是常数模稳定的。

证明。 若 $\theta_\ell\theta_k = 0$，则变分稳定性不等式立即化为常数模稳定性。因此，我们可假设 $\theta_\ell\theta_k < 0$。由于 Σ 拓扑上为球面，根据一致化定理，它与 $\mathbb{S}^2$ 共形等价。此外，由 Hersch 引理 [15]（亦见 [18]），存在一个共形映射

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

使得

$$\int_\Sigma \varphi_i \, d\mu = 0 \qquad \text{for } i = 1, 2, 3.$$

因此，每个 φ_i 都是稳定性不等式中的可容许测试函数。对于每个 i,

$$\int_\Sigma \varphi_i \mathcal{L}\varphi_i \, d\mu \geq \frac{16\pi}{|\Sigma|} |\vec{H}|^2 \int_\Sigma \varphi_i^2 \, d\mu.$$

记 $\mathcal{L} = \theta_\ell\theta_k(2\Delta_h + V)$，再除以 $-\theta_\ell\theta_k = |\vec{H}|^2 > 0$，得到

$$\int_\Sigma \left(-2\varphi_i \Delta_h \varphi_i - V\varphi_i^2\right) d\mu \geq \frac{16\pi}{|\Sigma|} \int_\Sigma \varphi_i^2 \, d\mu.$$

对 $i = 1$，2，3 求和，并利用

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^3 \int_\Sigma |\nabla \varphi_i|^2 \, d\mu = 8\pi,$$

我们得到

$$16\pi - \int_\Sigma V \, d\mu \geq 16\pi.$$

因此 $\int_\Sigma V \, d\mu \leq 0$。由于

$$\delta^2_{\vec{H}} |\Sigma| = \int_\Sigma 1 \cdot \mathcal{L}(1) \, d\mu = \theta_\ell\theta_k \int_\Sigma V \, d\mu,$$

可得

$$\delta^2_{\vec{H}} |\Sigma| \geq 0.$$

因此 Σ 是常数模稳定的。 □

注 3.4（圆球面上的模型算子）。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是一个圆球面。则 H和 Sc^Σ 为常数，且式（44）中出现的算子 $\mathcal{L}$ 化简为

$$\mathcal{L} = -2H^2\Delta_h + H^2\mathrm{Sc}^\Sigma - \frac{1}{2}H^4 = H^2\Big(- 2\Delta_h + \mathrm{Sc}^\Sigma - \frac{1}{2}H^2\Big).$$

由于对于圆球面 $\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{1}{2}H^2$，我们得到进一步的简化

$$\mathcal{L} = -2H^2\Delta_h.$$

由于半径为r的圆球面上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的第一个非零特征值为 $\lambda_1(-\Delta_h) = \frac{2}{r^2}$，且 $H = \frac{2}{r}$，我们得到

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = 2H^2\lambda_1(-\Delta_h) = 2\left(\frac{4}{r^2}\right)\frac{2}{r^2} = \frac{16}{r^4}.$$

回想起 $|\Sigma| = 4\pi r^2$ 和$|\vec{H}|^2 = H^2 = \frac{4}{r^2}$，我们计算得

$$\frac{16\pi}{|\Sigma|}\,|\vec{H}|^2 = \frac{16\pi}{4\pi r^2}\cdot\frac{4}{r^2} = \frac{16}{r^4}.$$

因此，圆球面在定义 3.2 中取等号。特别地，常数 16π是最佳的。

作为比较，控制 $\mathbb{R}^3$ 中常平均曲率曲面的体积保持稳定性的经典雅可比算子为

$$L_{\mathrm{Jac}} = -\Delta_h - |B|^2,$$

而在圆球面 $|B|^2 = \frac{1}{2}H^2$上。因此，在圆球面上，

$$-2\Delta_h = 2L_{\mathrm{Jac}} + H^2, \qquad \text{and hence} \qquad \mathcal{L} = H^2(2L_{\mathrm{Jac}} + H^2).$$

特别地，时空常平均曲率稳定算子是经典常平均曲率雅可比算子的常数倍平移（差一个前置因子 H^2）。前面的特征值计算表明，定义 3.2 中的稳定性不等式是尖锐的，且常数 $\frac{16\pi}{|\Sigma|}\,|\vec{H}|^2$ 恰由圆球面精确确定。

最后，我们注意到圆球面也具有常数模稳定性。事实上，由于 $\mathcal{L} = -2H^2\Delta_h$，且拉普拉斯-贝尔特拉米算子作用于常数时为零，因此我们有

$$\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| = \int_\Sigma 1\,\mathcal{L}(1)\,d\mu = 0.$$

因此，圆球面也使常数模稳定性不等式取等号。特别地，定义 3.2 中的两个稳定性不等式都是尖锐的。

注 3.5（情形 $\theta_\ell\theta_k = 0$）。在这种情况下，二阶变分公式大大简化：梯度项消失，二阶变分化简为 $\delta^2_{\alpha\vec{H}}|\Sigma| = \int_\Sigma W\,\alpha^2\,d\mu$，其中

$$W = -\frac{\theta_k^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(\ell,\ell) + \|\chi_\ell\|_h^2\Big) - \frac{\theta_\ell^2}{2}\Big(\mathrm{Ein}(k,k) + \|\chi_k\|_h^2\Big).$$

如果环境时空满足零能量条件，那么 $\mathrm{Ein}(\ell,\ell) \geq 0$，$\mathrm{Ein}(k,k) \geq 0$，因此 $W \leq 0$ 在 Σ上。因此，如果这样的曲面是常模态稳定或变分稳定的，那么必有 $W \equiv 0$。特别地，

- 如果 $\theta_\ell = 0$（Σ 是边际外陷俘曲面），那么 $\chi_\ell = 0$ 且 $\mathrm{Ein}(\ell,\ell) = 0$，因此 Σ 是一个出射非膨胀视界截面。
- 如果 $\theta_k = 0$，那么 $\chi_k = 0$ 且 $\mathrm{Ein}(k,k) = 0$，Σ 是一个入射非膨胀视界截面。

最后，[1]中提出了其他关于类空曲面稳定性的概念。受边际外陷俘曲面（MOTS）稳定性理论的启发，作者引入了一种基于 $|\vec{H}|^2 = -\theta_\ell\theta_k$ 沿适当方向一阶变分的稳定性条件。在这一假设下，他们得到了积分 $\int_\Sigma \theta_\ell\theta_k\,d\mu.$ 的界。这里引入的稳定性概念则是根据面积泛函在时空平均曲率方向上的二阶变分来表述的，并且可以视为黎曼几何中经典常平均曲率稳定性条件的自然洛伦兹类比。

4. 稳定 STCMC 曲面的曲率不等式与刚性

本节中，我们建立稳定时空常平均曲率曲面的一个尖锐曲率不等式，并分析刚性情形。该不等式可视为黎曼几何中稳定常平均曲率曲面的经典Christodoulou-Yau估计的洛伦兹类比。

证明结合了上一节推导的稳定性不等式与主导能量条件。在刚性情形下，我们利用 Kijowski-Liu-Yau 准局部能量的正性与刚性性质，以及关于极大整体双曲发展的结构性结果。

本节始终假设时空 $(M,\ g)$ 满足主导能量条件 (DEC)，即

$$\mathrm{Ein}(X,Y)\geq 0$$

对所有未来指向的因果向量 $X,\ Y$均成立。

我们的论证中关于刚性的部分也用到了 Kijowski-Liu-Yau 准局部能量的刚性性质。对于具有正高斯曲率且平均曲率向量为类空的曲面 Σ，该能量定义为

$$\mathcal{E}_{KLY}(\Sigma)=\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma}\left(H_0-\sqrt{-\theta_\ell\theta_k}\right)d\mu,$$

其中，H_0 是将 Σ 等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$所得的平均曲率。我们将使用 Liu-Yau 对应的刚性定理（定理 A.8），以及闵可夫斯基时空中更强的刚性结论（定理 A.9）；这两个结果均在附录中回顾。

在时间对称情形 $K=0$ 下，Kijowski-Liu-Yau 能量退化为 Brown-York 质量（见定理 A.1）。

为了将诱导初始数据的刚性推广到环境时空区域的刚性，我们还将使用极大整体双曲发展。

4.1. **极大整体双曲发展**。 设 $(M,\ g)$ 是一个时空，且 $\Omega\subset M$ 是一个类空超曲面。Ω 在 M 中的诱导黎曼度量 $g|_\Omega$ 与第二基本形式 K 共同构成一个初始数据集 $(\Omega\ g|_\Omega,\ K)$。

更一般地，给定一个初始数据集（$\Omega\ g,\ K$），该数据的一个发展 由一个时空（$\mathcal{M}$，g）以及一个嵌入构成

$$\iota:\Omega\hookrightarrow\mathcal{M}$$

使得 $\iota(\Omega)$ 是（$\mathcal{M}$，g）中的一个类空超曲面，其诱导度量和第二基本形式分别与 g 和 K 一致。若 $\iota(\Omega)$ 是（$\mathcal{M}$，g）的柯西超曲面，则称该发展为整体双曲。

Choquet-Bruhat-Geroch 定理保证，对于每个满足爱因斯坦约束方程的真空初始数据集 $(\Omega\ g,\ K)$，都存在一个唯一的（在等距变换意义下）极大整体双曲发展。这个时空在给定初始数据的所有整体双曲发展中是极大的，并且完全由 Ω 上的数据 $(g,\ K)$ 决定（例如参见 [9]）。

特别地，如果 Ω 包含于时空 (M,g) 的某个全局双曲区域中，那么极大整体双曲发展与依赖域 $D(\Omega)\subset M$ 重合。

有了这些准备，我们可以陈述稳定 STCMC 曲面的主要曲率不等式及其相关的刚性结论。

我们为时空常平均曲率曲面建立了一个锐利的曲率不等式，并分析其等号情形。第一个刚性定理假设沿着 Σ 的零截面曲率 $\mathrm{Rm}^M(k,\ \ell,\ \ell,\ k)$ 满足一个附加的符号条件。

定理 4.1. 设 (M, g) 是一个满足主导能量条件的4维洛伦兹流形。设 Σ 是一个具有 $\theta_\ell\theta_k \le 0$ 的闭类空 *STCMC*曲面，且满足以下条件之一：

(i) Σ *is constant-mode stable (*$\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| \ge 0$*), or*

(ii) Σ 拓扑上为球面，并且按照定义 *3.2* 的意义是变分稳定的。

Then

$$-\theta_\ell\theta_k \le \frac{16\pi}{|\Sigma|}. \tag{45}$$

若式 *(45)* 中等号成立，且 $\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k)$ 沿着 Σ 不变号，则 Σ 与圆球面等距，且任意边界为 $\partial\Omega = \Sigma$的紧致类空超曲面 $\Omega \subset M$ 都可等距嵌入闵可夫斯基时空，成为一个类空超曲面。此外，由 Ω 上的诱导初始数据所产生的极大整体双曲发展，与闵可夫斯基时空中的一个标准因果菱形等距。

证明。首先注意，若 $\theta_\ell\theta_k = 0$，则（45）显然成立。因此，我们可以假设$\theta_\ell\theta_k < 0$。此外，根据引理 3.3，若 Σ 拓扑上为球面且变分稳定，则 Σ 常数模稳定。因此，只需在假设（i）下证明该定理。

我们使用稳定性算子 $\mathcal{L} = \theta_\ell\theta_k(2\Delta_h + V)$ 的几何表述，其中 V由下式给出

$$V = 2\|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 - \mathrm{Sc}^\Sigma + 2\,\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\chi_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\chi_k\|_h^2. \tag{46}$$

代入平方第二基本形式的正交分解，$\|\chi\|_h^2 = \frac{1}{2}\theta^2 + \|\mathring{\chi}\|_h^2$，即可提取时空常平均曲率常数：

$$-\frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\chi_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\chi_k\|_h^2 = -\frac{1}{2}\theta_\ell\theta_k - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\mathring{\chi}_k\|_h^2. \tag{47}$$

因此，

$$V = 2\|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 - \mathrm{Sc}^\Sigma + 2\,\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{1}{2}\theta_\ell\theta_k - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\mathring{\chi}_k\|_h^2. \tag{48}$$

假设 Σ常数模稳定。那么

$$0 \le \delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| = \int_\Sigma 1\cdot\mathcal{L}(1)\,d\mu = \theta_\ell\theta_k\int_\Sigma V\,d\mu,$$

除以 $\theta_\ell\theta_k$，代入（48）并整理可得

$$-\frac{1}{2}\int_\Sigma \theta_\ell\theta_k d\mu \le \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu - \int_\Sigma\left(2\|\nabla^h\log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 + 2\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\mathring{\chi}_k\|_h^2\right)d\mu.$$

由于 θ_ℓ 和 θ_k 符号相反，因此比值 $-\theta_k/\theta_\ell$ 和 $-\theta_\ell/\theta_k$ 严格为正。此外，由于 U是类时向量，主导能量条件保证 $\mathrm{Ein}(U,U) \ge 0$。因此，被减去的积分中的每一项都非负。应用高斯-博内界 $\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu \le 8\pi$，我们得到 $-\frac{1}{2}\int_\Sigma \theta_\ell\theta_k\,d\mu \le 8\pi$，由此推出 (45)。

若 $-\theta_\ell\theta_k = \frac{16\pi}{|\Sigma|}$，则上述论证的每一步都必须取等号。特别是，$\int_\Sigma V d\mu = 0$，这意味着

$$\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma \, d\mu = 8\pi,$$

那么 Σ 在拓扑上为球面，并且

$$\mathrm{Ein}(U,U) = 0, \quad \|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 = 0, \quad \|\mathring{\chi}_k\|_h^2 = 0, \quad \|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 = 0 \tag{49}$$

沿着 Σ。由于 U 是一个严格类时向量，$\mathrm{Ein}(U, U)$ 的消失结合主导能量条件意味着 $\mathrm{Ein} = 0$ 沿着 Σ 处处成立（相关证明见 [10, 引理 B1]）。对爱因斯坦张量取迹可得 $\mathrm{Sc}^M = 0$ 和 $\mathrm{Ric}^M = 0$ 在 Σ上。

由于对于 STCMC 曲面 $\nabla^h \log|\theta_\ell| = -\nabla^h \log|\theta_k|$，因此我们也有 $s_\ell = \nabla^h \log|\theta_\ell| = -\nabla^h \log|\theta_k|$。注意，乘积 $\theta_\ell\theta_k$ 是 boost 不变的，因此通过选取 boost $q := -\log|\theta_\ell|$，我们得到

$$\ell' = e^q \ell, \quad k' = e^{-q} k, \quad s_{\ell'} = s_\ell + \nabla^h q = 0, \quad \theta_{\ell'} = e^q \theta_\ell = \pm 1.$$

在这个 boost 后的标架中，我们有 $s_{\ell'} = 0$，并且 $\theta_{k'}$ 也是常数。

回顾四维洛伦兹流形中曲面的高斯方程（例如，文献中可见此公式，参见 [2, 方程（9）]）：

$$\mathrm{Sc}^M + 2\mathrm{Ric}^M(k,\ell) - \frac{1}{2}\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k) = \mathrm{Sc}^\Sigma + \frac{1}{2}\theta_\ell\theta_k + \|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 + \|\mathring{\chi}_k\|_h^2. \tag{50}$$

应用我们的消失约束后，可化简为

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k) = \mathrm{Sc}^\Sigma + \frac{1}{2}\theta_\ell\theta_k. \tag{51}$$

在 Σ 上对该恒等式积分，并回想起 $\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma \, d\mu = 8\pi$（因为 Σ 是一个球面）以及 $-\frac{1}{2}\int_\Sigma \theta_\ell\theta_k \, d\mu = 8\pi$，我们得到

$$-\int_\Sigma \frac{1}{2}\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k)\, d\mu = \int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma \, d\mu + \frac{1}{2}\int_\Sigma \theta_\ell\theta_k \, d\mu = 8\pi - 8\pi = 0. \tag{52}$$

由于 $\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k)$ 沿 Σ 不变号，因此 $\mathrm{Rm}^M(k,\ell,\ell,k)$ 在 Σ 上逐点 $= 0$。

因此，高斯方程进一步化简为 $\mathrm{Sc}^\Sigma = -\frac{1}{2}\theta_\ell\theta_k$，这意味着 Sc^Σ 是一个正的常数。由于 Σ 是一个具有正常标量曲率的拓扑球面，因此它具有常高斯曲率，故等距于欧几里得空间中半径为 r 的圆球面，特别地，$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{2}{r^2}$。对于到 $\mathbb{R}^3$ 的等距嵌入，其平均曲率为 $H_0 = \frac{2}{r}$。此外，由于 $-\theta_\ell\theta_k = |\vec{H}|^2 = \frac{4}{r^2}$，我们得到

$$H_0 = \sqrt{-\theta_\ell\theta_k}.$$

因此，Σ 的 Kijowski-Liu-Yau 能量为零，$\mathcal{E}_{KLY}(\Sigma) = 0$.

令 $\Omega \subset M$ 为任意一个边界为 $\partial\Omega = \Sigma$的紧致类空超曲面区域，并令 $(\Omega, g_\Omega, K_\Omega)$ 表示其诱导的初始数据。由于 (M, g) 满足主导能量条件，$(\Omega, g_\Omega, K_\Omega)$ 也满足该条件。根据定理 A.8，若 $\mathcal{E}_{KLY}(\Sigma)$ 消失，则时空在填充区域 Ω 上是平坦的。此外，初始数据 $(\Omega, g_\Omega, K_\Omega)$ 可等距嵌入闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{3,1}$，成为定义在某个区域上的紧致类空图 $\tilde{\Omega}$，其边界为 $\tilde{\Sigma}$。论证的其余部分将在这个闵可夫斯基环境空间中进行。由于 $\tilde{\Sigma}$ 在 $\mathbb{R}^{3,1}$中张成紧致类空超曲面 $\tilde{\Omega}$，具有正高斯曲率，

且其平均曲率向量为类空，我们可以应用定理 A.9 [26]。由于$\mathcal{E}_{KLY}(\tilde{\Sigma}) = 0$，该定理指出 $\tilde{\Sigma}$ 完全位于 $\mathbb{R}^{3,1}$中的某个平坦空间超平面上。˜由于 Σ 在内蕴意义下是位于超平面中的圆球面，它围成同一超平面内一个全测地的˜平坦欧几里得球 $B = B_r$ 。关键在于，由于 Ω 是定义在欧几里得球 $B = B_r$上的类空图 $t = f(x)$，且满足 $f|_{\partial B} = 0$，因此有 $|\nabla f| < 1$，从而 f是 1-Lipschitz 的。由于闵可夫斯基时空中一个球的依赖域由下式给出

$$D(B) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{3,1} : \ |t| + |x| \leq r\},$$

估计 $|f(x)| \leq \text{dist}(x, \partial B) = r - |x|$保证了对每个 $x \in B$,˜，都有 $(f(x)\ x) \in D(B)$，因此 $\Omega \subset D(B)$。

此外，我们可以通过定义函数 $\Phi(s) = t(s) - f(x(s))$，追踪 $D(B)$ 中任意一条未来指向因果曲线 $\gamma(s) = (t(s)\ x(s))$。由于 γ 是因果的（$t'(s) \geq |x'(s)|$），且 Ω 是严格类空的（$|\nabla f| < 1$），对 Φ 求导可得 $\Phi'(s) = t'(s) - \nabla f(x(s)) \cdot x'(s) \geq t'(s) - |\nabla f||x'(s)| > 0$。因此，$\Phi(s)$ 严格递增。$D(B)$ 中任何一条不可延拓的因果曲线都必须起始于过去边界（此处 $\Phi \leq 0$），并终止于未来边界（此处 $\Phi \geq 0$）。由连续性和严格单调性可知，$\Phi(s)$ 恰好在一点处等于零，这意味着˜每条这样的曲线都恰好与 Ω 相交一次。因此，它们的依赖域严格重合：˜$D(\Omega) = D(B)$。

˜最后，由于 Ω 上的初始数据与 Ω 上的数据等距，根据 Choquet-Bruhat-Geroch 关于极大整体双曲柯西发展的唯一性定理，M 中 Ω 的依赖域必与 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中的 $D(\tilde{\Omega})$ 等距。由于 ˜$D(\Omega) = D(B)$，我们原始填充 Ω 的极大整体双曲发展恰好与平坦球 B 的依赖域等距，而后者是闵可夫斯基时空中的标准因果菱形。□

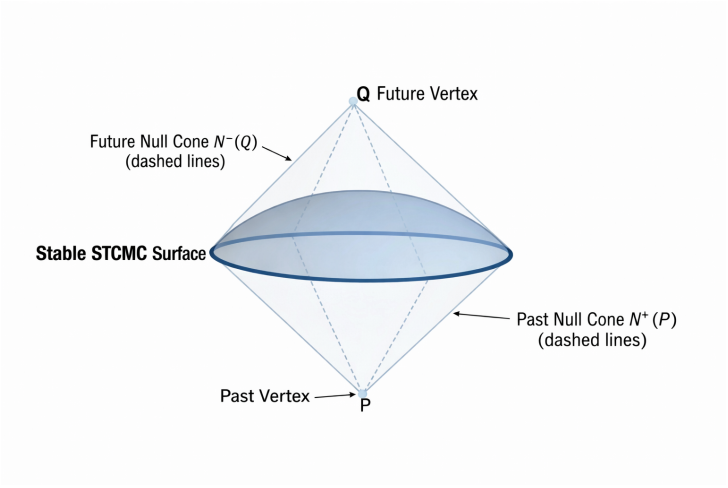


图 1. 闵可夫斯基时空中因果菱形 $D(\Omega)$ 的示意图。曲面 Σ 是菱形的边缘，阴影区域是一个类空填充。

注 4.2。 定理 4.1 中的刚性结论，是针对 Ω 上诱导的初始数据的极大全局双曲发展来表述的，而不是直接针对环境时空 M。这样可以避免 Ω 在 M 的因果未来或因果过去中可能存在的障碍，例如孔洞或其他因果病态；这些问题可能会阻止相应的闵可夫斯基因果菱形在 M 内实现。不过，如果 Ω 包含于 的一个

全局双曲区域中，那么极大全局双曲发展就与 $D(\Omega) \subset M$ 的依赖域一致。在这种情况下，标准的闵可夫斯基因果菱形可以直接在环境时空内部实现。

注 4.3（亏损的解释）。 对于满足定理 4.1 假设的时空常平均曲率曲面 Σ，定义尺度不变亏损

$$\mathcal{D}(\Sigma) := \frac{16\pi}{|\Sigma|} - |\vec{H}|^2 \geq 0.$$

定理 4.1 的证明给出

$$\mathcal{D}(\Sigma) \geq \frac{4}{|\Sigma|}\int_\Sigma \mathrm{Ein}(U,U)\,d\mu + \frac{2}{|\Sigma|}\int_\Sigma \left[-\frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\mathring{\chi}_k\|_h^2\right] d\mu + \frac{4}{|\Sigma|}\int_\Sigma \|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2\,d\mu.$$

若 Σ 拓扑上为球面，则这是一个精确界。

这一分解揭示了亏损的三个不同来源：

（1）**能量密度项**。 在主导能量条件下，量 $\mathrm{Ein}(U,U)$ 非负。根据爱因斯坦方程，它可以解释为典范观测者 U测得的局部物质能量密度。（2）**非全脐性（剪切）**。 无迹零第二基本形式 $\mathring{\chi}_\ell$ 和$\mathring{\chi}_k$ 度量曲面偏离全脐的程度。它们非零意味着曲面偏离圆球面。（3）**法丛扭转与最优标架**。 1-形式 s_ℓ 编码了所选零标架的扭转。项 $\|\nabla^h \log\,|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2$ 是规范不变量，度量标架未能与 STCMC 条件最优适配的程度。该项消失时，可以 boost 到一个满足 $s_{\ell'} = 0$ 且零膨胀为常数的标架。

该分解阐明了定理 4.1 中的刚性机制：亏损的消失迫使物质项和所有几何缺陷项均消失，从而迫使该曲面为全脐，且具有最优对齐的法标架。

注 4.4. 注意，在假设（i）下，不等式 $-\theta_\ell\theta_k \leq 16\pi/|\Sigma|$，的证明经过稍作修改后，在高维情形中同样成立。设 M 为一个满足主导能量条件的n维洛伦兹流形， Σ 为一个 $n-2$ 维闭子流形，假设 Σ 是一个满足 $\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| \geq 0$的时空常平均曲率曲面，则

$$-\theta_\ell\theta_k \leq \frac{n-2}{n-3}\frac{\int_\Sigma \mathrm{Sc}^\Sigma d\mu}{|\Sigma|} \tag{53}$$

这尤其意味着，高维霍金能量

$$\mathcal{E}_n(\Sigma) = \frac{1}{2(n-2)(n-3)\omega_{n-2}}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}}\int_\Sigma \left(\mathrm{Sc}^\Sigma + \frac{n-3}{n-2}\theta_\ell\theta_k\right) d\mu \tag{54}$$

为非负。这里 ω_{n-2}表示欧几里得空间中 $n-2$ 维圆球面的体积。

我们还有另一个刚性结果。

定理 4.5。设(M, g) 是一个满足主导能量条件的4维洛伦兹流形。设 Σ 是一个变分稳定类空*STCMC*球面，且具有 $\theta_\ell\theta_k \leq 0$，并假设以下条件之一成立：

(i) Σ 具有偶对称性，也就是说，存在一个无不动点等距变换 $\rho:\ \Sigma \to \Sigma$ ，使得$\rho^2 = id$。

(ii) 高斯曲率 K_Σ 充分地以 C^0范数接近 $\frac{4\pi}{|\Sigma|}$ ，也就是说，存在常数$0 < \delta_0 \ll 1$ 使得 $\|K_\Sigma - \frac{4\pi}{|\Sigma|}\|_{C^0} < \delta_0$。

If

$$-\theta_\ell\theta_k = \frac{16\pi}{|\Sigma|},$$

则 Σ 等距于一个圆球面，且任何边界为 ∂的紧致类空超曲面 $\Omega \subset M$ 都能等距嵌入闵可夫斯基时空。进一步说，诱导在Ω上的初始数据的极大整体双曲发展等距于闵可夫斯基时空中的标准因果菱形。

证明。 我们遵循 Sun [35], 基于 El Soufi-Ilias 定理 A.10 的论证。由定理 4.1 中的等号情形分析可得

$$\mathrm{Ein} = \mathrm{Ric}^M = 0, \quad \|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 = \|\mathring{\chi}_k\|_h^2 = 0, \quad \text{and} \quad s_\ell = 0$$

在 Σ上。

在此情形下，稳定性算子化简为

$$\mathcal{L} = 2\theta_\ell\theta_k\Delta_h - \theta_\ell\theta_k\mathrm{Sc}^\Sigma - \frac{1}{2}\theta_\ell^2\theta_k^2. \tag{55}$$

定义缩放算子

$$\hat{\mathcal{L}} := -\frac{1}{2\theta_\ell\theta_k}\mathcal{L} = -\Delta_h + \frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2} + \frac{1}{4}\theta_\ell\theta_k. \tag{56}$$

该算子具有如下形式： $-\Delta_h + q$ ，其中 $q = \frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2} + \frac{1}{4}\theta_\ell\theta_k$。随后，我们可以利用 El Soufi–Ilias 的定理 A.10 来估计第二特征值，得到

$$\lambda_2(\hat{\mathcal{L}})\,|\Sigma| \le 8\pi + \int_\Sigma q\,d\mu. \tag{57}$$

等号成立当且仅当 Σ 允许一个到标准 $\mathbb{S}^2$ 的共形映射，其坐标函数 $\hat{}$ 是 $\mathcal{L}$ 的第二特征函数。再应用高斯-博内定理，上界变为

$$\lambda_2(\hat{\mathcal{L}})|\Sigma| \le 8\pi + \int_\Sigma \left(\frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2} + \frac{1}{4}\theta_\ell\theta_k\right) d\mu = 8\pi. \tag{58}$$

反之，由于 Σ 是变分稳定的，原算子满足 $\lambda_2(\mathcal{L}) \ge \frac{16\pi}{|\Sigma|}|\vec{H}|^2 = -\frac{16\pi}{|\Sigma|}\theta_\ell\theta_k$。对该界进行缩放，我们得到

$$\lambda_2(\hat{\mathcal{L}}) = -\frac{1}{2\theta_\ell\theta_k}\,\lambda_2(\mathcal{L}) \ge \frac{8\pi}{|\Sigma|}.$$

结合上述上界，可得精确的等号

$$\lambda_2(\hat{\mathcal{L}}) = \frac{8\pi}{|\Sigma|} = \frac{2}{r^2},$$

其中 r 是 Σ的面积半径。由于式 (57) 中取等号，存在一个共形映射φ：$\Sigma \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$，使其分量 $\varphi_i (i = 1, 2, 3)$ 满足 $\int_\Sigma \varphi_i \, d\mu = 0$、 $\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = 1$，并且

$$-\Delta_h \varphi_i + \frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2}\varphi_i + \frac{1}{4}\theta_\ell \theta_k \varphi_i - \frac{2}{r^2}\varphi_i = 0. \tag{59}$$

由于 $|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 = 1$，我们有 $0 = \Delta_h |\varphi|^2 = \sum_{i=1}^3 2\varphi_i \Delta_h \varphi_i + 2|\nabla^h \varphi|^2$，其中 $|\nabla^h \varphi|^2 = \sum_{i=1}^3 |\nabla^h \varphi_i|^2$。将 (59) 中的 $\Delta_h \varphi_i$ 代入可得

$$|\nabla^h \varphi|^2 = \frac{2}{r^2} - \frac{1}{4}\theta_\ell \theta_k - \frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2} = \frac{3}{r^2} - \frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2}, \tag{60}$$

其中我们使用了约束 $-\theta_\ell \theta_k = \frac{16\pi}{|\Sigma|} = \frac{4}{r^2}$。

现在，通过微分同胚 φ将 Σ 与 $\mathbb{S}^2$ 对应起来，我们可以将 Σ 上的度量写为 $h = e^u g_{\mathbb{S}^2}$，其中 $g_{\mathbb{S}^2}$ 是标准圆度量。由于 φ 是共形映射，拉回度量的迹表明

$$e^{-u} = \frac{1}{2}|\nabla^h \varphi|^2. \tag{61}$$

此外，根据二维中的标准共形变换律， Σ的标量曲率满足

$$\frac{\mathrm{Sc}^\Sigma}{2} = e^{-u}\left(1 - \frac{1}{2}\Delta_{g_{\mathbb{S}^2}} u\right). \tag{62}$$

结合 (60) 和 (61) 得到 $\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{3}{r^2} - 2e^{-u}$。将其代入 (62) 并整理，可知 u 必须满足偏微分方程

$$\Delta_{g_{\mathbb{S}^2}} u = 6 - \frac{6}{r^2}e^u. \tag{63}$$

此外，坐标质心条件意味着

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_i e^u \, d\mu_{\mathbb{S}^2} = \int_\Sigma \varphi_i e^u e^{-u} \, d\mu = \int_\Sigma \varphi_i \, d\mu = 0. \tag{64}$$

不失一般性，我们对度量重新缩放，使得 $r = 1$。于是，方程 (63) 化为

$$\Delta_{g_{\mathbb{S}^2}} u = 6 - 6e^u,$$

并满足归一化约束 (64)。这正是 [32, 35]中所研究的平均场方程。

在 [32, 命题 1 和引理 10], 中，已证明若 Σ 满足偶对称条件（i），则在约束 (64) 下，方程 (63) 的唯一解是平凡解$u \equiv 0$。类似地， [35, 引理 4] 证明，若高斯曲率与常数充分 C^0 接近，满足（ii）的要求，则方程 (63) 同样只有 $u \equiv 0$。

因此，无论哪种情况，我们都可得 $u \equiv 0$，即 $h = g_{\mathbb{S}^2}$，从而 Σ 与标准圆球面等距。特别地，$\mathrm{Sc}^\Sigma = \frac{2}{r^2} = -\frac{1}{2}\theta_\ell \theta_k$，证明的其余部分与定理 4.1 中完全相同。□

注 4.6 （与 PMC 刚性结果的比较）。 高余维子流形的经典刚性结果通常假设平均曲率向量在法丛中平行，即所谓的

$$\nabla^\perp \vec{H} = 0,$$

平行平均曲率（*PMC*）条件。Chen 和 Yau [8, 40]的结果以及后来对洛伦兹情形 [7] 的推广表明，这一强逐点假设会严格限制紧致子流形的几何。在平坦环境空间中，它迫使子流形包含于某个全测地超曲面中，从而将问题化为余维一情形，并导出球面刚性。PMC 条件蕴含 STCMC 条件，因为

$$d|\vec{H}|^2 = 2\langle \nabla^{\perp}\vec{H}, \vec{H}\rangle = 0,$$

但反过来并不成立：时空常平均曲率只固定平均曲率向量的长度，却不约束其在法丛中的方向。

定理 4.1 和 4.5 的刚性结果表明，在我们的设定中不需要 PMC 假设。相反，变分稳定性与主导能量条件共同为法联络提供了充分控制，使稳定性恒等式中的相关平方项在等号情形下消失，从而得到相同的刚性结论。

注 4.7（霍金能量解释）。 定理 4.1 和 4.5 表明，STCMC 曲面尤其适用于霍金准局域能量（见（3））。霍金能量 [14, 36] 是用于衡量有界时空区域内能量的最简单方案之一，并具有若干理想性质，包括 ADM 极限、小球面极限，以及沿逆平均曲率流的单调性。然而，它在任意曲面上可能为负：即使在欧几里得空间中，每个非圆球面都具有严格为负的霍金能量。这凸显了识别具有几何特殊性的曲面的必要性，在这些曲面上可以恢复能量的正性，并使准局域能量表现良好。

上述结果表明，STCMC 曲面提供了这样一种自然的几何框架。在主导能量条件下，这些曲面上的霍金能量非负，而刚性结论表明，能量仅在平坦情形下才会消失。从物理角度看，这意味着在 STCMC 曲面上测得的霍金能量能够区分平坦时空与弯曲时空。

5. STCMC 叶状结构中的例子与稳定性

本节通过若干几何例子及其应用，说明上文引入的稳定性概念。我们首先讨论几类基本的稳定 STCMC 曲面，随后探讨在类空和零情形下，由 STCMC 曲面构成的渐近叶状结构的稳定性。

5.1. **稳定 STCMC 曲面的例子**。

闵可夫斯基时空中的圆球面。 如上所示，位于闵可夫斯基时空全测地切片中的圆球面，是一个变分稳定且常数模稳定的 STCMC 曲面。

平稳时空中的边际外陷俘曲面。平稳真空时空中的边际外陷俘曲面（MOTS）是自然的例子。一个典型例子是克尔黑洞的事件视界。在这类曲面上，出射零膨胀为零， $\theta_\ell \equiv 0$，因此 $|\vec{H}|^2 = -\theta_\ell\theta_k = 0.$。平稳性意味着视界沿出射方向无剪切，而真空爱因斯坦方程给出 Ein $= 0$。将这些关系代入稳定性算子（37）可得 $\mathcal{L} \equiv 0$。由于当 $|\vec{H}|^2 = 0$ 时，定义 3.2 右侧也为零，因此这类边际外陷俘曲面满足等号成立的时空常平均曲率稳定性不等式。

球对称时空。在施瓦西或赖斯纳-诺德斯特伦等球对称时空中，圆形坐标球面是 STCMC 曲面。零膨胀 θ_ℓ 和 θ_k 在每个球面上均为常数，而零第二基本形式的无迹部分因对称性而消失，因此稳定性算子（37）中的所有切向导数项均消失。

如果时空是真空的（Ein $= 0$），剩余项便化为一个仅涉及球面的膨胀和内蕴曲率的纯代数表达式。特别地，在施瓦西时空中，将该算子作用于常数所得结果与 $-\theta_\ell\theta_k m$ 成正比，其中 m 是质量参数；这表明视界外的对称球面满足常数模稳定性条件 $\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma| \geq 0$ 。

由渐近叶状结构产生的 STCMC 曲面。 此处引入的稳定性概念适用于已知的 STCMC 曲面渐近叶状结构，包括渐近平坦初始数据集 [6] 上的叶状结构，以及渐近施瓦西型零超曲面 [17]上的叶状结构。具体陈述将在定理 5.3 和定理 5.4 中证明。

5.2. **类空超曲面上的 STCMC 曲面**。

设 $(\mathcal{N}^{3+1}, \mathbf{g})$ 为一个洛伦兹流形，且 (M, g, K) 为一个类空超曲面，其诱导黎曼度量为 g ，第二基本形式为 K。设 $\Sigma \subset M$ 为一个光滑闭曲面，其诱导度量为 h。记 n 为 M 的未来指向单位法向量，记 ν 为 Σ 在 M 中的外单位法向量。

相应的零法向量定义为

$$\ell = n + \nu, \qquad k = n - \nu, \tag{65}$$

使得 $\langle \ell, k\rangle = -2$。在此设定下，零膨胀为

$$\theta_\ell = H + P, \qquad \theta_k = -H + P, \tag{66}$$

其中 $P := \mathrm{tr}_h K = \mathrm{tr}\ K - K(\nu, \nu)$ 表示 K 沿 Σ 的迹。时空平均曲率满足

$$-\theta_\ell\theta_k = H^2 - P^2. \tag{67}$$

因此，STCMC 曲面推广了常平均曲率曲面；在时间对称情形 $K = 0$ 下，它退化为经典的常平均曲率条件。

现在，我们用初始数据来表示稳定性算子 (37)。对于与 Σ 相切的向量场 X ，与 ℓ 相关的法丛联络一形式为

$$s_\ell(X) = -\frac{1}{2}\langle k, \nabla_X \ell\rangle = \langle \nu, \nabla_X n\rangle = K(X, \nu).$$

因此，$\|s_\ell\|^2_h = \|K(\cdot\ \nu)\|^2_h$。零第二基本形式满足

$$\chi_\ell = K^\top + B, \qquad \chi_k = K^\top - B,$$

其中， B 是 $\Sigma \subset M$ 的第二基本形式，而 $K^\top$ 是 K 在 $T\Sigma$ 上的限制。(M, g, K) 上的爱因斯坦约束方程形式如下：

$$\mathrm{Sc}^M - |K|^2 + (\mathrm{tr}_g K)^2 = 2\,\mu, \qquad \mathrm{div}^M(K - (\mathrm{tr}_g K)g) = J,$$

其中，能量密度 μ 和动量密度 J 沿着 M b 定义 y

$$\mu := \mathrm{Ein}(n, n), \qquad J(X) := -\mathrm{Ein}(n, X) \quad \text{for all } X \in TM.$$

这里，Ein 表示环境时空的爱因斯坦张量。在式 (34) 中引入的典范类时法向量场 U 具有如下形式

$$U = \frac{H}{\sqrt{H^2 - P^2}}\, n - \frac{P}{\sqrt{H^2 - P^2}}\, \nu.$$

因此，

$$2\,\mathrm{Ein}(U,U) = \frac{2}{H^2 - P^2}\Big(H^2\mu + 2HP\, J(\nu) + P^2 \mathrm{Ein}(\nu,\nu) \Big),$$

将这些恒等式代入该几何表达式

$$\mathcal{L} = \theta_\ell \theta_k (2\Delta_h + V)$$

得到

$$\delta^2_{\alpha\vec{H}} |\Sigma| = \int_\Sigma \alpha\, \mathcal{L}\alpha\, d\mu = (H^2 - P^2) \int_\Sigma \Big(-2\alpha \Delta_h \alpha - V\, \alpha^2 \Big)\, d\mu,$$

其中

(68)
$$\begin{aligned} V =& 2\|\nabla^h \log|H+P| - K(\cdot,\nu)\|_h^2 - \mathrm{Sc}^\Sigma + \frac{H-P}{2(H+P)}\|K^\top + B\|_h^2 + \frac{H+P}{2(H-P)}\|K^\top - B\|_h^2 \\ &+ \frac{2}{H^2 - P^2}\Big(H^2\mu + 2HP\, J(\nu) + P^2 \mathrm{Ein}(\nu,\nu) \Big). \end{aligned}$$

注 5.1. 与常平均曲率曲面的黎曼稳定性条件不同，STCMC 曲面的稳定性算子涉及时空曲率分量 Ein(ν, ν)，后者无法仅用初始数据 (M, g, K) 表示。因此，时空常平均曲率稳定性本质上是一个洛伦兹概念，取决于初始数据集嵌入时空的方式。

若假设我们位于一个全测地超曲面中，即 $K = 0$，则我们的稳定性算子为

(69)
$$\begin{aligned} \int_\Sigma \alpha \mathcal{L}\alpha d\mu &= H^2 \int_\Sigma -2\alpha\Delta_h\alpha + \alpha^2(\mathrm{Sc}^\Sigma - \frac{1}{2}H^2 - \|\mathring{B}\|_h^2 - \mathrm{Sc}^M) d\mu \\ &= 2H^2 \int_\Sigma -\alpha\Delta_h\alpha - \alpha^2(\mathrm{Ric}^M(\nu,\nu) + \|B\|_h^2 - \frac{1}{2}H^2) d\mu \end{aligned}$$

其中我们用到了高斯方程 $\mathrm{Sc}^\Sigma = \mathrm{Sc}^M - 2\mathrm{Ric}^M(\nu,\ \nu) + \frac{1}{2}H^2 - |\mathring{B}|^2$，因此，在这种情况下，时空常平均曲率稳定算子可化为经典常平均曲率雅可比算子的缩放和平移后的版本，

$$\mathcal{L} = 2H^2 L_{\mathrm{Jac}} + H^4.$$

5.3. **典范类空时空常平均曲率叶状结构的稳定性**。时空常平均曲率曲面在渐近平坦时空的几何中发挥着重要作用。特别是，Cederbaum 和 Sakovich 证明，渐近欧几里得初始数据集在无穷远附近存在由 STCMC 曲面构成的典范叶层 [6]。这一叶状结构为孤立引力系统的质心提供了几何刻画，并且在时间对称情形下，作为 Huisken 和 Yau 构造的经典常平均曲率叶状结构的自然洛伦兹类比 [16]。此外，人们还在类空超曲面内构造了由 STCMC 曲面组成的局部叶状结构 [25]。

在上述文献中，稳定性这一概念源于初始数据超曲面内时空平均曲率 $\theta_\ell\theta_k$ 沿法向的线性化。该算子

通常不是自伴算子，可用于证明非退化性并求解相关的椭圆问题。

相比之下，我们在此考察的稳定性概念是在第3.4节中引入的。作为本理论的一项应用，我们证明，渐近平坦初始数据集中的典范STCMC叶状结构的叶片，对这两种稳定性概念而言都是稳定的。

作为本理论的一项应用，我们证明，渐近平坦初始数据集中的典范STCMC叶状结构的叶片，对于本文引入的两种稳定性概念而言都是稳定的。

我们首先回顾大-O 记号。对于函数 f，g，我们记

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

如果存在常数 C，$\hat{}\delta > 0$，使得 $|f(x)| \le C\,|g(x)|$ 对所有 $x \ge \hat{}\delta$均成立。

定义5.2（渐近平坦初始数据集）。设 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$，并设 (M^3, g, K, μ, J)是爱因斯坦方程的光滑初始数据集。若存在一个紧集 $B \subset M$ 和一个光滑坐标图，使得 (M, g, K, μ, J) 是 $C^2_{1/2+\varepsilon}$- 渐近平坦，则称其为

$$x : M \setminus B \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$$

使得 在坐标 $x = (x^1, x^2, x^3)$ 中，且 $r = |x|$，以下估计成立 d:

$$|g_{ij} - \delta_{ij}| + r\,|\partial_k g_{ij}| + r^2 |\partial_k \partial_l g_{ij}| = O(r^{-1/2-\varepsilon}), \tag{70}$$

$$|K_{ij}| + r\,|\partial_k K_{ij}| = O(r^{-3/2-\varepsilon}), \tag{71}$$

$$|\mu| + |J_i| = O(r^{-3-\varepsilon}), \tag{72}$$

对所有 r充分大的情形以及所有指标 i，j，k，$l \in \{1, 2, 3\}$均成立。其中，δ_{ij} 表示坐标 x中的欧几里得度规。

定理 5.3（典范STCMC叶状结构的稳定性）。设 (M^3, g, K, μ, J) 为一个 $C^2_{1/2+\varepsilon}$-渐近平坦初始数据集，其中某个 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$, 的 *ADM*能量严格为正$E_{ADM} > 0$。令 $\{\Sigma_\sigma\}_{\sigma > \sigma_0}$ 表示在 $[6]$，中构造的由常时空平均曲率曲面组成的典范叶状结构，其中每个叶满足

$$H^2 - P^2 = \frac{4}{\sigma^2}.$$

令 ν_σ 表示 (M, g) 中 Σ_σ 的外单位法向量，令 r 表示由 $|\Sigma_\sigma| = 4\pi r^2$定义的面积半径，并令Ein 表示该环境时空的爱因斯坦张量，其中 (M, g, K) 嵌入于该环境时空中。

如果 $|\mathrm{Ein}(\nu_\sigma, \nu_\sigma)| = O(r^{-2})$，那么对于充分大的 σ，叶片 Σ_σ 既是严格的常模稳定的，也是变分稳定的。

证明。首先，我们回顾每个叶片 Σ_σ 上的某些几何量的衰减（见 [6]）：

$$\|\mathring{B}\|^2 = O(r^{-3-2\varepsilon}), \quad \mathrm{Sc}^M = O(r^{-3-\varepsilon}) \tag{73}$$

我们还回顾一下该情形下霍金能量的表达式

$$\mathcal{E}(\Sigma_\sigma) = \sqrt{\frac{|\Sigma_\sigma|}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_\sigma} H^2 - P^2 d\mu\right) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{|\Sigma_\sigma|}{16\pi}} \left(\int_{\Sigma_\sigma} \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} - \frac{1}{2}(H^2 - P^2) d\mu\right)$$

根据 [6, 命题 5.6], , ADM能量与每个叶的霍金能量之间的关系为:

$$|E_{ADM} - \mathcal{E}(\Sigma_\sigma)| = O(r^{-\varepsilon}) \tag{74}$$

由于 $H^2 - P^2 = 4/\sigma^2$ 为常数且 $|\Sigma_\sigma| = 4\pi r^2$，霍金能量积分可精确计算为:

$$\mathcal{E}(\Sigma_\sigma) = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2}\right). \tag{75}$$

由于 $E_{ADM} > 0$，对于足够大的曲面，我们有 $\mathcal{E}(\Sigma_\sigma) > 0$，这意味着 $r < \sigma$。重新整理（75）式可得 $\frac{r^2}{\sigma^2} = 1 - {}^{2\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}\, r$。对于满足 $r \approx \sigma$ 的大曲面，我们将此关系反解，得到面积半径关于 σ 的显式展开:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{2\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^3} + \mathcal{O}(\sigma^{-4}) \tag{76}$$

因此，任何阶为 $O(r^{-k})$ 的误差项都会直接转化为 $O(\sigma^{-k})$。

我们注意到，在我们的衰减条件下，（68）式给出的稳定性算子中的项 V 化简为

$$V = (H^2 - P^2)\left(\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} - \frac{1}{2}(H^2 - P^2)\right) + O(r^{-5-\varepsilon}). \tag{77}$$

我们首先看到，这些叶片是常数模稳定的。

$$\begin{aligned} \delta^2_{\vec{H}}|\Sigma_\sigma| = \int_{\Sigma_\sigma} V d\mu &= (H^2 - P^2)\int_{\Sigma_\sigma} \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} - \frac{1}{2}(H^2 - P^2)d\mu + O(r^{-3-2\varepsilon}) \\ &= \frac{32\pi}{\sigma^2}\sqrt{\frac{16\pi}{|\Sigma_\sigma|}}\mathcal{E}(\Sigma_\sigma) + O(r^{-3-2\varepsilon}) = \frac{64\pi E_{ADM}}{\sigma^2 r} + O(r^{-3-2\varepsilon}) \end{aligned} \tag{78}$$

由于 $E_{ADM} > 0$，首要的 $\mathcal{O}(r^{-3})$ 项严格占主导地位，误差项因而不会影响结论，从而保证 $\delta^2_{\vec{H}}|\Sigma_\sigma| > 0$。

现在我们证明这些叶片是变分稳定的。考虑 $-\Delta_{\Sigma_\sigma}$的特征值 λ_i。根据引理 5.3], 对于 $i = 1$，2，3，有 $\lambda_0 = 0, |\lambda_i - \frac{2}{r^2}| = O(\sigma^{-5/2-\varepsilon})$；对于 $i \geq 4$，则有 $\lambda_i > \frac{5}{\sigma^2}$。令$f_i$ 表示相应的特征函数，引理 5.4]给出了以下估计:

$$\begin{aligned} \left|\lambda_i - \left(\frac{2}{\sigma^2} + \frac{6\,\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^3} + \int_{\Sigma_\sigma} \mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma, \nu_\sigma)\, f_i^2\, d\mu\right)\right| &= O(\sigma^{-3-\varepsilon}), \qquad i = 1, 2, 3, \\ \left|\int_{\Sigma\sigma} \mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma, \nu_\sigma)\, f_i f_j\, d\mu\right| &= O(\sigma^{-3-\varepsilon}), \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{79}$$

考虑任意函数 α，满足$\int_{\Sigma_\sigma} \alpha d\mu = 0$ 和$\int_{\Sigma_\sigma} \alpha^2 d\mu = 1$。我们将 α =分解为$\alpha^t + \alpha^d$，其中 α^t: $= \sum_{i=1}^3 c_i f_i = \sum_{i=1}^3 \int_\Sigma \alpha f_i\, d\mu f_i$ 是平移部分，$\alpha^d := \alpha - \alpha^t = \sum_{i\geq 4} c_i f_i$ 是形变部分。注意，$\sum_{i=1}^3 c_i^2 = \|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}$ 以及$\sum_{i=4} c_i^2 = \|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}$。

计算稳定性算子可得:

$$\int_{\Sigma_\sigma} \alpha\mathcal{L}\alpha\, d\mu = \int_{\Sigma_\sigma} \alpha^t\mathcal{L}\alpha^t\, d\mu + 2\int_{\Sigma_\sigma} \alpha^t\mathcal{L}\alpha^d\, d\mu + \int_{\Sigma_\sigma} \alpha^d\mathcal{L}\alpha^d\, d\mu \tag{80}$$

对于形变部分，由于 $(H^2-P^2)\Big(\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}-\frac{1}{2}(H^2-P^2)\Big)=O(r^{-\frac{9}{2}-\varepsilon})$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^d\mathcal{L}\alpha^d\,d\mu=&\int_{\Sigma_\sigma}2(H^2-P^2)\sum_{i=4}c_i^2\lambda_i f_i^2\,d\mu+\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^d)^2V\,d\mu\\ \geq&2(H^2-P^2)\lambda_4\sum_{i=4}c_i^2\int_{\Sigma_\sigma}f_i^2\,d\mu+\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^d)^2(H^2-P^2)\Big(\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}-\frac{1}{2}(H^2-P^2)\Big)\,d\mu\\ &+O(\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-5-\varepsilon})\\ \geq&\frac{40}{\sigma^4}\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}-O(\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-\frac{9}{2}-\varepsilon})\end{aligned}$$

因为 α^t与 α^d正交，因此交叉项完全由 $V=O(r^{-\frac{9}{2}-\varepsilon})$决定 .

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^t\mathcal{L}\alpha^d\,d\mu=&\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^t\alpha^dV\,d\mu\\ =&O\Big((\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}+\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)})r^{-\frac{9}{2}-\varepsilon}\Big)\end{aligned}\tag{81}$$

现在对 λ_i使用估计式（79）

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^t\mathcal{L}\alpha^t\,d\mu=&2(H^2-P^2)\sum_{i=1}^3c_i^2\lambda_i\int_{\Sigma_\sigma}f_i^2d\mu+\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^t)^2Vd\mu\\ =&2(H^2-P^2)\Big(\frac{2}{\sigma^2}+\frac{6\,\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^3}\Big)\sum_{i=1}^3c_i^2+2(H^2-P^2)\int_{\Sigma_\sigma}\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)\sum_{i=1}^3c_i^2f_i^2d\mu\\ &+\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^t)^2Vd\mu+O(\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-5-\varepsilon})\end{aligned}$$

现在使用（79）

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\sigma}\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)\sum_{i=1}^3c_i^2f_i^2d\mu=&\int_{\Sigma_\sigma}\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)(\alpha^t)^2d\mu-\int_{\Sigma_\sigma}\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)\sum_{i\neq j}c_if_ic_jf_jd\mu\\ =&\int_{\Sigma_\sigma}\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)(\alpha^t)^2d\mu+O(\sigma^{-3-\varepsilon})\end{aligned}\tag{82}$$

注意到 $\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^t)^2Vd\mu=\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^t)^2(H^2-P^2)\Big(\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}-\frac{1}{2}H^2\Big)d\mu+O(\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-5-\varepsilon})$，此外，根据高斯方程，$\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}+2\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)-\frac{1}{2}H^2=\mathrm{Sc}^M-\|\mathring{B}\|^2=O(r^{-3-\varepsilon})$，从而得到

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^t\mathcal{L}\alpha^t\,d\mu=&2(H^2-P^2)\Big(\frac{2}{\sigma^2}+\frac{6\,\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^3}\Big)\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}\\ &+\int_{\Sigma_\sigma}(\alpha^t)^2(H^2-P^2)\Big(\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}+2\mathrm{Ric}^M(\nu_\sigma,\nu_\sigma)-\frac{1}{2}H^2\Big)d\mu+O(\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-5-\varepsilon})\\ =&\Big(\frac{16}{\sigma^4}+\frac{48\,\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^5}\Big)\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}+O(\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}r^{-5-\varepsilon})\end{aligned}$$

将各项贡献相加，稳定性算子有如下下界：

$$\int_{\Sigma_\sigma}\alpha\mathcal{L}\alpha d\mu\geq\Big(\frac{16}{\sigma^4}+\frac{48\,\mathcal{E}(\Sigma_\sigma)}{\sigma^5}\Big)\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}+\frac{40}{\sigma^4}\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}+O\Big((\|\alpha^t\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)}+\|\alpha^d\|^2_{L^2(\Sigma_\sigma)})r^{-\frac{9}{2}-\varepsilon}\Big)$$

对于变分稳定性，我们要求该积分严格大于阈值常数 $\frac{H^2-P^2}{|\Sigma_\sigma|}16\pi=\frac{16}{r^2\sigma^2}$。注意，利用 (74) 可以用 ADM能量替换霍金能量 E_{ADM}；利用 (76) 将 σ 替换为 r 后，我们有 $\int_{\Sigma_\sigma}\alpha\mathcal{L}\alpha d\mu>\frac{16}{r^2\sigma^2}$ for$E_{ADM}>0$。因此，当 σ 充分大时，这些曲面严格变分稳定。□

5.4. 类光超曲面上的 STCMC 曲面。在 [17], 中，Kröncke 和 Wolff 构造了渐近 Schwarzschild 光锥上的 STCMC 曲面的渐近叶状结构。由于这些叶片叶状分布于类光超曲面而非类空初始数据集上，这构成了一族真正具有洛伦兹性质的类空 STCMC 曲面。此外，在适当的先验类别中，该叶状结构是唯一的。现在我们将证明，这一叶状结构的叶片也满足我们对常数模稳定性和变分稳定性的定义。

定理 5.4 (类光 STCMC 叶状结构中的稳定性)。 设 N 是一个具有正质量 $m > 0$ 的渐近施瓦西型光锥，$\{\Sigma_\sigma\}_{\sigma\geq\sigma_0}$ 是由 [17] 中构造的 *STCMC* 曲面渐近叶状结构。那么，当 σ 足够大时，叶片 Σ_σ 严格常数模稳定且严格变分稳定。

证明。 我们将几何稳定性算子 (44) 与 [17] 中得到的类光 STCMC 叶状结构的渐近估计结合起来。

我们首先证明常数模稳定性。由于 $\mathcal{L} = \theta_\ell\theta_k(2\Delta_h + V)$ 和 $-\theta_\ell\theta_k = |\vec{H}|^2 > 0$，常数模稳定等价于 $\int_{\Sigma_\sigma} V\,d\mu \leq 0$。注意，(44) 中的势函数为

$$\begin{aligned} V &= 2\|\nabla^h \log|\theta_\ell| - s_\ell\|_h^2 - \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} + 2\,\mathrm{Ein}(U,U) - \frac{1}{2}|\vec{H}|^2 - \frac{\theta_k}{2\theta_\ell}\|\mathring{\chi}_\ell\|_h^2 - \frac{\theta_\ell}{2\theta_k}\|\mathring{\chi}_k\|_h^2 \\ &= \frac{1}{2}|\vec{H}|^2 - \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} + O(\sigma^{-4}) \end{aligned} \tag{83}$$

这里我们用到了 [17, 引理 2.14] 中叶状结构的渐近性质。此外，叶片满足

$$|\vec{H}|^2 = \frac{4}{\sigma^2} - \frac{8m}{\sigma^3} + O(\sigma^{-4}), \qquad \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} = \frac{2}{\sigma^2} + O(\sigma^{-4}), \qquad |\Sigma_\sigma| = 4\pi\sigma^2. \tag{84}$$

因此，利用 Σ_σ 是一个球面以及（83）和（84）：

$$-\int_{\Sigma_\sigma} V\,d\mu = 8\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sigma^2} - \frac{8m}{\sigma^3} + O(\sigma^{-4})\right)(4\pi\sigma^2) + O(\sigma^{-2}) = \frac{16\pi m}{\sigma} + O(\sigma^{-2}).$$

由于 $m > 0$，当 σ 足够大时，右侧为正。因此 $\int_{\Sigma_\sigma} V\,d\mu < 0$，这就证明了严格常模稳定性。

现在我们转而讨论变分稳定性。设 $\alpha \in C^\infty(\Sigma_\sigma)$ 满足

$$\int_{\Sigma_\sigma} \alpha\,d\mu = 0.$$

要证明变分稳定性，只需证明

$$\int_{\Sigma_\sigma}\left(2|\nabla^h\alpha|^2 - V\alpha^2\right)d\mu \geq \frac{16\pi}{|\Sigma_\sigma|}\int_{\Sigma_\sigma}\alpha^2\,d\mu. \tag{85}$$

为估计梯度项，我们使用 [17] 中考虑的雅可比算子 J。尽管该算子给出了一种不同的稳定性概念，但其性质将会派上用场。命题 3.10] 的证明 [17, 经分部积分后得到：

$$\int_{\Sigma_\sigma} J(\alpha)\alpha\,d\mu = \int_{\Sigma_\sigma}\left(2|\nabla^h\alpha|^2 - 2\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma}\alpha^2 - (|\vec{H}|^2 - 2\mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma})\alpha^2 - E_\sigma\alpha^2\right)d\mu,$$

其中 $\|E_\sigma\|_{L^\infty(\Sigma_\sigma)} = O(\sigma^{-4})$。消去标量曲率项后，得到

$$\int_{\Sigma_\sigma} 2|\nabla^h\alpha|^2\,d\mu = \int_{\Sigma_\sigma} J(\alpha)\alpha\,d\mu + \int_{\Sigma_\sigma}|\vec{H}|^2\alpha^2\,d\mu + \int_{\Sigma_\sigma} E_\sigma\alpha^2\,d\mu.$$

由 [17, 命题 3.10],

$$\int_{\Sigma_\sigma} J(\alpha)\alpha \, d\mu \geq \frac{6m}{\sigma^3} \int_{\Sigma_\sigma} \alpha^2 \, d\mu,$$

因此

$$\int_{\Sigma_\sigma} 2|\nabla^h \alpha|^2 \, d\mu \geq \int_{\Sigma_\sigma} \left(|\vec{H}|^2 + \frac{6m}{\sigma^3} - O(\sigma^{-4}) \right) \alpha^2 \, d\mu. \tag{86}$$

将 (86) 与势展开 (83) 结合，可得

$$\int_{\Sigma_\sigma} \left(2|\nabla^h \alpha|^2 - V\alpha^2 \right) d\mu \geq \int_{\Sigma_\sigma} \left(\frac{1}{2}|\vec{H}|^2 + \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} + \frac{6m}{\sigma^3} - O(\sigma^{-4}) \right) \alpha^2 \, d\mu.$$

利用 (84)，$\frac{1}{2}|\vec{H}|^2 + \mathrm{Sc}^{\Sigma_\sigma} = \frac{4}{\sigma^2} - \frac{4m}{\sigma^3} + O(\sigma^{-4})$，因此

$$\int_{\Sigma_\sigma} \left(2|\nabla^h \alpha|^2 - V\alpha^2 \right) d\mu \geq \int_{\Sigma_\sigma} \left(\frac{4}{\sigma^2} + \frac{2m}{\sigma^3} - O(\sigma^{-4}) \right) \alpha^2 \, d\mu.$$

由于 $\frac{16\pi}{|\Sigma_\sigma|} = \frac{4}{\sigma^2}$，对于充分大的 σ，正项 $\frac{2m}{\sigma^3}$ 主导误差项 $O(\sigma^{-4})$。因此

$$\int_{\Sigma_\sigma} \left(2|\nabla^h \alpha|^2 - V\alpha^2 \right) d\mu > \frac{16\pi}{|\Sigma_\sigma|} \int_{\Sigma_\sigma} \alpha^2 \, d\mu.$$

当 σ 充分大时，叶片均严格变分稳定。 □

Appendix A. Auxiliary Rigidity Theorems

在本附录中，我们汇集了本文等号情形中用到的刚性结果。这些结果都是经典的，在此陈述以方便读者。

黎曼模型几何。

欧几里得模型：Brown-York 刚性。 在时间对称情形 $K = 0$ 中，Kijowski-Liu-Yau 能量可化为 Brown-York 质量，而刚性则由 Shi-Tam 的基本结果推出。

定理 A.1 (Shi-Tam [33, 定理 1])。 设 (Ω, g) 是一个三维、具有光滑边界且具有非负标量曲率的紧流形。假设 $\partial\Omega$ 有有限个连通分支 Σ_i，使得每个分支相对于单位外法向量都具有正的高斯曲率和正的平均曲率 H^i。那么，对于每个分支，

$$\int_{\Sigma_i} H^i \, d\mu \leq \int_{\Sigma_i} H_0^i \, d\mu, \tag{87}$$

其中，H_0^i 表示将 Σ_i 嵌入 $\mathbb{R}^3$的唯一凸等距嵌入的平均曲率。进一步地，如果对于某个 Σ_i 等号成立，那么 $\partial\Omega$ 是连通的，并且 Ω 等距于 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域。

将其凸等距嵌入$\mathbb{R}^3$ 的存在性和唯一性（除刚体运动外）由经典的 Weyl-Nirenberg-Pogorelov定理保证。

定理 A.2 (Weyl-Nirenberg-Pogorelov)。 设 (S^2, g) 是一个 $C^{k,\alpha}(k \geq 3, \alpha \in (0,1))$ 具有高斯曲率 $K_g > 0$ 的黎曼 2-球面。则存在一个严格凸的等距嵌入

$$X : (S^2, g) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\mathrm{Eucl}}),$$

该嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 的保向刚性运动意义下唯一。

在 [33] Shi 和 Tam 还证明了定理 A.1 的一个高维版本：

定理 A.3 ([33, 定理 4。1])。 设$(\Omega\ g)$ 是一个维数为 $n \geq 3$、边界 $\partial\Omega$ 光滑且具有非负标量曲率的紧黎曼流形。假设 $3 \leq n \leq 7$ 或 Ω 是自旋的。设边界有有限个连通分支 Σ_i，且每个分支相对于单位外法向量具有正平均曲率 H^i，并且可在 $\mathbb{R}^n$ 中等距嵌入为凸超曲面。那么对于每个分支

$$\int_{\Sigma_i} H^i \, d\mu \leq \int_{\Sigma_i} H_0^i \, d\mu,$$

其中 H_0^i 是 Σ_i 在欧几里得空间中的等距嵌入的平均曲率。此外，若某个 Σ_i 取等号，则 $\partial\Omega$ 是连通的（即 $\partial\Omega = \Sigma_i$），且$\Omega$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域等距。

备注 A.4. 定理 A.3 中对维数和自旋的限制，源于原始证明中使用了正质量定理。Lohkamp [21, 22] 以及 Schoen-Yau [31]已宣布将正质量定理推广至不要求自旋条件的高维情形。最近，一篇预印本 [3] 声称证明了维数不超过 19 时的正质量定理。

因此，本文在维数 $n \geq 8$ 中应用定理 A.3 时，相应的陈述都应理解为以正质量定理在该维数下成立为前提。

当这些高维嵌入的内蕴标量曲率为常数时，为了确定其几何性质，我们依赖 Ros 的以下经典刚性定理。

定理 A.5 (Ros [30, 定理 1])。 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭的、连通的、嵌入的超曲面，且其内蕴标量曲率为常数。那么 Σ 是一个圆球面。

双曲模型。 当双曲空间作为参考几何时，Shi 和 Tam 也确立了相应的刚性结果。

定理 A.6 (Shi-Tam [34, 定理 3.8])。 设 $(\Omega\ g)$ 是一个边界为光滑边界 Σ 的紧黎曼流形。假设:

(i) $\mathrm{Sc}^{\Omega} \geq 2\Lambda$，其中某个 $\Lambda < 0$,

(ii) Σ 是一个高斯曲率为 $K_{\Sigma} > \frac{\Lambda}{3}$ 且平均曲率为正的拓扑球面H。

那么 Σ 可以等距嵌入双曲空间 $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$，成为一个凸曲面，其平均曲率为H_0，并且

$$\int_{\Sigma} (H_0 - H) \, d\mu \geq 0.$$

当且仅当$(\Omega\ g)$ 等距于 $\mathbb{H}^3_{\Lambda/3}$ 中的一个区域时，等号成立。

球面模型。 在正曲率情形下，刚性需要更强的曲率假设。Hang-Wang 的以下定理给出了恰当的模型刚性结果。

定理 A.7 (Hang-Wang [13, 定理 2])。 设(M, g) 是一个紧致的 n 维黎曼流形 $(n \geq 2)$，具有非空边界 Σ。假设$\mathrm{Ric}^M \geq (n-1)g$，且$(\Sigma, g_{\Sigma})$与圆球面等距，并且 Σ的第二基本形式非负。那么(M, g) 与半球面 $\mathbb{S}^n_+$ 等距。

这一结果可视为 Min-Oo 猜想 [28] 的里奇强化版本。该猜想原本的标量曲率表述后来被 Brendle、Marques 和 Neves [5] 推翻。

时空准局部刚性。对于第 4 节中的洛伦兹刚性论证，我们还将用到以下关于 Kijowski-Liu-Yau 准局部能量的正性与刚性结果。

定理 A.8 (Liu-Yau [19, 20, 定理 1])。设 (Ω, g, K) 为满足主导能量条件的紧致初始数据集。假设 $\partial\Omega$有有限个连通分支 Σ_i，且每个分支的高斯曲率均为正，并具有类空平均曲率向量。则

$$\mathcal{E}_{KLY}(\Sigma_\alpha) \geq 0.$$

此外，若某个连通分支取等号，则 $\partial\Omega$ 连通，且 Ω 等距于闵可夫斯基时空中的一个类空超曲面。具体而言，Ω 可以等距嵌入到 $\mathbb{R}^{3,1}$ 中，成为空间区域 $(x, f(x))$ 上的类空图，其中 f 是Ω_0 上的光滑函数，并在 $\partial\Omega_0$上为零。

闵可夫斯基时空中 Kijowski-Liu-Yau 能量的刚性更强；这一点最早由 Ó Murchadha 和 Szabados 在 [41] 中观察到，后来 Miao、Shi 和 Tam 在以下结果中对其作了完整刻画。

定理 A.9 ([26, 定理 4.1])**.** 设 Σ 是闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{3,1}$中的一个闭的、连通的、光滑的类空2维曲面。假设 Σ张成了 $\mathbb{R}^{3,1}$中的一个紧致类空超曲面。若Σ 具有正高斯曲率，且其平均曲率向量为类空，则 $E_{KLY}(\Sigma) \geq 0$。此外，

$$\mathcal{E}_{KLY}(\Sigma) = 0$$

当且仅当 Σ 位于 $\mathbb{R}^{3,1}$中的一个超平面上时，条件成立。

球面上的谱估计。对于第 4 节中的另一种刚性论证，我们还要用到 El Soufi 和 Ilias 关于零亏格曲面上薛定谔算子第二特征值的以下估计。

定理 A.10 (El Soufi-Ilias [12])**.** 设(Σ, h) 是一个零亏格闭曲面，令 $q \in C^0(\Sigma)$，并定义第二特征值

$$\lambda_2(-\Delta_h + q) := \inf_{\substack{\alpha \in C^\infty(\Sigma) \\ \int_\Sigma \alpha \, d\mu = 0}} \frac{\int_\Sigma \left(|\nabla^h \alpha|^2 + q\,\alpha^2 \right) d\mu}{\int_\Sigma \alpha^2 \, d\mu}.$$

Then

$$\lambda_2(-\Delta_h + q)\,|\Sigma| \leq 8\pi + \int_\Sigma q \, d\mu.$$

此外，当且仅当 Σ 存在一个共形映射，将其映入标准的 $\mathbb{S}^2$，且其坐标函数是 $-\Delta_h + q$的第二特征函数时，等号成立。

参考文献

1. Aghil Alaee、Martin Lesourd 和丘成桐，稳定曲面与自由边界边缘外陷曲面，《变分法与偏微分方程》**60** (2021)，第 5 期，186。 2. Lars Andersson 和 Jan Metzger，稳定边缘陷获曲面的曲率估计，《微分几何杂志》**84** (2010)，第 2 期，231–265。 3. 毕宇辰、郝天泽、何世航、史宇光和朱锦田，维数不超过 *19* 时黎曼正质量定理的一个证明，arXiv 预印本 arXiv:2603.02769 (2026)。

4. Simon Brendle，涉及标量曲率的刚性现象，《微分几何综述》17 (2012)，第 1 期，179–202。 5. Simon Brendle、Fernando C Marques 和 Andre Neves，提高标量曲率的半球形变，《数学发明》185 (2011)，第 1 期，175–197。 6. Carla Cederbaum 和 Anna Sakovich，广义相对论中孤立系统的质心与常时空平均曲率曲面叶状结构，《变分法与偏微分方程》60 (2021)，第 6 期，论文编号 214。MR 4305436 7. Bang-Yen Chen，黎曼空间形式和不定度量空间形式中具有平行平均曲率向量的子流形，《阿拉伯数学科学杂志》16 (2010)，第 1 期，1–46。 8. Bang-yen Chen 和 SS Chern，关于具有平行平均曲率向量的曲面，《印第安纳大学数学杂志》22 (1973)，第 7 期，655–666。 9. Yvonne Choquet-Bruhat，《广义相对论与爱因斯坦方程》，牛津大学出版社，2009。 10. Yvonne Choquet-Bruhat、Piotr T Chruściel 和 José M Martín-García，光锥定理，《经典与量子引力》26 (2009)，第 13 期，135011。 11. Demetrios Christodoulou 和丘成桐，关于拟局域质量的一些评述，《数学与广义相对论》（加利福尼亚州圣克鲁斯，1986），《当代数学》，第 71 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1988，第 9–14 页。MR 954405 12. Ahmad El Soufi 和 Saıd Ilias，紧流形上 Schrödinger 算子的第二特征值上界及其应用，《泛函分析杂志》103 (1992)，第 2 期，294–316。 13. Fengbo Hang 和 Xiaodong Wang，具有边界和正里奇曲率的紧流形刚性定理，《几何分析杂志》19 (2009)，628–642。 14. Stephen W. Hawking，膨胀宇宙中的引力辐射，《数学物理学杂志》9 (1968)，第 4 期，598–604。MR 3960907 15. Joseph Hersch，均匀球形膜的四个等周性质，《巴黎科学院报告》A-B 辑 270 (1970)，A1645–A1648。 16. Gerhard Huisken 和丘成桐，孤立物理系统质心的定义及由稳定常平均曲率球面构成的唯一叶状结构，《数学发明》124 (1996)，第 1–3 期，281–311。MR 1369419 17. Klaus Kröncke 和 Markus Wolff，渐近 Schwarzschild 光锥上由常时空平均曲率曲面构成的叶状结构，《数学年刊》394 (2026)，第 3 期，73。MR 5036070 18. Peter Li 和丘成桐，一个新的共形不变量及其在 Willmore 猜想和紧曲面第一特征值中的应用，《数学发明》69 (1982)，第 2 期，269–291。 19. Chiu-Chu Melissa Liu 和 Liu-Yau，拟局域质量的正性，《物理评论快报》90 (2003)，第 23 期，231102。 20.，拟局域质量的正性 II，《美国数学会杂志》19 (2006)，第 1 期，181–204。 21. Joachim Lohkamp，高维正质量定理 I，arXiv 预印本 arXiv:math/0608795 (2016)。 22.，高维正质量定理 II，arXiv 预印本 arXiv:1612.07505 (2016)。 23. Marc Mars，全测地零视界上边际外陷俘曲面的稳定性，《经典与量子引力》29 (2012)，第 14 期，145019。 24. Luiz Ricardo Melo，正曲率三维流形上常平均曲率曲面的霍金质量，《美国数学会会刊》152 (2024)，第 12 期，5373–5380。 25. Jan Metzger 和 Alejandro Peñuela Diaz，局部时空常平均曲率与常膨胀叶状结构，《几何与物理学杂志》188 (2023)，104823。 26. Pengzi Miao、史宇光和谭联辉，关于与 Brown-York 和 Liu-Yau 拟局域质量相关的几何问题，《数学物理通讯》298 (2010)，第 2 期，437–459。 27. Pengzi Miao、Yaohua Wang 和 Naqing Xie，关于常平均曲率曲面的霍金质量与 Bartnik 质量，《数学研究快报》27 (2020)，第 3 期，855–885。MR 4216572 28. Maung Min-Oo，某些对称空间的标量曲率刚性，《几何、拓扑与动力系统》（蒙特利尔，1995），127137 (1998)。 29. Alejandro Peñuela Diaz，面积约束临界曲面上霍金准局域能量的刚性与正性，arXiv 预印本 arXiv:2507.16588 (2025)。 30. Antonio Ros，具有常标量曲率的紧致超曲面与一个全等定理，《微分几何杂志》27 (1988)，第 2 期，215–220。

31. Richard Schoen 和 丘成桐，正标量曲率与极小超曲面奇点，arXiv 预印本 arXiv:1704.05490（2017）。32. 史宇光、孙家成、田刚和魏东义，平均场方程的唯一性与霍金质量的刚性，《变分法与偏微分方程》**58**（2019），1–16。33. 史宇光和谭联辉，正质量定理与非负标量曲率紧流形的边界行为，《微分几何杂志》**62**（2002），第1期，79–125。34.，紧流形的刚性与拟局域质量的正性，经典与量子引力**24**（2007），第9期，2357。35. 孙家成，三维流形中曲面的霍金质量刚性，太平洋数学杂志**292**（2017），第1期，257–282。~~36.~~ László Benő Szabados，广义相对论中的拟局域能量-动量与角动量，Living Rev. Relativity**7**（2004），第4期。37. Jacopo Tenan，保体积时空平均曲率流与初始数据集的叶状结构，泛函分析杂志（2025），111313。38. Markus Wolff，闵可夫斯基光锥上的 *De Lellis–Müller* 型估计，《变分法与偏微分方程》**63**（2024），第7期，185。39.，零能量条件对一类静态时空中的全脐超曲面的影响，全球分析与几何年刊**66**（2024），第3期，10。40. 丘成桐，具有常平均曲率的子流形，美国数学杂志**96**（1974），第2期，346–366。41. Niall Ó Murchadha、László Benő Szabados 和 Paul Tod，关于“拟局域质量正性”的评论，物理评论快报**92**（2004），第25期，259001。

波茨坦大学，德国波茨坦 14476电子邮箱：
alejandro.penuela.diaz@uni-potsdam.de