arXiv:2603.16763v1 [math.GR] 17 Mar 2026

相干 RFRS 群

SAM P. FISHER 和 PABLO S ´ANCHEZ-PERALTA

附 *Marco Linton* 撰写的附录

Abstract. 我们证明，对于一个上同调维数至多为 2 的有限生成虚 RFRS 群，它相干，当且仅当其第二个 L^2-贝蒂数为零，当且仅当它是虚拟自由群扩张循环群。第二个 L^2-贝蒂数非零，为一类范围相当广泛的群提供了首个已知的相干性全局障碍，使得无需给出不相干性的明确证据，也能证明其不相干。

作为这一结果的应用，我们完整刻画了二维 Coxeter 群中的相干性，证实了 Jankiewicz 和 Wise 的猜想；并证明在非正亏格群中，不相干性具有普遍性，从而证实了 Wise 的一个猜想。我们还发现，在虚拟上同调维数为二的虚拟紧特殊群中，相干性可通过算法判定，并且是拟等距、测度等价和有限剩余不变量。

在附录中，Marco Linton 将一项主要结果应用于证明，立方化局部拟凸双曲群是虚拟自由群扩张循环群，从而在立方化情形下解决了 Abdenbi–Wise 和 Wise 提出的问题。

1. Introduction

如果一个群的所有有限生成子群都是有限表示的，那么该群称为相干。在其相干性综述的首页， [Wis20], Wise 写道：“这一领域的主要目标是准确理解哪些群是相干的；更现实地说，是找到对相干群有用的刻画。”本文旨在对上同调维数至多为二的虚 RFRS 群给出这样的刻画。正如 [Wis20 第 3], 节所指出的，相干性是一种低维现象，双曲群中尤其如此：目前已知的相干群上同调维数都为二，值得注意的例外来自闭双曲三维流形的基本群。通过对具有虚多循环边群的相干群取虚图，或者根据 Jaikin-Zapirain、Linton 和第二作者的一项近期结果，对局部可示相干群取单关系子积，可以构造出上同调维数任意高的相干群 [JZLSP25] （不过，迄今为止这些构造还无法产生高维双曲相干群）。

在维数 2 的情形下，Wise 猜想相干性与非正浸入性质有关。若一个二维复形 X 具有非正浸入性质，则对于每个紧致连通的二维复形 Y 以及每个胞腔浸入 $Y \looparrowright X$，要么 $\chi(Y) \leqslant 0$，要么 $\pi_1(Y) = \{1\}$。Wise 猜想，如果 X 具有非正浸入性质，那么 $\pi_1(X)$ 是相干的；他还推测几何维数为 2 的相干群是否总是某个具有非正浸入性质的二维复形的基本群（见[Wis22a，猜想 1.10] 以及 [Wis20，第 21节，问题 9 和 11]）。一个归因于 Gromov 的猜想预言，几何维数至多为

2 的群同构于某个具有非正浸入性质的二维复形的基本群，当且仅当 $b_2^{(2)}(G) = 0$ [Wis22b], [Wis20，第 16] 节。因此，我们提出以下大胆猜想，它给出了二维群中相干性的有趣刻画。这些等价关系也由 Jaikin-Zapirain 和 Linton 在 [JZL25，第 7] 节中提出为猜想或问题。

猜想 1.1. 设 G 是几何维数至多为2的群。以下条件等价：

(1) G 是相干的；(2) $b_2^{(2)}(G) = 0$；(3) $G \cong \pi_1(X)$，其中 X 是一个具有非正浸入的2维复形。

由于 X 的非正浸入性质意味着 $\pi_1(X)$ 具有局部可示性 [Wis22a，定理 3.3], 猜想 1.1 尤其预言，相干二维群具有局部可示性。本文旨在证明，对于剩余有限有理可解（RFRS）群，(1) ⇒ (2)这一蕴含关系成立；这类群构成了局部可示群的一个丰富子类。在此过程中，我们还将以虚拟方式证明 (1) ⇒ (3)这一蕴含关系；结合 Jaikin-Zapirain 和 Linton 的工作 [JZL25], ，这基本上解决了虚 RFRS 群这一类别中的猜想 1.1。

RFRS 群这一类由 Agol [Ago08] 在研究 Thurston 关于双曲 3-流形的虚纤维化猜想时引入；它在几何群论中发挥着核心作用，并且包含特殊群这一真子类——特殊群由 Haglund 和 Wise [HW08] 引入。已知许多有趣的群几乎特殊，包括双曲 3-流形的基本群 [Ago13, Wis21], 、极限群 [Wis21], 、许多单关系群[Lin25c] （包括带挠单关系群 [Wis21], ）、具有循环边群的自由群平衡图 [HW10c], 、Coxeter 群 [HW10b], 、小取消群 [Wis04], 以及双曲自由群扩张循环群 [HW10a, Lin25a], ，仅举数例。

同调相干性 （在 $\mathbb{Q}$ 上）是比相干性先验上更弱的条件；相干性要求 G 的所有有限生成子群都具有同调有限性性质 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$。我们的主要结果如下。

定理 1.2 (推论 3.7)。若 G 是一个虚拟 *RFRS* 群，且其 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \leqslant 2$，则 G 在 $\mathbb{Q}$ 上同调相干，当且仅当 $b_2^{(2)}(G) = 0$。

据我们所知，目前所有证明群 G 非相干的方法，都要通过展示 G 的某个不是有限表示的有限生成子群。定理 1.2 的一个新特点是，它提供了相干性的全局障碍（第二 L^2-Betti 数），因此给出了一种证明群 G 非相干的方法，而不必寻找非相干性的明确见证；寻找这类见证可能是一项艰巨的任务。在定理 4.2 中，我们将利用这一点，在不寻找其非相干性的明确见证的情况下，确定哪些二维 Coxeter 群是不相干的。

对于任意上同调维数，我们还发现，高阶 L^2-贝蒂数会妨碍群代数的凝聚性；所有有限生成子群均为 $\mathrm{FP}_\infty(\mathbb{Q})$ 型这一性质也会产生同样的妨碍，而这是一种强形式的相干性。所有已知的相干群例子都具有后一性质，尤其是所有相干特殊群（见注 A.8）。关于下述结果的更强版本，请参阅定理 3.5

。回顾一下，若一个环的所有有限生成左理想都是有限表示的，则称该环（左）相干（对于群代数，左相干性与右相干性等价，因此在此语境下我们将不再区分左、右）。

定理 1.3 (定理 3.5)。 设 G 是一个虚拟 *RFRS* 群。若 $b_n^{(2)}(G) > 0$ 对某个 $n > 1$成立，则 G 有一个不是 $\mathrm{FP}_\infty(\mathbb{Q})$ 型的有限生成子群。特别地， $\mathbb{Q}[G]$ 是一个非相干环。

结合这一结果与 Linton 在附录中的一项结果（见引理 A.7 和注 A.8），我们得到关于相干特殊群的如下结构定理。我们坚信下面结论的逆命题也成立（见猜想 3.9）。

推论 1.4 (推论3.8)。 设 G 是一个有限生成的虚拟特殊群。若 G 是相干的，则 G 是由循环群或有限群扩张自由群得到的迭代扩张。

在附录中，Marco Linton 运用定理 1.3 证明了以下结果，该结果对满足强相干条件的立方化双曲群可能具有的虚拟上同调维数施加了严格限制。这应与 Wise 的预测相对照：相干性是双曲群中一种低维现象。

定理 1.5 (定理 A.1 和 A.2)。 设 G 是一个立方化双曲群。

(1) 若 G 是局部双曲的，则 G 在虚拟意义下是由自由群和曲面群的自由积通过 $\mathbb{Z}$扩张而成；特别地， G的虚拟上同调维数至多为 3。(2) 若 G 是局部拟凸的，则 G在虚拟意义下是自由群扩张循环群；特别地， G 的虚拟上同调维数至多为2。

近期，在确立猜想 1.1 的蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 方面取得了许多进展。Jaikin-Zapirain 和 Linton 证明，若 G 是一个上同调维数为 2 的局部可示群，且 $b_2^{(2)}(G) = 0$，则 G是同调相干的 [JZL25，定理 1.2]。在许多情况下，Jaikin-Zapirain–Linton 能够将同调相干性提升为完全相干性；特别是，他们证明了单关系群是相干的，从而证实了 Baumslag 的一个广为人知的猜想[JZL25，定理 1.1]。Kielak 和 Linton [KL24，定理 1.1], 提供了更多支持猜想 1.1 中 (2) $\Rightarrow$ (1) 方向的证据，他们证明，若 G 是 Gromov 双曲、虚拟紧特殊的，且 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \leqslant 2$，则 G 在虚拟意义下是自由群扩张循环群，当且仅当 $b_2^{(2)}(G) = 0$。根据 Feighn–Handel [FH99], 的一项结果，自由群扩张循环群是相干的，因此 Kielak–Linton 的结果为这些群确立了一种强形式的相干性。第一作者在更弱的假设下得到了相同结论： G有限生成、虚 RFRS，且有理上同调维数至多为 2 [Fis26，定理 A]。

结合这些结果，定理 1.2 给出了有理上同调维数至多为 2 的有限生成虚拟 RFRS 群具有相干性的以下刻画。我们想强调的一个等价关系是：这样的群相干，当且仅当它是虚拟自由群扩张循环群（其中不要求自由核有限生成）。因此，我们的结果在虚 RFRS 群这一类中给出了 Feighn–Handel 定理的一个虚拟逆命题。

推论 1.6 (推论 4.1)。 设 G 是一个有限生成的虚拟 *RFRS* 群，且其 上同调维数$\mathbb{Q}(G) \leqslant 2$。以下命题等价：

(1) G 是相干的；*(2)* $\mathbb{Q}[G]$ 是相干的；*(3)* G 在 $\mathbb{Q}$ 上是同调相干的；*(4)* 对每个有限生成子群 $H \leqslant G$， $b_2(H;\mathbb{Q})$ 都是有限的；*(5)* 对每个有限生成子群 $H \leqslant G$， $b_2^{(2)}(H)$ 都是有限的；*(6)* $b_2^{(2)}(G) = 0$；*(7)* G 是虚拟自由群扩张循环群；*(8)* $\mathcal{U}(G)$ 是相干的 $\mathbb{Q}[G]$-模；*(9)* $\mathcal{U}(G)$ 作为 $\mathbb{Q}[G]$-模的弱维数至多为一；*(10)* G有一个有限指数子群同构于 $\pi_1(X)$，其中 X 是一个具有非正浸入的 *2*-复形。

如上所述，这些等价关系在虚 RFRS 群这一类中解决了猜想 1.1，唯一的小问题是，在条件 (10) 中，我们只能得出 G 的某个有限指数子群具有一个带非正浸入的分类空间。它们还肯定地解决了 [JZL25 中的第 2] 个问题（同样带有虚拟性限制），以及 JZL25], 中的第 4 和第 5 个问题，以及猜想 3 和猜想 6，均限于虚 RFRS 群这一类。

我们对推论 1.6 中各项所涉及的部分定义和背景作一些说明。若一个模的所有有限生成子模都是有限表示的，则称该模为相干模；这推广了环相干性，因为一个环是左相干的，当且仅当它作为自身上的左模是相干的。群代数凝聚性是否等价于群相干性，是一个有趣的开放问题。性质（4）曾在 [LW17 的推论 1.6], 中明确提出，文中证明了单关系群具有该性质（这也是 [HW16] 的推论）。第（8）和第（9）项中出现的对象 $\mathcal{U}(G)$ 是 G的群冯·诺依曼代数的附属算子代数；其定义将在第 2.2 节中回顾。我们还证明了 [Fis25 猜想 1.4], 的二维情形。该猜想预言，对于所有 FP 型 RFRS 群，第（1）、（2）和（9）项等价（对于任意 FP($\mathbb{Q}$) 型 RFRS 群，我们将证明 $\mathbb{Q}[G]$ 的相干性意味着 $\mathcal{U}(G)$ 的弱维数至多为一，从而在一般情形下解决[Fis25 猜想 1.4]所涉及的一个蕴含关系）。

1.1. 应用。 作为定理 1.2 的推论，我们得到了相干二维 Coxeter 群的完整分类，证实了猜想 3.4 和 4.7，并解决了 Jankiewicz 和 Wise 在 [JW16] 中提出的问题 4.6。回忆一下，(有限生成的) *Coxeter* 群 是具有如下表示的群

$$\langle v_1, \dots, v_n \mid (v_i v_j)^{m_{ij}} : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \rangle,$$

其中 $m_{ij} \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$, $m_{ij} = 1$ 当且仅当 $i = j$，而 $(v_i v_j)^\infty$ 表示生成元 v_i 和 v_j 之间没有规定任何关系。*Coxeter* 子群是由生成元 v_i 的某个子集生成的子群；这些子群本身也是 Coxeter 群。当且仅当对于两两不同的整数 i、 j、k ，形如 $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ 的每个子群都是无限群时，该 Coxeter 群才是二维的（等价地，对于所有两两不同的 i、j、 k，$\frac{1}{m_{ij}} + \frac{1}{m_{jk}} + \frac{1}{m_{ki}} \leqslant 1$ ）。这种术语的合理性在于，二维 Coxeter 群存在一个具有良好二维分类空间的有限指数子群。欧拉

有限生成二维 Coxeter 群 G 的特征是

$$\chi(G) \;=\; 1-\frac{n}{2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{2m_{ij}}.$$

如上所述，Coxeter 群几乎特殊，因此适用于我们的主要结果。由于 Coxeter 子群只有有限多个，以下结果给出了一个非常简单的算法，可用于判断二维 Coxeter 群是否相干。

定理 1.7 (定理 4.2)。设 G 是一个二维 *Coxeter* 群。那么，当且仅当对每个无限 *Coxeter* 子群 $H\leqslant G$，$G\ (H)\leqslant 0$ 时，G 相干。

这一刻画的一个方向由 [JZL25，定理 1.4]给出。我们利用定理 1.2 证明其逆命题，即相干的二维 Coxeter 群必须具有 $b_2^{(2)}\ (G)\ =0$，因此对于所有无限有限生成 Coxeter 子群，$\chi(H)\ \leqslant 0$ 。在定理 4.4 中，我们将相干性与二维 Coxeter 群的曲率性质联系起来，这也是 [JW16，问题 4.6 和猜想 4.7]的主题。

另一方面，我们发现，在非正亏格的群中，不相干性是普遍现象（在 [AO96] 的少关系子随机模型中），这证实了 [Wis20，猜想 17.15(1)]。以下结果的 $m=2$ 情形由 Kielak 、 Kropholler 和 Wilkes 在 [KKW22，命题 212] 中得到。更精确的表述请参见第 4.3 节。

推论 1.8 （定理 4.5）。固定整数 $n\geqslant m>1$，并令

$$G=\langle s_1,\dots,s_m\mid r_1,\dots,r_n\rangle$$

为一个群，其关系元是在$\{s_1^{\pm1},\dots,s_m^{\pm1}\}$ 中长度至多为 l 的所有词中均匀随机选取的。当 G 不相干时的概率，随着 l 趋于无穷而趋近于1。

利用 L¨oh–Uschold 关于 L^2-贝蒂数可计算性的工作 [LU23]，我们得到以下算法性结果。

推论 1.9 (推论 4.6)。存在一种算法，给定一个虚拟紧特殊群 G，其 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)\ \leqslant 2$，即可确定 G 是否具有相干性。

此外，我们还获得了虚 RFRS 群之间相干性的一些刚性性质，这些性质源于 L^2-贝蒂数的消失具有良好的不变性。

推论 1.10 (推论 4.7)。设 G 和 H 是虚拟上同调维数至多为 2 的有限生成的虚 *RFRS* 群。如果 G 和 H 是

(1) 拟等距、(2) 测度等价，或(3) 虚拟紧特殊且拟有限同构，则 G 具有相干性当且仅当 H 具有相干性。

尽管有限呈示性众所周知是拟等距不变量，但相干性是否也具有这一性质仍是一个开放问题 [Wis20，第21节，问题 35]。（2）项之所以引人关注，部分原因在于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ 与非相干群 $F_2\times F_2$ 在测度意义下等价，而 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ 的（非）相干性是 Serre 提出的一个著名开放问题 [New74，第 734-735] 页。当然，我们并未

回答这个问题，因为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ 并非虚 RFRS。关于相干性的前有限不变性，目前似乎鲜有研究；这方面的一项成果是 Morales 定理，该定理指出，在有限生成剩余自由群中，相干性是一个有限剩余不变量 [Mor24，定理 D], ；这类群构成 RFRS 群的一个子类（不过他的结果适用于任意上同调维数）。另有研究表明，在上同调维数至多为二的虚拟紧特殊群中，虚拟自由群扩张循环群这一性质是一个有限剩余不变量 [HMV25，推论 A。9]

总之，回顾一下，若一个群 G是拟自由的，则它是剩余幂零的，并且存在某个自由群 F，使得 G 和 F 具有相同的一组幂零商（同构类）。Baumslag 的拟自由群猜想预言，任意有限生成的拟自由群 G 都满足 $\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$。我们证明，在维数 2 的情形下，拟自由群猜想等价于拟自由群是相干群这一猜想。猜想认为，所有拟自由群的上同调维数都至多为 2。

推论 1.11（推论 4.9）。若 G 是有限生成的拟自由群，且$\mathrm{cd}(G) \leqslant 2$，那么 G 满足拟自由群猜想，当且仅当 G 是相干的。

1.2. **相干群的 Novikov 同调**。在 [中，Kie20], Kielak 将 RFRS 群 G 的 L^2-同调与其系数取自 Novikov 环时的同调联系起来。与同态 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ 相关联的 Novikov 环 $'\mathbb{Q}[G]^{\chi}$ 是沿着 χ对 $\mathbb{Q}[G]$进行的完备化，可以将其视为由 G中的元素构成、系数为有理数的无穷级数之环，并且具有如下性质：对每个 $c \in \mathbb{R}$，支撑中仅有有限多个元素 g 满足 $\chi(g) \leqslant c$ （见定义 2.12）。

我们证明的关键步骤是表明，在二维群中，相干性意味着对于所有整数特征，相应的第二 Novikov 同调均消失。随后，我们利用 Kielak 的结果证明，这意味着第二个 L^2-Betti 数消失（见推论 3.7 的证明）。我们得到的精确结果如下，我们认为它本身也具有独立意义。

定理 1.12（定理 3.1 和命题 3.4）。设 G 是一个群，且 R 是一个环。

(1) 若 G 的每个有限生成子群都属于 $\mathrm{FP}_\infty(R)$ 型，则
$$\mathrm{H}_i\left(G;\widehat{R[G]}^{\chi}\right) = 0$$
对所有 $i > 1$ 以及所有整数特征 $\chi\colon\ G\ !\ \mathbb{Z}$。

(2) 若 $R[G]$ 是相干的，则
$$\mathrm{Tor}_i^{R[G]}\left(M, \widehat{R[G]}^{\chi}\right) = 0$$
对所有 $i > 0$、所有整数特征 $\chi\colon\ G\ !\ \mathbb{Z}$，以及所有右 $R[G]$-模M。换言之，$\widehat{\ \ }R[G]^{\chi}$ 作为一个 $R[G]$-模的弱维数至多为1 。

我们希望定理 1.12 能为证明 RFRS 群类之外的非相干性提供一种新的同调工具。借助 Sikorav 定理 [Sik87]，它还对相干二维群的 Σ-不变量的结构给出如下推论，这似乎是一个新结果。我们用 $\Sigma^i_{\mathbb{Q}}(G)$ 表示通常在 [BNS87, BR88] 中定义的 ith Σ-不变量 $\Sigma^i(G)$ 中的有理特征集合。

推论 1.13 (推论 3.3)。 设 G 是一个上同调维数至多为 2 的有限表示群。如果 G 是相干的，那么 $\Sigma^1_{\mathbb{Q}}(G) = \Sigma^2_{\mathbb{Q}}(G)$。

论文结构。在第 2 节中，我们回顾有限型模的无限乘积系数同调的性质，以及 Okun 和 Schreve 在 Kielak 和 Jaikin-Zapirain 的工作基础上得到的一项关于 Novikov 环同调的结果；这一结果是我们工作的核心。在第 3 节中，我们证明定理 1.12，表明相干性蕴含 Novikov 同调消失。这一关键结果用于证明定理 1.3；该定理表明，在有限性条件足够强的情况下， L^2-贝蒂数会消失。由此，我们得到定理 1.2，给出了凝聚性的全局障碍。本节还推导出推论 1.4 和推论 1.13。第 4 节包含推论 1.6 的证明，该推论刻画了上同调维数至多为 2 的相干 RFRS 群，并介绍了第 1.1 节所列主要结果的应用。特别地，我们对相干二维 Coxeter 群进行了分类。最后，在附录 A 中，Marco Linton 证明了定理 1.5。

致谢。 作者非常感谢 Andrei Jaikin-Zapirain 和 Dawid Kielak 在本文多个早期版本的讨论和评论中给予的帮助。第一作者获西班牙科学、创新与大学部资助，项目编号为 CEX2023-001347-S。第二作者获西班牙科学、创新与大学部资助，项目编号为 PID2024-155800NB-C33 和 EUR2025-164928。第二作者还要感谢 Dawid Kielak 以及牛津大学数学研究所的款待与支持，因为本文的研究基础是在他作为访问学者造访该研究所期间奠定的。

2. Preliminaries

本文中，环均假定为含幺结合环，环同态均保持单位元；除非另有说明，模均为左模。若 R 是一个环，且 G是一个群，则 $R[G]$表示相应的群环。

2.1. **模与群的有限性性质**。

定义 2.1 （有限性性质）。 设 R 是一个环。若 R-模 M 对于某个非负整数 n 存在一个投射分解，则称其为F 型 FP_n

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

使得对于所有 $i \leqslant n$， P_i 都是有限生成的。若存在如上所述的投射分解，使得所有模 P_i 都是有限生成的，则 M 是F 型FP_∞。此外，若存在某个非负整数 n_0 ，使得对于所有 $i \geq n_0$， $P_i = 0$ 成立，则称 M 为F 型 FP。右 R-模也有类似的定义。

若群 G满足F 型 $\mathrm{FP}_n(R)$（分别为 $\mathrm{FP}_\infty(R)$、$\mathrm{FP}(R)$），则称其为相应类型；这等价于平凡 $R[G]$-模 R 为 FP_n 型（分别为 FP_∞ 型、FP 型）。

定义 2.2 （维数）。 设 R 是一个环， M 是一个非平凡的 R-模。 M 的弱维数 为

$$\sup\left\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \mathrm{Tor}^n_R(L, M) \neq \{0\} \text{ for some right } R\text{-module } L\right\}.$$

{style id='1'>投射维数 </style}of M is the infimal length of a projective resolution for$M$. It is easy to see that the projective dimension is an upper bound for the weak dimension.

Let Gbe a 群. The 上同调维数 of G over R, denoted $\mathrm{cd}_R(G)$, is the 投射维数 of the trivial $R[G]$-module R.

如果 G 是 $\mathrm{FP}_n(R)$ 型且 $\mathrm{cd}_R(G) \leqslant n$，那么 G 是 $\mathrm{FP}(R)$ 型 [Bro94，命题 VIII.4.3]。

定义 2.3（增广理想）。设 R 是一个环，G 是一个群。同态

$$\varepsilon_R \colon R[G] \to R, \quad \sum_{g\in G} r_g g \mapsto \sum_{g\in G} r_g$$

称为 $R[G]$ 的增广映射。ε_R 的核是一个双边理想 $I_{R[G]}$，称为 $R[G]$ 的增广理想。

不难证明，G 是 $\mathrm{FP}_n(R)$ 型，当且仅当 $I_{R[G]}$ 作为一个 $R[G]$-模是 FP_{n-1} 型。

定义 2.4（相干性）。如果一个环的所有有限生成左理想都是有限表示的（或者用上面的术语来说，如果它所有 FP_0 型的左理想都是 FP_1 型），则称该环是（左）相干的。类似地，如果一个群的所有有限生成子群都是有限表示的，则称该群是相干的。对于一个环 R，如果一个群的所有有限生成子群都是 $\mathrm{FP}_2(R)$ 型，则称该群在 R 上是同调相干的。

群代数 $k[G]$ 是左相干的，当且仅当它是右相干的。因此，从现在起，我们将仅在其左相干或右相干时称 $k[G]$ 为相干。

我们将使用关于 R上同调相干性的以下刻画，它可由上述定义直接得出：G 在 R 上同调相干，当且仅当对于 G的所有有限生成子群H ， $I_{R[H]}$ 都是有限表示的 $R[H]$-模。

我们记录一个关于 FP_∞ 型模的标准事实，并附上证明以供读者参考。

引理 2.5。设 R 是一个环，M 是一个右 R-模。若对于某个 $n \geqslant 1$，M 是FP_{n+1} 型，则

$$\mathrm{Tor}_i^R\left(M, \prod R\right) = 0$$

对于所有 $0 < i \leqslant n$，且乘法映射

$$M \otimes_R \prod R \to \prod M, \quad m \otimes (r_i)_{i\in I} \mapsto (mr_i)_{i\in I}$$

是一个同构，其中直积取遍任意指标集 I。

证明。令

$$R^{d_{n+1}} \to R^{d_n} \to R^{d_{n-1}} \to \cdots \to R^{d_1} \to R^{d_0} \to M \to 0$$

是由有限生成自由 R-模构成的 M 部分分解。由于每个 d_i 都是有限的，乘法映射都是同构

$$R^{d_i} \otimes_R \prod R \xrightarrow{\cong} \prod R^{d_i}.$$

由于直幂函子 $\prod\colon L \mapsto \prod L$ 是正合的，因此链复形

$$\cdots \to R^{d_1} \otimes_R \prod R \to R^{d_0} \otimes_R \prod R \to 0$$

在大于零的次数上是正合的。因此，对所有 $0 < i \leqslant n$，$\mathrm{Tor}_i^R(M, \prod R) = 0$，从而证明了第一个结论。

由于张量化是右正合的，交换图

$$\begin{array}{ccccccc} R^{d_1} \otimes_R \prod R & \longrightarrow & R^{d_0} \otimes_R \prod R & \longrightarrow & M \otimes \prod R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod R^{d_1} & \longrightarrow & \prod R^{d_0} & \longrightarrow & \prod M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

具有正合的行。中间和左侧的垂直映射是同构，因为 d_0 和 d_1 都是有限的。第二个断言随即由五引理得出。□

在命题 3.4 的证明中，我们将使用 Chase 判别准则来判定环的相干性；该准则与前述引理密切相关。

定理 2.6 ([Cha60])。 环 R 右相干，当且仅当平坦左 R-模的任意直积都是平坦的。

2.2. L^2-贝蒂数。本节简要回顾 L^2-贝蒂数，并着重介绍对我们而言重要的内容。有关 L^2-不变量的更多背景知识，请参阅 [L¨uc02] 。设 G 是一个可数群，令 $\ell^2(G)$ 表示由 G 的元素构成、系数平方可和的复级数所组成的希尔伯特空间。 G 在自身上的左、右乘作用可延拓为 G 在 $\ell^2(G)$ 上的左、右作用。我们还可以将 G 在 $\ell^2(G)$ 上的右作用延拓为 $\mathbb{C}[G]$ 在 $\ell^2(G)$ 上的作用，从而将 $\mathbb{C}[G]$ 视为 $\mathcal{B}(\ell^2(G))$ 的子代数，即 $\ell^2(G)$ 上的有界线性算子代数。 G 的群冯·诺依曼代数$\mathcal{N}(G)$，是 $\ell^2(G)$ 上与 G的左作用相交换的有界算子代数。注意， $\mathcal{N}(G)$ 包含复群代数 $\mathbb{C}[G]$。环 $\mathcal{N}(G)$ 是有限冯·诺依曼代数。此外， $\mathcal{N}(G)$ 关于非零因子集满足左（及右）Ore 条件（此结果由 S. K. Berberian 在 [Ber82] 中证明）。我们将 $\mathcal{U}(G)$ 的左（分别为右）经典分式环称为附属于 G 的无界算子环。利用 $\mathcal{N}(G)$ 的迹泛函，可以在所有 $\mathcal{N}(G)$-模上定义维数函数（参见[L¨uc02，第 6.1 和 6.2] 章），并对每个非负整数 n 定义 G 的第 $n$$L^2$个贝蒂数为

$$b_n^{(2)}(G) = \dim_{\mathcal{N}(G)} \mathrm{H}_n(G; \mathcal{N}(G)).$$

目前给出的 L^2-贝蒂数描述依赖于 $\dim_{\mathcal{N}(G)}$这一复杂定义。然而，我们将研究满足强 Atiyah 猜想的群，在这种情况下，定义要简单得多。我们给出无挠群的强 Atiyah 猜想表述。给定 $\mathbb{C}$的一个子域k， k上的 *Linnell* 环 $\mathcal{D}(k[G])$ 是 $k[G]$ 在$\mathcal{U}(G)$中的除闭包。

猜想 2.7 (关于 $k \subseteq \mathbb{C}$ 的强 Atiyah 猜想)。 设 G 是一个无挠可数群， k 是 $\mathbb{C}$的一个子域。*Linnell* 环 $\mathcal{D}(k[G])$ 是一个除环。

Linnell 和 Schick 证明了，这一陈述等价于通常以 von Neumann 维数函数表述的强 Atiyah 猜想（参见 [Lin98，引理 12.3] 和 [Sch02，引理 3]）。尽管强 Atiyah 猜想通常仍未解决，但它已在许多大类

群中得到证明（包括 RFRS 群 [Sch02，定理 1], 参见 [JZ19，推论 1.2]）。对于满足有理数域 $k \subseteq \mathbb{C}$ 上强 Atiyah 猜想的群，我们有

$$b_n^{(2)}(G) = \dim_{\mathcal{D}(k[G])} \mathrm{H}_n(G; \mathcal{D}(k[G]))$$

其中，$\dim^{\mathcal{D}(k[G])}$ 只是除环上模的通常秩。

我们的结果对于 L^2-贝蒂数的某种自然的正特征推广也成立，我们现在将介绍它。若一个群的所有非平凡有限生成子群都存在到 $\mathbb{Z}$ 的满同态，则称该群具有局部可示性。

定义 2.8（Hughes-free 除环）。设 G 是一个具有局部可示性的群，k 是一个域，并且 $k[G] \hookrightarrow \mathcal{D}$ 是到某个除环中的嵌入。我们将 $k[G]$ 视为 $\mathcal{D}$ 的子环。对于 $N \leqslant G$，令 $\mathcal{D}_N$ 表示 $k[N]$ 在 $\mathcal{D}$ 中的除闭包。

若 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_G$ 且乘法映射对 $k[G]$ 而言满足以下条件，我们称 $\mathcal{D}$ 为一个 *Hughes-free* 除环：

$$\mathcal{D}_N \otimes_{k[N]} k[H] \to \mathcal{D}, \quad x \otimes y \mapsto xy$$

当 $H \leqslant G$ 有限生成且 $N \triangleleft H$ 满足 $H/N \cong \mathbb{Z}$ 时，该映射是单射。

Hughes 证明，若 G是局部可示的，且 $k[G]$ 存在一个 Hughes-free 除环 $\mathcal{D}$，那么在 $k[G]$-环同构意义下，该除环唯一 [Hug70]。因此，我们称之为 $k[G]$的 Hughes-free 除环，并记作 $\mathcal{D}_{k[G]}$。Jaikin-Zapirain 和 L´opez- ´Alvarez 证明，若 G 是局部可示的，则 G 满足关于 $\mathbb{C}$ [的强 Atiyah 猜想 ´JZL20]A。此外，对于任意子环 $k \subseteq \mathbb{C}$， $k[G]$的 Linnell 环都满足 Hughes-free 条件，因此，根据同构意义下的唯一性，对于局部可示群G， $\mathcal{D}(k[G])$ 可识别为 $\mathcal{D}_{k[G]}$ 。以下关于局部可示群的 L^2-贝蒂数的推广自然地呈现出来。

定义 2.9（$\mathcal{D}_{k[G]}$-贝蒂数）。设 G 是一个局部可示群，k 是一个域。若 $\mathcal{D}_{k[G]}$ 存在，则定义

$$b_n^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = \dim_{\mathcal{D}_{k[G]}} \mathrm{H}_n(G; \mathcal{D}_{k[G]}).$$

更一般地，若 M 是一个右 $k[G]$-模，则我们定义

$$\beta_n^{\mathcal{D}_{k[G]}}(M) = \dim_{\mathcal{D}_{k[G]}} \mathrm{Tor}_n^{k[G]}(M, \mathcal{D}_{k[G]}).$$

因此，$b_n^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = \beta_n^{\mathcal{D}_{k[G]}}(k)$。

根据 [JZ21，推论 1.3]，对于任意域 k 以及任意残余 {局部可示且可和的}群 G， $\mathcal{D}_{k[G]}$ 均存在。另请注意，若 k 是特征零域，则 $b_n^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = b_n^{(2)}(G)$。

在第 4 节中，我们将经常使用 L^2-贝蒂数与欧拉示性数之间的联系。设 G 是一个具有紧致分类空间的群。我们将 G 的欧拉示性数定义为

$$\chi(G) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n b_n(G; \mathbb{Q}),$$

或者等价地，取每个维数上的胞腔交错求和（在 G 的任意一个紧致分类空间中）。如果 G 包含一个有限指数子群 H，且该子群存在紧致分类空间，那么我们定义 $\chi(G) := \chi(H)/[G : H]$。这一定义是良定的；与用贝蒂数定义相比，用胞腔定义更容易看出这一点。

前一种定义则是用贝蒂数表示的。G 的 L^2-贝蒂数与其欧拉示性数之间存在非常直接的关系。

引理 2.10 ([卢¨uc02，定理1.35(2)])。若 G 是一个包含有限指数子群 H 的群，且该子群具有紧致分类空间，则

$$\chi(G) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n b_n^{(2)}(G).$$

特别地，若 G （虚拟地）具有紧致二维分类空间，则 $\chi(G) > 0$ 蕴含 $b_2^{(2)}(G) > 0$。

2.3. **RFRS 群与 Novikov 环**。

定义 2.11。若存在一列有限指数正规子群 $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots$，满足 $\bigcap_{i\geqslant 0} G_i = \{1\}$，则称群 G 为剩余有限有理可解群，简称$RFRS$群，且

$$\ker(G_i \to \mathbb{Q}\otimes G_i/[G_i,G_i]) \leqslant G_{i+1}$$

对所有 $i \geqslant 0$ 均成立。

根据定义，很容易看出 RFRS 群是残余局部可示的，并且虚阿贝尔。因此，由 [JZ21, Corollary 1.3] 可知，对于所有域 k 和 RFRS 群 G，$\mathcal{D}_{k[G]}$ 都存在。

设 G 是一个群，R 是一个环。若 $x = \sum_{g\in G} a_g g$ 是一个形式级数，且对于所有 $g \in G$ 都有 $a_g \in R$，则定义

$$\operatorname{supp}(x) = \{g \in G : a_g \neq 0\}$$

并称其为 x 的支撑。注意，这里并不要求 supp(x) 有限。

定义 2.12. 设 G 是一个群，R 是一个环，且 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$ 是一个群同态。与 χ 相关联的 $R[G]$ 的*Novikov* 环 是环

$$\widehat{R[G]}^{\chi} := \left\{ x = \sum_{g\in G} a_g g \ :\ a_g \in R,\ \left|\operatorname{supp}(x) \cap \chi^{-1}((-\infty, c])\right| < \infty \text{ for all } c \in \mathbb{R} \right\}.$$

‘$R[G]^{\chi}$ 上的环运算自然延拓了 $R[G]$ 上的环运算。

在 [中，Kie20], Kielak 证明了 RFRS 群的 L^2-同调与其有限指数子群在 Novikov 环系数下的同调密切相关。Jaikin-Zapirain [在 $\mathcal{D}_{k[G]}$-Betti 数方面将这一原理推广到了任意域 k，见], JZ21, 附录；Okun 和 Schreve [OS25] 给出了简洁的总结，见以下结果。

定理 2.13 ([OS25，定理 7。1])。设 k 是一个域，设 G 是一个有限生成的 *RFRS* 群，且 M 是一个右 $k[G]$-模，属于 FP_{n+1} 型。存在一个有限指数子群 $H \leqslant G$ 以及一个特征 $\chi\colon H ! \mathbb{Z}$，使得

$$\operatorname{Tor}_i^{k[H]}\left(M, \widehat{k[H]}^{\chi}\right) = \left(\widehat{k[H]}^{\chi}\right)^{[G:H]\beta_i^{\mathcal{D}_{k[G]}}(M)}$$

对所有 $i \leqslant n$，其中 M 通过限制视为一个 $k[H]$-模。

注记 2.14。这实际上只是对 [OS25 定理 7.1]，的另一种表述，该定理以有限生成自由$k[G]$-模所成的有限链复形的同调来表述。要得到这种形式，只需注意到 M 存在一个由有限生成自由 $k[G]$-模构成的分解，因为它是 FP_∞ 型；而 Tor_n 可以通过将此分解截断至长度 $n+1$ 来计算（因此它就是有限生成自由模所成的有限链复形的同调）。

3. Vanishing of higher Novikov and L^2-homology

我们首先证明，高阶 Novikov 同调不消失会阻碍同调相干性的强化形式。

定理 3.1。设 R 为一个环， G为一个群。若 G 的每个有限生成子群都属于类型 $\mathrm{FP}_{n+1}(R)$，则

$$\mathrm{H}_i\left(G;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)=0$$

对所有 $1<i\leqslant n$ 以及所有整数特征 $\chi\colon\ G\,!\,\mathbb{Z}$。

证明。若 χ 为零特征，则该断言显然成立，因此从现在起我们假设 χ 为满射，并且 $t\in G$ 满足 $\chi(t)=1$。令 $N=\ker\chi$。与扩张 $1\to N\to G\to\mathbb{Z}\to 1$ 相关的、系数取自‘$R[G]^{\chi}$ 的 Lyndon–Hochschild–Serre 谱序列为

$$E^2_{p,q}=\mathrm{H}_p\left(\mathbb{Z};\mathrm{H}_q\left(N;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)\right)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{H}_{p+q}\left(G;\widehat{R[G]}^{\chi}\right).$$

我们将证明

$$\mathrm{H}_q\left(N;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)=0 \tag{1}$$

对所有 $0<q\leqslant n$ 均成立。由此可推出

$$\mathrm{H}_p\left(\mathbb{Z};\mathrm{H}_0\left(N;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)\right)\cong\mathrm{H}_p\left(G;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)$$

对所有 $p\leqslant n$ 均成立；又由于 $\mathrm{cd}_R(\mathbb{Z})=1$，便可得到所需结果。

现在证明 (1)。{v1} 中的每个元素 $\widehat{R[G]}^{\chi}$ 都可以写成无穷级数 $\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i t^i$，其中 $\lambda_i\in R[N]$，并且存在一个 $n_0\in\mathbb{Z}$，使得对所有 $i\leqslant n_0$，$\lambda_i=0$。因此 ，存在一个包含映射

$$\widehat{R[G]}^{\chi}\hookrightarrow\prod_{\mathbb{Z}}R[N],\quad\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i t^i\mapsto(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

从现在起，我们用 $\prod R[N]$ 表示 $\prod_{\mathbb{Z}}R[N]$。还有一个类似定义的包含映射‘$R[G]^{-\chi}$ ‹! $\prod_{\mathbb{Z}}R[N]$，这两个包含映射共同诱导出短正合列

$$0\to R[G]\to\widehat{R[G]}^{\chi}\oplus\widehat{R[G]}^{-\chi}\to\prod R[N]\to 0$$

$R[N]$ 模。由于 $R[G]$ 是自由的 $R[N]$模，对所有 $q>0$，$\mathrm{H}_q(N;\,R[G])=0$。因此，由上述短正合列得到的 N 同调长正合列给出包含关系

$$\mathrm{H}_q\left(N;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)\oplus\mathrm{H}_q\left(N;\widehat{R[G]}^{-\chi}\right)\hookrightarrow\mathrm{H}_q\left(N;\prod R[N]\right),$$

对所有 $q>0$均成立。因此，问题归结为证明对所有 $0<q\leqslant n$，$\mathrm{H}_q(N;\prod R[N])=0$。

考虑 $R[N]$-模的增广正合列

$$0\to I_{R[N]}\to R[N]\to R\to 0,$$

它在函子 $\mathrm{Tor}_q^{R[N]}(-,\prod R[N])$ 中诱导出一个长正合列。由于对所有 $q>0$，$\mathrm{Tor}_q^{R[N]}(R[N],\prod R[N])=0$，因此存在同构

$$\mathrm{H}_{q+1}\left(N;\prod R[N]\right)=\mathrm{Tor}_{q+1}^{R[N]}\left(R,\prod R[N]\right)\cong\mathrm{Tor}_q^{R[N]}\left(I_{R[N]},\prod R[N]\right) \tag{2}$$

对于 $q>0$，并且存在一个正合列

$$0\to\mathrm{H}_1\left(N;\prod R[N]\right)\to I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\to\prod R[N]. \tag{3}$$

令 $\{N_j\}$ 为 N 的所有有限生成子群构成的有向集。那么$N=\varinjlim_j N_j$，因此 $I_{R[N]}=\varinjlim_j I^N_{R[N_j]}$，其中 $I^N_{R[N_j]}$ 表示由 $I_{R[N_j]}$生成的 $R[N]$ 的右理想；它作为右$R[N]$-模与 $I_{R[N_j]}\otimes_{R[N_j]}R[N]$ 同构。根据假设，N_j 为 $\mathrm{FP}_{n+1}(R)$ 型，因此 $I_{R[N_j]}$ 作为 $R[N_j]$-模为 FP_n 型，进而 $I^N_{R[N_j]}$ 作为 $R[N]$-模为 FP_n 型。由于 Tor 函子与归纳极限可交换，引理 2.5 得出

$$\mathrm{Tor}_q^{R[N]}\left(I_{R[N]},\prod R[N]\right)\cong\varinjlim_j\mathrm{Tor}_q^{R[N]}\left(I^N_{R[N_j]},\prod R[N]\right)=0$$

对所有 $0<q<n$。由 (2)，我们得到 $\mathrm{H}_q(N;\prod R[N])=0$，对所有 $1<q\leqslant n$。

为完成证明，我们必须证明映射

$$I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\to\prod R[N]$$

由 (3) 给出的映射是单射。假设 $x\in I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]$ 属于核。由于

$$I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\cong\varinjlim_j I^N_{R[N_j]}\otimes_{R[N]}\prod R[N],$$

存在一个指标 j 和一个元素 $x'\in I^N_{R[N_j]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]$，使得 x' 在由包含映射诱导的同态下映到 x

$$I^N_{R[N_j]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\to I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N].$$

复合映射

$$I^N_{R[N_j]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\to I_{R[N]}\otimes_{R[N]}\prod R[N]\to\prod R[N]$$

由引理 2.5 可知该映射是单射。因此，由于 x' 在此同态下映到零，我们必有 $x'=0$。但于是 $x=0$，正如所需。 □

定理 3.1 对相干群的 Σ-不变量有有趣的推论。根据 Sikorav 定理 [Sik87] 及其高维版本（例如参见[Fis24, 定理 5.3]），一个 G $\mathrm{FP}_n(R)$ 型群的 i阶 Σ-不变量为

$$\Sigma^i(G;R)=\left\{\chi\in\mathrm{H}^1(G;\mathbb{R})\smallsetminus\{0\}\ :\ \mathrm{H}_j\left(G;\widehat{R[G]}^{\chi}\right)=0\text{ for all }j\leqslant i\right\},$$

只要 $i\leqslant n$。我们记 $\Sigma^i_{\mathbb{Q}}(G;R)=\Sigma^i(G;R)\cap\mathrm{H}^1(G;\mathbb{Q})$。$\Sigma$-不变量控制余阿贝尔子群的有限性性质。以下是一个代表性结果。

定理 3.2 ([BR88])。 设 G 是一个关于某个环 R 的 $\mathrm{FP}_n(R)$ 型群，且$\chi\colon G\to\mathbb{Z}$是一个非平凡特征。那么，$\ker\chi$是 $\mathrm{FP}_n(R)$ 型，当且仅当$\pm\chi\in\Sigma^n(G;R)$。

因此，显然，若 $\chi\colon G\to\mathbb{Z}$满足 $\pm\chi\in\Sigma^1(G;R)$，但不满足 $\chi\notin\Sigma^2(G;R)$，则 G 是非相干的，而非相干性的见证是 $\ker\chi$。特别地，若 G 是一个相干群，且其第一 Σ-不变量具有对称性，则 $\Sigma^1_{\mathbb{Q}}(G;R)=\Sigma^2_{\mathbb{Q}}(G;R)$。定理 3.1 表明，至少在同调维数为二时，对称性这一要求并非必要。

推论 3.3. 设 G 是一个 *FP(R)* 型群，且对于某个环 R，有 $\mathrm{cd}_R(G)\leqslant 2$ 。若 G 关于 R 是同调相干的，则 $\Sigma^1_{\mathbb{Q}}(G;R)=\Sigma^2_{\mathbb{Q}}(G;R)$。

证明。 若 G 的一个有限生成子群是 $\mathrm{FP}_2(R)$ 型，则它自动也是 $\mathrm{FP}_\infty(R)$ 型，因为 $\mathrm{cd}_R(G)\leqslant 2$。因此，根据定理 3.1，对于所有整数特征 $\chi\colon G\to\mathbb{Z}$，都有 $\mathrm{H}_2(G;{}_{R[G]^\chi})=0$ 。结论随即由 $\Sigma^i_{\mathbb{Q}}(G;R)$ 的定义得出。□

若将定理 3.1 中关于 G 的同调相干性假设加强为 $R[G]$ 相干的假设，则可得到关于“$R[G]^\chi$ 对整数特征的性质的更强结论。

命题 3.4. 设 R 为一个环， G 为一个群。若 $R[G]$ 相干，则对于任意整数特征$\chi\colon G\to\mathbb{Z}$，$\widehat{R[G]^\chi}$ 作为 $R[G]$- 模的弱维数至多为 1 。

证明. 我们需证明，对于任意右 $R[G]$-模 M，都有

$$\mathrm{Tor}_i^{R[G]}\left(M,\widehat{R[G]^\chi}\right)=0$$

对所有 $i>1$ 均成立。令 $N=\ker\chi$。存在一个谱序列

$$E^2_{p,q}=\mathrm{H}_p\left(\mathbb{Z};\mathrm{Tor}_q^{R[N]}\left(M,\widehat{R[G]^\chi}\right)\right)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{Tor}_{p+q}^{R[G]}\left(M,\widehat{R[G]^\chi}\right),$$

因此，只需证明对所有 $q>0$，$\mathrm{Tor}_q^{R[N]}(M,{}_{R[G]^\chi})=0$，因为 $\mathrm{cd}_R(\mathbb{Z})=1$。如定理 3.1 的证明所示，我们有一个短正合列

$$0\to R[G]\to\widehat{R[G]}^{\chi}\oplus\widehat{R[G]}^{-\chi}\to\prod R[N]\to 0$$

其中，乘积以 $\mathbb{Z}$ 为指标。由于 $R[N]$ 相干，根据 Chase 判别准则（定理 2.6），$\prod R[N]$ 作为 $R[N]$-模是平坦的。 $R[G]$ 也同样平坦，因为它是一个自由的 $R[N]$-模。因此，与上述短正合列相关的 $\mathrm{Tor}^{R[N]}(M,-)$ 长正合列立即给出

$$\mathrm{Tor}_q^{R[N]}\left(M,\widehat{R[G]^\chi}\right)=0$$

对所有 $q>0$ 均成立，正如所需。 □

利用 Novikov 同调与 L^2-同调（及其正特征类比）之间的关系，我们得到以下结果。

定理 3.5。 设 k 为一个域，且 G 为一个 *RFRS* 群。

(1) 如果 G 的每个有限生成子群均为 $\mathrm{FP}_{n+1}(k)$型，则

$$b_i^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = 0$$

对所有 $1 < i \leqslant n$。

(2) 如果 $k[G]$ 是相干的，那么作为一个 $k[G]$-模， $\mathcal{D}_{k[G]}$ 的弱维数至多为1 。

(3) 如果 G 是 *FP*(k)型，并且 G 的每个有限生成子群都是$\mathrm{FP}(k)$型，那么存在一个次正规列

$$G_n \trianglelefteqslant G_{n-1} \trianglelefteqslant \cdots \trianglelefteqslant G_1 \trianglelefteqslant G_0 = G$$

使得 G_n 是自由群，且每个相邻商群 G_i/G_{i+1} 都是循环群或有限群。

特别地，作为一个 $k[G]$-模， $\mathcal{D}_{k[G]}$ 的弱维数至多为1 。

证明。 (1) 令 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为G的所有有限生成子群构成的有向集，因此 $G = \varinjlim_\lambda G_\lambda$。我们首先证明

$$\mathrm{H}_i\left(G_\lambda; \mathcal{D}_{k[G_\lambda]}\right) = 0$$

对所有 $1 < i \leqslant n$ 及所有 $\lambda \in \Lambda$均成立。由于 G_λ 是 FP$_{n+1}$(k) 型，我们可以应用定理 2.13，得到一个有限指数子群 $H_\lambda \leqslant G_\lambda$ 和一个非平凡的整数特征 $\chi\colon H_\lambda \to \mathbb{Z}$，使得

$$\mathrm{H}_i\left(H_\lambda; \widehat{k[H_\lambda]^\chi}\right) = \left(\widehat{k[H_\lambda]^\chi}\right)^{[G_\lambda:H_\lambda] b_i^{\mathcal{D}_{k[G_\lambda]}}(G_\lambda)}$$

对所有 $i \leqslant n$ 均成立。但根据定理 3.1，我们知道 $\mathrm{H}_i(H_\lambda; {}'k[H_\lambda]^\chi) = 0$ 对所有$1 < i \leqslant n$均成立，因此必有 $b_i^{\mathcal{D}_{k[G_\lambda]}}(G_\lambda) = 0$ 对所有 $1 < i \leqslant n$ 均成立，从而证明了该断言。

现在， $I_{k[G]} = \varinjlim_! I^G_{k[G_\lambda]}$，因此对所有 $0 < i \leqslant n-1$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{i+1}(G; \mathcal{D}_{k[G]}) &= \mathrm{Tor}_i^{k[G]}(I_{k[G]}, \mathcal{D}_{k[G]}) \\
&= \varinjlim \mathrm{Tor}_i^{k[G]}(I^G_{k[G_\lambda]}, \mathcal{D}_{k[G]}) \\
&= \varinjlim \mathrm{Tor}_i^{k[G_\lambda]}(I_{k[G_\lambda]}, \mathcal{D}_{k[G]}) \\
&= \varinjlim \mathrm{Tor}_i^{k[G_\lambda]}(I_{k[G_\lambda]}, \mathcal{D}_{k[G_\lambda]}) \otimes_{\mathcal{D}_{k[G_\lambda]}} \mathcal{D}_{k[G]} \\
&= \varinjlim \mathrm{H}_{i+1}(G_\lambda; \mathcal{D}_{k[G_\lambda]}) \otimes_{\mathcal{D}_{k[G_\lambda]}} \mathcal{D}_{k[G]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

根据 Shapiro 引理，以及 Tor 与直极限可交换且$\mathcal{D}_{k[G]}$ 在 $\mathcal{D}_{k[G_\lambda]}$上是平坦的这一事实。这证明 $b_i^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = 0$ 对所有 $1 < i \leqslant n$ 均成立。

（2）令 M 为任意一个 $k[G]$-模；我们的目标是证明

$$\mathrm{Tor}_i^{k[G]}\left(M, \mathcal{D}_{k[G]}\right) = 0$$

对所有 $i > 1$均成立。下面的断言将问题归结为 G 有限生成的情形，以便我们可以应用定理 2.13）。

断言 3.6。 若对每个有限生成子群 G_0 都满足$\mathrm{Tor}_i^{k[G_0]}(M, \mathcal{D}_{k[G_0]}) = 0$ G，则 $\mathrm{Tor}_i^{k[G]}(M, \mathcal{D}_{k[G]}) = 0$。

证明。 Gr¨ater 证明了 $\mathcal{D}_{k[G]}$ 具有强 Hughes-free 性质 [Gr¨a20，推论 8。3], 这意味着，对于所有子群 $G_0 \leqslant G$，乘法映射 $k[G] \otimes_{k[G_0]} \mathcal{D}_{k[G_0]} !\ \mathcal{D}_{k[G]}$都是单射。因此， $\mathcal{D}_{k[G]} = \varinjlim_! k[G] \otimes_{k[G_0]} \mathcal{D}_{k[G_0]}$ 作为

$k[G]$-模，其中有向集遍历G的所有有限生成子群 G_0 。根据 Shapiro 引理，这意味着

$$\mathrm{Tor}_i^{k[G]}(M, \mathcal{D}_{k[G]}) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_i^{k[G_0]}(M, \mathcal{D}_{k[G_0]}) = \{0\},$$

如所愿。 ◇

从现在起，我们假设 G 是有限生成的。记 $M = \text{lim–!}\ _\lambda M_\lambda$，其中 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个由有限表示 $k[G]$-模组成的有向系统。我们将证明

$$\mathrm{Tor}_i^{k[G]}(M_\lambda, \mathcal{D}_{k[G]}) = 0$$

对所有 $i > 1$ 和 $\lambda \in \Lambda$ 都成立。由于 $k[G]$ 是相干的， M_λ 是 FP$_\infty$ 型，因此我们可以应用定理 2.13，找到一个有限指数子群 $H \leqslant G$ ，使得

$$\mathrm{Tor}_i^{k[H]}\left(M_\lambda, \widehat{k[H]}^\chi\right) = \left(\widehat{k[H]}^\chi\right)^{[G:H]\beta_i^{\mathcal{D}_{k[G]}}(M_\lambda)}.$$

但是，根据命题 3.4，‘$k[H]^\chi$ 作为 $k[H]$-模的弱维数至多为 1，因此对于 $i > 1$，上面一行中的模必定为零，由此我们得到对所有 $i > 0$，Tor$_i$(M_λ， $\mathcal{D}_{k[G]}$) $= 0$ ，如所声称。

最后，

$$\mathrm{Tor}_i^{k[G]}(M, \mathcal{D}_{k[G]}) \cong \varinjlim_\lambda \mathrm{Tor}_i^{k[G]}(M_\lambda, \mathcal{D}_{k[G]}) = 0,$$

因此， $\mathcal{D}_{k[G]}$ 作为 $k[G]$-模的弱维数至多为 1。

(3) 由于“所有有限生成子群都是 FP$_\infty$(k) 型”这一性质对子群封闭，因此 (1) 意味着对所有子群$H \leqslant G$ 以及所有 $i > 1$， $b_i^{\mathcal{D}_{k[H]}}$ (H) 均消失。所需结论随即由 [Fis25, 定理 5.7] 得出。□

在二维情形下，我们得到主要定理，它完整刻画了 RFRS 群类中的相干性。要将引言中的定理 1.2 作为该结果的推论得出，取 $k = \mathbb{Q}$ ，并注意到相干性和 L^2-贝蒂数的消失都是拟同构不变量。

推论 3.7。 设 G 是一个 *RFRS* 群， k 是一个满足 $\mathrm{cd}_k(G) \leqslant 2$ 的域。那么，G 是同调相干的，当且仅当 $b_2^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = 0$。

证明。 如果 G是同调相干的，那么 G的每个有限生成子群都是 FP(k) 型，因为 cd$_k$(G) $\leqslant 2$。因此，定理 3.5 的第 (1) 项表明 H$_2$(G; $\mathcal{D}_{k[G]}$) $= 0$。反过来，如果 H$_2$(G; $\mathcal{D}_{k[G]}$) $= 0$，那么根据 [Fis26，推论 3.9]，G 是虚拟自由群扩张循环群，因而由 [FH99]可知是（同调）相干的。□

如 Linton 在附录中所示（见引理 A.7 和注 A.8），如果 G是虚拟紧特殊的，并且关于 $\mathbb{Q}$ 是同调相干的，那么 G 的所有有限生成子群都是 FP($\mathbb{Q}$) 型。紧特殊这一假设并非必需，因为任何有限生成特殊群都嵌入某个有限生成右殆角 Artin 群。右殆角 Artin 群具有一个层级，该层级在其有限生成子群上诱导出所需的层级，因此注 A.8 仍然适用。由此，我们得到关于相干特殊群的以下结构性结果。

推论 3.8。 设 G 是一个有限生成的虚拟特殊群。如果 G关于 $\mathbb{Q}$ 是同调相干的，那么存在一个次正规列

$$G_n \trianglelefteqslant G_{n-1} \trianglelefteqslant \cdots \trianglelefteqslant G_1 \trianglelefteqslant G_0 = G$$

其中 G_n 是自由的，并且每个相邻商群 G_i/G_{i+1} 都是循环群或有限群。

证明。 这由推论前一段中的讨论以及定理 3.5(3)的应用得出。 □

推论 3.8 启发了以下猜想，该猜想提出了局部可示群这一类群中相干性的分类（比较 [Fis25，猜想 1.4]）。

猜想 3.9。 设 G 是一个虚局部可示群。以下条件等价:

(1) G 是相干的；(2) G 的每个有限生成子群都属于类型 $\mathrm{FP}_\infty(\mathbb{Q})$；(3) 每个子群 $H \leqslant G$ 对所有 $n > 1$ 都满足 $b_n^{(2)}(H) = 0$ 。

因此，对于虚拟 RFRS 群，由定理 3.5 可知蕴含关系 (2) ⇒(3) 成立；此外，对于特殊群，由引理 A.7 和注 A.8（以及推论 3.8 前的注释）可知蕴含关系 (1) ⇒(2) 成立。推论 4.1 已彻底解决了上同调维数至多为二的虚拟 RFRS 群的猜想。

我们以两个例子结束本节。首先，我们指出这种证明非相干性的方法可能存在局限，即便是在上同调维数为二的局部可示群中也是如此。若一个群 G 可表示为某些整数 m {style id='16'}， $n \geqslant 0$ 所对应的扩张 1 {style id='4'}! F_m {style id='7'}! G {style id='10'}! F_n {style id='13'}! 1，其中 F_n 是由 n 个生成元生成的自由群，则称该群为自由群扩自由群。若 $b_1(G) > n$，则自由群扩自由群具有过多同调。在 [KVW24 的定理 4.1]，中，Kropholler、Vidussi 和 Walsh 给出了一个自由群扩自由群的例子，其所有有限指数子群都没有过多同调。尽管人们预计自由群扩自由群是非相干的 [Wis20，问题24]，，但这个例子表明，有限指数子群的 Novikov 同调无法检测这一点。

例 3.10. 设 $G = F_m \rtimes F_n$ 是一个没有过多同调的自由群扩自由群， k 是一个域。我们断言

$$\mathrm{H}_2\left(G; \widehat{k[G]}^{\chi}\right) = 0$$

对所有整数特征 $\chi\colon\ G\ !\ \mathbb{Z}$。

固定一个整数特征 $\chi\colon\ G\ !\ \mathbb{Z}$。与扩张 1 ! F_m ! G ! F_n ! 1 相关的 Lyndon–Hochschild–Serre 谱序列形式如下:

$$E^2_{p,q} = \mathrm{H}_p\left(F_n; \mathrm{H}_q\left(F_m; \widehat{k[G]}^{\chi}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{p+q}\left(G; \widehat{k[G]}^{\chi}\right).$$

我们证明，对所有 $q > 0$，$\mathrm{H}_q(F_m; \widehat{k[G]}^{\chi}) = 0$ ，这将推出所需结论，因为 $\mathrm{cd}_k(F_n) = 1$。注意，我们只需对 $q = 1$ 检验这一点，因为 $\mathrm{cd}_k(F_m) = 1$。

由于 G没有过多同调， χ 必定经由 $G\ !\ F_n$分解，因此$N = \ker \chi$ 包含 F_m。与定理 3.1 的证明一样，只需证明

$$\mathrm{H}_1\left(F_m; \prod k[N]\right) = 0.$$

由于 $k[N]$ 作为 $k[F_m]$-模是平坦的，而 $k[F_m]$ 是相干的（事实上，它具有更强的性质，即是一个自由理想环 [Coh06]），因此 $\prod k[N]$ 作为 $k[F_m]$-模是平坦的（定理 2.6），由此得到所述的消失结论。

接下来我们证明，虽然高阶 L^2同调消失刻画了二维 RFRS 群中的相干性，但也存在上同调维数无限的非相干可解 RFRS 群。这类群作为 $\mathbb{Q}[G]$-模时，其 $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 的弱维数为零，因此其所有子群的所有 L^2-贝蒂数都消失。

例 3.11. 设 $G = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$。首先，由于 G 是局部可示的（因此具有唯一乘积性质），对于任意域 k， $k[G]$ 都是整环；又由于 G 是可解的，根据 [Tam54]， $k[G]$实际上是一个 Ore 整环。因此， $\mathcal{D}_{k[G]}$ 存在，且作为 $k[G]$-模时弱维数为零。但是， G 是非相干的，因为它本身是有限生成的，却不是有限表示的（例如参见 [Bau61]）。

现在我们证明 G 是 RFRS，利用这样一个事实：有限生成群是 RFRS，当且仅当它是剩余 {多重$\mathbb{Z}$且虚阿贝尔} [的（OS25，定理 6.3]）。设 $(v,\ t)$ $\in \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\right) \rtimes \mathbb{Z} = G$ 是一个非平凡元素，其中 $t \in \mathbb{Z}$ 且$v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ，并且对每个 i 都有 $v_i \in \mathbb{Z}$ 。若 t 非平凡，则所选元素在 G的显然 $\mathbb{Z}$ 商群中仍非平凡，而该商群显然是多重$\mathbb{Z}$ 且虚阿贝尔的。因此，假设 v 非平凡。对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，存在一个商映射

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}, \quad (u_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} (u_{jn}, u_{1+jn}, \dots, u_{n-1+jn}) .$$

这个映射定义良好，因为元素 u_i 中只有有限多个可能非平凡。此外，这个映射可扩展为一个商映射

$$G = \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\right) \rtimes \mathbb{Z} \to \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}\right) \rtimes \mathbb{Z},$$

在该商群中， $\mathbb{Z}$ 通过模 n循环置换坐标。对每个 n，该商群都是多重$\mathbb{Z}$的；此外，由于 $\mathbb{Z}$ 的作用具有有限阶，它还是虚阿贝尔的。通过选择足够大的 n ，我们可以确保 $(v,\ t)$ 在该商群中的像非平凡，由此证明 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ 是 RFRS。

4. Applications of the main result

4.1. 相干 RFRS 群的刻画。本节将应用推论 3.7，推导出在上同调维数为二的 RFRS 群这一类中，许多性质都等价于相干性。

我们回顾一下，若对于每个胞腔浸入 $Y \looparrowright X$，都有 $\chi(Y) \leqslant 0$ 或 $\pi_1(Y) = \{1\}$，则二维复形 X 具有非正浸入。

推论 4.1。设 G 是有限生成的虚 *RFRS* 群， k 是一个域，并且$\mathrm{cd}_k(G) \leqslant 2$。以下条件等价：

(1) G 是相干的；(2) $k[G]$是相干的；(3) G 关于 k 是同调相干的；(4) $\mathrm{H}_2(H; k)$ 对于每个有限生成子群 $H \leqslant G$，都是有限维 k-向量空间；

(5) 对于每个有限生成子群 $H \leqslant G$， $b_2^{\mathcal{D}_{k[H]}}(H)$ 都是有限的；(6) $b_2^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = 0$；(7) G 是虚拟自由群扩张循环群；(8) $\mathcal{D}_{k[G]}$ 作为 $k[G]$-模是相干的；(9) $\mathcal{D}_{k[G]}$ 作为 $k[G]$-模的弱维数至多为一；(10) G有一个有限指数子群同构于 $\pi_1(X)$，其中 X 是一个具有非正浸入的2-复形。

证明。显然，(1) ⇒(3) ⇐(2)，且 (3) ⇒(4)。由 [FK26 引理 6.11], ，我们得到 (4)⇒(5)。由 [JZL25 推论 3.5], ，我们得到 (5) ⇒(3)，从而证明了 (3)、(4) 和 (5) 等价。

根据推论 3.7，(3) ⇒ (6)；根据 [Fis26 定理 E]，(6) ⇒ (7)。进而，根据 [FH99]，(7) ⇒ (1)。

根据 [Fis26 引理 3.4], [、Wis22a 定理 6.1], 以及[HL ´A22 命题 3.9] ，我们分别得到 (7) ⇒ (8)、(9)、(10)。显然，(9) ⇒ (6)，且 (8) ⇒ (2)。最后，根据 [JZL25 定理 1.2], (10) ⇒ (3)。□

推论 *1.6* 的证明。令 $k = \mathbb{Q}$，并回顾 $\mathcal{D}_{k[G]}$-贝蒂数的定义以及 $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 与 $\mathbb{Q}[G]$ 的 Linnell 环同构这一事实（见第 2.2 节），即可由推论 4.1 得出推论 1.6。我们进一步说明条目 (8) 和 (9)，以及它们如何推出推论 1.6 中相应的结论。由于 $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 是 $\mathcal{U}(G)$ 的一个除环（且二者有典范同构），我们有

$$\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathcal{U}(G)) \cong \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}} \mathcal{U}(G)$$

并且左边为零当且仅当右边为零。因此， $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 作为 $\mathbb{Q}[G]$-模的弱维数至多为一，当且仅当 $\mathcal{U}(G)$ 也具有同一性质。由于 $\mathcal{U}(G)$ 是若干个 $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 的直和（作为 $\mathbb{Q}[G]$-模），可知 $\mathcal{U}(G)$ 是相干的 $\mathbb{Q}[G]$-模，当且仅当 $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}[G]}$ 也是如此。□

4.2. **Coxeter 群**。我们沿用 [JW16 第 2] 节中关于 Coxeter 群的讨论。在本小节余下部分， G 始终表示一个有限生成的 Coxeter 群，其表示为 $\langle v_1, \dots, v_n \mid (v_i v_j)^{m_{ij}} : 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \rangle$。Coxeter 群几乎无挠；事实上，它们几乎特殊，这是我们将在下文用到的一种性质，见[HW10b], 。令 X 为上文给出的 G 的表示复形，并令 $X \to X$ 为对应于无挠子群 $H \leqslant G$的有限度覆盖。我们分两步定义“X 的压缩” $\overline{X}$：

(1) 将每个边界路径标记为 v_i^2（其中 $i = 1,\dots, n$）的 2-胞腔压缩为一条标记为 v_i的边；(2) 将具有公共边界路径 $(v_i v_j)^{m_{ij}}$ 的每个 2-胞腔识别为一个 2-胞腔（每条公共边界路径对应 $2m_{ij}$ 个这样的 2-胞腔）。

我们称 G是二维的，如果对于某个有限指数子群$H \leqslant G$， X 是非球面的。该条件等价于以下要求：

$$\frac{1}{m_{ij}} + \frac{1}{m_{jk}} + \frac{1}{m_{ki}} \leqslant 1$$

（这又等价于 $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ 为无限）对于每组三个两两不同的指标 i, j, k，约定 $\frac{1}{\infty} = 0$。由此可知，二维 Coxeter 群的虚拟上同调维数为 2。一个无挠

有限指数子群 $H \leqslant G$ 因此是有限型的，故 G 具有定义良好的欧拉示性数（参见第 2.2 节）。二维 Coxeter 群 G 的欧拉示性数可以根据其表示显式计算：

$$\chi(G) \;=\; 1 - \frac{n}{2} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{2m_{ij}}.$$

利用我们的主要结果，我们证实了猜想 3.4，并对 [JW16] 的问题 4.6 给出了肯定的解答（另见 [Wis20，问题 11.28]）。所谓 G 的 Coxeter 子群，是指由固定表示中的一部分生成元生成的子群 H。在这种情况下， H 也是一个 Coxeter 群，其关系由涉及所选生成元的关系给出。

定理 4.2。设 G 是一个二维 *Coxeter* 群。当且仅当对每个无限 *Coxeter* 子群 $H \leqslant G$, 都有 G 相干，即 $\chi(H) \leqslant 0$。

证明。由于 Coxeter 群几乎特殊 [HW10b], ，它们是虚 RFRS。若 G 相干，则由推论 4.1 可知，对每个子群 $H \leqslant G$ ，都有 $b_2^{(2)}(H) = 0$。因此，对每个无限 Coxeter 子群 $H \leqslant G$，都有 $\chi(H) \leqslant 0$。反之，若对每个无限 Coxeter 子群都有 $\chi(H) \leqslant 0$ ，则由 [JZL25，定理 1.4，命题 6.2] 可知 G 相干。□

作为推论，我们计算相干二维 Coxeter 群的 L^2-贝蒂数，并得到它们恰好是虚自由群扩张循环群的群。请注意，计算一般 Coxeter 群的 L^2-贝蒂数是一个困难问题，即使在直角情形下也是如此。

推论 4.3. 设 G是一个相干的无限二维 *Coxeter* 群。则$b_1^{(2)}(G) = -\chi(G)$ 且 $b_n^{(2)}(G) = 0$ 对 $n \neq 1$成立。特别地， G 是虚自由群扩张循环群。

在下一个应用中，我们将 Coxeter 群的相干性与 X的曲率性质联系起来。为此，我们简要回顾二维复形的平面曲率和截面曲率的概念，仍依照 [JW16，第 4] 节的讨论。一个带角的 2-复形 是一个组合二维复形 Y ，并且对每个 0-胞腔 y 的链接 link(y) 中的每条边，指定一个实数 $\angle(e) \in \mathbb{R}$。我们将这些数视为 X的二维胞腔各角上的角度。一个 2-胞腔的曲率 f 为

$$\kappa(f) \;:=\; 2\pi - \sum(\pi - \angle(e)),$$

其中求和遍及 f的角 e。0-胞腔 y 的曲率为

$$\kappa(y) \;:=\; 2\big(\pi - \chi(\mathrm{link}(y))\big) + \sum \big(\pi - \angle(e)\big),$$

其中求和遍及与 v相交的二维胞腔的角。

Y在 y处的截面是一个基点组合浸入$(S, s) \to (Y, y)$，其中S 是另一个组合二维复形，而 s 是 S的一个0-胞腔。映射为浸入的要求等价于要求诱导的链接映射为单射。如果 S 同胚于一个闭二维圆盘，则该截面称为平面截面。截面的曲率为 $\kappa(s)$，其中 S 上的角（在 s处）由 Y上的角拉回得到。若对于 Y的每个二维胞腔 f，都有 $\kappa(f) \leqslant 0$, 且对于所有（平面）截面$(S, s) \to (Y, y)$，都有 $\kappa(s) \leqslant 0$，则称 Y具有非正（平面）截面曲率。

复形 X 可以赋予一种自然的角结构，使每个 n 边形都是欧几里得的；更准确地说，与关系元对应的胞腔的角

$(v_iv_j)^{m_{ij}}$ 都赋予角度 $(1-\frac{1}{m_{ij}})\pi$。直接计算可知，若 X 具有非正的平面曲率，则 G 是二维的。以下结果证实了 Jankiewicz 和 Wise 的一个猜想 [JW16，猜想 4.7]（另见 [Wis20，猜想 11.29]）。

定理 4.4. 若 G 是具有非正平面截面曲率的 *Coxeter* 群，则以下命题等价：

(1) G 是相干的；(2) X 具有非正截面曲率。

证明. 一个方向已在 [JZL25, 定理 1.4]，中证明，因此假设 G 是相干的。根据 [JW16, 定理 4.5]，只需验证：对于每个非平凡 Coxeter 子群 $H \subseteq G$，若其关联图 Γ_H 连通但不是树，则有 $\chi(H) \leqslant 0$。由于 H 是相干的，根据推论 4.1，$b_2^{(2)}(H) = 0$。由于 H 的关联图不是树，它至少有 3 个顶点，因此是无限的，故 $b_0^{(2)}(H) = 0$。因此，$\chi(H) \leqslant 0$。□

4.3. **随机群**。本小节中，我们考虑 Arzhantseva–Ol'shanskiĭ [AO96] 的少关系元随机表示模型。固定整数 $m \geqslant 2$、$n \geqslant 0$，以及一个长度 $l > 0$。一个（相对于这些参数的）随机表示 是如下群表示

$$\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle,$$

其中，关系元 r_i 是从字母表 $\{s_1^{\pm 1}, \dots, s_m^{\pm 1}\}$上所有长度至多为 l的循环约化字中均匀随机抽取的。按照一种标准的记号滥用，我们将用表示来指代它所表示的群。我们称群的某个性质 $\mathcal{P}$ 以渐近概率$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 成立，当且仅当

$$\mathbb{P}(\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle \text{ has } \mathcal{P}) \to \lambda \quad \text{as} \quad l \to \infty.$$

我们得到以下结果，它实质上证实了 [Wis20，猜想 17.15]。目前只需将下文第 (2) 项从正的渐近概率提升为渐近概率 1。

定理 4.5。设 $G = \langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ 是一个关系词长度至多为 l 的随机表示。

(1) G 以渐近概率 1 是非相干的，当 $n > m-1$ 时。(2) G 在 $n = m-1$ 时以正的渐近概率是虚拟有限生成自由群扩张循环群。(3) G 在 $n < m-1$ 时以渐近概率 1 是虚拟自由群扩张循环群。

证明。第 (2) 和第 (3) 项归功于 Kielak–Kropholler–Wilkes [KKW22, 定理 A 和定理 B]，，因此我们着重讨论第 (1) 项。根据 [AO96, 引理 3]，，该表示以渐近概率 1 满足 $C'(\frac{1}{6})$ 小取消性质；此外，该表示以渐近概率 1 不含真幂关系元。特别地，随机表示的表示复形是非球面的 [Lyn66]，G 是双曲的 [Gro87, 第 4 节。7]，G 在一个 CAT(0) 立方复形上适当地、余紧地作用 [Wis04]，，因此以渐近概率 1 G 是虚拟紧特殊的 [Ago13]。由于表示复形是非球面的，我们有 $\chi(G) = 1 - m + n > 0$，因此 $b_2^{(2)}(G) > 0$。于是，根据推论 4.1，G 以渐近概率 1 是非相干的。□

4.4. 一种检测相干性的算法。 由于在许多字问题可判定的群类中， L^2-贝蒂数可以通过算法计算 [LU23]„ 我们得以推出以下推论。

推论 4.6。 存在一种算法，对于给定的虚拟紧特殊群G 及其 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \leqslant 2$，可以判定 G 是否相干。

证明。 我们首先证明，存在一种算法可以确定 G的某个无挠子群的指数；感谢 Marco Linton 提供这一论证。枚举 G的所有有限指数子群的所有表示，并记录其指数；同时枚举所有紧特殊立方复形的基本群的所有表示。由于已知 G是虚拟紧特殊的，最终这两类表示中会有两个彼此相同。由于特殊群都是无挠的，因此我们就得到了一个无挠子群的指数。

由于虚拟紧特殊群是剩余有限的，因此它们具有可判定的字问题，并满足行列式猜想 [ES05]。因此，根据 [LU23、定理 5.7 和注 5.8], ，存在一种算法，可以计算出一个有理数序列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得

$$\left|b_2^{(2)}(G) - q_n\right| < \frac{1}{2^n} \tag{4}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。

现在我们可以描述检测相干性的算法。给定推论陈述中所述群 G 的一个表示，首先使用第一段中的算法确定无挠子群的指数 l 。根据 [Sch14], ，我们知道 G 满足强 Atiyah 猜想，因此 $b_2^{(2)}(G) \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}$。令 n 满足 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2l}$ ，并使用 [LU23] 中的算法计算满足式 (4) 的序列 (q_n) 的前 n 项。若 $q_n \leqslant \frac{1}{2l}$，则

$$b_2^{(2)}(G) < \frac{1}{2^n} + q_n < \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l} = \frac{1}{l},$$

这迫使 $b_2^{(2)}(G) = 0$。随后算法终止，并输出“G 是相干的”。另一方面，若 $q_n > \frac{1}{2l}$，则

$$b_2^{(2)}(G) > q_n - \frac{1}{2^n} > 0,$$

因此算法终止，并输出“G是非相干的”。该算法的正确性由推论 4.1 保证。□

4.5. 相干性的刚性。 相干性是否为拟等距不变量，是一个众所周知的开放问题（例如，Wis20 的问题 35] 中就提出了这一问题）。在这里，我们证明，在虚 RFRS 群且上同调维数至多为 2 的范围内，答案是肯定的。由于 L^2-Betti 数的消失具有良好的不变性，我们还能够推导出关于相干性的测度等价和前有限不变性的结果。

推论 4.7。 设 G 和 H 是虚拟上同调维数至多为 2 的有限生成虚拟 *RFRS* 群。若 G 和 H 满足

(1) 拟等距，(2) 测度等价，或(3) 虚拟紧特殊且拟有限同构，

那么， G 相干，当且仅当 H 相干。

“我们将 G的有限生成群的有限商完备化记为 G ，即拓扑群

$$\varprojlim_{H \trianglelefteqslant_{\mathrm{f.i.}} G} G/H,$$

其中 H 遍历 G的所有有限指数正规子群。若一个群满足自然映射

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{cts}}\left(\widehat{G}; M\right) \to \mathrm{H}^i(G; M)$$

对所有 i 以及所有有限 G-模 M都是同构，则称其为良群。上同调 $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cts}}$“表示 G 的连续上同调，也就是说，上同调是通过连续上链计算的，其中 M 带有离散拓扑。

注 4.8. 对于断言 (1) 和 (2) 的证明，虚上同调维数至多为 2 的假设可以弱化为有理上同调维数至多为 2。此外，(3) 中的假设“虚拟紧特殊”可以替换为“虚 RFRS 且为 FP($\mathbb{Z}$)$\}$ 型，并且是 Serre 意义下的良群”。例如，已知 Coxeter 群是良群，见 [HMV25，命题 3.6], ；如上所述，它们也是虚 RFRS，因此推论 4.7(3) 适用于二维 Coxeter 群。目前尚不清楚 Coxeter 群是否是虚拟紧 特殊群。

推论 *4.7* 的证明。若 G 与 H 拟等距（分别地，测度等价），则根据 [MOSS15，推论 6.3]（分别地，[Gab02，定理 6.3]），$b_2^{(2)}(G)$ 相干当且仅当 $b_2^{(2)}(H) = 0$ 。由推论 4.1，G相干当且仅当 H 相干。

现在假设 G 和 H 都是虚拟紧特殊群，且具有同构的有限生成群有限商完备化。我们可以假设 G 和 H 都是无限的，因此它们的零阶 L^2-贝蒂数为零；此外，通过取具有同构有限生成群有限商完备化的适当无挠有限指数子群，我们也可以假设 $\mathrm{cd}(G) = \mathrm{cd}(H) \leqslant 2$ （例如参见 [Wil24，定理 1.3.20]）。由于虚拟紧特殊群是良群（ [Sch14，推论 6.3], ），我们有

$$\begin{aligned}\chi(G) &= b_0(G;\mathbb{F}_p) - b_1(G;\mathbb{F}_p) + b_2(G;\mathbb{F}_p)\\ &= b_0(\widehat{G};\mathbb{F}_p) - b_1(\widehat{G};\mathbb{F}_p) + b_2(\widehat{G};\mathbb{F}_p)\\ &= b_0(\widehat{H};\mathbb{F}_p) - b_1(\widehat{H};\mathbb{F}_p) + b_2(\widehat{H};\mathbb{F}_p)\\ &= b_0(H;\mathbb{F}_p) - b_1(H;\mathbb{F}_p) + b_2(H;\mathbb{F}_p) = \chi(H).\end{aligned}$$

对所有素数 p。由于第一 L^2-Betti 数是有限剩余不变量 [BCR16，推论 3.3], 可得

$$b_2^{(2)}(G) = \chi(G) + b_1^{(2)}(G) = \chi(H) + b_1^{(2)}(H) = b_2^{(2)}(H).$$

因此，推论 4.1 表明，G是相干的，当且仅当 H 是相干的。 □

4.6. 拟自由群猜想与相干性。 若一个群 G 是拟自由的，则它剩余幂零，且存在一个自由群 F，使得 $G/\gamma_n(G) \cong F/\gamma_n(F)$ 对所有 $n \geqslant 1$ 均成立。群 $\gamma_n(G)$ 是 G 的下中心列项，并递归定义为 $\gamma_1(G) = G$ 且 $\gamma_{n+1}(G) = [G, \gamma_n(G)]$ 对所有 $n \geqslant 1$ 均成立。根据 Reid [Rei15，定理 9.2], ，拟自由群是 RFRS 群。

拟自由群研究中最著名的开放问题是 Baumslag 拟自由猜想，该猜想预言，对于所有有限生成拟自由群 G，$\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ 。强拟自由猜想预言，$\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$

并且对于每个有限生成拟自由群 G，$\mathrm{cd}(G) \leqslant 2$。这两个版本的猜想都仍是开放问题，并且已有许多上同调维数至多为二、第二整数同调消失的拟自由群实例。

作为主要结果的推论，我们证明，在上同调维数为二维时，拟自由群猜想等价于一个鲜为人知的猜想：拟自由群是相干的。

推论 4.9。若 G 是一个拟自由群，且$\mathrm{cd}(G) \leqslant 2$，那么$\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$ 当且仅当 G 是相干的。

证明。根据 [FK26，推论 D]，，若 $\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$，则 G 是相干的。反过来，若G 是相干的，则对所有域 k，由推论 3.7 可得 $b_2^{\mathcal{D}_{k[G]}}(G) = 0$。根据[FK26，推论 D]，的证明，这意味着 $\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z}) = 0$。□

Appendix A. Cubulated locally quasi-convex hyperbolic groups are virtually free-by-cyclic

作者：Marco Linton

在本附录中，我们使用定理 1.3 来证明以下定理。

定理 A.1. 若 G 是一个虚拟紧特殊且局部双曲的群，则 G 是一个由自由群和曲面群的自由积经 $\mathbb{Z}$ 扩张而成的群的有限指数子群。

我们指出，由 $\mathbb{Z}$ 扩张自由群和曲面群的自由积，其上同调维数至多为 3。因此，定理 A.1 给出了这样一类虚拟紧特殊群的虚拟上同调维数上界：其中每个有限生成子群都是双曲的。这应与 Wise [Wis20 的问题 28] 相比较；该问题询问，是否存在上同调维数至少为四的相干无挠双曲群。

定理 A.2. 若 G 是一个虚拟紧特殊局部双曲群，则当且仅当 G 不含任何由 { 有限生成自由}-经-$\mathbb{Z}$ 扩张而成的群或由 { 闭曲面}-经-$\mathbb{Z}$ 扩张而成的群作为子群时，G 才是局部拟凸的。

特别地，如果 G 是一个虚拟紧特殊且局部拟凸的双曲群，那么 G 是虚拟自由群扩张循环群。

注意，根据 Wise 的工作，[Wis21]，是一个具有层级的局部拟凸双曲群，因此是虚拟紧特殊的。特别地，根据定理 A.2，这类群必定是虚拟自由群扩张循环群，因此其虚拟上同调维数至多为 2。这解决了 Wise 在立方化情形下提出的问题 [Wis20, 问题 29]。定理 A.2 也解决了 [AW26, 猜想 1.6] 在立方化情形下的情形。

我们很容易想要放宽定理 A.1 中对 G 为局部双曲的假设，将其改为 G 相干的假设。我们在命题 A.9 中证明，如果不存在紧致特殊双曲群 $N \rtimes \mathbb{Z}$ 使得 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(N) \in \{2, 3\}$，且 N 属于类型 F 但不是双曲群，那么这是可行的。回顾一下，如果一个群G 存在紧致分类空间，则称其属于类型 F。我们指出，Italiano–Martelli–Migliorini 在 [IMM23] 中证明存在这样一个群，但其 $\mathrm{cd}(N) = 4$。

A.1. **证明**。我们首先陈述证明定理 A.1 所需的全部要素。接下来，我们将定理 1.3 重述为具有我们将要采用的假设的形式。

定理 A.3。若 G 是一个虚拟特殊群，且其每个有限生成子群都具有类型 $\mathrm{FP}_\infty(\mathbb{Q})$，则 $b_i^{(2)}(G) = 0$ 对所有 $i > 1$均成立。

我们还需要的第二个要素来自 Kielak 和作者 [KL24，命题 6.4]。

命题 A.4。若 G 是一个非自由的双曲紧特殊群，且$b_i^{(2)}(G) = 0$ 对所有 $i \geqslant 2$均成立，则存在一个以拟凸自由子群为基底的无挠 *HNN* 扩张 $L = G*_\psi$，其扩张对象为G，使得 L是双曲且虚拟紧特殊的，并且 $b_i^{(2)}(L) = 0$ 对所有 i均成立。

我们的第三个要素是 Fisher 对 Kielak 虚纤维化定理 [Kie20] 的推广 [Fis24，定理 A]。

定理 A.5. 若 G 是一个紧特殊群，且 $b_i^{(2)}(G) = 0$ 对于 $i \leqslant n$ 成立，则 G 有一个有限指数子群 H，使得 $H \cong N \rtimes \mathbb{Z}$，其中 N 为 $\mathrm{FP}_n(\mathbb{Q})$ 型。

我们还需要一个判据，用来判断一个 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型双曲群的子群何时是双曲的。这将使我们能够在某些假设下得出结论：定理 A.5 中的子群 N 是双曲的。

引理 A.6. 设 G 是一个双曲群，并假设 G 在一棵树 T 上作柱状作用，使得顶点稳定子是有限生成的局部双曲群，且边稳定子在 G 中是拟凸的并且局部拟凸。那么，G 的 *FP*$\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型子群都是双曲的。

证明。设 $H \leqslant G$ 是一个 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型子群。由 [JZL25 定理 4.4], 可知，由于 H 是 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型， H 在一棵树 S 上余紧作用，且其顶点稳定子和边稳定子均有限生成并支配 T。由于 T 的顶点稳定子局部双曲， S 的顶点稳定子是双曲的。由于 T 的边稳定子的有限生成子群在 G 中是拟凸的， S 的边稳定子在 G 中是拟凸的，因此它们在 S 的顶点稳定子中也拟凸。由于 S 的边稳定子在 G 中拟凸，它们在 G 中具有有限高度，因而在 H 中也具有有限高度（见 [GMRS98]）。这意味着 H 在 S 上的作用是柱状的。现在由 Bestvina–Feighn 组合定理 [BF92] 可知， H 是双曲的。□

现在，我们已经具备证明主定理所需的全部要素。

定理 *A.1* 的证明。由定理 A.3 可知，对于所有 $i > 1$， $b_i^{(2)}(G) = 0$ 。由命题 A.4，存在一个有限指数子群 $H \leqslant G$，以及一个双曲且虚拟紧特殊的群 L，使得对于所有 i， $b_i^{(2)}(L) = 0$，从而 $L \cong H*_\psi$ ；并且该作用对应的 Bass–Serre 树 T 是柱状的，所有边稳定子都是自由群。由定理 A.5， L 包含一个形如 $N \rtimes \mathbb{Z}$ 的有限指数子群，其 N 为 FP_2 型（$\mathbb{Q}$）。由引理 A.6 可知， N 是双曲的。根据 Dahmani–Krishna–Mutanguha 的一个结果 [DKMSM25，命题 5.4]， N 包含一个有限指数特征子群 N'，它是自由群与曲面群的自由积。因此， L 包含一个有限指数子群 $L' \cong N' \rtimes \mathbb{Z}$。因此，$G \cap L'$ 是 G 的一个有限指数子群，且具有所需形式。□

定理 A.2 的证明。若 G 是局部拟凸的，则 G 不可能包含任何形如 $N \rtimes \mathbb{Z}$ 的子群，其中 N 非平凡且有限生成；因为 N 将是 G 的非拟凸子群（见 [BH99，命题 3.16]）。现在假设 G 不包含任何 $F_n \rtimes \mathbb{Z}$ 或 $\pi_1(S) \rtimes \mathbb{Z}$ 子群。定理 A.1 蕴含 G 包含一个有限指数子群 H，使得 $H \cong N \rtimes \mathbb{Z}$，其中 $N \cong F * (*_{i \in I} \pi_1(S_i))$，且 F 是自由群，每个 S_i 都是闭曲面。令 $\psi\colon N \to N$ 为定义该半直积的自同构。若存在某个 $i \in I$ 和某个 $n \geqslant 1$，使得子群 $\psi^n(\pi_1(S_i))$ 与 $\pi_1(S_i)$ 共轭，则 G 包含一个由闭曲面群扩张的循环群子群 {闭曲面}，矛盾。因此，对每个 $i \in I$ 和每个 $n \geqslant 1$，$\psi^n(\pi_1(S_i))$ 在 N 中不与 $\pi_1(S_i)$ 共轭。考虑 H-集 $X = \{\pi_1(S_i)^h \mid i \in I, h \in H\}$。根据 [JZLSP25，命题 6.5]，我们有 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(H, X) \leqslant 2$。根据同一结果，对于每个 $x \in X$，$\mathrm{Stab}(x) \cong \pi_1(S_i)$，其中某个 $i \in I$。由于对每个 $i \in I$，$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(\pi_1(S_i)) = 2$，且 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(H, X) \leqslant 2$，考察由短正合列 $0 \to \omega_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q} \to 0$ 导出的长正合列，可知 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(H) \leqslant 2$（例如见 [Alo91，引理 3]）。结合由定理 A.3 得出的 $b_2^{(2)}(H) = 0$，可得 H，因此，根据 [KL24]，G 是虚拟自由群扩张的循环群。最后，G 的局部拟凸性由 [Lin25b] 得出。

对于最后的结论，我们将上述结果与以下事实结合起来：局部拟凸双曲群是局部双曲的，例如参见 [BH99，命题 3.9]。□

A.2. **加强定理 A.1 的尝试**。本节中，我们将明确指出 e
将定理 A.1 中的论证推广时所遇到的障碍。

引理 A.7. 设 G 是一个作用于树 T 上的群，其中顶点稳定子的有限生成子群为 F 型。G的每个 F 型$\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 有限生成子群都是 F型。

证明。设 $H \leqslant G$ 是一个 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型子群。根据 [JZL25，定理 4.4]，存在一个余紧的 H-树 S 支配 T，其中 S 的顶点稳定子和边稳定子均为有限生成的（且包含于 T的顶点稳定子和边稳定子中）。根据假设，S 的顶点稳定子和边稳定子均为 F型。由于紧致渐近无环空间的有限图仍是紧致渐近无环空间，我们可以利用顶点群对应的紧致 $K(H_v, 1)$ 空间，以及有限商图群 $H\backslash S$中边群对应的 $K(H_e, 1)$ 空间，构造一个紧致的 $K(H, 1)$ 空间 H。因此，H 具有 F 型，证毕。□

注记 A.8。如果 G 是一个紧特殊群，那么 G根据 Wise [Wis21]的定义，具有一个拟凸层次结构。因此，通过归纳应用引理 A.7，我们看到，任何同调相干的紧特殊群，其所有有限生成子群都具有 F型。

命题 A.9。以下两种情况之一成立：

(1) 相干的虚拟紧特殊双曲群是自由群和曲面群的自由积的虚拟扩张，扩张群为 $\mathbb{Z}$。(2) 存在一个紧致特殊双曲群 $N \rtimes \mathbb{Z}$，满足$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(N) \in \{2, 3\}$，使得 N 具有 F型，但不是双曲的。

证明。假设不存在满足 (2) 的群，我们将证明 (1)。因此，设 G 是一个虚拟紧特殊双曲群，其中每个有限生成子群都是 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型。经过取有限指数子群后，我们可以假设 G

是紧特殊的。由于 G 是紧特殊的，注 A.8 表明， G 的每个有限生成子群都具有 F 型。特别地，根据定理 A.3，对于所有 $i>1$ 以及每个有限生成子群 $H \leqslant G$，我们都有 $b_i^{(2)}(H)=0$ （因为特殊群的子群仍是特殊群）。

假设 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)=3$。根据命题 A.4，存在一个有限指数子群$G' \leqslant G$ 以及一个双曲且虚拟紧特殊的群 $L \cong G'*_{\psi}$，满足$b_i^{(2)}(L)=0$ 对所有 i 成立，并且 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(L)=\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)=3$。如定理 A.1 的证明中那样，$L$ 包含一个有限指数子群 $L' \cong N \rtimes \mathbb{Z}$，其中 N 具有 $\mathrm{FP}_\infty(\mathbb{Q})$ 型，且 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(N)=2$。由于 N 具有 $\mathrm{FP}_2(\mathbb{Q})$ 型，我们可以将引理 A.7 应用于由 HNN 扩张 $L \cong G'*_{\psi}$ 诱导的 N 的分裂，并得出 N 具有 F 型。但根据假设，这意味着 N 是双曲的。现在，如定理 A.1 的证明中那样（使用 DKMSM25，命题 5.4]），我们得出 L'，因此 G 是一个自由群与曲面群的自由积的扩张的虚拟群，扩张群为 $\mathbb{Z}$。

现在假设 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \geqslant 4$。那么 G 包含一个拟凸子群 $H \leqslant G$（拟凸层级中出现的一个顶点群），满足 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(H)=4$。由于$H$ 是拟凸的，因此它也是双曲且虚拟紧特殊的。对 H应用与上述相同的论证，我们得到一个有限指数子群 H'，它嵌入到一个群 $L'=N \rtimes \mathbb{Z}$ 中，满足 $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(N)=\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(L)-1=3$，且 N 具有 F型。根据我们的假设， N 是双曲的。但这与 [DKMSM25，命题 5.4] 矛盾。□

References

[Ago08] Ian Agol. 虚纤维化的判据。 *J. Topol.*，1(2):269–284，2008。[Ago13] Ian Agol. 虚 Haken 猜想。 *Doc. Math.*，18:1045–1087，2013。附录由 Agol、Daniel Groves 和 Jason Manning 撰写。[Alo91] Juan M. Alonso. 群的拟射影维数与相对上同调维数。

Transactions of the American Mathematical Society，325(2):715–739，1991。[AO96] G. N. Arzhantseva 和 A. Yu. Ol'shanskiĭ. 具有较少生成元的子群为自由群的群类的普遍性。

Mat. Zametki 59 4 489 496, , ( ): – 。[638, 1996

AW26] Brahim Abdenbi 和 Daniel T. Wise. 负浸入与有限高度映射。 *Isr. J. Math.*，第 1–22 页，2026。[Bau61] Gilbert Baumslag. 花环积与有限表示群。 *Math. Z.*，75:22–28，1960/61。[BCR16] M. R. Bridson、M. D. E. Conder 和 A. W. Reid. 通过有限商确定 Fuchsian 群。 *Israel J. Math.*，214(1):1–41，2016。[Ber82] S. K. Berberian. 有限冯·诺依曼代数的最大商环。

Rocky Mountain J. Math.，12(1):149–164，1982。[BF92] Mladen Bestvina 和 Mark Feighn. 负曲率群的组合定理。 *J. Differential Geom.*，35(1):85–101，1992。[BH99] Martin R. Bridson 和 Andr´e Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*，第

319 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Prin-* 卷，收录于 。 *ciples of Mathematical Sciences]* 1999

施普林格出版社，柏林，。[BNS87] Robert Bieri、Walter D. Neumann 和 Ralph Strebel. 离散群的一个几何不变量。 *Invent. Math.*，90(3):451–477，1987。[BR88] Robert Bieri 和 Burkhardt Renz. 自由分解上的赋值与群的高阶几何不变量。 *Comment. Math. Helv.*，63(3):464–497，1988。[Bro94] Kenneth S. Brown.

Cohomology of groups 87 *Graduate Texts in Mathe-* ，第 卷，收录 *matics* 1994 1982

于 。施普林格出版社，纽约，。原版的修订重印本。[Cha60] Stephen U. Chase. 模的直积。

Trans. Amer. Math. Soc.，97:457–473，1960。[Coh06] P. M. Cohn.

Free ideal rings and localization in general rings 3 *New* ，第 卷，收录 *Mathematical Monographs* 2006

于 。剑桥大学出版社，剑桥，。

[DKMSM25] Fran¸cois Dahmani、Suraj Krishna Meda Satish 和 Jean Pierre Mutanguha. 双曲的双曲循环群可立方化。 *Geom. Topol.*，29 268，2025 1 259( ): – 。[ES05] G ´abor Elek 和 Endre Szab ´o. 超线性、本质自由作用与 L^2-不变量。Sofic 性质。 *Math. Ann.*，332(2):421–441，2005。[FH99] Mark Feighn 和 Michael Handel. 自由群自同构的映射环面具有相干性。 *Ann. of Math. (2)*，149(3):1061–1077，1999。[Fis24] Sam P. Fisher. 改进的代数纤维化。 *Compos. Math.*，160(9):2203–2227，2024。[Fis25] Sam P. Fisher. Novikov 上同调、有限支配与上同调维数，2025。 arXiv:2403.18758。[Fis26] Sam P. Fisher. 关于映射到 $\mathbb{Z}$ *Geom. Topol.* 30 1 373 388, 2026 的核的上同调维数。，( ): – 。[FK26] Sam P. Fisher 和 Kevin Klinge. 残余链中的维数下降。 *Trans. Am. Math. Soc.* 2026 。已先行在线发表。[Gab02] Damien Gaboriau. 等价关系与群的不变量。 ℓ^2 de relations d'´equivalence et de groupes. *Publ. Math.Inst. Hautes Études Sci.*，95:93–150，2002。[GMRS98] Rita Gitik、Mahan Mitra、Eliyahu Rips 和 Michah Sageev. 子群的宽度。*Trans. Amer. Math. Soc.*，350(1):321–329，1998。[Gr¨a20] Joachim Gr¨ater. 具有 Conradian 左序的群的交叉积的自由分式除环。 *Forum Math.*，32(3):739–772，2020。[Gro87] M. Gromov. 双曲群。载于 *Essays in group theory* 8 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 75 263 1987 ，第 卷，收录于 ，第 – 页。Springer，纽约，。[HL ´A22] Fabian Henneke 和 Diego L´opez- ´Alvarez. 伪 Sylvester 整环与自由理想环上的斜 Laurent 多项式。 *J. Algebra Appl.*，21(8):论文编号 2250168，共 28 页，2022。[HMV25] Sam Hughes、Philip M¨oller 和 Olga Varghese. Coxeter 群的有限群拓扑性质，2025。 arXiv:2505.08701。[Hug70] Ian Hughes. 群环的分式除环。 *Comm. Pure Appl. Math.*，23 181: –188，1970。[HW08] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise. 特殊立方复形。 *Geom. Funct. Anal.*，17 5 1551( ): –1620，2008。[HW10a] Mark Hagen 和 Daniel T. Wise. 具有初等层级的特殊群几乎是自由群-by-$\mathbb{Z}$。 *Groups Geom. Dyn.*，4(3):597–603，2010。[HW10b] Fr´ ´ ederic Haglund 和 Daniel T. Wise. Coxeter 群几乎特殊。 *Adv. Math.* 224 5 1890 ，( ): –1903，2010。[HW10c] Tim Hsu 和 Daniel T. Wise. 具有循环边群的自由群图的立方化。 *Amer. J. Math.*，132(5):1153–1188，2010。[HW16] Joseph Helfer 和 Daniel T. Wise. 计算标记图中的圈：单关系群的非正浸入性质。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(9):2813–2827，2016。[IMM23] Giovanni Italiano、Bruno Martelli 和 Matteo Migliorini. 纤维化于 S^1 上的双曲 5-流形。 *Invent. Math.*，231(1):1–38，2023。[JW16] Kasia Jankiewicz 和 Daniel T. Wise. 非相干 Coxeter 群。 *Proc. Amer. Math. Soc.* 144 5 1857 ，( ): –1866，2016。[JZ19] Andrei Jaikin-Zapirain. Atiyah 猜想与 L¨uck 逼近猜想中的基变换。 *Geom. Funct. Anal.*，29(2):464–538，2019。[JZ21] Andrei Jaikin-Zapirain. Hughes-free 除环的普适性。 *Selecta Math. (N.S.)* 27 4 74, 33, 2021 ，( ): 论文编号 。[JZL25] Andrei Jaikin-Zapirain 和 Marco Linton. 关于单关系群及其群代数的相干性。 *Ann. of Math. (2)*，201(3):909–959，2025。[JZL ´A20] Andrei Jaikin-Zapirain 和 Diego L´opez- ´Alvarez. 单关系群的强 Atiyah 猜想与 L¨uck 逼近猜想。 *Math. Ann.*，376 1793，2020 3 4 1741(-): – 。[JZLSP25] Andrei Jaikin-Zapirain 、 Marco Linton 和 Pablo S´anchez-Peralta. 群对、相干性以及 K_0 的 Farrell–Jones 猜想，2025。 arXiv:2510.23518。[Kie20] Dawid Kielak. 剩余有限有理可解群与虚纤维化。 *J.* ，( ): – 。[KKW22] Dawid Kielak、Robert Kropholler 和 Gareth Wilkes. 随机群的 ℓ^2-贝蒂数与相干性。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，106(1):425–445，2022。

[KL24] Dawid Kielak 和 Marco Linton。《虚拟自由群扩张循环群》。《 *Geom. Funct.*》，(): –。[KV *Anal.* 34 5 1580 1608, 2024
W24] Robert Kropholler、Stefano Vidussi 和 Genevieve S. Walsh。曲面扩张曲面群的虚拟代数纤维化与映射类群的轨道。《 *J. Algebra*》，651：1–18，2024。[Lin98] Peter A. Linnell。零因子猜想的解析版本。载于《*cohomology in group theory (Durham, 1994)* 252 *Geometry and* 》，*London Math. Soc.* 卷，页码 –。剑桥 *Lecture Note Ser.* 209 248 1998
大学出版社，剑桥，。[Lin25a] Marco Linton。将有限生成自由群扩张循环群嵌入 {有限生成自由}群扩张循环群，2025。 arXiv:2510.10178。[Lin25b] Marco Linton。自由群映射环面子群的几何，2025。arXiv:2510.03145。[Lin25c] Marco Linton。单关系层级。《 *Duke Math. J.*》，174(4)：747–802，2025。[LU23] Clara L¨oh 和 Matthias Uschold。 L^2-贝蒂数与实数的可计算性。《*Computability*》，12(2)：175–201，2023。[L¨uc02] Wolfgang L¨uck。《 L^2*-invariants: theory and applications to geometry and* K*-theory*》。施普林格出版社，柏林，2002。[LW17] Lars Louder 和 Henry Wilton。堆叠与 W *Canad.* -环猜想。，(): –。*Math. Bull.* 60 3 604 612, 2017
[Lyn66] Roger C. Lyndon。关于 Dehn 算法。《 *Math. Ann.*》，166：208–228，1966。[Mor24] Ismael Morales。残余自由群的有限群拓扑性质。《 *Communications in Algebra* 0 0 1 8, 2024 》，(): –。[
MOSS15] Masato Mimura、Narutaka Ozawa、Hiroki Sako 和 Yuhei Suzuki。凯莱拓扑中的群逼近与粗几何，III：几何性质（T）。《 *Algebr.*》，(): –。[New *Geom. Topol.* 15 2 1067 1091, 2015
74] M. F. Newman，编。《*Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups* 372 *Lecture Notes in Mathematics* 》，《 *London Math. Soc.*》第 Vol. 卷。施普 *Lecture Note Ser.* 209 248 1998
林格出版社，柏林—纽约，1974。会议于1973年8月13日至24日在澳大利亚国立大学堪培拉校区举行，导言由 B. H. Neumann 撰写。[OS25] Boris Okun 和 Kevin Schreve。序与纤维化。《 *Groups Geom. Dyn.*》，2025。已先行在线发表。[Rei15] Alan W. Reid。离散群的有限群拓扑性质。载于《 *Groups St Andrews 2013*》，《 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*》第422卷，页码73–104。剑桥大学出版社，剑桥，2015。[Sch02] Thomas Schick。勘误：“贝蒂数的整性”。《 *Math. Ann.*》，322 2 421 422，2002 ( )：–。[Sch14] Kevin Schreve。虚拟余紧特殊群的强 Atiyah 猜想。《*Math. Ann.*》，359(3-4)：629–636，2014。[Sik87] Jean-Claude Sikorav。《 *Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologiede degré un*》。国家博士论文，巴黎-南大学（奥赛），1987。[Tam54] Dov Tamari。半群的精细分类：导出具有广义次数概念的广义多项式环。载于《 *Proceedings of the InternationalCongress of Mathematicians*》，1954， *Amsterdam*，第三卷，页码439–440。Erven P. Noordhoff N. V.，格罗宁根；North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1954。[Wil24] Gareth Wilkes。《 *Profinite groups and residual finiteness*》。《EMS 数学教材》。EMS 出版社，柏林， [2024] ©2024。[Wis04] D. T. Wise。小消去群的立方化。《 *Geom. Funct. Anal.*》，14(1)：150–214，2004。[Wis20] Daniel T. Wise。相干群导论，载于《*What's next?—the mathematical legacy of William P. Thurston* 205 *Ann. of Math. Stud.* 》，页码326–414。
普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2020。[Wis21] Daniel T. Wise。《 *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*》，《 *Annals of Mathematics Studies*》第209卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州， [2021] ©2021。[Wis22a] Daniel T. Wise。相干性、局部可示性与非正浸入。《 *J. Inst.*》，(): –。[
Math. Jussieu 21 2 659 674, 2022
Wis22b] Daniel T. Wise。$\mathrm{H}_2^{(2)}$ 消失的判据。《 *Indiana Univ. Math. J.*》，71(1)：409–438，2022。

Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM
Email address: samuel.fisher@icmat.es

Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC-UAM-UC3M-UCM
Email address: marco.linton@icmat.es

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Email address: pablo.sanchezperalta@uam.es