arXiv:2603.16766v1 [math.RA] 17 Mar 2026

一般多诺维科夫代数、多重微分代数及其自由构造

Xiaoyan Wang、Li Guo 和 Huhu Zhang

摘要。受随机偏微分方程正则性结构研究中非交换 Novikov 代数和多重诺维科夫代数近期发展的启发，本文提出一种研究各类多重诺维科夫代数和多重微分代数的一般方法，并探讨它们与泊松代数的密切联系。本文将 S. Gelfand 从微分交换代数构造 Novikov 代数的方法推广到这一背景下。本文利用带类型装饰根树以及满足充满条件的非交换多微分多项式，构造自由非交换多重诺维科夫代数。

目录

1. 引言 1 1.1. Novikov代数与微分代数 1 1.2. 与Novikov代数和微分代数相关的新概念 3 1.3. 论文结构 3 2. 多重微分代数及其自由对象 4 2.1. 多重微分代数的概念与例子 4 2.2. 自由多重微分代数 6 3. 多重诺维科夫代数的变体及其由多重微分代数变体导出的构造 8 4. 自由非交换多重诺维科夫代数的构造 11 4.1. 由类型化装饰根树构造自由非交换多重诺维科夫代数 11 4.2. 主定理的陈述 15 4.3. 准备工作 18 4.4. 定理4.8的证明 24 参考文献 25

1. 引言

本文研究多 Novikov 代数的变体，以及如何从导子不一定交换的多微分代数导出这类代数。本文利用带类型装饰根树和多重指标构造自由非交换多 Novikov 代数。

1.1. 诺维科夫代数与微分代数。

1.1.1. 诺维科夫代数。 诺维科夫代数的结构最初出现在哈密顿算子的研究中，与形式变分演算相关 [21]，随后又在流体力学型线性泊松括号的分类研究中被独立发现 [6]。Osborn 于 1992 [33] 首次使用“诺维科夫代数”这一术语。

诺维科夫代数是一种非结合代数 $(A, \circ)$，其中乘法 $\circ$ 满足以下左对称恒等式和右交换恒等式：

日期：2026年3月18日。2020 数学主题分类。17A30,17A50,12H05, 17D25, 17B63, 17A36, 16W25。关键词与短语。Novikov代数，微分代数，多 Novikov 代数，多微分代数，泊松代数，自由对象，多重指标。

$$(1) \qquad (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z),$$

$$(2) \qquad (x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y, \quad x, y, z \in A.$$

记 (x, y, z) := (x∘y)∘z –x∘(y∘z)，则左对称恒等式表示为 (x, y, z) = (y, x, z)。如果代数仅满足左对称性质式 (1)，则称其为前李代数（或左对称代数）。

从几何角度看，Novikov代数对应于一个李群上的左不变无挠平坦联络，该李群的李代数同构于该Novikov代数的交换子李代数 [27]。Novikov代数在数学和物理学的许多领域都有应用，尤其是近年来对随机偏微分方程和数值方法的研究 [8, 9, 11]。近来，研究者从拟群的层面 [31], 以及带装饰的多重指标的 Hopf 代数方面研究了诺维科夫代数 [15, 19,49]。

数十年来，研究者一直在探讨诺维科夫代数的分类与构造问题。Zelmanov [44] 证明，代数闭域上特征为 0 的任意有限维单诺维科夫代数都是一维的。因此，他回答了 Novikov 提出的问题：代数闭域上不存在非平凡的有限维单诺维科夫代数，且该域的特征为 0 [32]。Osborn 对含有幂等元的单诺维科夫代数以及这类代数上的一些模进行了分类 [34]。1992年，他对特征零域上含有幂零元的无限维单诺维科夫代数，以及特征为 $p > 0$ [35] 的域上含有幂零元的有限维单诺维科夫代数进行了分类。后来，Xu 给出了一系列分类结果，其中包括对素特征代数闭域上的有限维单诺维科夫代数及其不可约模的完整分类，以及对特征零代数闭域上的单诺维科夫代数的分类 [41, 43]。他还引入了诺维科夫–泊松代数，以研究诺维科夫代数的张量理论，并证明任何已知的单诺维科夫代数都可视为诺维科夫–泊松代数的诺维科夫代数结构 [42]。Bai 和 Meng 对低维诺维科夫代数开展了一系列研究，例如研究其结构与分类 [3, 4, 5]。2011年，Burde 和 Graaf 提出了一种系统方法，用于对具有给定关联李代数的诺维科夫代数进行分类 [12]。

1.1.2. 由微分分代数构造诺维科夫代数。 S. Gelfand [21] 给出了一种经典的诺维科夫代数构造。设 $(A, \cdot)$ 是一个带有导子 D 的交换结合代数，也就是说，$(A, \cdot, D)$ 是一个微分交换代数 [28, 36]。定义

$$(3) \qquad a \circ b := a \cdot D(b), \ a, b \in A.$$

那么，$(A, \circ)$ 是一个诺维科夫代数。

Gelfand构造在诺维科夫代数理论中具有根本重要性。所有维数不超过三的复Novikov代数以及许多重要的无限维单诺维科夫代数，都可以通过这一构造或其线性变形得到 [2, 3, 43]。最终证明，每个诺维科夫代数都同构于某个以这种方式得到的诺维科夫代数的子代数 [7, 16]。此外，Gelfand构造为 Laurent多项式的向量空间 [26], 提供了一种自然的右诺维科夫代数结构，这与诺维科夫代数仿射化 [6]密切相关。

1.1.3. 自由 *Novikov* 代数。由于自由对象的重要性，人们对自由 Novikov 代数进行了研究。2002年，Dzhumadil’daev 和 Löfwall 利用树和自由微分交换代数 [16]，求得了自由 Novikov代数的一组基。2018年，Tuniyaz、Bokut、Xiryazidin 和 Obul 找到了任意域上自由 Novikov代数的一个岩浆 Gröbner-Shirshov基

（或交换环），使得相应的不可约字为 Dzhumadil'daev-Löfwall 字 [40]。2019年，张、陈和 Bokut 求得了零特征域上 Novikov 超代数的基 [46]。自由 Novikov 代数已应用于随机偏微分方程的研究 [8, 49]。

1.2. **与诺维科夫代数及微分代数相关的新概念**。 除了关于诺维科夫代数的各种研究进展外，近年来还出现了对诺维科夫代数的推广。

其中一种推广发表于2023年。Sartayev 和 Kolesnikov 将 S. Gelfand 从微分交换代数构造诺维科夫代数的方法加以推广，引入了非交换 Novikov 代数的概念，并证明这类代数可以由乘法不交换的微分代数诱导得到 [39]。自由非交换诺维科夫代数也已构造出来 [13]。关于其他与诺维科夫代数相关结构的近期研究，可参见 [1, 14, 20, 29, 30, 45, 48]

另一种推广也发表于2023年。受 M. Hairer 及其合作者关于随机偏微分方程正则性结构的里程碑式研究启发 [10, 25], , Bruned 和 Dotsenko 引入了（交换）多 Novikov 代数，这是诺维科夫代数的一种推广，其包含由给定集合索引的多个二元运算 [8]。他们证明，在奇异随机偏微分方程研究背景下引入的多重指标可以解释为自由多重诺维科夫代数。在此，关键在于将 S. Gelfand 的经典构造推广到具有多个互相交换的导子的交换代数。按照 M. Hairer 创立的正则性结构理论 [25, 10]，由此诱导的多重诺维科夫代数可用于研究随机偏微分方程 [8]。

1.3. **论文布局**。受这些关于诺维科夫代数及其推广的最新发展的启发，有必要在统一框架下对其进行组织。为此，我们系统研究由多微分代数诱导出的多重诺维科夫代数的各种变体，不预先假设导子彼此交换，也不假设乘法满足交换性。我们证明，这些多重诺维科夫代数的变体均可由这些更一般的多重微分代数诱导得到。文中给出了这些代数的性质和例子。通常研究的泊松代数是新型多微分代数和多重诺维科夫代数的特殊情形。

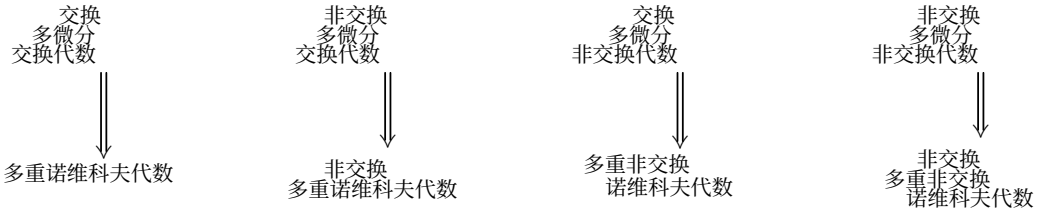
我们构造了相应范畴中的自由对象，推广了此前对自由 Novikov 代数和多重诺维科夫代数的构造。此外，通过在拟群的框架下工作，并将自由多微分代数作为应用，我们证明，这些新引入的诺维科夫代数变体以及多重诺维科夫代数（特别是 Novikov代数）正是由放宽各种交换性条件的多微分代数所诱导出的确切结构。

本文的整体结构如下。

在第2节中，我们首先定义各种多重微分代数，其中导子可以彼此交换或不交换，代数也可以是交换或非交换的。这些条件形成四种类型的多重微分代数：交换多重微分交换代数、交换多重微分非交换代数、非交换多重微分交换代数，以及非交换多重微分非交换代数。文中给出了来自微积分和代数的自然例子。特别是，泊松代数的概念可以用非交换多重微分代数来诠释。文中还构造了相应四个范畴中的自由对象。

在第3节中，我们引入多重非交换诺维科夫代数、非交换多 Novikov 代数以及非交换多重非交换诺维科夫代数的概念。我们证明，它们可由第2节研究的四种多重微分代数导出，如图表所示：

(4)



在第4节中，我们给出两种显式构造自由非交换多重诺维科夫代数的方法，一种基于自由非交换多重微分交换代数，另一种基于根树。这推广或扩展了 Dzhumadil'daev-Löfwall 的构造 [16] 和 Bruned-Dotsenko 的构造 [8]。主定理是定理4.8。

记号。本文中，令 $\mathbb{N}$ 表示自然数集（包括 0），$\mathbb{N}^+$ 表示正自然数集。设**k** 为所有向量空间、代数、线性映射和张量积的给定基域。本文所说的（交换）代数，均指结合（交换）代数。

2. 多微分代数及其自由对象

本节将引入带有多个导子的微分交换代数或非交换代数的概念，其中这些导子可以彼此交换，也可以彼此非交换；由此得到交换多重微分非交换代数、非交换多重微分交换代数以及非交换多重微分非交换代数的概念。随后，我们将在相应范畴中构造自由对象。

2.1. 多重微分代数的概念与示例。

我们先回顾微分代数的概念。

在不一定是结合的代数 $(R,\cdot)$ 上的**导子**是一个线性映射 $d : R \to R$，它满足**莱布尼茨法则**：

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y), \quad x, y \in R. \tag{5}$$

经典的**微分代数** [28, 36, 38] 是一个代数 $(R,\cdot)$，配备一个导子 $d : R \to R$。通常假设该代数是交换代数或域。微分代数也可能具有多个互相交换的导子。

现在我们引入一个框架，以纳入具有多个导子的若干结构 s.

定义 2.1。设 Ω 为一个集合。记 $\partial_\Omega := \{\partial_\omega \mid \omega \in \Omega\}$。

(a) [8] 一个由 Ω 索引的交换多重微分**交换代数**配备了导子 ∂_Ω，这些导子两两交换。(b) 一个由 Ω 索引的**交换多重微**分**非交换代数**是配备了导子 ∂_Ω 的非交换代数 R，这些导子两两交换。(c) 一个由 Ω 索引的**非交换多重微**分**交换代数**是配备了导子 ∂_Ω 的交换代数 R，这些导子不一定两两交换。

(d) 一个由 Ω 索引的**非交换多重微**分**非交换代数**是配备了导子 ∂_Ω 的非交换代数R，这些导子不一定两两交换。

这些结构可以整理成下表。

乘法 \ 导子	交换	非交换
交换	交换 多微分 交换代数 （多重微分交换代数）	非交换 多微分 交换代数 （非交换多微分交换代数）
非交换	交换 多微分 非交换代数 （交换多微分非交换代数）	非交换 多微分 非交换代数 （非交换多微分非交换代数）

定义 2.2. 设 (R, ∂_Ω) 和 (S, δ_Ω) 是交换多重微分交换代数。从 (R, ∂_Ω) 到 (S, δ_Ω) 的**同态** 是一个代数同态 $f: R \to S$，满足 $f \circ \partial_\omega = \delta_\omega \circ f$，对所有 $\omega \in \Omega$ 均成立。令 CMDCA 表示交换多重微分交换代数范畴。

定义2.1中针对其他类型的多微分代数也可以定义相同的概念。我们用 CMDNCA、NCMDCA 和 NCMDNCA 表示相应的范畴。

下面给出一些多微分代数的例子。

例 2.3。 (a) 设 $\mathbf{k}[X]$ 为一个多项式，且 $\partial_X := \{\partial_x := \frac{\partial}{\partial x} | x \in X\}$ 为偏导数集。则 $(\mathbf{k}[X], \partial_X)$ 是一个交换多重微分交换代数。同理，$(\mathbf{k}\langle X\rangle, \partial_X)$ 是一个交换多重微分非交换代数。

(b) 设 $\mathbf{k}[x]$ 为变量 x 上的多项式代数。众所周知，集合

$$\mathcal{D} := \left\{ f(x)\frac{d}{dx} \,\middle|\, f(x) \in \mathbf{k}[x] \right\}$$

是 $\mathbf{k}[x]$ 上的一族导子，它们不一定两两交换。对于非空集合 Ω 和集合映射 $\partial: \Omega \to \mathcal{D}$，记 $\partial_\Omega := \left\{ \partial_\omega := \partial(\omega) \,\middle|\, \omega \in \Omega \right\}$。由此得到一个非交换多微分代数 $(\mathbf{k}[x], \partial_\Omega)$。

(c) 更一般地，对于交换代数 A，令 $\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$ 为 A 上导子的集合。那么，关于双线性乘积，$\mathrm{Der}(A)$ 是一个李代数

$$[,] : \mathrm{Der}(A) \otimes \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(A), [d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1, \quad d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(A).$$

给定集合 Ω 和映射 $\partial: \Omega \to \mathrm{Der}(A)$。定义

$$\partial_\Omega := \{\partial_\omega := \partial(\omega) \,|\, \omega \in \Omega\}.$$

那么，(A, ∂_Ω) 是一个非交换多重微分交换代数。事实上，每个非交换多重微分交换代数都可以如此实现。

接下来我们说明，泊松代数可以自然地解释为一种非交换多重微分代数。

回忆一下，**泊松代数** 是一个配备双线性乘积 $\cdot$ 和 $[,]$ 的 $\mathbf{k}$-模，满足（P，$\cdot$）是交换代数，（P，$[,]$）是李代数，并且

$$[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot z + y \cdot [x, z], \quad x, y, z \in P. \tag{6}$$

命题2.4。 设$(A,\ \cdot)$是一个配备李括号 $[\ ,\ ]$的交换代数。考虑伴随作用

$$\mathrm{ad} : A \to \mathrm{End}(A),\quad \mathrm{ad}(x)(y) := \mathrm{ad}_x(y) = [x, y],\quad x, y \in A.$$

那么，三元组 $(A, \cdot, [\ ,\ ])$ 是泊松代数，当且仅当三元组 $(A,\ \cdot, \mathrm{ad}(A))$ 是非交换多微分代数。

证明。 若 $(A, \cdot, [,])$ 是泊松代数，则 $\mathrm{ad}_A = \{\mathrm{ad}_x \,|\, x \in A\}$ 是交换代数 A 上的一族导子。这意味着 $(A, \mathrm{ad}(A))$ 是非交换多重微分交换代数。

反之，设 $(A, \cdot, \mathrm{ad}(A))$ 是非交换多微分代数。那么，子集 $\mathrm{ad}(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$ 属于 $\mathrm{End}(A)$ 的子空间 $\mathrm{Der}(A)$。因此，等式（6）成立，且 $(A,\ \cdot, [,]_A)$ 是泊松代数。 □

2.2. **自由多微分代数**。 为统一符号并提供统一的背景，我们首先回顾自由交换多重微分交换代数和非交换代数的构造。随后给出自由非交换多重微分交换代数和非交换代数的构造。

对于集合Y，令$M(Y)$表示由Y生成的自由交换幺半群，它实现为具有有限支集的映射集合:

$$M(Y) := \{\alpha : Y \to \mathbb{N} \,\big|\, |\mathrm{supp}(\alpha)| < \infty\}. \tag{7}$$

这里，α 的支集是 $\mathrm{supp}(\alpha) := \{y \in Y \,|\, \alpha(y) \neq 0\}$。$M(Y)$中的乘法定义为

$$(\alpha \cdot \beta)(y) := \alpha(y) + \beta(y),\quad y \in Y.$$

将 $\alpha \in M(Y)$与

$$\prod_{y \in \mathrm{supp}(\alpha)} y^{\alpha(y)} = y_1^{\alpha(y_1)} \cdots y_k^{\alpha(y_k)}$$

当支集 $\mathrm{p}(\alpha) = \{y_1, \ldots, y_k\}$时，我们得到自由交换幺半群的通常构造 d:

$$M(Y) := \{y_1^{\alpha_1} \cdots y_m^{\alpha_m} \,|\, y_i \in Y, \alpha_i \geq 1, m \geq 1\} \cup \{1\}. \tag{8}$$

现在，对于非空集合 Ω 和X，定义集合 $\partial_\Omega := \{\partial_\omega \,|\, \omega \in \Omega\}$，并将交换多导子的变量集合定义为

$$\Delta_\Omega(X) := M(\partial_\Omega) \times X = \left\{ \Big(\prod_{\omega \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\omega^{\alpha(\omega)}, x \Big) \,\Big|\, \alpha \in M(\partial_\Omega), x \in X \right\}. \tag{9}$$

我们还使用函数记号

$$\prod_{\omega \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\omega^{\alpha(\omega)}(x) := \Big(\prod_{\omega \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\omega^{\alpha(\omega)} \Big)(x) := \Big(\prod_{\omega \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\omega^{\alpha(\omega)}, x \Big).$$

对于 $\omega \in \Omega$，定义

$$D_\omega : \Delta_\Omega(X) \to \Delta_\Omega(X),$$

$$D_\omega\Big(\prod_{\tau \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\tau^{\alpha(\tau)}(x) \Big) := \partial_\omega \prod_{\tau \in \mathrm{supp}(\alpha)} \partial_\tau^{\alpha(\tau)}(x) = \partial_\omega^{\alpha(\omega)+1} \prod_{\tau \in \mathrm{supp}(\alpha), \tau \neq \omega} \partial_\tau^{\alpha(\tau)}(x).$$

取多项式代数

$$\mathbf{k}_\Omega\{X\} := \mathbf{k}[\Delta_\Omega(X)] = \mathbf{k}M(M(\partial_\Omega) \times X). \tag{10}$$

利用莱布尼茨法则和线性性，将D_ω 扩展到D_ω : $\mathbf{k}_\Omega\{X\} \to \mathbf{k}_\Omega\{X\}$。令

$$i : X \to \mathbf{k}_\Omega\{X\}, x \mapsto (1, x),$$

为自然注入。微分代数中的一个基本结果是以下自由对象的构造。

定理 2.5. [28, 36] 三元组 $(\mathbf{k}_\Omega\{X\}, D_\Omega, i)$，其中 $D_\Omega = \{D_\omega \mid \omega \in \Omega\}$，是以 X 为基、导子集 D 交换的自由交换多重微分代数$_\Omega$。

同样，取变量 $M(\partial_\Omega) \times X$ 上的非交换多项式代数：

$$\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}_\Omega\{X\} := \mathbf{k}\langle M(\partial_\Omega) \times X\rangle. \tag{11}$$

再次扩展 D_ω，利用莱布尼茨法则和线性性将其扩展到 $\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_\Omega\{X\}$。令 $i : X \to \mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_\Omega\{X\}$ 为嵌入.

定理 2.6. [23] 三元组 $(\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_\Omega\{X\}, D_\Omega, i)$，其中 $D_\Omega = \{D_\omega \mid \omega \in \Omega\}$，是以 X 为基、导子集 D_Ω 交换的自由非交换多重微分代数。

注 2.7. 我们将采用这样的约定：上标 NC 表示非交换变量，下标 NC 表示非交换导子。

现在考虑导子不一定交换的情形。

首先，对于非空集合Y，令$M_{\mathrm{NC}}(Y)$为由Y 生成、以字表示的自由幺半群：

$$M_{\mathrm{NC}}(Y) := \{y_1 \cdots y_k \mid y_i \in Y, 1 \le i \le k, k \ge 1\} \cup \{1\} \tag{12}$$

其乘法为连接乘法。

接下来，令 Ω 和X 为非空集合。令

$$\partial_\Omega := \{\partial_\omega \mid \omega \in \Omega\} \tag{13}$$

这是一个由 Ω 参数化的符号集合，它们将在自由非交换多重微分交换代数中充当多重导子。定义**来自非交换多重导子的变量**集合为

$$\Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X) := M_{\mathrm{NC}}(\partial_\Omega) \times X. \tag{14}$$

对于 $\omega \in \Omega$，定义

$$D_\omega : \Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X), \quad D_\omega((\partial_{\omega_1} \cdots \partial_{\omega_k})(x)) := (\partial_\omega \partial_{\omega_1} \cdots \partial_{\omega_k})(x). \tag{15}$$

取交换多项式代数

$$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\} := \mathbf{k}[\Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X)] := \mathbf{k}M(\Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X))$$

如定理 2.5 中所示。利用莱布尼茨法则，将 D_ω 对于 $\omega \in \Omega$ 的作用扩张为 $\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$ 上的线性算子。令 $i : X \to \mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}, x \mapsto (1, x)$ 为自然注入。

定理 2.8。 带有 $i : X \to \mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$ 的对 $(\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}, D_\Omega)$ 是以 X 为生成元、带有非交换导子集 D_Ω 的自由非交换多重微分交换代数。

证明。 设有一个非交换多重微分交换代数 (A, δ_Ω)，以及一个集合映射 $f : X \to \bar{A}$。定义 $\bar{f} : \mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\} \to A$如下：

$$\bar{f}\Big((\partial_{\omega_{1,1}} \cdots \partial_{\omega_{1,k_1}})(x_1) \cdots (\partial_{\omega_{n,1}} \cdots \partial_{\omega_{n,k_n}})(x_n)\Big) := (\delta_{\omega_{1,1}} \cdots \delta_{\omega_{1,k_1}})(f(x_1)) \cdots (\delta_{\omega_{n,1}} \cdots \delta_{\omega_{n,k_n}})(f(x_n)).$$

于是$\bar{f}$是一个代数同态。

此外，对于$x \in X$，有$\bar{f}(i(x)) = f(x) = f(x)$。因此$\bar{f} \circ i = f$。

接下来验证$\bar{f} \circ D_\tau = \delta_\tau \circ \bar{f}$对 $\tau \in \Omega$成立。事实上，

$$(\bar{f} \circ D_\tau)((\partial_{\omega_{1,1}} \cdots \partial_{\omega_{1,k_1}})(x_1) \cdots (\partial_{\omega_{n,1}} \cdots \partial_{\omega_{n,k_n}})(x_n))$$

$$= \bar{f}\Big(\sum_{i=1}^{n}((\partial_{\omega_{1,1}}\cdots\partial_{\omega_{1,k_1}})(x_1)\cdots(\partial_\tau\partial_{\omega_{i,1}}\cdots\partial_{\omega_{i,k_i}}(x_i))\cdots(\partial_{\omega_{n,1}}\cdots\partial_{\omega_{n,k_n}})(x_n)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}((\delta_{\omega_{1,1}}\cdots\delta_{\omega_{1,k_1}})(f(x_1))\cdots(\delta_\tau\delta_{\omega_{i,1}}\cdots\delta_{\omega_{i,k_i}}(f(x_i)))\cdots(\delta_{\omega_{n,1}}\cdots\delta_{\omega_{n,k_n}})(f(x_n))$$

$$= \delta_\tau((\delta_{\omega_{1,1}}\cdots\delta_{\omega_{1,k_1}})(f(x_1))\cdots(\delta_{\omega_{n,1}}\cdots\delta_{\omega_{n,k_n}})(f(x_n)))$$

$$= (\delta_\tau\circ\bar{f})((\partial_{\omega_{1,1}}\cdots\partial_{\omega_{1,k_1}})(x_1)\cdots(\partial_{\omega_{n,1}}\cdots\partial_{\omega_{n,k_n}})(x_n)).$$

因此，f 是非交换多重微分交换代数的同态。

最后，根据构造，从f 得到非交换多微分交换代数同态的唯一方式就是f，这保证了唯一性。□

与前一种情形一样，取非交换多项式代数

$$\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\} := \mathbf{k}\langle\Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X)\rangle := \mathbf{k}M_{\mathrm{NC}}(\Delta_{\mathrm{NC},\Omega}(X))$$

如定理2.6所示。利用莱布尼茨法则，将D_ω, $\omega\in\Omega$扩张到$\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$。

定理 2.9。这一对$(\mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\},D_\Omega)$ 连同自然注入 $i: X \to \mathbf{k}^{\mathrm{NC}}{}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$，是 X 上具有非交换导子集 D_Ω 的自由非交换多微分非交换代数。

证明。证明与定理 2.8中的证明类似。 □

3. 多 Novikov 代数的变体及其由多微分代数变体得到的导子

在本节中，我们将介绍多 Novikov 代数的各种变体。随后我们将证明，多微分代数的各种变体会产生多 Novikov 代数的各种变体，如图表 (4) 所示。

定义 3.1。(a) [8] 一个 **多 Novikov 代数** 是一个向量空间 N，配备了由集合 $\triangleright_\omega$ 索引的双线性乘积 Ω，并满足以下恒等式。

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z - x\triangleright_\omega(y\triangleright_\tau z) = (y\triangleright_\omega x)\triangleright_\tau z - y\triangleright_\omega(x\triangleright_\tau z), \tag{16}$$

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z - x\triangleright_\omega(y\triangleright_\tau z) = (x\triangleright_\tau y)\triangleright_\omega z - x\triangleright_\tau(y\triangleright_\omega z), \tag{17}$$

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z = (x\triangleright_\tau z)\triangleright_\omega y, \quad x,y,z\in N,\omega,\tau\in\Omega. \tag{18}$$

(b) 一个**非交换多重诺维科夫代数** 是一个向量空间N，配备了由集合 Ω 索引的双线性乘积 $\triangleright_\omega$，并满足以下恒等式。

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z - x\triangleright_\omega(y\triangleright_\tau z) = (y\triangleright_\omega x)\triangleright_\tau z - y\triangleright_\omega(x\triangleright_\tau z), \tag{19}$$

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z = (x\triangleright_\tau z)\triangleright_\omega y, \quad x,y,z\in N,\omega,\tau\in\Omega. \tag{20}$$

(c) 一个**多重非交换诺维科夫代数** 是一个向量空间N，配备了两族双线性乘积

$$\triangleright_\Omega := \{\triangleright_\omega \mid \omega\in\Omega\}, \quad \triangleleft_\Omega := \{\triangleleft_\omega \mid \omega\in\Omega\},$$

它们满足以下恒等式。

$$(x\triangleleft_\omega y)\triangleright_\tau z = x\triangleleft_\omega(y\triangleright_\tau z), \tag{21}$$

$$(x\triangleright_\omega y)\triangleright_\tau z - x\triangleleft_\tau(y\triangleleft_\omega z) = x\triangleright_\tau(y\triangleleft_\omega z) - (x\triangleright_\omega y)\triangleleft_\tau z, \tag{22}$$

(23) $$x \rhd_\omega (y \rhd_\tau z) - x \rhd_\tau (y \rhd_\omega z) = x \rhd_\tau (y \lhd_\omega z) - x \rhd_\omega (y \lhd_\tau z),$$

(24) $$(x \rhd_\tau y) \rhd_\omega z - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) = x \rhd_\omega (y \lhd_\tau z) - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z,$$

(25) $$(x \lhd_\omega y) \lhd_\tau z - (x \lhd_\tau y) \lhd_\omega z = (x \rhd_\tau y) \lhd_\omega z - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z,$$

(26) $$x \lhd_\omega (y \lhd_\tau z) - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) = (x \rhd_\tau y) \lhd_\omega z - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z,\ x,\ y,\ z \in N,\ \omega,\ \tau \in \Omega \quad .$$

(d) 非交换的多重非交换 Novikov代数是一个向量空间 N，配备两族双线性乘积

$$\rhd_\Omega := \{\rhd_\omega | \omega \in \Omega\}, \quad \lhd_\Omega := \{\lhd_\omega | \omega \in \Omega\},$$

它们满足以下恒等式。

(27) $$(x \lhd_\omega y) \rhd_\tau z = x \lhd_\omega (y \rhd_\tau z),$$

(28) $$(x \rhd_\omega y) \rhd_\tau z - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) = x \rhd_\tau (y \lhd_\omega z) - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z,\ x, y, z \in N, \omega, \tau \in \Omega.$$

与 Novikov 代数的情形一样，各种 Novikov 代数由各种多微分代数诱导而来，如下所示。为完整起见，我们也包括多 Novikov 代数的情形。关于诱导结构的一般研究见 [24, 47]

定理 3.2. 设 Ω 为非空集合。

(a) [8] 设 (A, ∂_Ω) 为交换的多微分交换代数。在 A 上定义二元运算 $\rhd_\Omega := \{\rhd_\omega, \omega \in \Omega\}$ 如下：

$$x \rhd_\omega y := x\partial_\omega(y), \quad x, y \in A, \omega \in \Omega.$$

则 $(A, \rhd_\Omega)$ 是一个多 *Novikov* 代数。

(b) 设 (A, ∂_Ω) 是一个非交换多重微分交换代数。在 A 上定义二元运算 $\rhd_\Omega := \{\rhd_\omega | \omega \in \Omega\}$

$$x \rhd_\omega y = x\partial_\omega(y), \quad x, y \in A, \omega \in \Omega.$$

则$(A, \rhd_\Omega)$ 是一个非交换多重诺维科夫代数。

(c) 设(A, ∂_Ω) 是一个交换多重微分非交换代数。定义二元运算

$$\rhd_\Omega := \{\rhd_\omega | \omega \in \Omega\}, \quad \lhd_\Omega := \{\lhd_\omega | \omega \in \Omega\}$$

在 A 上定义如下

(29) $$x \rhd_\omega y = x\partial_\omega(y), \quad x \lhd_\omega y = \partial_\omega(x)y \quad x, y \in A, \omega \in \Omega.$$

则$(A, \rhd_\Omega, \lhd_\Omega)$ 是一个多重非交换诺维科夫代数。

(d) 设(A, ∂_Ω) 是一个非交换多重微分非交换代数。定义二元运算

$$\rhd_\Omega := \{\rhd_\omega | \omega \in \Omega\}, \quad \lhd_\Omega := \{\lhd_\omega | \omega \in \Omega\}$$

在 A 上定义为

(30) $$x \rhd_\omega y := x\partial_\omega(y), \quad x \lhd_\omega y := \partial_\omega(x)y \quad x, y \in A, \omega \in \Omega.$$

那么$(A,\ \rhd_\Omega,\ \lhd_\Omega)$ 是一个非交换多重非交换诺维科夫代数。

证明。 (a) 由 [8]可得。

(b) 我们只需证明定义 3.1 中的恒等式（19）和（20）(b)成立。事实上，对于任意 x、y、$z \in A$ 和 $\omega,\ \tau \in \Omega$，有

$$(x \rhd_\omega y) \rhd_\tau z - x \rhd_\omega (y \rhd_\tau z) = x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - xy(\partial_\omega\partial_\tau z)$$

$$\begin{aligned}&= -xy(\partial_\omega\partial_\tau z)\\&= y\partial_\omega(x)\partial_\tau(z) - y\partial_\omega(x)\partial_\tau(z) - yx(\partial_\omega\partial_\tau)(z)\\&= (y \rhd_\omega x) \rhd_\tau z - y \rhd_\omega (x \rhd_\tau z),\end{aligned}$$

and

$$(x \rhd_\omega y) \rhd_\tau z = x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) = (x \rhd_\tau z) \rhd_\omega y.$$

(c) 我们验证定义3.1中的恒等式（21）–（26）(c) 如下。

$$(x \lhd_\omega y) \rhd_\tau z = \partial_\omega(x)y\partial_\tau(z) = x \lhd_\omega (y \rhd_\tau z).$$

$$\begin{aligned}(x \rhd_\omega y) \rhd_\tau z - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) &= x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= x\partial_\tau\partial_\omega(y)z + x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z - x\partial_\tau\partial_\omega(y)z\\&= x \rhd_\tau (y \lhd_\omega z) - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \rhd_\omega (y \rhd_\tau z) - x \rhd_\tau (y \rhd_\omega z) &= x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) + xy\partial_\omega\partial_\tau(z) - x\partial_\tau(y)\partial_\omega(z) - xy\partial_\tau\partial_\omega(z)\\&= x\partial_\tau\partial_\omega(y)z + x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - x\partial_\omega\partial_\tau(y)z - x\partial_\tau(y)\partial_\omega(z)\\&= x \rhd_\tau (y \lhd_\omega z) - x \rhd_\omega (y \lhd_\tau z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \rhd_\tau y) \rhd_\omega z - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) &= x\partial_\tau(y)\partial_\omega(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= x\partial_\omega\partial_\tau(y)z + x\partial_\tau(y)\partial_\omega(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z - x\partial_\tau\partial_\omega(y)z\\&= x \rhd_\omega (y \lhd_\tau z) - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \lhd_\omega y) \lhd_\tau z - (x \lhd_\tau y) \lhd_\omega z &= \partial_\tau\partial_\omega(x)yz + \partial_\omega(x)\partial_\tau(y)z - \partial_\omega\partial_\tau(x)yz - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= x\partial_\omega\partial_\tau(y)z + \partial_\omega(x)\partial_\tau(y)z - x\partial_\tau\partial_\omega(y)z - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= (x \rhd_\tau y) \lhd_\omega z - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \lhd_\omega (y \lhd_\tau z) - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) &= \partial_\omega(x)\partial_\tau(y)z - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= x\partial_\omega\partial_\tau(y)z + \partial_\omega(x)\partial_\tau(y)z - x\partial_\tau\partial_\omega(y)z - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= (x \rhd_\tau y) \lhd_\omega z - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z.\end{aligned}$$

(d) 我们验证定义3.1中的恒等式（27）和（3.1）。(d) 如下。

$$(x \lhd_\omega y) \rhd_\tau z = \partial_\omega(x)y\partial_\tau(z) = x \lhd_\omega (y \rhd_\tau z).$$

$$\begin{aligned}(x \rhd_\omega y) \rhd_\tau z - x \lhd_\tau (y \lhd_\omega z) &= x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z\\&= x\partial_\tau\partial_\omega(y)z + x\partial_\omega(y)\partial_\tau(z) - \partial_\tau(x)\partial_\omega(y)z - x\partial_\tau\partial_\omega(y)z\\&= x \rhd_\tau (y \lhd_\omega z) - (x \rhd_\omega y) \lhd_\tau z.\end{aligned}$$

□

例 3.3. 设（$\mathbf{k}[x], \cdot$）为关于变量 x 的多项式代数。设

$$\left\{ f(x)\frac{d}{dx} \,\middle|\, f(x) \in \mathbf{k}[x] \right\}$$

为 $\mathbf{k}[x]$ 上的一个导子族，如例 2.3.(b) 所示。通过取如下方式，在 $\mathbf{k}[x]$ 上定义一个二元运算族$\rhd_{\mathbf{k}[x]} = \{\rhd_{f(x)} | f(x) \in \mathbf{k}[x]\}$：

$$g(x) \rhd_{f(x)} h(x) := g(x)f(x)\frac{d}{dx}(h(x)), \quad g(x), h(x) \in \mathbf{k}[x].$$

那么（$\mathbf{k}[x], \rhd_{\mathbf{k}[x]}$）是一个非交换多重诺维科夫代数。

例3.4。设（A，$\cdot$，$[,]_A$）是一个泊松代数。那么，根据命题 2.4，我们有一个非交换多重微分交换代数（A，ad(A)）。定义一族二元运算$\triangleright_{\mathrm{ad}(A)} = \{\triangleright_\partial | \partial = \mathrm{ad}_z \in \mathrm{ad}(A),\ z \in A\}$ 在 A上，定义如下：

$$x \triangleright_\partial y := x\partial(y) = x\mathrm{ad}_z(y) = x[z, y].$$

那么，$(A, \triangleright_{\mathrm{ad}(A)})$ 是一个非交换多重诺维科夫代数。这将每个泊松代数实现为一个非交换多重诺维科夫代数。

例3.5. 设 $M_{2\times2}$ 为由 2×2 矩阵构成、配备矩阵乘法的线性空间。取一族两两可交换矩阵 $\Omega = \{x_n | x_n \in M_{2\times2}\}$。在 $M_{2\times2}$ 上定义一族导子 $\mathrm{ad}_\Omega := \{\mathrm{ad}_{x_i} | x_i \in \Omega\}$，如下：

$$\mathrm{ad}_{x_i}(y) = [x_i, y] = x_i y - y x_i, x_i \in \Omega, y \in M_{2\times2}.$$

于是得到一族两两交换的导子，因为对于任意矩阵 2×2 z，有

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{x_1}\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= x_1(x_2z) - x_1(zx_2) - (x_2z)x_1 + (zx_2)x_1 \\ &= x_2(x_1z) - x_2(zx_1) - (x_1z)x_2 + (zx_1)x_2 \\ &= \mathrm{ad}_{x_2}\mathrm{ad}_{x_1}(z). \end{aligned}$$

在 $M_{2\times2}$ 上定义一族二元运算 $\triangleright_\Omega := \{\triangleright_{x_i} | x_i \in \Omega\}$，如下：

$$y \triangleright_{x_i} z := y\,\mathrm{ad}_{x_i}(z).$$

那么，$(M_{2\times2}, \triangleright_\Omega)$ 是一个多重非交换诺维科夫代数。

4. 自由非交换多重 Novikov 代数的构造

本节旨在构造定义 3.13.1。(b)中定义的非交换多重诺维科夫代数范畴中的自由对象。事实上，我们将给出这类自由对象的两种显式构造。首先，我们引入足够的记号来陈述主要结果：定理 4.8。本文余下部分将给出证明，并改编自由 Novikov 代数和多重诺维科夫代数的记号与构造 [8, 16]。

4.1. 由带类型装饰根树构造自由非交换多重 Novikov 代数。回顾一下，**(Ω)-多重岩浆代数**是一个向量空间 M，配备了一组由 $\triangleright_\omega$ 标记、以 ω 为指标的乘法，其中指标取自集合 Ω。在 X 上构造自由（Ω）-多重岩浆代数的一种标准方法，是取向量空间

$$\mathrm{Mag}_\Omega(X) := \mathbf{k}\mathcal{T}_\Omega(X)$$

其基为 $\mathcal{T}_\Omega(X)$，由内部顶点以 Ω 装饰、叶子以 X 装饰的平面二叉树构成。Magω(X) 上的二元运算 $\blacktriangleright_\omega$ 是将两棵树嫁接起来，并以 ω [8] 装饰新根。

令 I 为 Magω(X) 中由以下形式的所有元素生成的双边理想

$$(x \blacktriangleright_\omega y) \blacktriangleright_\tau z - x \blacktriangleright_\omega (y \blacktriangleright_\tau z) - (y \blacktriangleright_\omega x) \blacktriangleright_\tau z + y \blacktriangleright_\omega (x \blacktriangleright_\tau z), \tag{31}$$

$$(x \blacktriangleright_\omega y) \blacktriangleright_\tau z - (x \blacktriangleright_\tau z) \blacktriangleright_\omega y, \quad x, y, z \in \mathrm{Mag}_\Omega(X), \omega, \tau \in \Omega. \tag{32}$$

因此，根据构造，Magω(X)/I 是由X生成的自由非交换多重 Novikov 代数。令π : Magω(X) → Magω(X)/I 表示自然商映射，并令

$$i : X \hookrightarrow \mathrm{Mag}_\Omega(X) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Mag}_\Omega(X)/I.$$

设u是基 $\mathcal{T}_\Omega(X)$中的一个元素。那么，$u = z \in X$，或者$u = y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} z_1$是以 ω_1为根、y_1 为左分支、z_1 为右分支的嫁接。反过来，除非z_1 属于X，它也有一个嫁接$z_1 = y_2 \blacktriangleright_{\omega_2} z_2$,，从而得到$u = y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} (y_2 \blacktriangleright_{\omega_2} z_2)$。重复这一过程，得到唯一的表达式

$$u = y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} (y_2 \blacktriangleright_{\omega_2} (\cdots (y_n \blacktriangleright_{\omega_n} z) \cdots)), \tag{33}$$

其中$z \in X$，$y_i \in \mathcal{T}$和 $\omega_i \in \Omega$，$i = 1, \cdots, n$。X 中的一个元素X也可以看作是式（u）中的一个 u，其中33) with$n = 0$。

为了明确构造自由非交换多重诺维科夫代数，我们通过商给出自由对象的另一种构造。

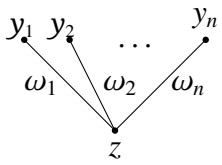
令 $\mathrm{MT}_\Omega(X)$ 表示所有带类型装饰根树的集合，即顶点由 X 中的元素装饰、边由Ω [18] 装饰的根树。参见 [22] 这类树，称为顶点—边装饰树，在 Volterra 积分方程的代数研究中的相关讨论。作为带类型装饰根树的代数解释，我们给出以下概念 [16]。

定义 4.1。**r-表达式**递归定义如下：对于 $r(z)$，其中 $z \in X$，以及

$$r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z), \tag{34}$$

其中 $z \in X$，$\omega_i \in \Omega$，且每个 $y_i \in \mathrm{MT}_\Omega(X)$ 本身都是一个 r-表达式，$i = 1, \cdots, n$。

下面将带类型的装饰树编码为r表达式集合：将 $\bullet_z$ 编码为z，其中$z \in X$；并将



编码为r表达式$r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)$。

带类型装饰树T 的**总次数** $\mathrm{tdeg}(T)$是$X \sqcup \Omega$中的元素在树中出现的总次数（按重数计）。对于r表达式r，其**总次数** $\mathrm{tdeg}(r)$是$X \sqcup \Omega$中的元素在该表达式中出现的总次数。

我们递归地定义一个线性映射

$$\begin{aligned} h : \mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X) &\to \mathrm{Mag}_\Omega(X), \\ r(z) &\mapsto z, \\ r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z) &\mapsto h(y_1) \blacktriangleright_{\omega_1} h(r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)), \end{aligned} \tag{35}$$

对于$z \in X, \omega_i \in \Omega$，其中$i = 1, \cdots, n$。

引理 4.2。线性映射 h： $\mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X) \to \mathrm{Mag}_\Omega(X)$ 在式 (35) 中是双射。

证明。为给出证明，我们递归地构造另一个线性映射

$$\begin{aligned} t : \mathrm{Mag}_\Omega(X) &\to \mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X), \\ z &\mapsto r(z), \quad \text{for } z \in X, \\ u = y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} \left(y_2 \blacktriangleright_{\omega_2} (\cdots (y_n \blacktriangleright_{\omega_n} z) \cdots)\right) &\mapsto r(t(y_1), \omega_1, t(y_2), \omega_2, \cdots, t(y_n), \omega_n; z), \end{aligned} \tag{36}$$

对于平面二叉树 $u \in \mathcal{T}_\Omega(X)$，其满足方程（33）中的唯一分解。

接下来，我们通过对 u 的总次数 $\mathrm{tdeg}(u)$ 进行归纳，验证 $ht(u) = \mathrm{id}_{\mathrm{Mag}_\Omega(X)}(u)$。首先，$ht(z) = h(r(z)) = z$，其中 $z \in X$。归纳地，对于 $y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} u_1 \in \mathcal{T}$，满足 $u_1 = y_2 \blacktriangleright_{\omega_2} (\cdots (y_n \blacktriangleright_{\omega_n} z) \cdots) \in \mathcal{T}$，我们有

$$ht(y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} u_1) = h(r(t(y_1), \omega_1, t(y_2), \cdots, t(y_n), \omega_n; z)) = ht(y_1) \blacktriangleright_{\omega_1} ht(u_1) = y_1 \blacktriangleright_{\omega_1} u_1.$$

类似地，第 $= \mathrm{id}_{\mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)}$。 □

通过线性双射 h，$\mathrm{Mag}_\Omega(X)$ 上的自由 Ω-多重岩浆代数结构通过结构传递，定义了 $\mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)$ 上的自由 Ω-多重岩浆代数结构，使得存在一个 Ω-多重岩浆代数同构

$$t : (\mathrm{Mag}_\Omega(X), \{\blacktriangleright_\omega\}_{\omega\in\Omega}) \to (\mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X), \{\triangleright_\omega\}_{\omega\in\Omega}).$$

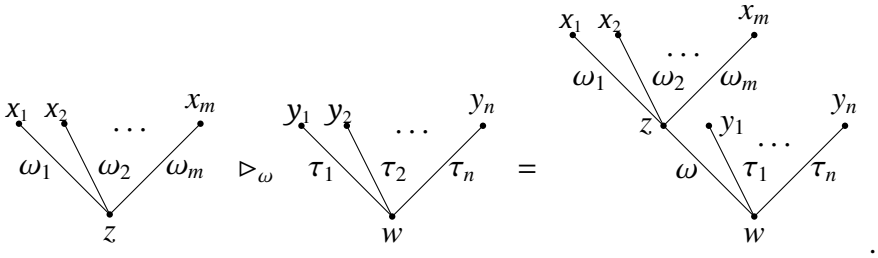
这里，对于 u、$v \in \mathrm{MT}_\Omega(X)$ 以及 $\omega \in \Omega$，定义

$$u \triangleright_\omega v := t(h(u) \blacktriangleright_\omega h(v)).$$

因此，若 $v = r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)$, 则由公式 (35)–(36)，可得

$$\begin{aligned} u \triangleright_\omega v &:= t(h(u) \blacktriangleright_\omega h(v)) \\ &= t\Big(h(u) \blacktriangleright_\omega \big(h(y_1) \blacktriangleright_{\omega_1} (h(y_2) \blacktriangleright_{\omega_2} (\cdots (h(y_n) \blacktriangleright_{\omega_n} z)))\big)\Big) \\ &= r(u, \omega, y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z). \end{aligned} \tag{37}$$

换言之，u 从左侧嫁接到 v (边装饰为 ω) [17]。例如，



.

此外，多 Novikov 双边理想$J := t(I)$（其中I 为多 Novikov 双边理想）的像是$\mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)$ 的多 Novikov 双边理想，并且存在如下多 Novikov 代数同构

$$\widetilde{h} : \mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)/J \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mag}_\Omega(X)/I, \quad u + J \mapsto h(u) + I. \tag{38}$$

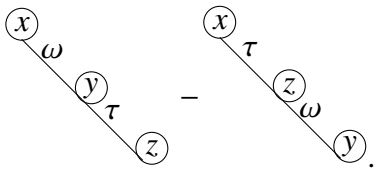
因此

$$\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) := \mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)/J \cong \mathrm{Mag}_\Omega(X)/I \tag{39}$$

也是以X为生成元的自由 Ω-非交换多 Novikov 代数。

注 4.3. 为便于后续应用，我们将商代数 Mag(X)/I 中理想I 的两个生成元（式（31）–（32））用商代数 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) = \mathbf{k}\mathrm{MT}_\Omega(X)/J$中理想$J$ 的生成元来表示。

(a) 我们先考虑较简单的情形。对于 I 的生成元 Eq. (*32*)，通过同构 t （见 Eq.*36* ），它在 J 中对应的生成元为

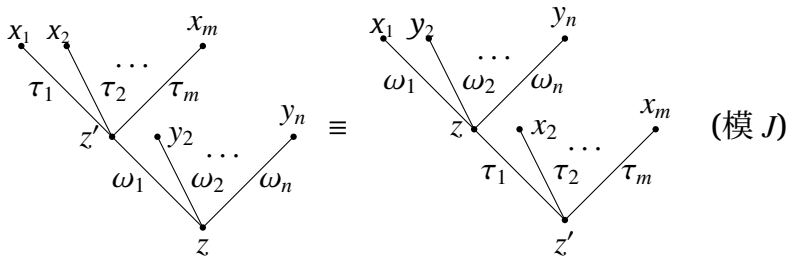


.

当 x、y、z 属于 X 时，（模掉）这一关系意味着，树中以 y 和 z 为根的两段可以互换，而叶子 x 保持不变。更一般地，当我们取 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1, \mathrm{y} = \mathrm{x}_2 \triangleright_{\tau_2} (\mathrm{x}_3 \triangleright_{\tau_3} (\cdots (\mathrm{x}_m \triangleright_{\tau_m} \mathrm{z}')) \cdots)$、$\mathrm{z} = \mathrm{y}_2 \triangleright_{\omega_2} (\mathrm{y}_3 \triangleright_{\omega_3} (\cdots (\mathrm{y}_n \triangleright_{\omega_n} \mathrm{z})) \cdots)$、$\omega = \tau_1$ 以及 $\tau = \omega_1$。那么，对于 r-表达式 $\mathrm{r}(\mathrm{y}1, \omega_1, \cdots, \mathrm{y}_n, \omega_n; \mathrm{z})$，若 $\mathrm{y}_1 = \mathrm{r}(\mathrm{x}1, \tau_1, \cdots, \mathrm{x}_m, \tau_m; \mathrm{z}')$，则有

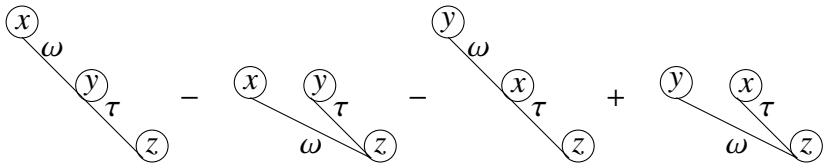
$$
\begin{aligned}
& r(r(x_1, \tau_1, \cdots, x_m, \tau_m; z'), \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z) \\
\equiv\ & r(r(x_1, \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z), \tau_1, \cdots, x_m, \tau_m; z') \mod J
\end{aligned} \tag{40}
$$

用带类型的树来表示，我们有

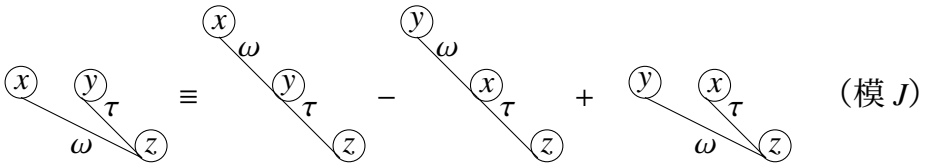


这表示根为z 和z' 的两个相邻段可以互换，而最左侧的叶子保持不变。

(b) 在同构 t 下，31式中的生成元属于 I，对应于 J 的以下生成元



将其视为一条约化规则：

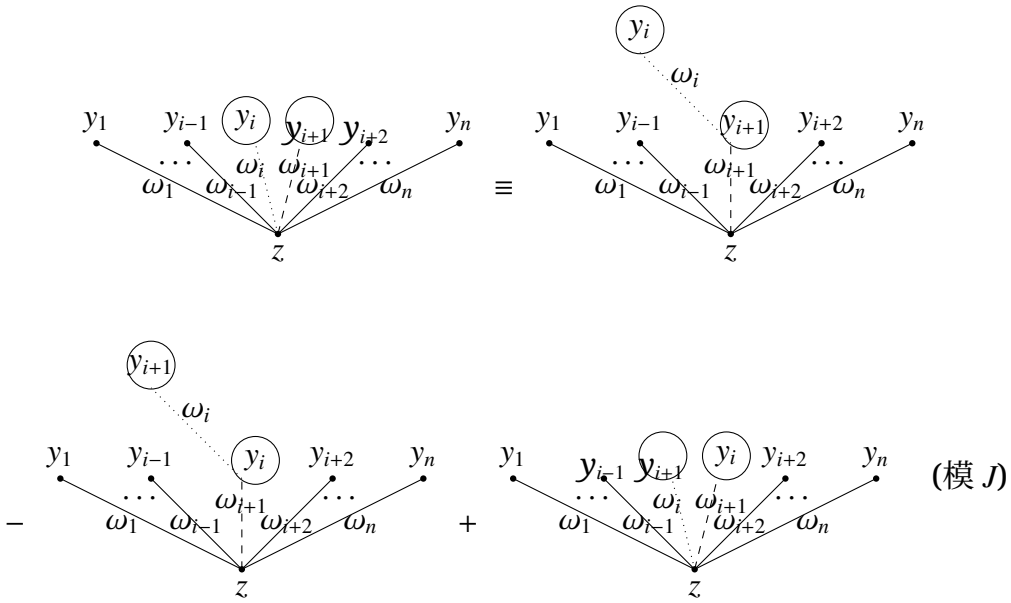


直观而言，左侧树的两个分支可以互换，代价是引入两棵分支更少的额外树。

更一般地，对于固定的 $i \geq 1$，将同余应用于 $x = y_i$、$y = y_{i+1}$、$z = y_{i+2} \triangleright_{\omega_{i+2}} (y_{i+3} \triangleright_{\omega_{i+3}} (\cdots (y_n \triangleright_{\omega_n} z)) \cdots)$，$\omega = \omega_i$ 以及 $\tau = \omega_{i+1}$ 与 $1 \leq i \leq n-1$。然后通过乘法 $\triangleright_{\omega_{i-1}}$，在左侧用元素 y_{i-1} 乘以所得同余两边。接着通过 $\triangleright_{\omega_{i-2}}$，在左侧用 y_{i-2} 乘以新得到的同余两边。随后重复这一过程，直到通过 $\triangleright_{\omega_1}$在左侧乘以$y_1$。最终得到同余

$$
\begin{aligned}
& r(y_1, \omega_1, \cdots, y_i, \omega_i, y_{i+1}, \omega_{i+1}, \cdots, y_n, \omega_n; z) \\
\equiv\ & r(y_1, \omega_1, \cdots y_{i-1}, \omega_{i-1}, y_i \triangleright_{\omega_i} y_{i+1}, \omega_{i+1}, \cdots, y_n, \omega_n; z) \\
& - r(y_1, \omega_1, \cdots y_{i-1}, \omega_{i-1}, y_{i+1} \triangleright_{\omega_i} y_i, \omega_{i+1}, \cdots, y_n, \omega_n; z) \\
& + r(y_1, \omega_1, \cdots, y_{i-1}, \omega_{i-1}, y_{i+1}, \omega_i, y_i, \omega_{i+1}, \cdots, y_n, \omega_n; z) \mod J.
\end{aligned} \tag{41}
$$

用带类型的装饰树表示，我们有



这再次具有组合解释：y_i 和y_{i+1} 对应的两个分支可以交换，代价是引入两棵带有更新分支的新树。

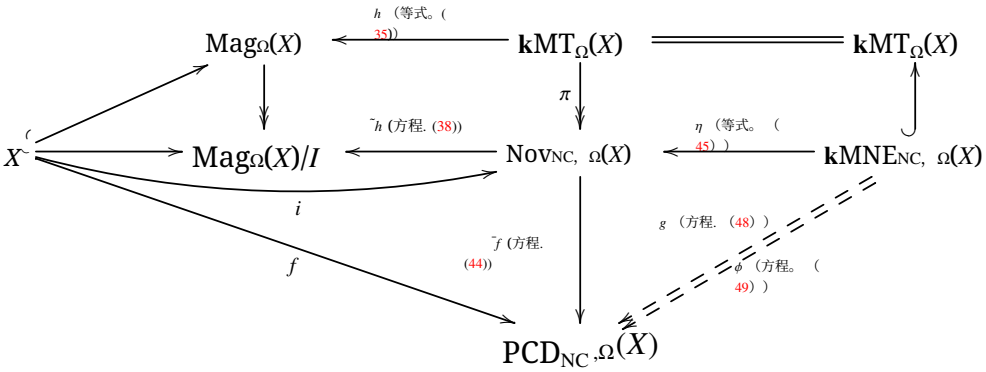
总之，我们给出如下构造及关系，以便后续应用于 X 上的自由 Ω-多 Novikov 代数。

命题 *4.4. (a)* 商代数 $Nov_{NC,\Omega}(X) := kMT_\Omega(X)/J$ 配备乘法$\triangleright_\omega, \omega \in \Omega$ 后，是 X 上的自由 *Ω-多 Novikov* 代数。*(b)* 等式 *(40)– (41)* 在 $Nov_{NC,\Omega}(X) = kMT_\Omega(X)/J$ 中成立。

4.2. **主定理的陈述**。 给定集合 X 和 Ω，我们首先陈述定理4.8 ，该定理给出了在 Ω-非交换多重 Novikov 代数 X上的两种显式构造。

请读者借助下图跟踪这些构造中的概念和映射。

(42)



虚线箭头 ϕ和g仅在定理4.8的证明中需要。

对于在X上构造自由 Ω-多 Novikov 代数的第一种方法，我们识别出一类特殊的r-表达式。

定义4.5。 令$u = r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)$为$\mathrm{MT}_\Omega(X)$中的一个$r$-表达式。

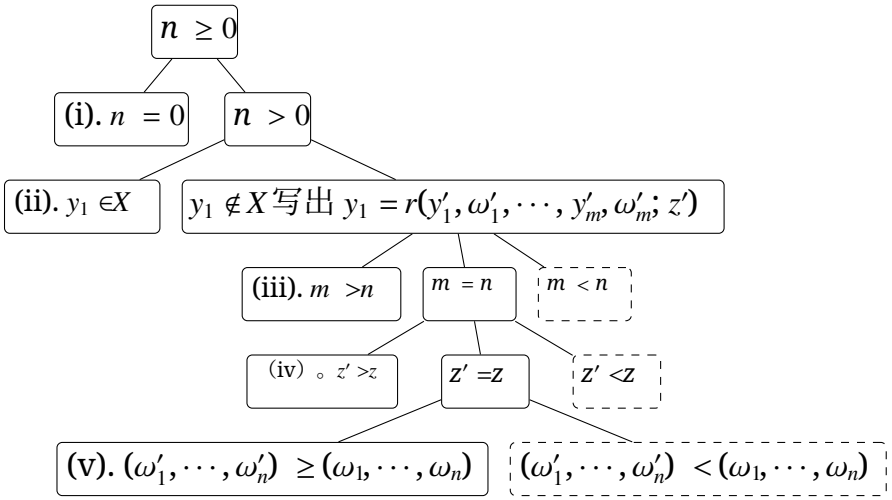


图 1.

(a) 若$u \in X$ 或$y_i \in X, i \geq 2$，且该y_1 **嵌套** -表达式本身是一个嵌套 t.

(b) 设 X 和 Ω 为两个带有全序的集合。若嵌套 u 满足以下条件之一，则称其为**有序的**：u

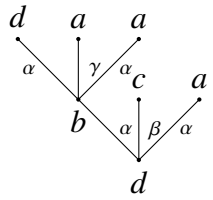
(i) $n = 0$，此时 $u \in X$；(ii) $n > 0$且 $y_1 \in X$；(iii) $n > 0$，$y_1 = r(y'_1, \omega'_1, \cdots, y'_m, \omega'_m; z')$ 且 $m > n$；(iv) $n > 0$，$y_1 = r(y'_1, \omega'_1, \cdots, y'_m, \omega'_m; z')$，$m = n$ 且 $z' > z$；(v) $n > 0$，$y_1 = r(y'_1, \omega'_1, \cdots, y'_m, \omega'_m; z')$，$m = n$，$z' = z$ 且 $(\omega'_1, \cdots, \omega'_n) \geq (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 按字典序排列。

(c) 如果一个有序嵌套 $u = r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z) \in \mathrm{MT}_\Omega(X)$ 中的所有叶子从右向左读出后，按照 X 上的序关系构成递增序列，则称其为一个**非交换多重 Novikov 元素**。用 $\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 表示非交换多重 Novikov 元素的集合。

注 4.6。定义 4.5(b) 中的五种情形在图1的流程图左侧进行了描述，而右侧的三个虚线框表示 $u = r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)$ 并非有序。因此，如果u 不是有序的，那么u 必由三个虚线框中的某一个支配。

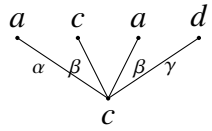
例4.7。我们给出以下示例，以说明定义 4.5中的每一种情形。令$a < b < c < d$ 属于 X，以及 $\alpha < \beta < \gamma \in \Omega$。

(a) $r(r(d, \alpha, a, \gamma, a, \alpha; b), \alpha, c, \beta, a, \alpha; d)$ 是一个嵌套。

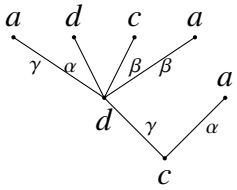


(b) (i) $x \in X$ 是一个有序嵌套；

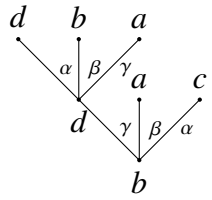
(ii) $r(a,\alpha,\ c,\ \beta,a,\ \beta,\ d,\gamma;\ c)$ 是一个有序嵌套;



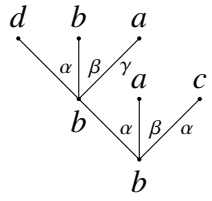
(iii) $r(r(a,\ \gamma,\ d,\ \alpha,\ c,\ \beta,\ a,\ \beta;\ d),\ \gamma,a,\ \alpha;\ c)$ 是一个有序嵌套;



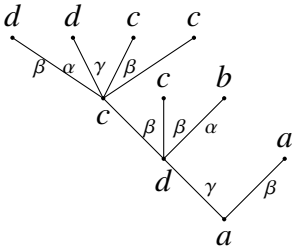
(iv) $r(r(d,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ a,\ \gamma;\ d),\ \gamma,\ a,\ \beta,c,\ \alpha;\ b)$ 是一个有序嵌套;



(v) $r(r(d,\ \alpha,\ b,\ \beta,\ a,\ \gamma;\ b),\ \alpha,\ a,\ \beta,c,\ \alpha;\ b)$ 是一个有序嵌套。



(c) $r(r(r(d,\ \beta,\ d,\ \alpha,\ c,\ \gamma,\ c,\ \beta;\ c),\ \beta,\ c,\ \beta,\ b,\alpha;\ d),\ \gamma,a,\ \beta;\ a)$ 是一个非交换多诺维科夫元素。



为准备在Ω上构造自由多 Novikov 代数X，回顾定理2.8 指出，自由 Ω-非交换多微分交换代数 $\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$由$X$ 生成，是以微分单项式集合 $(\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_n})(x)$ 为基础的交换多项式代数，其中 $\omega_1,\ldots,\omega_n\in\Omega, n\in\mathbb{N}, x\in X$。根据定理 3.2.(b)，$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$ 是一个非交换多 Novikov 代数，其乘法为（此处我们将使用 $*_\omega$ 代替 $\triangleright_\omega$，以避免符号冲突）

$$x *_\omega y := x\partial_\omega(y),\quad \omega\in\Omega. \tag{43}$$

令 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 表示由X在$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$ 中生成的非交换多诺维科夫子代数。由于 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是由X生成的自由非交换多重诺维科夫代数，自然包含映射 $f : X \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 可延拓为非交换多重诺维科夫代数之间唯一的满射

$$\bar{f} : \mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X), \tag{44}$$

这将证明是双射。

定义一个线性映射

$$\begin{aligned}
\eta : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \hookrightarrow \mathbf{k}\mathrm{MT}_{\Omega}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) &= \mathbf{k}\mathrm{MT}_{\Omega}(X)/J \\
r(z) &\mapsto r(z) + J \equiv r(z) \mod J, \\
r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z) &\mapsto r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z) + J \\
&\equiv y_1 \triangleright_{\omega_1} r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z) \mod J \\
&\equiv \eta(y_1) \triangleright_{\omega_1} \eta(r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z))
\end{aligned} \tag{45}$$

对z、$y_i \in X$、$i = 2$、$\cdots$、n、$\omega_i \in \Omega$，其中 $\triangleright_{\omega_1}$ 是 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 上的多 Novikov 乘积。

定理 4.8. (**主定理**)

(a) 线性映射 $\eta : kMNE_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to Nov_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是双射。*(b)* $MNE_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 中非交换多重 *Novikov* 元素模 J 的陪集构成自由非交换多重 *Novikov* 代数 $Nov_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 的线性基。*(c)* 式 *(44)* 中的非交换多重 *Novikov* 代数同态 $f : Nov_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to PCD_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是同构。*(d)* 空间 $PCD_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 配上式 *(43)* 中对 $\omega \in \Omega$ 定义的运算 $*_\omega$，是由 X 生成的自由非交换多重 *Novikov* 代数。

定理的证明见第 4.4 节，在第 4.3节的预备结果之后；相关概念再次参见图表 42 。简而言之，关于条目(a)的证明包括以下步骤。

(a) 我们首先证明 η 是满射（命题 4.9）。然后结合 $\bar{f}$ 的满射性，合成 $\mathrm{f}\eta : \mathrm{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(\mathrm{X}) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(\mathrm{X})$ 是满射的。(b) 为证明 η 是单射，我们证明合成 $\mathrm{f}\eta$ 是单射。为此，我们将 $\mathrm{f}\eta$ 独立描述为公式 (48) 中定义的映射 g。参见命题 4.12。(c) 为证明 g 的单射性，我们使用鸽巢原理论证。更准确地说，我们证明，作为合成 $\mathrm{f}\eta$ 的 g 的满射性在有限维齐次分量上得以保持。然后我们引入另一个分次线性映射

$$\phi : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$$

它是双射（命题4.14）。因此，g 在齐次分量上的满射是同维向量空间之间的映射，因而必为单射。

4.3. **准备工作**。我们给出上述预备结果。

4.3.1. 的满射性 η。给定一个r-表达式$u = r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)$，定义其**长度**为$n$，其**次数**为顶点和叶子的总数，其**权**为三元组

$$|u| := (d, n, n + m),$$

其中，d 是u的次数，n 是u的长度，而m是y的长度$_1$。

命题 4.9. 式 $\eta : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 中的映射 (45)是满射 .

证明。 由于$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$是$\mathbf{k}\mathrm{MT}_{\Omega}(X)$的一个子空间，且 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) = \mathbf{k}\mathrm{MT}_{\Omega}(X)/J$，我们只需证明$\mathbf{k}\mathrm{MT}_{\Omega}(X) = \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J$。为此，我们只需证明

$$u \equiv 0 \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J, \quad \forall u \in \mathrm{MT}_{\Omega}(X). \tag{46}$$

我们将通过对$|u|$的权 $|$进行归纳法来验证这一点（按照字典序）。当 $|u| = (1,0,0)$ 时，结论显然成立，因为u已经属于 $\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$。

对于归纳步骤，假设当u满足 $(1,0,0) < |u| < (d,n,n+m)$，其中$d$、$n$、$m \in \mathbb{Z}_+$时，结论成立。考虑 $u = r(y_1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z) \in \mathrm{MT}_{\Omega}(X)$，其中 $|u| = (d,n,n+m)$。

作为预备步骤，我们首先证明$y_1,\ldots,y_n$从左到右读时可以按次数递减的顺序排列。明确地说，如果y_{i+1}的次数大于y_i的次数（其中 $i = 1,\cdots,n-1$），那么我们证明y_{i+1}可以与y_i交换。应用式（41）（见命题4.4），可得

$$\begin{aligned} u &= r(y_1,\omega_1,\cdots,y_i,\omega_i,y_{i+1},\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z) \\ &\equiv r(y_1,\omega_1,\cdots y_{i-1},\omega_{i-1},y_i \rhd_{\omega_i} y_{i+1},\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z) \\ &\quad - r(y_1,\omega_1,\cdots y_{i-1},\omega_{i-1},y_{i+1} \rhd_{\omega_i} y_i,\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z) \\ &\quad + r(y_1,\omega_1,\cdots,y_{i-1},\omega_{i-1},y_{i+1},\omega_i,y_i,\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z) \mod J \\ &\equiv r(y_1,\omega_1,\cdots,y_{i-1},\omega_{i-1},y_{i+1},\omega_i,y_i,\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z) \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J. \end{aligned} \tag{47}$$

这里，右侧前两个单项式的权分别为

$$\begin{aligned} \left|r(y_1,\omega_1,\cdots y_{i-1},\omega_{i-1},y_i \rhd_{\omega_i} y_{i+1},\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z)\right| &= (d,n-1,n-1+m) < |w|, \\ \left|r(y_1,\omega_1,\cdots y_{i-1},\omega_{i-1},y_{i+1} \rhd_{\omega_i} y_i,\omega_{i+1},\cdots,y_n,\omega_n;z)\right| &= (d,n-1,n-1+m) < |w|. \end{aligned}$$

因此，归纳假设适用于这些单项式。如有必要重复这一过程，我们可以假设$y_1,\ldots,y_n$从左到右读时按次数递减的顺序排列。

接下来，我们按照定义 4.5 的三个阶段分三步进行，以证明元素u可以化为非交换多重 Novikov 元素。具体而言，第一步满足定义4.5中的条件(a)，从而将u变为一个嵌套。第二步满足定义4.5中的条件(b)，从而将u变为一个有序嵌套。第三步满足定义4.5中的条件(c)，将u化为一个非交换多重 Novikov 元素。

步骤1（使 u 成为嵌套）。如果 u 是嵌套，则转到步骤 2。如果 u 不是嵌套，根据归纳假设，每个 y_i 对于 $1 \le i \le n$ 都是嵌套。因此，$y_1 = r(x1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z')$ 中的元素 $x2,\cdots,x_m$ 属于 X。应用公式（40），我们得到

$$\begin{aligned} u &\equiv r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z) \\ &\equiv r(r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z') \mod J. \end{aligned}$$

由于$r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)$的次数小于$u$，再次根据归纳假设，

$$r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z) \equiv v \mod J$$

对于某个嵌套 v。因此，$u \equiv r(r(x1,\omega_1,y2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z') \equiv r(v,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z')$，模 J。然后我们对嵌套 $r(v,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z')$ 执行步骤 2。

步骤 2（使 u 有序）。如果u有序，我们就直接继续步骤 3。因此，假设u无序。根据注记 4.6，u满足图 1中三个虚线框之一所示的条件。我们进一步将这三个条件归并为两种情形：对于$n > 0, y_1 = r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z')$，情形 1 对应第一个虚线框，情形 2 对应第二和第三个虚线框。

情形 1。如果$m < n$，应用等式（40）（根据命题4.4）可得以下嵌套的同余

$$\begin{aligned} &r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)\\ &\equiv r(r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z') \mod J. \end{aligned}$$

于是，n of $r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)$ 的长度严格大于

$$r(r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z').$$

因此，后者是有序的。

情形 2。如果 $m = n$ 和 $z' < z$，或 $z' = z$ 以及 $(\tau_1,\cdots,\tau_m) < (\omega_1,\cdots,\omega_n)$，则应用等式（40）得到以下嵌套的同余

$$\begin{aligned} &r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)\\ &\equiv r(r(x_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z') \mod J. \end{aligned}$$

右侧是有序的。

然后，我们使用在两种情形下得到的有序嵌套继续进行步骤 3 s.

步骤 3（调整叶子装饰，使其从右向左读取时按递增顺序排列）。设 $\mathbf{u} = \mathbf{r(y1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z)}$ 是 $|\mathbf{u}| = \mathbf{(d,n,n+m)}$ 的一个有序嵌套，并且是 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{r(x1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z')}$。如果 u 是非交换多重 Novikov 元素，则

$$u \equiv 0 \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J.$$

现在假设 u 不是一个非交换多重 Novikov 元素。根据式（47），我们可以互换附着在同一根上的叶子的装饰。不失一般性，考虑有序嵌套

$$r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),$$

其中 $x_2 \geq \cdots \geq x_m \in X$ 且 $y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq y_n \in X$。

由于附着在同一根上的叶子的装饰模 J 下交换，因此只需证明与不同根相关联的叶子的装饰也交换。现在证明 x_m 和 y_2 可以互换。为此，我们按如下步骤进行。反复应用式（40）和（47），得到

$$\begin{aligned} &r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_m,\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)\\ &\overset{(47)}{\equiv} r(r(x_m,\tau_1,x_1,\cdots,x_{m-1},\tau_m;z'),\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z) \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)+J\\ &\overset{(40)}{\equiv} r(r(x_m,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,x_1,\cdots,x_{m-1},\tau_m;z') \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)+J\\ &\overset{(47)}{\equiv} r(r(y_2,\omega_1,x_m,\cdots,y_n,\omega_n;z),\tau_1,x_1,\cdots,x_{m-1},\tau_m;z') \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)+J\\ &\overset{(40)}{\equiv} r(r(y_2,\tau_1,x_1,\cdots,x_{m-1},\tau_m;z'),\omega_1,x_m,\cdots,y_n,\omega_n;z) \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)+J\\ &\overset{(47)}{\equiv} r(r(x_1,\tau_1,\cdots,x_{m-1},\tau_{m-1},y_2,\tau_m;z'),\omega_1,x_m,\omega_2,y_3\cdots,y_n,\omega_n;z) \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)+J. \end{aligned}$$

因此，$u \equiv 0$ 模 $\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J$。

因此，对于任意 $u \in \mathrm{MT}_\Omega(X)$，执行步骤 1–3 后，我们得到

$$u \equiv 0 \mod \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) + J,$$

如所愿。 □

¯4.3.2. f 与 η的合成。 对于微分单项式 $u \in \mathbf{k}_{\mathrm{NC},\,\Omega}\{X\}$，其定义为生成元 $(\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_n})(x)$ 的乘积，定义

$p(u)$:= 偏导数在u – 中出现的次数与变量的次数相同。

以下概念是 [8]中所给概念的非交换类比。

定义 4.10。若$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$ 中的一个微分单项式满足**充满条件**，则称其满足$p(u) = -1$。

引理 4.11。非交换多诺维科夫子代数$\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 由$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$中所有满足充满条件的微分单项式线性张成。

证明。显然，每个生成元$x \in X$ 都满足充满条件，因此$X \subset \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$。要证明 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是$\mathbf{k}_{\mathrm{NC},\Omega}\{X\}$的非交换多诺维科夫子代数，只需验证：对于任意两个满足充满条件的微分单项式u、v，乘积$u *_\omega v = u\partial_\omega(v)$，$\omega \in \Omega$，是满足充满条件的微分单项式之和。这是因为由$p(u) = p(v) = -1$ 可得

$$p(u *_\omega v) = p(u\partial_\omega(v)) = p(u) + p(\partial_\omega(v)) = p(u) + p(v) + 1 = -1.$$

现在我们证明这个子代数由X 生成，方法是证明所有满足充满条件的微分单项式都由X生成。我们对这类微分单项式u中偏导数的总数n 进行归纳。

若$n = 0$对于u成立，则u已经属于X。

对于归纳步骤，令$k \geq 1$。假设所有满足充满条件且$n = k$的u 都由X生成。考虑一个含$n = k+1$ 个导子的微分单项式u。将一个最高阶微分变量单独提出作为最右侧因子，可以写成

$$u = u_1(\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_d})(x), x \in X, d \geq 1,$$

其中u_1是另一个微分单项式。于是有两种情况需要考虑：

情形 1. 若$d = 1$，则$u = u_1\partial_\omega(x) = u_1 *_\omega x$。由于$u_1$ 中偏导数的总数为k，且$p(u_1) = p(u) - p(\partial_\omega(x)) = -1$，根据归纳假设，$u_1$ 可以由X生成。因此u 也可以由X生成。

情形 2. 若$d \geq 2$，那么由于u 中的偏导数总数比所有变量的总数少 1，u可以写成

$$u = u_2 x_{i_1} x_{i_2}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_d})(x),$$

其中$x_{i_j} \in X$，$j = 1,\cdots,\ d-1$，且u_2 满足充满条件。于是，我们有

$$\begin{aligned}
&u_2 *_{\omega_1} \left(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)\right)\\
&= u_2\partial_{\omega_1}\left(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)\right)\\
&= u_2 x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_d})(x) + \sum_{j=1}^{d-1}\left(u_2 x_{i_1}\cdots\widehat{x_{i_j}}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)\right) *_{\omega_1} x_{i_j}
\end{aligned}$$

因此

$$u = u_2 *_{\omega_1} \left(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)\right) - \sum_{j=1}^{d-1}\left(u_2 x_{i_1}\cdots\widehat{x_{i_j}}\cdots x_{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)\right) *_{\omega_1} x_{i_j}.$$

注意，$u_2, x^{i_1}x^{i_2}\cdots x^{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)$ 和 $u_2 x_{i_1}\cdots\widehat{x^{i_j}}\cdots x^{i_{d-1}}(\partial_{\omega_2}\cdots\partial_{\omega_d})(x)$、$j=1,\cdots,d-1$ 都满足充满条件，且至多有 k 个导子。因此，根据归纳假设，它们可以由 X 生成。所以，u 也可以由 X 生成。至此，归纳证明完成。 □

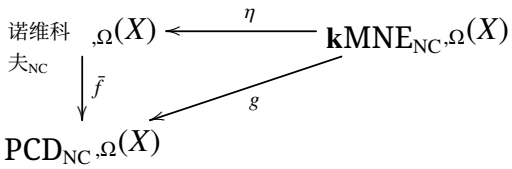
我们通过对边数进行递归来定义一个线性映射，如下所示。

$$
\begin{aligned}
g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) &\to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)\\
r(z) &\mapsto z, \quad \text{for } z\in X,\\
r(y_1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z) &\mapsto g(y_1)*_{\omega_1} g(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))\\
&= g(y_1)\partial_{\omega_1} g(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)),
\end{aligned}
\tag{48}
$$

对于 $z, y_i \in X, i=2,\cdots,n, \omega_i\in\Omega$，其中 $*_{\omega_1}$ 是 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 上的非交换多-Novikov积。由于 $p(g(y_1))=-1$ 且 $p(g(r(y2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)))=-1$，因此根据引理 4.11，可以通过递归验证 g 的像属于 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$，由此得到

$$
p\Big(g(y_1)\partial_{\omega_1} g(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))\Big) = -1+1+(-1) = -1.
$$

命题 4.12. 对于映射 η（定义见式 (45)），有 $f\eta = g$，即下图交换。



证明。我们对非交换多重 Novikov 元素的次数 $k\geq 1$ 进行归纳法，以证明 $f\eta = g$。当 $k=1$ 时，因此 $x\in X$，我们有

$$
\bar{f}\eta(x) = \bar{f}(x) = f(x) = x = g(x).
$$

假设对于所有次数为 $\leq k$ 的元素，该图表交换。对于 $\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 中的 $r(y_1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z)$，其次数为 $k+1$，其中 $y_1\in\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 且 $y_i\in X$，对于 $i=2,\cdots,n$，根据归纳假设，我们有

$$
\begin{aligned}
&\bar{f}\eta\Big(r(y_1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z)\Big)\\
&= \bar{f}\Big(\eta(y_1)\triangleright_{\omega_1}\eta(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))\\
&= \bar{f}\eta(y_1)*_{\omega_1}\bar{f}\eta(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))\\
&= g(y_1)*_{\omega_1} g(r(y_2,\omega_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))\\
&= g\Big(r(y_1,\omega_1,\cdots,y_n,\omega_n;z)\Big),
\end{aligned}
$$

如所要求。 □

4.3.3. 一个辅助双射。我们定义另一个线性映射

$$
\phi : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)
$$

通过对元素在 $X\sqcup\Omega$ 中出现于 $r\in\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 中的总次数进行递归：

$$
\begin{aligned}
&\phi(r(z)) = z, \quad \text{for } z\in X,\\
&\phi(r(y_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z)) = \phi(y_1)y_2\cdots y_n\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_n}(z).
\end{aligned}
\tag{49}
$$

这里，$p(\phi(y_1)) = -1$ 根据归纳假设和引理4.11。因此

$$p(\phi(y_1)y_2\cdots y_n\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_n}(z)) = p(\phi(y_1)) + p(y_2\cdots y_n\partial_{\omega_1}\cdots\partial_{\omega_n}(z)) = -1 + 0 = -1.$$

因此，再次由引理 4.11 可知，$\phi(r(y_1,\omega_1,y_2,\cdots,y_n,\omega_n;z))$ 属于 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$。

例子 **4.13.** 设$a < b < c < d$ 属于 X。那么，非交换多诺维科夫元素 nt

$$r(r(r(d,\beta,d,\alpha,c,\gamma,c,\beta;c),\beta,c,\beta,b,\alpha;d),\gamma,a,\beta;a)$$

在例 4.7中对应于

$$\phi(r(r(r(d,\beta,d,\alpha,c,\gamma,c,\beta;c),\beta,c,\beta,b,\alpha;d),\gamma,a,\beta;a)) = d^2c^3ba(\partial_\beta\partial_\alpha\partial_\gamma\partial_\beta(c))(\partial_\beta\partial_\beta\partial_\alpha(d))(\partial_\gamma\partial_\beta(a))$$

in $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$.

此外，$\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 关于所有导子出现次数构成一个 $\mathbb{N}$-分次向量空间；而 $\mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 也构成一个 $\mathbb{N}$-分次空间，其分次由边的总数给出。根据 ϕ 的构造：$\mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$，这是一个 $\mathbb{N}$-分次映射。

命题 4.14. 这个 $\mathbb{N}$-分次线性映射 $\phi : \mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是双射。

证明。 我们通过构造一个线性映射 $\psi : \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X) \to \mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 来证明其双射性，该映射将作为逆映射。此构造通过对 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 的基元素中出现的偏导数总数$k \geq 0$ 进行归纳来给出。在构造映射 ψ 之前，我们先利用多微分代数中乘法的交换性，将 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 中的元素改写如下。

- 对于 $k = 0$，$u = x$，$x \in X$。
- 对于 $k \geq 1$，仿照定义4.5中的条件，u 可以唯一地写成

$$\begin{aligned} u =& x_0x_{1,1}\cdots x_{1,n_1-1}\partial_{\omega_{1,1}}\cdots\partial_{\omega_{1,n_1}}(x_{1,n_1})x_{2,1}\cdots x_{2,n_2-1}\partial_{\omega_{2,1}}\cdots\partial_{\omega_{2,n_2}}(x_{2,n_2}) \\ &\cdots x_{s,1}\cdots x_{s,n_s-1}\partial_{\omega_{s,1}}\cdots\partial_{\omega_{s,n_s}}(x_{s,n_s}), \end{aligned}$$

其中各元素按照以下规则排列。

$$x_0 \geq x_{1,1} \geq x_{1,2} \geq \cdots \geq x_{1,n_1-1} \geq x_{2,1} \geq x_{2,2} \geq \cdots \geq x_{2,n_2-1} \geq \cdots \geq x_{s,1} \geq \cdots \geq x_{s,n_s-1} \in X,$$

and $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s$, $\sum_{i=1}^{s} n_i = k$. If $n_j = n_{j+1}$ for some $1 \leq j < s-1$, then require either $x_{j,n_j} > x_{j+1,n_{j+1}}$, or $x_{j,n_j} = x_{j+1,n_{j+1}}$ and $(\omega_{j,1},\cdots,\omega_{j,n_j}) \geq (\omega_{j+1,1},\cdots,\omega_{j+1,n_{j+1}})$ under the lexicographical order.

为方便记号，我们记 $u = u_1x_{s,\,1}\cdots x_{s,\,n_s-1}\partial_{\omega_{s,\,1}}\cdots\partial_{\omega_{s,\,n_s}}(x_{s,\,n_s})$，其中

$$u_1 = x_0x_{1,1}\cdots x_{1,n_1-1}\partial_{\omega_{1,1}}\cdots\partial_{\omega_{1,n_1}}(x_{1,n_1})\cdots x_{s-1,1}\cdots x_{s-1,n_{s-1}-1}\partial_{\omega_{s-1,1}}\cdots\partial_{\omega_{s-1,n_{s-1}}}(x_{s-1,n_{s-1}})$$

是 PC $\mathrm{D}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 中的另一个元素。

现在，我们根据上述 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 中元素的形式，按如下方式构造映射 ψ。

$$\begin{aligned} &\psi : \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X), \\ &z \mapsto r(z), \quad \text{for } z \in X, \\ &u_1x_{s,1}\cdots x_{s,n_s-1}\partial_{\omega_{s,1}}\cdots\partial_{\omega_{s,n_s}}(x_{s,n_s}) \mapsto r(\psi(u_1),\omega_{s,1},x_{s,1},\omega_{s,2},\cdots,x_{s,n_s-1},\omega_{s,n_s};x_{s,n_s}). \end{aligned} \tag{50}$$

例如，设 $x_1x_2\partial_{\omega_1}\partial_{\omega_2}(x_3)\partial_{\omega_3}(x_4)$，其中 $x_1 \geq x_2$ 且 $x_3 \geq x_4$。于是

$$\psi(x_1x_2\partial_{\omega_1}\partial_{\omega_2}(x_3)\partial_{\omega_3}(x_4)) = r(r(x_1,\omega_1,x_2,\omega_2;x_3),\omega_3;x_4).$$

根据 ch 选择 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$ 中上述形式的元素，ψ 的像属于 $\mathbf{kMNE}_{\mathrm{NC},\,\Omega}(X)$.

我们通过对元素 $\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 中某个元素 u 内出现的 $\Omega \sqcup X$ 中的元素的总次数 $l \geq 1$进行归纳法，验证 $\psi\phi = \mathrm{id}_{\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)}$。

若 $l = 1$，则 $u = r(z), z \in X$，因此我们有 $\psi\phi(r(z)) = \psi(z) = r(z</style)$。

对于归纳步骤，假设对于总数为 l 的所有 $u \in \mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$，都有 $\psi\phi(u) = u$。那么对于总数为 $l+1$ 的 $u = r(y_1, \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z) \in \mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$，我们有

$$\begin{aligned}\psi\phi(r(y_1, \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)) &= \psi(\phi(y_1)y_2 \cdots y_n \partial_{\omega_1} \cdots \partial_{\omega_n}(z)) \\ &= r(\psi\phi(y_1), \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z) \\ &= r(y_1, \omega_1, y_2, \cdots, y_n, \omega_n; z).\end{aligned}$$

类似地，可以证明 $\phi\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)}$。 □

4.4. **定理4.8的证明**。借助第 4.3节的准备工作，我们现在给出定理 4.8的证明。

¯(a). 命题 4.9 指出 η 是满射。剩下要证明 η 是单射。由于 $f\eta = g$根据命题 4.12，我们只需证明 g是单射。

对于 $\mathbb{N}$-分次空间$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 和 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 在命题4.14中，记作

$$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k, \quad \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k, k \in \mathbb{N},$$

其中，$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k$ 表示由所有具有k 条边的类型化装饰树张成的$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$的子空间，而 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k$ 表示由所有具有k 个导子的单项式张成的 $\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$的子空间。

我们通过逐步验证g 是一个 $\mathbb{N}$-分次线性映射来证明

$$g(\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k) \subseteq \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_k$$

对 $k \geq 0$ 归纳。当 $k = 0$ 时，$u \in X = \mathrm{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_0$，，且我们有 $g(u) = u \in X \subseteq \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_0$。对于归纳步骤，考虑给定 $k \geq 0$ 时的 $r(y1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z) \in \mathrm{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_{k+1}$。因此 $n \geq 1$。根据 g 的定义，我们有

$$\begin{aligned}g(r(y_1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)) &= g(y_1) *_{\omega_1} g(r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)) \\ &= g(y_1)\partial_{\omega_1} g(r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)).\end{aligned}$$

注意到，带类型的装饰树 y_1 和 $r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)$的边数分别为$k+1-n$ 和 $n-1$。因此，根据归纳假设，我们得到

$$g(y_1) \in \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_{k+1-n} \text{ and } g(r(y_2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z)) \in \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_{n-1}.$$

进一步，由莱布尼茨法则，$\partial_{\omega_1} g(r(y2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z))$展开式中每一项的导子数均为 n。因此，$g(y_1)\partial_{\omega_1} g(r(y2, \omega_2, \cdots, y_n, \omega_n; z))$的单项式中的偏导数数目为 $(k+1-n)+n = k+1$，这表明 $g(r(y1, \omega_1, \cdots, y_n, \omega_n; z)) \in \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_{k+1}$。因此，$g$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次线性映射。此外，由于 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 和¯$\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 都是由 X 生成的非交换多重 Novikov 代数，f 是满射。根据¯命题 4.9，η 是满射。因此，$g = f\eta$ 也是满射。所以，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $g|_{\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_n} : \mathrm{kMNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_n \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)_n$ 也是满射。

现在我们通过证明 $\ker g = 0$来证明g 的单射性。取$u \in \ker(g)$。令$X_0 \subset X$ 且 $\Omega_0 \subset \Omega$ 为u中出现的有限子集。于是u 包含于$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0) \subset \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$。此外，满射的 $\mathbb{N}$-分次线性映射$g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 限制为一个满射 $\mathbb{N}$-分次线性映射

$$g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0),$$

因此是一个满射线性映射

(51) $$g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n, n \in \mathbb{N}.$$

现在注意到， $\mathbb{N}$-分次线性双射 ϕ ： $\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 在命题4.14 中限制为一个 $\mathbb{N}$-分次线性双射

$$\phi : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0),$$

因而是一个线性双射

$$\phi : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n, n \in \mathbb{N}.$$

由于最后两个空间是有限维的，我们有

$$\dim(\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n) = \dim(\mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n), n \in \mathbb{N}.$$

维数相等意味着满射线性映射

$$g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)_n$$

在等式（51）中对所有$n \geq 0$都必须是单射。因此， g 在$\mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)$上是单射。因此，给定元素 $u \in \ker g \cap \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega_0}(X_0)$必为零，这表明线性映射$g : \mathbf{k}\mathrm{MNE}_{\mathrm{NC},\Omega}(X) \to \mathrm{PCD}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$是单射， 证毕。

(b). 这是条目(a)的直接推论。

(c)。命题(a) 的证明表明 g 是双射。因此 $\bar{f} = g\eta^{-1}$ 也为双射，因而是非交换多重 Novikov 代数之间的同构。

(d)。这直接由命题(c)得出，因为 $\mathrm{Nov}_{\mathrm{NC},\Omega}(X)$ 是以X为生成集的自由非交换多重 Novikov 代数。

定理4.8的证明至此完成。

致谢。Xiaoyan Wang 获得中国国家重点研发计划（2024YFA1013803）和上海市 PMMP 重点实验室（22DZ2229014）的资助。Huhu Zhang 获得榆林学院高层次人才科研基金（2025GK12）、陕西省科学技术协会青年人才托举计划（20250530）以及榆林市科学技术协会青年人才托举计划（20250711）的资助。

利益声明。作者没有需要披露的利益冲突。

数据可用　性。由于本研究未创建或分析任何数据，因此数据共享不适用

参考文献

[1] K. Abdukhalikov 和 B. Sartayev, 《自由亚交换转置泊松代数与 F-流形代数》, Asian- Europ. J. Math 18 (2025), p.2550007. 3[2] C. Bai 和 D. Meng, 《传递诺维科夫代数的实现》, J. Phys. A 34 (2001), 3363-3372. 2[3] C. Bai 和 D. Meng, 《非传递诺维科夫代数的实现》, J. Phys. A 34 (2001), 6435-6442. 2[4] C. Bai 和 D. Meng, 《诺维科夫代数的李代数方法》, J. Geometry and Phys. 1-2 (2003), 218- 230. 2[5] C. Bai 和 D. Meng, 《与李群自同构结构相适应的诺维科夫代数结构》, J. Geometry and Phys. 1-2 (2003), 105–115. 2[6] A. A. Balinskii 和 S. P. Novikov, 《流体力学型泊松括号、弗罗贝尼乌斯代数与李代数》, Soviet Math. Dokl. 32(1) (1985), 228-231. 1, 2[7] L. Bokut、Y. Chen 和 Z. Zhang, 《Gelfand-Dorfman-Novikov 代数的 Gröbner-Shirshov 基方法》, J. Algebra Appl. 16 (2017), 1750001, 22pp. 2[8] Y. Bruned 和 V. Dotsenko, 《正则性结构中的诺维科夫代数与多重指标》, arXiv:2311.09091. 2, 3, 4, 8, 9, 11, 21

[9] Y. Bruned、K. Ebrahimi-Fard 和 Y. Hou, 《多指标 B 级数》, J. London Math. Soc. 111 (2025), e70049. 2[10] Y. Bruned、M.Hairer 和 L. Zambotti, 《正则性结构的代数重整化》, Invent. Math. 215 (2019), 1039-1156. 3[11] Y. Bruned 和 Y. Hou, 《从常微分方程到奇异随机偏微分方程的多指标余积》, Trans. Amer. Math. Soc. 378 (2025), 4903-4928. 2[12] D. Burde 和 W. de Graaf, 《诺维科夫代数的分类》, AAECC 24 (2013), 1-15. 2[13] A. Dauletiyarova 和 B. Sartayev, 《自由非交换诺维科夫代数的基》, J. Algebra Appl. 24 (2025), 2550292. 3[14] A. Dauletiyarova 和 B. Sartayev, 《微分诺维科夫代数》, arXiv:2503.00457, 2025. 3[15] V. Dotsenko、N. Ismailov 和 U. Umirbaev, 《诺维科夫代数中的多项式恒等式》, Math. Zeitschrift 303 (2023), 60. 2[16] A. Dzhumadil'daev 和 C. Löfwall, 《树、自由右对称代数、自由 Novikov 代数及其恒等式》, Homology Homotopy Appl. 4 (2002), 165-190. 2, 4, 11, 12[17] L. Foissy, 《无穷小霍普夫代数与平面森林拟群》, Int. Math. Res. Notices, 2010 (2010), 395-435. 13[18] L. Foissy, 《带类型装饰根树上的代数结构》, SIGMA 17 (2021), 086, 28 pages. 12[19] L. Foissy, 《多重指标的拟群与双代数以及诺维科夫代数》, arXiv:2510.18432v1. (2025). 2[20] X. Gao、L. Guo、Z. Han 和 Y. Zhang, 《群与李代数上的 Rota-Baxter 算子、微分算子、前诺维科夫及诺维科夫结构》, J. Algebra 684 (2025), 109-148. 3[21] I. Gelfand 和 I. Dorfman, 《哈密顿算子及与之相关的代数结构》, Funct. Anal. Appl. 13 (1979), 248-262. 1, 2[22] L. Guo、R. Gustavson 和 Y. Li, 《Volterra 积分方程及其算子线性的代数研究》, J. Algebra 595 (2022), 398-433. 12[23] L. Guo 和 W. Keigher, 《关于微分 Rota-Baxter 代数》, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), 522-540. 7[24] L. Guo、X. Wang 和 H. Zhang, 《算子代数的诱导结构及其在多 Novikov 代数中的应用》, 预印本, 2026. 9[25] M. Hairer, 《正则性结构理论》, Invent. Math 198(2) (2014), 269-504. 3[26] Y. Hong、C. Bai 和 L. Guo, 《通过诺维科夫双代数的仿射化与 Koszul 对偶构造无限维李双代数》, Comm. Math. Phys. 401 (2023), 2011-2049. 2[27] H. Kim, 《幂零李群上的完备左不变仿射结构》, J. Differential Geom. 24 (1986), 373-394. 2[28] E. R. Kolchin, 《微分代数与代数群》, 学术出版社, 1973. 2, 4, 7[29] P. Kolesnikov、F. Mashurov 和 B. Sartayev, 《关于前诺维科夫代数与导出的 Zinbiel 簇》, SIGMA 24 (2024) p.017. 3[30] P. Kolesnikov 和 A. Nesterenko, 《诺维科夫共形代数的微分包络》, Internal. J. Algebra Comput. 35 (2025), 909-926. 3[31] P. Kolesnikov、B. Sartayev 和 A. Orazgaliev, 《Gelfand-Dorfman 代数、导出恒等式与拟群的 Manin 积》, J. Algebra 539 (2019), 260-284. 2[32] S.P. Novikov, 《流体力学型守恒系统的几何：场论系统的平均法》, Russian Math. Surveys 40 (1985), 85-98. 2[33] J. M. Osborn, 《场代数》, Nova J. Algebra and Geom. 1 (1992), 1-14. 1[34] J. M. Osborn, 《含幂等元的单诺维科夫代数》, Comm. Algebra 9 (1992), 2729-2753. 2[35] J. M. Osborn, 《特征零的无限维诺维科夫代数》, J. Algebra 1 (1994), 146-167. 2[36] M. van der Put 和 M. F. Singer, 《线性微分方程的伽罗瓦理论》, 施普林格, 2003. 2, 4, 7[37] J. F. Ritt, 《代数观点下的微分方程》, 美国数学会, 1932年。[38] J. F. Ritt, 《微分代数》, 美国数学会, 1950年。 4[39] B. Sartayev 和 P. Kolesnikov, 《非交换 Novikov 代数》, 《欧洲数学杂志》9 (2023), # 35. 3[40] R. Tuniyaz、L.A. Bokut、M. Xiryazidin 和 A. Obul, 《自由 Gelfand-Dorfman-Novokov 代数及自由右 Leibniz 代数右理想的 Gröbner-Shirshov 基》, 《通讯代数》46 (2018), 4392-4402. 3[41] X. Xu, 《哈密顿算子与带导子的代数》, Lett. Math. Phys. 1 (1995), 1-6. 2[42] X. Xu, 《诺维科夫-泊松代数》, J. Algebra 190 (1997), 253-279. 2[43] X. Xu, 《单诺维科夫代数及其特征零不可约模的分类》, J. Algebra 246 (2001), 673-707. 2

[44] E.I. Zelmanov, 《关于一类局部平移不变李代数》, 苏联数学文摘 35 (1987), 216-218. 2[45] Y. Zhang, H. Zhang, T. Wu 和 X. Gao, 《带权微分（q-三）二分代数》, 《代数及其应用杂志》25 (2026年), p.2550304. 3[46] Z. Zhang, Y. Chen 和 L. A. Bokut, 《自由 Gelfand-Dorfman-Novikov 超代数及一种 Poincaré-Birkhoff-Witt 型定理》, 《国际代数与计算杂志》29 (2019年), 481-505. 3[47] S. Zheng, S. Huang 和 L. Guo, 《扩展 Rota-Baxter 代数的完备诱导结构：扩展（三）二分代数、前李代数和后李代数》, 《通讯代数》, 即将发表；arXiv:2412.08001, 2024年. 9[48] F. Zhu 和 Z. Chen, 《具有结合双线性型的诺维科夫代数》, 《物理学杂志 A：数学与理论》40 (2007), 14243-14251. 3[49] Z. Zhu, X. Gao 和 D. Manchon, 《自由 Novikov 代数与带装饰的多重指标的 Hopf 代数》, 《日本数学会杂志》78 (2026年), 297-321. 2, 3

华东师范大学数学科学学院系，上海 200241，中国电子邮件地址：wangxy@math.ecnu.edu.cn

罗格斯大学数学与计算机科学系，美国新泽西州纽瓦克 07102电子邮件地址：liguo@rutgers.edu

榆林大学数学与统计学院，陕西榆林 719000，中国电子邮件地址：
huhuzhang@yulinu.edu.cn