arXiv:2603.16771v1 [math.GR] 17 Mar 2026

斜左胚的交换概率

SUSANTA MONDAL 和 MANOJ K. YADAV

摘要。我们引入斜左 brace 的交换概率概念，与群论中的概念类似。我们给出交换概率的上界和下界，并证明对于有限的非平凡斜左 brace，其交换概率始终不超过 $_{3\ 4}$。有趣的是，除了 $_{3\ 4}$ 之外，不存在交换概率落在开区间 $(5/8, 1)$ 内的斜左 brace；我们还构造了一个实现该值的具体例子。我们刻画了交换概率为 $_{3\ 4}$ 或 $_{5\ 8}$ 的斜左 brace。进一步，我们证明，交换概率大于 $_{65\ 128}$ 的有限斜左 brace 必为幂零。我们证明，斜括号的交换概率在同斜下保持不变。我们引入紧豪斯多夫拓扑斜左 brace B 的概念，并证明，在 B 中具有有限中心化子指数的 B 所有元素构成一个博雷尔子群。对于此类无限非平凡斜左 brace，$_{3\ 4}$ 同样是交换概率的上界，而 $_{3\ 4}$ 是开区间 $(5/8,1)$ 内唯一能作为交换概率出现的有理数。

1. 引言

群的交换概率长期以来一直受到文献的研究，其起源可追溯至 [13]Erdős 和 Turán，而 Gustafson 则在 [18] 首次将其引入群的研究。本文旨在为偏左 brace 引入一个类似的概念，并获得若干基本结果。集合 B 若带有两个群结构 $(B, +)$ 和 $(B, \circ)$，并且对所有 $a, b, c \in B$ 都满足 $a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$，则称其为偏左 brace，其中 $-a$ 是 a 在 $(B, +)$ 中的逆元。事实证明，群 $(B, +)$ 和 $(B, \circ)$ 的单位元相同，记作 1。若 $(B, +)$ 是阿贝尔群，则称该偏左 brace 为左 brace。左 brace 和偏左 brace 的概念分别由 Rump [30] 以及 Guarnieri 和 Vendramin [17] 提出，旨在研究 Drienfeld [12] 提出的量子杨–巴克斯特方程的集合论解。

对于有限偏左 brace $(B, +, \circ)$，我们定义交换概率，记为 Pb(B)，其值为

$$\mathrm{Pb}(B) := \frac{1}{|B|^2} |\{(x, y) \in B \times B \mid x + y - x - y = x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} = -x + (x \circ y) - y = 1\}|,$$

其中，x^{-1} 表示 x 在 $(B, \circ)$ 中的逆元。对于无限偏左 brace，我们首先引入紧豪斯多夫拓扑斜左 brace 的概念，随后介绍偏左 brace 的闭子集上的测度概念。更准确地说，如果集合 B 上存在一种公共拓扑，使得两个群 $(B, +)$ 和 $(B, \circ)$ 都是拓扑群，则称偏左 brace B 是拓扑的。设 μ 是群 $(B, \circ)$ 上的概率测度，并

$$Z := \{(x, y) \in B \times B \mid x + y - x - y = x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} = -x + (x \circ y) - y = 1\}.$$

那么，紧豪斯多夫拓扑斜左 brace B 的交换概率（仍记为 Pb(B)）定义为

$$\mathrm{Pb}(B) := (\mu \times \mu)(Z).$$

更多详情请参见第 5 节。

本文除本节外还分为四节。第二节介绍预备知识和一些关键观察。我们注意到，$\mathrm{Cb}_B(x)$，即 $x \in B$ 的括号中心化子，是$(B, \circ)$的一个子群。此外，B中所有中心化子在$(B, \circ)$中具有有限指数的元素构成的集合 FCI(B)，是$(B, \circ)$的一个子群。第 3 节引入有限斜括号的交换概率，并给出了若干相关界。我们证明，若 Pb(B) 不等于 $_{3\ 4}$ 和 1，则 Pb(B) $\in (0, \frac{5}{8}]$。此外，

2010 数学主题分类。16N99, 16T25, 20F24。关键词和短语。偏左 brace、理想、交换度、同斜、幂零性。

当且仅当 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的阶为 2 时，$\mathrm{Pb}(B)=\frac{3}{4}$，其中 $\mathrm{Ann}(B)$ 表示斜括号 B 的湮灭子。我们证明，若 $\mathrm{Pb}(B)=\frac{5}{8}$，则商斜括号 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的加法群和乘法群均与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构。还证明，对于有限斜括号 B 的任意子斜括号 A，$\mathrm{Pb}(B)\leqslant\mathrm{Pb}(A)$。第 4 节探讨交换概率与偏左 brace 幂零性之间的联系。我们证明，若有限斜括号 B 满足 $\mathrm{Pb}(B)\geq\frac{65}{128}$，则其为幂零的。同一节中，我们还证明交换概率在偏左 brace 的同斜下保持不变。在最后一节，即第 5 节，我们引入紧豪斯多夫拓扑偏左括号的交换概率这一概念，并证明了若干有趣结果，其中包括 $\mathrm{FCI}(B)$ 是一个博雷尔集，且 $\mathrm{FCI}(B)$ 在 B 中为开集当且仅当 $\mathrm{Pb}(B)>0$。我们还证明，若 $\mathrm{Pb}(B)$ 不等于 $\frac{3}{4}$ 和 1，则 $\mathrm{Pb}(B)\in[0,\frac{5}{8}]$。

我们以约定一些记号来结束本节。如上所述，偏左 brace 的加法和乘法共同单位元记为 1。对于偏左 brace $(B,+,\circ)$ 和 $a,b\in B$，$(B,+)$ 中的交换子 $[a,b]^{+}=a+b-a-b$ 记为 $\gamma^{+}(a,b)$，而 $(B,\circ)$ 中的交换子 $[a,b]^{\circ}=a\circ b\circ a^{-1}\circ b^{-1}$ 记为 $\gamma^{\circ}(a,b)$。$(B,+)$ 和 $(B,\circ)$ 中的左范数高阶交换子以归纳方式定义。群 G 的中心记为 $\mathrm{Z}(G)$；对任意元素 $g\in G$，g 在 G 中的中心化子记为 $\mathrm{C}_G(g)$。

2. 预备知识与一些关键结果

一个非空集合 B 配备两种群结构 $(B,+)$ 和 $(B,\circ)$，称为偏左 brace 若对于 $a,b,c\in B$ 以下相容条件（偏左分配律）成立：

$$a\circ(b+c)=a\circ b-a+a\circ c,$$

其中 $-a$ 是 $(B,+)$ 中 a 的逆元。偏右括号 可类似定义，即要求满足偏右分配律。若一个偏左 brace $(B,+,\circ)$ 同时满足 $(B,+,\circ)$ 也是偏右括号，则称其为双侧偏括号 。注意，若 $(B,+,\circ)$ 是一个偏左 brace，且 $(B,\circ)$ 是阿贝尔群，则 $(B,+,\circ)$ 是一个双侧偏括号。

群 $(B,+)$ 和 $(B,\circ)$ 分别称为斜括号 $(B,+,\circ)$ 的加法群 和乘法群 。为简化记号，我们将斜左 brace $(B,+,\circ)$ 记作 B。若要强调群运算的作用，则使用原始记号。通常我们会省略“斜左 brace”中的“左”字，简称斜括号，除非有必要明确指出这一性质。

任意群 $(B,+)$ 都可以通过定义 $\circ=+$ 视为一个斜括号。这样的斜括号称为平凡的。不是平凡偏 brace 的斜括号称为非平凡偏 *brace*。最简单的非平凡偏括号是斜括号 $(B,+,+_{op})$，其中 $(B,+)$ 是任意非阿贝尔群，而 $(B,+_{op})$ 是 $(B,+)$ 的反群，也就是说，对于所有 $a,b\in B$，都有 $a+_{op}b=b+a$。

设 X 是群的一个给定性质。若一个斜括号 $(B,+,\circ)$ 的加法群 $(B,+)$ 满足性质 X，则称该斜括号为 X-型。若 X 是群的阿贝尔性质，则称偏左 brace $(B,+,\circ)$ 为阿贝尔型。文献中将阿贝尔型的斜括号称为一个*brace* 。为简化记法，以下将“阿贝尔型的平凡斜括号”称为“平凡 brace”。令 $\mathrm{Aut}(B,+)$ 表示群 $(B,+)$ 的自同构群。对于斜括号 $(B,+,\circ)$ 及其元素 a，定义映射 $\lambda_a:(B,+)\to(B,+)$，规定

$$\lambda_a(b)=-a+(a\circ b)$$

对所有 $b\in B$ 均成立。现在众所周知，λ_a 是 $(B,+)$ 的一个自同构，并且映射 $\lambda:(B,\circ)\to\mathrm{Aut}(B,+)$；$a\mapsto\lambda_a$ 是一个群同态。

设 $(B,+,\circ)$ 是一个斜括号。若子集 H of B 使得 $(H,+,\circ)$ 也是一个斜括号，则称 H 为斜括号 $(B,+,\circ)$ 的子斜括号。对于给定的子集 S of B，由 S 生成的子斜括号定义为包含 S 的 B 的最小子斜括号。若斜括号 $(I,+,\circ)$ 是 $(B,+,\circ)$ 的子斜括号，且对于所有 $a\in B$，都有 $\lambda_a(I)\subseteq I$，则称 $(I,+,\circ)$ 是 $(B,+,\circ)$ 的左理想。若左理想 $(I,+,\circ)$ 是 $(B,+,\circ)$ 的子斜括号，且 $(I,+)$ 和 $(I,\circ)$ 分别是 $(B,+)$ 和 $(B,\circ)$ 的正规子群，则称它是 $(B,+,\circ)$ 的理想。由给定子集 S of B 生成的理想定义为包含 S 的 B 的最小理想。容易看出，同态 λ 的核为

$$\mathrm{Ker}(\lambda)=\{a\in B\mid a+b=a\circ b\text{ for all }b\in B\}.$$

对于两个斜括号 A 和 B，映射 $f\colon A\to B$ 若 f 是从 A 的加法群到 B 的加法群、并且也是从乘法群 A 到乘法群 B 的群同态，则称其为 胚同态。对于任意胚同态 $f\colon A\to B$，事实证明 Ker(f) 是 A 的理想。双射胚同态称为 括号同构。

设 $(B,+,\circ)$ 是一个斜括号，且 $a,b\in B$，定义

$$a*b:=\lambda_a(b)-b=-a+(a\circ b)-b.$$

B 的根 记为 Soc(B)，定义为

$$\mathrm{Soc}(B):=\mathrm{Ker}(\lambda)\cap \mathrm{Z}(B,+).$$

B 的湮灭子 记为 Ann(B)，定义为

$$\mathrm{Ann}(B):=\mathrm{Ker}(\lambda)\cap Z(B,+)\cap \mathrm{Z}(B,\circ)=\mathrm{Soc}(B)\cap \mathrm{Z}(B,\circ).$$

不难看出，Ann(B) 是 B 的一个理想。由 [17, 引理 2.5] 或 [2, 命题 2.9] 可知，Soc(B) 也是 B 的理想。现在我们定义 B 的高阶湮灭子。对于 $n\geq 2$，定义 Ann$_n$(B)，即 B 的第 n个湮灭子，为

$$\mathrm{Ann}_n(B)/\mathrm{Ann}_{n-1}(B)=\mathrm{Ann}\left(B/\mathrm{Ann}_{n-1}(B)\right).$$

这是可行的，因为 Ann$_{n-1}$(B) 是 B [24, 定义 2.2] 中的一个理想。由此可得

$$\mathrm{Ann}_n(B)=\{a\in B\mid a*b,b*a,[a,b]^+\in \mathrm{Ann}_{n-1}(B) \text{ for all } b\in B\}.$$

这是 B 的一个理想升链，称为湮灭子列。我们将此列视为与群的上中心列类似的列。

设 $B:=(B,+,\circ)$ 是一个斜括号，且 $\gamma_n(B,+)$ 和 $\gamma_n(B,\circ)$ 分别表示 $(B,+)$ 和 $(B,\circ)$ 的下中心列的 n 项。对于斜括号 B 的左理想 I 和 J，定义

$$I*J:=\langle x*y\mid x\in I,y\in J\rangle^+,$$

子群　　令 $B^1=B$，并递归地定义

$$B^n:=B*B^{n-1}=\left\langle a*b\mid a\in B,b\in B^{n-1}\right\rangle^+.$$

众所周知，B^2 是 B 的理想。但一般而言，$B^n, n\geq 3$ 不是 B 的理想。不过，B^n 是 B 的左理想。此外，令 $B^{(1)}=B$，并递归地定义

$$B^{(n)}:=B^{(n-1)}*B=\left\langle b*a\mid a\in B,b\in B^{(n-1)}\right\rangle^+.$$

[9, 的命题 2.1] 中证明了，$B^{(n)}$ 是 B 的理想。

我们考虑文献 [6] 中定义的斜括号的下中心列。令 $\Gamma_1(B):=B$ 并定义

$$\Gamma_n(B):=\left\langle B*\Gamma_{n-1}(B),\Gamma_{n-1}(B)*B,[B,\Gamma_{n-1}(B)]^+\right\rangle^+,$$

其中，$[B,\Gamma_{n-1}(B)]^+$ 表示由集合 $\{[a,u]^+\mid a\in B,u\in\Gamma_{n-1}(B)\}$生成的 $(B,+)$ 的子群。文献 [6] 的作者从指数 0 开始编号，而我们从 1 开始。$\Gamma_n(B)$ 是 B 的一个理想，并且对于所有整数 $n\geq 1$, $\Gamma_{n+1}(B)\leq\Gamma_n(B)$。我们将把这一列理想视为斜左 brace 的下中心列，它类似于群的下中心列。

若存在整数 n 使得 Ann$_n$(B) $=B$，则称斜括号 B 为幂零。满足条件的最小整数称为 B 的幂零类。文献 [6] 的作者将这类斜括号称为中心幂零，并证明 Ann$_n$(B) $=B$ 当且仅当 $\Gamma_{n+1}(B)=1$ ([6,定理 2.8])。

我们将元素 $x\in B$ 的括号中心化子 定义为子集

$$\begin{aligned}\mathrm{Cb}_B(x)&:=\{b\in A\mid x*b=b*x=[x,b]^+=1\}\\&=\{b\in B\mid x*b=[x,b]^\circ=[x,b]^+=1\}.\end{aligned}$$

该 *brace*　中心化子 斜括号 $B:=(B,+,\circ)$ 的子集 S，记为 Cb$_B$(S)，定义为

$$\mathrm{Cb}_B(S):=\cap_{x\in S}\mathrm{Cb}_B(x).$$

注意，如果 $x\in$ Ann(B)，那么 Cb$_B$(x) $=B$。还要注意，Cb$_B$(B) $=$ Ann(B)。由 [32,命题 2.19] 可知，如果对所有 $x\in B$都有 $x\in$ Cb$_B$(x)，那么 B 是一个双侧偏括号。反之一般不成立（见下文例 3.6）。

按照 [11], , 对于斜括号 $B:=(B,\ +,\ \circ)$及其元素 $x\in B$，我们定义

$$\mathrm{Fix}_B^l(x)=\{b\in B\mid \lambda_b(x)=x\}\text{ and }\mathrm{Fix}_B^r(x)=\{b\in B\mid \lambda_x(b)=b\}.$$

现在分别定义元素 $x\in B$ 的左中心化子和右中心化子如下 s:

$$\mathrm{Cb}_B^l(x):=\mathrm{Fix}_B^l(x)\cap \mathrm{C}_{(B,\circ)}(x)\text{ and }\mathrm{Cb}_B^r(x):=\mathrm{Fix}_B^r(x)\cap \mathrm{C}_{(B,+)}(x).$$

容易看出

$$\mathrm{Cb}_B(x)=\mathrm{Cb}_B^l(x)\cap \mathrm{Cb}_B^r(x).$$

直接计算可得 $\mathrm{Fix}_B^r(x)\cap \mathrm{C}^{(B,\circ)}(x)$ 是 B 的子斜括号。注意，$\mathrm{C}^{(B,\circ)}(x)$ 和 $\mathrm{Fix}_B^l(x)$ 都是 $(B,\circ)$ 的子群。因此得到如下关键结果： [11, 定理 3.3]。

命题 2.1。 设 $(B,+,\circ)$ 是一个斜括号。若 $x\notin \mathrm{Ann}(B)$，则 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 是$(B,\circ)$的真子群。

正如 [11, 第 175], 页所述，$\mathrm{Cb}_B(x)$ 是双侧斜胚 B 的子斜括号。但一般而言，对每个 $x\in B$, $\mathrm{Cb}_B(x)$ 未必是子群 $(B,+)$。GAP 搜索表明，阶为 [8, 18], [12, 15] 的斜括号以及若干阶为 16 的斜括号，包括 [16, 62-63], [16, 73-76] ，都存在元素 x ，使得 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 不是子群 $(B,+)$。情形 [8,18] 在 [11, 例 3.6] 中进行了讨论。这个斜括号 B 的加法群是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，乘法群是 D_8，即 8 阶二面体群。因此，$\mathrm{Cb}_B(0,3)=\{(0,0),(1,1)\}$，它是 $(B,\circ)$ 的子群，但不是 $(B,+)$ 的子群，因为 $(1,1)+(1,1)=(0,2)\notin \mathrm{Cb}_B(0,3)$。此例还表明，元素 $(0,3)$ 不属于它的括号中心化子。这也说明 $-(1,1)=(-1,-1)=(1,3)\notin \mathrm{Cb}_B(0,3)$。在这一点上，斜胚理论有别于群论。

若偏左 brace $(B,+,\circ)$ 中的 $(B,\circ,+)$ 也是偏左 brace，则称 $(B,+,\circ)$ 为对称的。这个概念由 [10], 引入，并在 [5, 8] 中得到进一步研究。设 $(B,+,\circ)$ 是一个斜 brace。注意，映射 $(B,\circ)\to \mathrm{Aut}(B,+)$, $b\mapsto\lambda_b$ 同时也是从 $(B,+)$ 到 $\mathrm{Aut}(B,+)$ 的映射。若该映射也是从 $(B,+)$ 到 $\mathrm{Aut}(B,+)$ 的群同态，则称斜 brace $(B,+,\circ)$ 是 λ-同态的。这个概念由 [7], 引入，并在 [4] 中得到进一步探讨。现在我们观察到

命题 2.2。 设$(B,+,\circ)$ 是对称斜括号或 λ-同态斜 ***brace***。则$\mathrm{Cb}_B(x)$ 是 B的子斜括号。

证明。 令 $a,b\in \mathrm{Cb}_B(x)$ 为任意两个元素。由于对所有 $x\in B$，$\mathrm{Fix}_B^r(x)$ 和 $\mathrm{C}^{(B,+)}(x)$ 都是 $(B,+)$ 的子群，因此只需证明 $\mathrm{Fix}_B^l(x)$ 是 $(B,+)$ 的子群，也就是说， $\lambda_{a+b}(x)=x$ 和$\lambda_{(-a)}(x)=x$。对于对称斜括号，根据给定假设和 [5, 命题 3.6.], , 我们得到

$$\lambda_{a+b}(x)=\lambda_{b\circ a}(x)=\lambda_b(\lambda_a(x))=x$$

and

$$x=\lambda_{b-b}(x)=\lambda_{(-b)\circ b}(x)=\lambda_{(-b)}(\lambda_b(x))=\lambda_{(-b)}(x).$$

此外，对于 λ-同态斜括号，根据其定义，我们得到

$$\lambda_{a+b}(x)=\lambda_{a\circ b}(x)=\lambda_a(\lambda_b(x))=x$$

and

$$x=\lambda_{-b+b}(x)=\lambda_{(-b)\circ b}(x)=\lambda_{-b}(\lambda_b(x))=\lambda_{-b}(x).$$

证明完毕。 □

若 x 在 B 中具有有限中心化子指数，则称之为如此，即 $[(B,\circ):\mathrm{Cb}_B(x)]$, 是 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 在 $(B,\circ)$ 中的指数为有限。令 $\mathrm{FCI}(B)$ 表示 B 中所有在 B 中具有有限中心化子指数的元素所成的集合。若斜括号 B 满足 $B=\mathrm{FCI}(B)$，则称其为 FCI。注意，若 $[B:\mathrm{Ann}(B)]$ 有限，则 B 是 FCI。因此，若 B 不是 FCI，则 $[B:\mathrm{Ann}(B)]$ 不是有限的。具有性质 (S) 的斜括号是在 [11, 定义 3.7] 中引入的。若元素 $x\in B$ 的两个指数 $[(B,+):\mathrm{Cb}_B^r(x)]$ 和 $[(B,\circ):\mathrm{Cb}_B^l(x)]$ 均有限，则称 $x\in B$ 为 s-元素。若斜括号 B 中每个 $x\in B$ 都是 s-元素，则称其具有性质 (S)。我们指出， B 中每个 s-元素都属于 $\mathrm{FCI}(B)$。然而，这两个概念，即具有性质 (S) 的斜括号与 FCI 斜括号，通常可能并不相同。我们进一步指出，若对所有 $x\in B$，$\mathrm{Cb}_B^r(x)$ 或 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 是 B 的左理想，则这两个概念相同。

现在证明

命题 2.3。 对于斜括号$(B,+,\circ)$，$\mathrm{FCI}(B)$是$(B,\circ)$的子群。此外，如果 B 是双边、对称的或 λ-同态的，那么$\mathrm{FCI}(B)$ 是 B的子斜括号。

证明。对于 $a,x_1,x_2\in B$，使得 $a\in \mathrm{Cb}_B(x_1)\cap \mathrm{Cb}_B(x_2)$，注意到 $x_1,x_2\in \mathrm{Cb}_B(a)$。因此，由命题 2.1 可得 $x_1\circ x_2\in \mathrm{Cb}_B(a)$，从而得到 $\mathrm{Cb}_B(x_1)\cap \mathrm{Cb}_B(x_2)\subset \mathrm{Cb}_B(x_1\circ x_2)$。现在，假设$x_1,x_2\in \mathrm{FCI}(B)$，我们看到 $[(B,\circ):\mathrm{Cb}_B(x_1\circ x_2)]\leqslant [(B,\circ):\mathrm{Cb}_B(x_1)][(B,\circ):\mathrm{Cb}_B(x_2)]<\infty$，因此 $x_1\circ x_2\in \mathrm{FCI}(B)$。同理，容易看出对于所有 $x\in \mathrm{FCI}(B)$，都有 $\mathrm{Cb}_B(x)=\mathrm{Cb}_B(x^{-1})$。其他断言可通过常规计算证明。证明完毕。□

对于双边括号，我们可以证明以下结果，它类似于 [11, 命题 3.10]。

命题 2.4. 设 $(B,+,\circ)$ 是一个双边括号。则 $\mathrm{FCI}(B)$ 是 B 的一个理想。

证明。令 $F:=\mathrm{FCI}(B)$ 且 $c\in F$。由于 B是一个双边括号，$(B,\circ)$ 的每个内自同构都是括号自同构，因此，对于所有 $x\in B$，都有 $x\circ c\circ x^{-1}\in F$。所以 F在 $(B,+)$ 和 $(B,\circ)$ 中都是正规子群。由于对所有 $b\in B$， $\lambda_b(c)=b*c+c$，且 F是 $(B,+)$ 的子群，只需证明 $b*c\in F$。由于 B 是一个双边括号，‘$*$’在 B 上满足结合律。因此，集合 $\{x*(b*c)\mid x\in B\}$ 和$\{(b*c)*x\mid x\in B\}$ 都是有限的。注意，对所有 $x\in B$，都有 $x\circ(b*c)\circ x^{-1}=(x\circ b\circ x^{-1})*(x\circ c\circ x^{-1})$。由于 $x\circ c\circ x^{-1}\in F$, $\{x\circ(b*c)\circ x^{-1}\mid x\in B\}$ 是有限的。证明完毕。□

3. 有限斜括号的交换概率

本节首先定义有限斜括号的交换概率。对于有限斜括号$B:=(B,+,\circ)$，我们将 B 的交换概率 记为 $\mathrm{Pb}(B)$，定义为

$$\mathrm{Pb}(B)=\frac{1}{|B|^2}\big(|\{(a,b)\mid a*b=b*a=\gamma^+(a,b)=1\}|\big).$$

显然，对于所有平凡斜斜括号 B，$\mathrm{Pb}(B)=1$。对于任意其他 brace B，$\mathrm{Pb}(B)$ 位于开区间 (0,1) 内。注意，与群论类似，我们可以通过括号中心化子推导出 $\mathrm{Pb}(B)$，如下所示:

$$\mathrm{Pb}(B)=\frac{\sum_{x\in B}|\mathrm{Cb}_B(x)|}{|B|^2},$$

进一步展开可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Pb}(B) &= \frac{1}{|B|^2}\Big(\sum_{x\in \mathrm{Ann}(B)}|\mathrm{Cb}_B(x)|+\sum_{x\in B-Ann(B)}|\mathrm{Cb}_B(x)|\Big)\\ &= \frac{|\mathrm{Ann}(B)|}{|B|}+\frac{1}{|B|^2}\sum_{x\in B-\mathrm{Ann}(B)}|\mathrm{Cb}_B(x)|. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

一个简单的观察是，若 $\mathrm{Pb}(B)\neq 1$，则 B 必定含有一个非平凡真子斜斜括号；这是因为不含非平凡真子斜括号的斜括号总是一个素数阶的平凡 brace（[3, 定理 A]）。当然，逆命题并不成立，因为对于所有平凡斜斜括号，$\mathrm{Pb}(B)=1$。根据定义可以直接得出

$$\mathrm{Pb}(B)\leqslant \min\{\mathrm{Pr}(B,+),\mathrm{Pr}(B,\circ)\},$$

其中，$\mathrm{Pr}(G)$表示给定群 G 的交换概率。

我们指出，本节中的若干证明也可以作为第 5 节中证明的特例得到。为完整起见，我们选择在此给出这些证明。正如上文所观察到的，$\mathrm{Pb}(B)$ 位于区间 $(0,1]$。不过，对于这些界，我们还可以给出更精确的结果。

命题 3.2。 对于任意满足 $|B|>1$ 的有限斜括号 B 以及真子斜括号 H，以下断言成立:

(1) $\frac{2}{|B|}\leqslant \mathrm{Pb}(B)$。 *(2)* $\mathrm{Pb}(B)<2^{|\mathrm{Cb}_B x|()}$，其中某个 $x\in B-\mathrm{Ann}(B)$。 *(3)* $\frac{\mathrm{Pb}(H)}{|B|}<\mathrm{Pb}(B)$。

此外，如果 H 是平凡 *brace*，那么 $\frac{1}{[B:H]^2}<\mathrm{Pb}(B)$。

证明。根据 t he definition of Pb(B)，我们看到 that the pairs $(b,1)$ and $(1,b), b \in B$，con tribute to the numera t or of Pb(B)。由于这些计数 $2|B|$，断言（1）成立。F 或断言（2），我们选取一个元素 $x \in B$ –Ann(B)，使得 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 的阶最大。 n 由（3.1）可直接得到

$$|B|^2 \operatorname{Pb}(B) \leqslant |B||Ann(B)| + |B||\operatorname{Cb}_B(x)| - |Ann(B)||\operatorname{Cb}_B(x)|,$$

这进一步意味着

$$\begin{aligned}\operatorname{Pb}(B) &\leqslant \frac{|\operatorname{Ann}(B)|}{|B|} + \frac{|\operatorname{Cb}_B(x)|}{|B|} - \frac{|\operatorname{Ann}(B)||\operatorname{Cb}_B(x)|}{|B|^2} \\ &< \frac{2|\operatorname{Cb}_B(x)|}{|B|}.\end{aligned}$$

断言（3）由此得证

$$\operatorname{Pb}(B) = \frac{\sum_{x\in B}|\operatorname{Cb}_B(x)|}{|B|^2} > \frac{\sum_{x\in H}|\operatorname{Cb}_H(x)|}{|B|^2} = \frac{|H|^2\sum_{x\in H}|\operatorname{Cb}_H(x)|}{|B|^2|H|^2} = \frac{\operatorname{Pb}(H)}{[B:H]^2}.$$

若 H 是平凡 brace，则 Pb(H) $= 1$。由前述界立即得到最后的断言，证明完毕。□

在本文余下部分，对于给定的有限斜括号 B，记 d 为整数 $|B/\mathrm{Ann}(B)|$，即 Ann(B) 在 B 中的指数。

命题 3.3。设 B 是一个有限斜括号。则 $\frac{2d-1}{d^2} \leqslant \operatorname{Pb}(B) \leqslant \frac{d+1}{2d}$。 ——

证明。我们首先注意到，对所有 $x \in B$，Ann(B) $\subseteq$ $\mathrm{Cb}_B(x)$。现在利用 (3.1)，得到

$$\begin{aligned}|B|^2\operatorname{Pb}(B) &= |\operatorname{Ann}(B)||B| + \sum_{x\in B-\operatorname{Ann}(B)}|\operatorname{Cb}_B(x)| \\ &\geqslant |\operatorname{Ann}(B)||B| + |B-\operatorname{Ann}(B)||\operatorname{Ann}(B)| \\ &= 2|\operatorname{Ann}(B)||B| - |\operatorname{Ann}(B)|^2. \\ &= 2|B|\frac{|B|}{d} - \frac{|B|^2}{d^2}. \\ &= |B|^2\frac{2d-1}{d^2}.\end{aligned}$$

因此 $\frac{2d-1}{d^2} \leqslant$ Pb(B)。

现在证明上界。由命题 2.1 可知，对于所有 $x \in B -$ Ann(B)，都有 $|\mathrm{Cb}_B(x)| \leqslant \frac{|B|}{2}$。因此，根据交换概率的定义，得到

$$\begin{aligned}|B|^2\operatorname{Pb}(B) &\leqslant |\operatorname{Ann}(B)||B| + |(B-\operatorname{Ann}(B))|\frac{|B|}{2}. \\ &= |B|\frac{|\operatorname{Ann}(B)|}{2} + \frac{|B|^2}{2}. \\ &= |B|\frac{|B|}{2d} + \frac{|B|^2}{2}. \\ &= |B|^2\frac{d+1}{2d},\end{aligned}$$

这意味着 Pb(B) $\leqslant \frac{d+1}{2d}$。证明完毕。 □

这里自然会产生一个问题：对于某些斜括号，这些界是否确实能够取到。现在我们证明它们确实能够取到。当 $d = p$ 是一个素数时，下界能够取到。

命题 3.4. 设 B 是一个有限斜括号， p 是整除 $|B|$的最小素数。则以下结论成立：

(1) If $|B/\operatorname{Ann}(B)| = p$, *then* $\operatorname{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$.

(2) $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{p+d-1}{pd} \leqslant \frac{2p-1}{p^2}$。此外，若对所有 $x \in B$，$\mathrm{Ann}(B) \subsetneq \mathrm{Cb}^{(B)}(x)$，则 $\mathrm{Pb}(B) \geqslant \frac{pd+d-pd^2}{}$。*(3)* 若 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的阶不是素数幂阶，且 q 是 $|B|$的第二小素因子，则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{|\mathrm{Ann}(B)|\,p-1\,-1}{p|B|} + \frac{1}{2p-1}$，其中 s或者是 q，或者是 p^2。*(4)* 特别地，若 $|B| = p^n$，则 $\mathrm{Pb}(B) = 1$、$\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$或 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{p^2+p-1}{p^3}$。*(5)* 若 $|B| = p^n$，$|\mathrm{Ann}(B)| = 1$，且 $(B,\circ)$ 不是初等阿贝尔群，则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{(p-1)^2}{p^{n+2}}$。

证明。令 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = p$。注意，对于所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，都有 $\mathrm{Cb}_B(x) = \mathrm{Ann}(B)$。然后，利用定义 (3.1) 直接计算可得 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$，这就证明了 (1)。对于~~(2)~~，令 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = d$。于是，由 (3.1) 得

$$\begin{aligned} |B|^2 \operatorname{Pb}(B) &\leqslant |\operatorname{Ann}(B)||B| + |(B - \operatorname{Ann}(B))|\frac{|B|}{p} \\ &= |\operatorname{Ann}(B)||B|(1 - \frac{1}{p}) + \frac{|B|^2}{p} \\ &= |B|\frac{|B|}{d}\frac{(p-1)}{p} + \frac{|B|^2}{p}, \end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{p+d-1}{pd}$。~~由于~~ $p \leqslant d$，我们得到 $\frac{p+d-1}{pd} \leqslant \frac{2p-1}{p^2}$。

现在假设对于所有 $x \in B$，都有 $\mathrm{Ann}(B) \subsetneq \mathrm{Cb}^{(B)}(x)$。由于 $\mathrm{Cb}^{(B)}(x)$ 是 $(B,\circ)$ 的一个子群（根据命题 2.1），因此可得 $|\mathrm{Cb}^{(B)}(x)/\mathrm{Ann}(B)| \geqslant p$。所以对于任意 $x \in B$，我们得到

$$|\operatorname{Cb}_{(B)}(x)| \geqslant \frac{p|B|}{d}.$$

利用（3.1）中的前述不等式，经过直接计算可得 $\mathrm{Pb}(B) \geqslant \frac{pd+d-p}{d^2}$。这就完成了（2）的证明。

注意，$(B,\circ)$ 的任意指数为 p 的子群 H 都是 $(B,\circ)$ 中的正规子群，因此，H 包含 $(B,\circ)$ 的所有 Sylowq'-子群，其中 q' 是 $|B|$ 的一个不同于 p 的素因子。对于（3），若对所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，都有 $[(B,\circ) : \mathrm{Cb}_B(x)] = p$，则 $(B,\circ)$ 的 Sylow q'-子群包含于 $\mathrm{Ann}(B)$ 中，因此 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的阶是 p 的幂，这与给定的假设矛盾。因此，至少存在一个元素 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，使得 $|\mathrm{Cb}_B(x)| \leq \frac{|B|}{s}$，其中若 $p^2 > q$，则 $s = q$；否则 $s = p^2$。现在由斜括号交换概率的定义可直接得到断言（3）。

接下来假设 $|B| = p^n$。如果 $B = \mathrm{Ann}(B)$，显然 $\mathrm{Pb}(B) = 1$；如果 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = p$，那么由 (1) 得到 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$。因此假设 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = p^r \geqslant p^2$。由 (2) 的第一个断言可得

$$\operatorname{Pb}(B) \leqslant \frac{p+d-1}{pd} = \frac{p+p^r-1}{p^{r+1}} \leqslant \frac{p^2+p-1}{p^3},$$

这就证明了 (4)。

现在证明 (5)。注意，如果对所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，$\mathrm{Cb}_B(x)$ 都是 $(B,\ \circ)$ 的极大子群，那么 $(B,\ \circ)$ 的 Frattini 子群包含于 $\mathrm{Ann}(B)$。由于 $(B,\ \circ)$ 不是初等阿贝尔群，其 Frattini 子群非平凡，这与 $|\mathrm{Ann}(B)| = 1$ 的假设矛盾。因此，存在一个元素 $y \in B$，使得 $\mathrm{Cb}_B(y)$ 不是 $(B,\ \circ)$ 的极大子群。现在得到

$$|B|^2 \operatorname{Pb}(B) \leqslant |B| + (|B| - 2)\frac{|B|}{p} + \frac{|B|}{p^2}.$$

取 $|B| = p^n$即可完成证明。 □

我们注意到，对于 $|B|$的任意素因子，前述结果中的断言（1）都成立。

设 $(B,\ +,\ \circ)$ 是一个有限斜括号，且 $(B,\ +)$ 和 $(B,\ \circ)$ 是幂零群。众所周知，有限幂零群可以写成其 Sylow p-子群的直积，因此 $(B,\ +)$ 可以写成

$$(B,+) \cong \Pi_{p_i \in \pi(B)} P_i,$$

其中 P_i 是 $(B, +)$ 的 Sylow p_i-子群。由 [9, 推论 4.3] 可知，每个 P_i 都是B的理想，且上述同构确实是括号同构。由于对于任意两个斜括号 H 和 K，$\mathrm{Pb}(H \times K) = \mathrm{Pb}(H)\,\mathrm{Pb}(K)$，因此 $\mathrm{Pb}(B) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Pb}(P_i)$，其中每个 Sylow p_i-子群 P_i 都满足 $\mathrm{Ann}(P_i) \subsetneq P_i$。现在，根据前述结果，我们可以计算具有幂零 $(B, +)$ 和 $(B, \circ)$（作为群）的斜括号的 $\mathrm{Pb}(B)$ 上界。特别地，这种构造可应用于幂零斜括号。

现在我们来探讨前面某个结果的一个逆向结论。

命题3.5。 设 B 是一个斜括号，满足 $B \neq \mathrm{Ann}(B)$，且 p 是一个素数，并且$\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$。则 $p||B|$。此外，若 p 是整除 $|B|$ 的最小素数，则 $B/\mathrm{Ann}(B) \cong \mathbb{Z}_p$。

证明。 根据 $\mathrm{Pb}(B)$ 的定义，给定的假设可得等式

$$|B|^2 \frac{2p-1}{p^2} = \sum_{x \in B} |\,\mathrm{Cb}_B(x)|.$$

这只有在 p 整除 $|B|$时才可能。

现在假设 p是整除 $|B|$的最小素数。由 (3.1) 可得

$$|B|^2\,\mathrm{Pb}(B) \leqslant |\,\mathrm{Ann}(B)||B| + |(B - \mathrm{Ann}(B))|\frac{|B|}{p}.$$

这给出

$$|B|(2p-1) \leqslant |\,\mathrm{Ann}(B)|p(p-1) + |B|p,$$

这意味着

$$|B|(p-1) \leqslant |\,\mathrm{Ann}(B)|p(p-1).$$

因此 $|B|/|\mathrm{Ann}(B)| = p$，因为 $B \neq \mathrm{Ann}(B)$。由于阶为 p 的斜括号仅有一个，我们必有 $B/\mathrm{Ann}(B) \cong \mathbb{Z}_p$，这就完成了证明。□

N接下来我们给出一个斜括号的例子，其中命题 3.3 的上界可以取到。

例 3.6。 令 $B = \mathbb{Z}_4$，将“+”视为自然“+”，并定义“∘”如下：

$$x \circ y = x + y + 2xy \ \textit{for all}\ x, y \in B,$$

其中 xy 是自然乘法。容易看出$(B, +, \circ)$ 是一个斜括号。令 $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$。现在注意到$\mathrm{Cb}^{(B)}(0) = \mathbb{Z}_4$，$\mathrm{Cb}^{(B)}(1) = \{0, 2\}$，$\mathrm{Cb}^{(B)}(2) = \mathbb{Z}_4$，$\mathrm{Cb}^{(B)}(3) = \{0, 2\}$。因此 $d = 2$，于是

$$\mathrm{Pb}(B) = \frac{4+2+4+2}{4^2} = \frac{3}{4} = \frac{d+1}{2d}$$

作为 $|B| = 4$

现在我们计算乘法群为交换群的循环括号的交换概率。设 $(B, +, \circ)$ 是一个有限循环括号，且其乘法群为交换群。那么，根据 [31,定理 1]，$B = \mathbb{Z}_n$ 以‘+’作为自然‘+’，而‘∘’定义为

$$x \circ y = x + y + dxy \ \text{ for all } x, y \in B,$$

其中 xy 是自然乘法，满足对于 n的每个素因子 p，$p|d|n$ 。

定理3.7。 设 $B = \mathbb{Z}_n$，将‘+’视为自然‘+’，而‘∘’定义为

$$x \circ y = x + y + dxy \ \textit{for all}\ x, y \in B,$$

其中 xy 是自然乘法，使得对于 n 的每个素因子 p，$p|d|n$。于是

$$\mathrm{Pb}(B) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{x \in (B,+) \\ \overline{dx} = \bar{t}}} gcd(t, n).$$

证明。令 $\bar{x} \in B$，则对所有 $\bar{y} \in B$，$\gamma^{+}(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ 且 $\gamma^{\circ}(\bar{x}, \bar{y}) = 1$。现在，$\bar{y} \in \mathrm{Cb}_B(x)$ 当且仅当 $\bar{x} * \bar{y} = 1$ 当且仅当 $d\bar{x}\bar{y} = 1$。设 $\bar{t} = dx$。则 $\bar{y} \in \mathrm{Cb}_B(x)$ 当且仅当 $\bar{t}$ 在 $(\mathbb{Z}_n, +)$ 中的阶整除 y。现在

$$\begin{aligned} |\operatorname{Cb}_B(x)| &= |\{\bar{y} \in B \mid y = m|\bar{t}| \text{ for some } m \in \mathbb{Z}\}| \\ &= |\{0 \leqslant m|\bar{t}| \leqslant n-1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= |\{0 \leqslant m \leqslant \frac{n-1}{|\bar{t}|} \mid m \in \mathbb{Z}\}| \\ &= |\{0 \leqslant m \leqslant \frac{n}{|\bar{t}|} - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}| \\ &= \frac{n}{|\bar{t}|} = gcd(t, n). \end{aligned}$$

因此，根据交换概率的定义，我们得到

$$\mathrm{Pb}(B) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{x \in (B,+) \\ \overline{dx} = \bar{t}}} gcd(t, n),$$

这就完成了证明。 □

现在，我们得到了所有有限偏斜括号 B 的 $\mathrm{Pb}(B)$ 的精确上界。

定理 3.8。设 $(B, +, \circ)$ 是一个有限斜括号。那么 $\mathrm{Pb}(B) = 1$，$\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$ 或 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{5}{8}$。

证明。设 B 是任意有限斜括号。设 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是由 $f(x) = \frac{x+1}{2x}$ 定义的函数。那么 f 的导数为

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \ (\leqslant 0).$$

因此，f 是单调递减函数。如果 $d = 1$，也就是说，B 是阿贝尔型的平凡偏 brace，那么 $\mathrm{Pb}(B) = 1$。如果 $d = 2$，3，那么由命题 3.4 可得 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$ 和 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{9}$。对于所有 $d \geqslant 4$，我们应用命题 3.3。注意，对于 $d = 4$，我们得到 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{5}{8}$。由于 f 是单调递减函数且 $\frac{5}{9} \leqslant \frac{5}{8}$，因此对于所有 $d \geqslant 3$，都有 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{5}{8}$，证毕。□

现在我们刻画满足 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$ 的有限斜括号 B。

引理3.9。对于有限斜括号 B，$\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$ 当且仅当对于所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，$|B/\operatorname{Ann}(B)| = 4$ 且 $|\mathrm{Cb}_B(x)| = \frac{|B|}{2}$。

证明。若 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$，则利用命题 3.3 和命题 3.4 (1)，可得 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = 4$；这只有在对所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$ 都有 $|\mathrm{Cb}_B(x)| = \frac{|B|}{2}$ 时才可能成立。另一方面，若 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = 4$，且对所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$ 都有 $|\operatorname{Cb}_B(x)| = \frac{|B|}{2}$，那么由命题 3.4 (2) 可知 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$。□

利用 GAP 可以得到许多满足前述结果假设的例子。其中一个斜括号是 $(Q_8, +, +_{op})$，其中 $(Q_8, +)$ 是阶为 8 的四元数群。下面的结果给出了更进一步的结论。

定理 3.10。设 B 是一个有限斜括号，且 $\mathrm{Pb}(B) = 5/8$。那么，商斜括号 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的加法群和乘法群都同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

证明。根据前述引理，我们知道，对于所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$，有 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = 4$ 和 $[(B, \circ) : \mathrm{Cb}_B(x)] = 2$。如果可能，假设加法群 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 是循环的，即由某个 $y \in B - \mathrm{Ann}(B)$ 生成，记作 $y + \mathrm{Ann}(B)$。那么 $(B, +)$ 是阿贝尔群。如果 $y \in \mathrm{Cb}_B(y)$，则可得到 $B = \mathrm{Cb}_B(y)$，这是不可能的。注意，当且仅当 $y \in \mathrm{Cb}_B(y)$ 时，$3y \in \mathrm{Cb}_B(y)$。因此，由于 $\mathrm{Ann}(B) \subsetneq \mathrm{Cb}_B(y)$，有 $2y \in \mathrm{Cb}_B(y)$。于是，$y \in \mathrm{Cb}_B(2y)$；利用 $(B, +)$ 是阿贝尔群这一事实，可推出 $\mathrm{Cb}_B(2y) = B$，这再次不可能。因此，$(B/\operatorname{Ann}(B)\ +)$ 不可能是循环的，从而同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。可以类似地证明 $(B/\mathrm{Ann}(B)\ \circ)$ 不是循环的。证明完毕。□

与群论结果不同，前述结果的逆命题并不成立。有许多例子可以说明这一事实。可以使用GAP查看，具有GAP编号(8，45)、(8，46)和(24，$664-666$)的斜括号是前述结果逆命题的一些反例。

现在我们证明以下有趣的结果，稍后将会用到这些结果，而它们在群论中的对应结论可由 [15]推出。

定理 3.11. 设$(B,+,\circ)$是一个有限阶斜括号，且 N是 B的一个理想。那么$\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(N)\,\mathrm{Pb}(B/N)$。特别地，$\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(B/N)$且$\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(N)$。

证明。 我们考虑群$(B,\circ)$和商群$(B,\circ)/(N,\circ)$。为简化记号，我们省略‘$\circ$’的使用，并用 $x \circ N = xN$ 表示$(B,\circ)$中的 N 的一个左陪集。对于$(B,\circ)$的两个子群 N_1 和 N_2 的乘积，我们简记为 N_1N_2。

我们首先证明，对所有 $x \in B$，都有$(\mathrm{Cb}_B(x)N)/N \subset \mathrm{Cb}^{B/N}(xN)$。设 $y \in \mathrm{Cb}_B(x)$。由于 N是 B的一个理想，我们知道对所有 $x \in B$都有 $x + N = x \circ N$。因此，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}(yN) * (xN) &= (y * x)N = N,\\ (xN) * (yN) &= (x * y)N = N\end{aligned}$$

and

$$[xN, yN]^\circ = [x, y]^\circ N = N.$$

因此，$(\mathrm{Cb}_B(x)N)/N \subset \mathrm{Cb}^{B/N}(xN)$。

注意，对于所有 $x \in B$， $N \cap \mathrm{Cb}_B(x) = \mathrm{Cb}_N(x)$。因此，由于 $\mathrm{Cb}_B(x)$ 和 $\mathrm{Cb}_N(x)$ 是 $(B,\circ)$ 的子群，我们得到

$$(\mathrm{Cb}_B(x)N)/N \cong \mathrm{Cb}_B(x)/(\mathrm{Cb}_B(x) \cap N) = \mathrm{Cb}_B(x)/\,\mathrm{Cb}_N(x).$$

现在，根据 $\mathrm{Pb}(B)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}|B|^2\,\mathrm{Pb}(B) &= \sum_{x\in B} |\,\mathrm{Cb}_B(x)| = \sum_{bN\in B/N}\ \sum_{x\in bN} |\,\mathrm{Cb}_B(x)|\\ &= \sum_{bN\in B/N}\ \sum_{x\in bN} |(\mathrm{Cb}_B(x)N)/N||\,\mathrm{Cb}_N(x)|\\ &\leqslant \sum_{bN\in B/N}\ \sum_{x\in bN} |\,\mathrm{Cb}_{B/N}(xN)||\,\mathrm{Cb}_N(x)|\\ &= \sum_{bN\in B/N} \Big(|\,\mathrm{Cb}_{B/N}(bN)| \sum_{x\in bN} |\,\mathrm{Cb}_N(x)|\Big)\\ &= \sum_{bN\in B/N} \Big(|\,\mathrm{Cb}_{B/N}(bN)| \sum_{y\in N} |\,\mathrm{Cb}_B(y)\cap(bN)|\Big).\end{aligned}$$

设 $z \in \mathrm{Cb}_B(y) \cap (bN)$。那么 $zN = bN$as $z \in bN$。现在，由于 $\mathrm{Cb}_B(y)$ 是 $(B,\circ)$ 的子群，且$z \in \mathrm{Cb}_B(y)$，我们得到

$$\mathrm{Cb}_B(y) \cap (zN) = (z\,\mathrm{Cb}_B(y)) \cap (zN) = z(\mathrm{Cb}_B(y) \cap N) = z\,\mathrm{Cb}_N(y),$$

这给出 $|\mathrm{Cb}_B(y) \cap (bN)| = |\mathrm{Cb}_N(y)|$。将这些值代入前面的不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|B|^2\,\mathrm{Pb}(B) &\leqslant \sum_{bN\in B/N} \Big(|\,\mathrm{Cb}_{B/N}(bN)| \sum_{y\in N} |\,\mathrm{Cb}_N(y)|\Big)\\ &= \Big(\sum_{bN\in B/N} |\,\mathrm{Cb}_{B/N}(bN)|\Big)\Big(\sum_{y\in N} |\,\mathrm{Cb}_N(y)|\Big),\end{aligned}$$

根据交换概率的定义，这可以写成

$$|B|^2\,\mathrm{Pb}(B) \leqslant \big(|B/N|^2\,\mathrm{Pb}(B/N)\big)\big(|N|^2\,\mathrm{Pb}(N)\big).$$

因此 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(N)\,\mathrm{Pb}(B/N)$，证明完毕。 □

我们考最后，我们将前述结果中的一项断言推广到子斜括号 s.

命题 3.12. 设 H 是有限斜括号 B 的子斜括号。则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(H)$。

证明。对于任意 $x \in B$，注意 $\mathsf{Cb}_H(x)$ 和 $\subseteq \mathsf{Cb}_B(x)$ 是 $(B,\circ)$ 的子群。设 $x \in B$ 满足 $[\mathsf{Cb}_B(x) : \mathsf{Cb}_H(x)] = k$，其中 k 是某个整数；并设 $\{b_i\}_{i=1}^{k}$ 是 $\mathsf{Cb}_H(x)$ 在 $\mathsf{Cb}_B(x)$ 中作为 $(B,\circ)$ 的子群时的一组左陪集代表元。由此可得，对于满足 $l \neq m$ 的 l、$m \in \{1,\ldots,k\}$，有 $b_l \circ H \neq b_m \circ H$。事实上，若 $b_l \circ H = b_m \circ H$，则 ${b_l}^{-1} \circ b_m \in H \cap \mathsf{Cb}_B(x)$ 与 $= \mathsf{Cb}_H(x)$，矛盾。因此 $[(\mathsf{Cb}_B(x)\ \circ),\ (\mathsf{Cb}_H(x) :\ \circ)] \leqslant [(B,\circ) : (H,\circ)],$，从而得到

$$|\operatorname{Cb}_B(x)| = [\operatorname{Cb}_B(x) : \operatorname{Cb}_H(x)]|\operatorname{Cb}_H(x)| \leqslant [(B,\circ) : (H,\circ)]|\operatorname{Cb}_H(x)|.$$

Now

$$\begin{aligned}\sum_{x\in B} |\operatorname{Cb}_B(x)| &\leqslant [(B,\circ) : (H,\circ)] \sum_{x\in B} |\operatorname{Cb}_H(x)| \\ &= [(B,\circ) : (H,\circ)] \sum_{y\in H} |\operatorname{Cb}_B(y)| \\ &\leqslant [(B,\circ) : (H,\circ)]^2 \sum_{y\in H} |\operatorname{Cb}_H(y)|.\end{aligned}$$

利用这一点，我们最终得到

$$\mathrm{Pb}(B) = \frac{\sum_{x\in B} |\operatorname{Cb}_B(x)|}{|B|^2} \leqslant \frac{[(B,\circ) : (H,\circ)]^2 \sum_{y\in H} |\operatorname{Cb}_H(y)|}{|B|^2} = \mathrm{Pb}(H),$$

从而完成证明。 □

4. 幂零性、同斜与交换概率

我们首先研究交换概率对斜括号幂零性的影响。如上所见，若 $\mathsf{Pb}(B) > \frac{3}{4}$，则 B 是一个平凡 brace。这里我们证明，若 $\mathsf{Pb}(B) > \frac{65}{128}$，则斜括号 B 是幂零的。我们从关于斜括号 B（满足 $|\Gamma_2(B)| = 2$）的一个基本观察开始。

命题 4.1. 设 $(B,+,\circ)$ 是一个斜括号，满足 $|\Gamma_2(B)| = 2$。则 B 是一个幂零类为2的幂零斜环。

证明. 设 $\Gamma_2(B) = \{1, b\}$。则集合 $\{a * b, b * a, a + b - a - b \mid a, \in B\}$ 生成 $\Gamma_3(B)$。简单计算可知，$\Gamma_3(B)$的生成集中的所有元素都必须是单位元，这证明了 $\Gamma_3(B) = \{1\}$。证明完毕。□

Lem命题 4.2。 设 $(B$、 $+$、 $\circ)$ 是一个阶为 p^n 的双侧偏括号。那么 B 是一个幂零斜环 *e.*

证明。 由 [26, 命题 3.22] 可知，$\mathsf{Ann}(B)$ 是 B 的非平凡理想。因此，通过归纳论证可轻易得到， B 是一个幂零斜环。□

如上文所述，乘法群为阿贝尔群的每个斜括号都是双侧的。因此，作为前述结果的直接推论，我们得到

推论 4.3。 任意阶为 p^2 的斜括号都是幂零的。

确实存在阶为素数幂且非幂零的斜括号。对于 $p = 2$，阶为 p^3 的一个此类例子是 GAP 库中的 (8、18)（见 [16, 34]）。阶为 8 的斜括号共有 5 个，即 (8, 2)、(8, 3)、(8, 18)、(8, 19)、(8, 47)，它们都不是双侧的。事实证明，对于前一句中提到的所有斜括号 B， $\bar{P}b(B) \leq \frac{1}{2}$。有关素数幂阶的非幂零斜环的更多信息，请参见 [27, 28]。

Co推论 4.4. 设 $(B,+,\circ)$ 是一个阶为 p^2 的斜括号。那么 $\mathrm{Pb}(B) = 1$ 或 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$.

证明。 由推论 4.3， B 是一个幂零斜环。因此， $\mathsf{Ann}(B) \neq \{1\}$，这意味着 $|\mathsf{Ann}(B)|$ 是 p或 p^2。如果 $|\mathsf{Ann}(B)| = p^2$，则 $\mathsf{Pb}(B) = 1$。如果 $|\mathsf{Ann}(B)| = p$，则由命题 3.4， $\mathsf{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$。□

我们注意到，有限斜括号 B 是幂零的，当且仅当 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 是幂零的。若 B 是一个非幂零的有限斜括号，则存在一个正整数 m，使得 $\mathrm{Ann}(B/\mathrm{Ann}_m(B)) = 1$。由定理 3.11 可知，$\mathrm{Pb}(B) \leqslant \mathrm{Pb}(B/\mathrm{Ann}_m(B))$。

现在我们可以证明

定理 4.5. 若 B 是有限斜括号，且 $\mathrm{Pb}(B) > \frac{65}{128}$，则 B 是幂零的。

证明。由于 $\mathrm{Pb}(B) > \frac{65}{128}$ 由命题 3.3 可得 $d \in \{1, 2, \ldots, 63\}$。对阶数属于集合 $\{1, \ldots, 63\} - \{32, 48\}$ 的非幂零偏括号进行 GAP 搜索，发现 $\mathrm{Pb}(B) \leq \frac{1}{2}$。如上所述，有限斜括号 B 是幂零的，当且仅当 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 是幂零的。因此，假设 B 是一个非幂零斜括号，且 $B/\mathrm{Ann}(B)$ 的阶为 32 或 48。令 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = 32$。那么 $(B, \circ)$ 不可能是阿贝尔群；否则， B 将是双侧斜胚，因而是幂零的。若 $|\mathrm{Ann}(B/\mathrm{Ann}(B))| = 1$，则由命题 3.4 (5)，$\mathrm{Pb}(B/\mathrm{Ann}(B)) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{128} = \frac{65}{128}$。若 $|\mathrm{Ann}(B)| > 1$，则 $\mathrm{Pb}(B) \leq \mathrm{Pb}(B/\mathrm{Ann}(B)) \leqslant \frac{1}{2}$。现在取 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = 48$。若 $|\mathrm{Ann}(B/\mathrm{Ann}(B))| = 1$，则由命题 3.4 (3)，$\mathrm{Pb}(B/\mathrm{Ann}(B)) \leqslant \frac{73}{144} < \frac{65}{128}$。若 $|\mathrm{Ann}(B)| > 1$，则同样有 $\mathrm{Pb}(B/\mathrm{Ann}(B)) \leqslant \frac{1}{2}$。证明完毕。□

现在我们转而关注斜括号的同斜，并证明斜括号的交换概率在同斜下保持不变。我们首先定义斜括号的同斜这一概念，该概念由 [26] 引入（群的同斜概念由 P. Hall [19] 引入）。对于斜括号 B，不难验证以下映射是良定义的：

$$\begin{aligned} \phi_+^B &: (B/\mathrm{Ann}\, B)^2 \to \Gamma_2(B), \qquad (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto [a, b]^+, \\ \phi_*^B &: (B/\mathrm{Ann}\, B)^2 \to \Gamma_2(B), \qquad (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto a * b, \end{aligned}$$

其中 $\bar{a}$，$b \in B/\mathrm{Ann}(B)$。如果存在 brace 同构 $\xi\colon A/\mathrm{Ann}\ A \to B/\mathrm{Ann}\, B$ 以及 $\theta\colon \Gamma_2(A) \to \Gamma_2(B)$，使得图

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_2(A) & \xleftarrow{\phi_+^A} & (A/\mathrm{Ann}\, A)^2 & \xrightarrow{\phi_*^A} & \Gamma_2(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \xi\times\xi} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ \Gamma_2(B) & \xleftarrow[\phi_+^B]{} & (B/\mathrm{Ann}\, B)^2 & \xrightarrow[\phi_*^B]{} & \Gamma_2(B) \end{array} \tag{4.6}$$

可交换，则称这一对 (ξ, θ) 为偏斜括号同斜。不难看出，同斜是所有偏斜左括号范畴中的一个等价关系。若斜括号 B 满足 $\mathrm{Ann}(B) \subseteq \Gamma_2(B)$，则称其为茎偏括号。每个同斜类（或族）都存在一个茎偏括号，这一点在 [26,定理 2.18] 中得以证明。

现在我们证明，交换概率在有限斜括号的同斜下保持不变。[25]证明了有限群的一个类似结果。

定理 4.7。 设 A 和 B 是两个有限阶的等临斜括号。那么 $\mathrm{Pb}(A) = \mathrm{Pb}(B)$ 且$|A' \cap \mathrm{Ann}(A)| = |B' \cap \mathrm{Ann}(B)|$。

证明。设 (ξ, θ) 是 A 与 B之间的一个同斜。由于 $A/\mathrm{Ann}(A) \cong B/\mathrm{Ann}(B)$，对于第一个断言，我们只需证明 $|A/\mathrm{Ann}(A)|^2\,\mathrm{Pb}(A) = |B/\mathrm{Ann}(B)|^2\,\mathrm{Pb}(B)$。首先展开右边。

$$\begin{aligned} |B/\mathrm{Ann}(B)|^2\,\mathrm{Pb}(B) &= \frac{1}{|\mathrm{Ann}(B)|^2}|\{(x, y) \in B \mid [x, y]^+ = x * y = y * x = 1\}| \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Ann}(B)|^2}|\{(x, y) \in B \mid \phi_+^B(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^B(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^B(\bar{y}, \bar{x}) = 1\}| \\ &= |\{(\bar{x}, \bar{y}) \in B/\mathrm{Ann}(B) \mid \phi_+^B(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^B(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^B(\bar{y}, \bar{x}) = 1\}|. \end{aligned}$$

类似地，

$$|A/\mathrm{Ann}(A)|^2\,\mathrm{Pb}(A) = |\{(\bar{x}, \bar{y}) \in A/\mathrm{Ann}(A) \mid \phi_+^A(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^A(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_*^A(\bar{y}, \bar{x}) = 1\}|.$$

现在利用 θ 是一个同构且图 (4.6) 可交换这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}|A/\operatorname{Ann}(A)|^2 \operatorname{Pb}(A) &= |\{(\bar{x},\bar{y}) \in A/\operatorname{Ann}(A) : \theta\phi_+^A(\bar{x},\bar{y}) = \theta\phi_*^A(\bar{x},\bar{y}) = \theta\phi_*^A(\bar{y},\bar{x}) = 1\}|,\\ &= |\{(\bar{x},\bar{y}) \in A/\operatorname{Ann}(A) : \phi_+^B(\xi,\xi)(\bar{x},\bar{y}) = \phi_*^B(\xi,\xi)(\bar{x},\bar{y}) = \phi_*^B(\xi,\xi)(\bar{y},\bar{x}) = 1\}|,\\ &= |\{(\bar{x}',\bar{y}') \in B/\operatorname{Ann}(B) : \phi_+^B(\bar{x}',\bar{y}') = \phi_*^B(\bar{x}',\bar{y}') = \phi_*^B(\bar{y}',\bar{x}') = 1\}|,\end{aligned}$$

其中 $\xi(\bar{y}) = \bar{y}'$，$\xi(\bar{x}) = \bar{x}'$。由于 ξ 是同构，由前述恒等式可得

$$|A/\operatorname{Ann}(A)|^2 \operatorname{Pb}(A) = |B/\operatorname{Ann}(B)|^2 \operatorname{Pb}(B),$$

利用 $|A/\mathsf{Ann}(A)| = |B/\mathsf{Ann}(B)|$ 这一事实，即可证明 $\mathsf{Pb}(A) = \mathsf{Pb}(B)$。

注意，$\Gamma_2(A/\mathsf{Ann}(A)) = \Gamma_2(A)\,\mathsf{Ann}(A)/\mathsf{Ann}(A)$。现在由斜括号的第三同构定理 [2], 可得

$$\Gamma_2(A/\operatorname{Ann}(A)) = \Gamma_2(A)/\big(\Gamma_2(A) \cap \operatorname{Ann}(A)\big).$$

类似地，$\Gamma_2(B/\mathsf{Ann}(B)) \cong \Gamma_2(B)/\big(\Gamma_2(B) \cap \mathsf{Ann}(B)\big)$。利用给定的假设即可得到第二个断言。□

给定斜括号等临族中的茎偏括号是满足 $\mathsf{Ann}(B) \subseteq \Gamma_2(B)$ 的斜括号 B。现在我们推导前述定理的一些简单推论。

推论 4.8. 设$(B,+,\circ)$ 是一个有限阶斜括号，满足 $\Gamma_2(B) \cap \operatorname{Ann}(B) = 1$。那么存在一个有限斜括号 A，使得$\operatorname{Pb}(A) = \operatorname{Pb}(B)$，且$\mathsf{Ann}(A) = 1$，并且 $\Gamma_2(A)$与 $\Gamma_2(B)$同构。

证明。 由 [26, 定理 2.18], , 存在一个茎斜括号 A，使得 A 与 B等临。该 A 即为所需的斜括号。□

推论 4.9。 设 A 和 B 是两个有限阶同斜偏斜括号，且 B 非平凡且是单的。那么 A 与 $B \times C$同构，其中 C 是一个满足$\operatorname{Pb}(C) = 1$的斜括号。

证明。由于 B 非平凡且是单的，因此有 $B = \Gamma_2(B)$，且 $\mathsf{Ann}(B) = 1$。于是 $\Gamma_2(A) \cong B$ 一个 d

$$\operatorname{Ann}(\Gamma_2(A)) \cong \operatorname{Ann}(\Gamma_2(B)) = \operatorname{Ann}(B) = 1.$$

注意到 $\Gamma_2(A) \cap \mathsf{Ann}(A) \subset \mathsf{Ann}(\Gamma_2(A)) = 1$ 且 $A/\mathsf{Ann}(A) \cong B/\mathsf{Ann}(B) \cong B = \Gamma_2(A)$。因此，我们得到一个正合列

$$1 \to \operatorname{Ann}(A) \to A \to \Gamma_2(A) \to 1,$$

比较阶数可得 $A \cong \Gamma_2(A) \times \mathsf{Ann}(A) \cong B \times \mathsf{Ann}(A)$。因此，$\mathsf{Ann}(A)$ 就是所需的斜括号 C。□

备注 4.10。 我们以两个简单事实结束本节，它们的证明直接由定义得到。根据 [26, 定理 2.18], 我们知道每个斜括号同斜类都包含一个茎偏括号。设给定的斜括号同斜类中包含一个有限斜括号。则该类中的每个茎偏括号都是有限的。在 [26, 命题 2.17] 中证明了，同一个同斜类中的任意两个茎偏括号具有相同的阶。我们指出，在一个斜括号同斜类中，任意两个具有相同有限阶的斜括号要么同时为茎偏括号。

5. 无限偏括号的交换概率

上述针对有限斜括号定义的交换概率，对于无限斜括号并没有意义。Gustafson [18] 于1973年也引入了无限群的交换概率这一概念，并证明非阿贝尔紧豪斯多夫拓扑群的交换概率始终不超过$_{5\ 8}$。此外，[14]证明了非阿贝尔紧豪斯多夫拓扑群的交换概率等于$_{5\ 8}$ 当且仅当 $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$。关于无限群交换概率及其进展的类似研究，读者可参见 [1, 33]。研究这一理论在括号中的类比将会很有意思。本节将为无限斜括号定义这一概念，并得到斜括号中与上述上界对应的类比。现在，我们来为无限斜括号交换概率的定义做准备。

我们首先回顾拓扑群的定义。若一个群 G是一个拓扑空间，并且映射 $G \times G \to G$、$(x,\ y) \mapsto xy$ 以及 $G \to G$、 $x \mapsto x^{-1}$ 都是

连续的，则称其为拓扑群。现在我们定义拓扑斜胚。若斜括号$(B,+,\circ)$中的两个群$(B,+)$和$(B,\circ)$都是具有公共拓扑的拓扑群，则称其为拓扑斜胚。因此，分别由 $\tau_1^+(a,b) = a+b$、 $\tau_1^\circ(a,b) = a\circ b$、$\tau_2^+(a) = -a$ 以及$\tau_2^\circ(a) = a^{-1}$ 给出的四个映射$\tau_1^+\colon (B,+)\times(B,+)\to(B,+)$、 $\tau_1^\circ\colon (B,\circ)\times(B,\circ)\to(B,\circ)$、$\tau_2^+\colon (B,+)\to(B,+)$和 $\tau_2^\circ\colon (B,\circ)\to(B,\circ)$都是连续的。还要注意，恒等映射$\mathrm{Id}_B\colon B\to B$也是连续的。通过在$B^n$上考虑乘积拓扑，我们可以构造拓扑空间 $B^n := B\times\cdots\times B$（n个副本）。紧和豪斯多夫拓扑斜胚$(B,+,\circ)$的概念，是通过相对于$(B,+)$和$(B,\circ)$的给定公共拓扑考察这些性质来定义的。现在我们以引理的形式作出一些关键观察。

引理 5.1。 设 $(B,+,\circ)$ 是一个拓扑斜胚。那么映射 $\tau\colon B\times B\to B$，由 $\tau(a,b) = a*b$ 给出，是连续的。

证明。 注意，两个连续映射的复合仍然连续。因此，由 $f(a,b) = (\tau_2^+(a)\ \tau_1^\circ(a,b)\ \tau_2^+(b))$ 定义的映射 $f_1\colon B\times B\to B\times B\times B$ 是连续的。此外，由 $f_2(a,b,c) = \tau_1^+\big(\tau_1^+(a,b)\ c\big)$ 定义的映射 $f_2\colon B\times B\times B\to B$ 也是连续的。现在， τ 即 f_2 与 f_1 的复合，是连续的。□

下面的结论众所周知。

引理 5.2。 设 $(B,+,\circ)$ 是一个拓扑斜胚。那么交换子映射 $\gamma^+\colon (B,+)\times(B,+)\to(B,+)$ 和 $\gamma^\circ\colon (B,\circ)\times(B,\circ)\to(B,\circ)$ 都是连续的。

我们最后一个关键观察是

引理 *5.3.* 设 $(B,+,\circ)$ 是一个豪斯多夫拓扑斜括号。那么 $Z := \{(a,b) \mid \tau(a,b) = \gamma^\circ(a,b) = \gamma^+(a,b) = 1\}$ 是 $B\times B$ 的闭子集，其中 $B\times B$ 是具有乘积拓扑的拓扑空间。此外，集合 $Cb_B(x)$ 和 $Ann(B)$ 也是 B 的闭子集。

证明。 第一个断言可由注意到 $Z = \tau(1)\cap\gamma^\circ(1)\cap\gamma^+(1)$ 得出。考虑适当的连续映射，也可得到第二个断言。□

设 $B := (B,+,\circ)$ 是一个紧豪斯多夫拓扑斜括号。那么 $(B,+)$ 是一个紧豪斯多夫拓扑群，因此存在唯一的概率 Haar 测度空间 $((B,+)\ \mathcal{M},\mu)$。考虑定义在乘积空间 $B\times B$ 上的乘积测度 $\mu\times\mu$，结果它是一个概率测度。由于 Z 是 $B\times B$ 中的闭子集，$(\mu\times\mu)(Z)$ 定义良好。斜括号 B 的交换概率 （记作 $\mathrm{Pb}(B)$）定义为

$$\mathrm{Pb}(B) := (\mu\times\mu)(Z).$$

我们指出，如果 B 是一个有限斜括号，那么 B 就是带有离散拓扑的紧斜括号，因此 B 上的 Haar 测度就是计数测度。因此，

$$\mathrm{Pb}(B) = (\mu\times\mu)(Z) = \frac{|Z|}{|B|^2},$$

这与式 (3.1) 中给出的有限斜括号交换概率的定义一致。

注 5.4. 设 $B := (B,+,\circ)$是一个紧豪斯多夫拓扑偏挠环，且$((B,+)\ \mathcal{M},\mu)$是概率 Haar 测度空间。我们断言$((B,\circ)\ \mathcal{M},\mu)$是一个概率 Haar 测度空间。由于 λ_x 是从$(B,+)$到其自身的同胚，因此 λ_x 将 Borel 集映射为 Borel 集，也就是说， $\mathcal{M}$ 映射到其自身。注意，对任意 $D\in\mathcal{M}$ 和 $x\in B$，都有 $x\circ D = x+\lambda_x(D)$。所以 $x\circ D\in\mathcal{M}$。定义函数 $\mu_{\lambda_x}\colon \mathcal{M}\to[0,\infty]$， 使得 $\mu_{\lambda_x}(D) = \mu(\lambda_x(D))$。由于 λ_x 是$(B,+)$上的群同态，因此 μ_{λ_x} 也是$(B,+)$上的概率 Haar 测度。于是，根据概率 Haar 测度的唯一性， $\mu_{\lambda_x} = \mu$。现在， $\mu(x\circ D) = \mu(x+\lambda_x(D)) = \mu(\lambda_x(D)) = \mu(D)$。因此， μ 也是$(B,\circ)$上的概率 Haar 测度。由此我们可以简单地说，斜括号 B 具有唯一的概率 Haar 测度 μ。

为简化记号，‘紧豪斯多夫拓扑偏挠环’将简称为‘紧斜括号’。现在证明

引理5.5。 设$(B,+,\circ)$是一个紧斜括号。则$\mathrm{Pb}(B)= \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x)$，其中$\mu(\mathrm{Cb}_B(x)) = \int_B \chi_Z(x,y)\, d\mu(y)$。

证明。 由交换概率的定义，我们得到

$$\mathrm{Pb}(B) = (\mu\times\mu)(Z) = \int_{B\times B} \chi_Z \, d(\mu\times\mu),$$

根据富比尼-托内利定理 [20, 第 36] 节，可得

$$\mathrm{Pb}(B) = \int_B \int_B \chi_Z(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x),$$

利用所给出的 $\mu(\mathrm{Cb}_B(x))$ 的值，这就完成了证明。 □

引理 *5.6*。设 H 是紧斜括号 $(B,+,\circ)$ 的 $(B,\circ)$ 的一个博雷尔子群。若 $[B\colon H]\geqslant n$，则 $\mu(H)\leqslant \frac{1}{n}$，其中 $[B\colon H]$ 表示 $(H,\circ)$ 在 $(B,\circ)$ 中的指数。此外，若 $[B\colon H]=n$，则 $\mu(H)=\frac{1}{n}$。特别地，若 $\mathrm{Ann}(B)$ 真包含于 B，则 $\mu(\mathrm{Ann}(B))\leqslant\frac{1}{2}$。进一步，若 H 在 $(B,\circ)$ 中的指数不是有限的，则 $\mu(H)=0$。

证明。 由于 H 是 B的博雷尔子集， H 是可测集，因此 $\mu(H)$ 定义良好。由于 $[B\colon H]\geqslant n$，存在至少 n 个互不相交的陪集

$$x_1\circ H,\ x_2\circ H,\ldots,x_n\circ H,$$

属于 $(B,\circ)$ 中的 H，它们都是可测集。因此，我们有

$$1=\mu(B)\ \geqslant\ \mu(\sqcup_{i=1}^n x_i\circ H)=\sum_{i=1}^n \mu(x_i\circ H)=n\mu(H)$$

如果 $[B\colon H]=n$，则 $(B,\circ)=\sqcup_{i=1}^n x_i\circ H$，因此 $\mu(H)=\frac{1}{n}$。

最后，假设 H 在 B 中的指数不是有限的。反设 $\mu(H)=\epsilon>0$。那么存在一个自然数 m，使得 $m\epsilon>1$。现在任取 H 在 $(B,\circ)$ 中的 m 个左陪集 $\{x_1\circ H,\ x_2\circ H,\ldots,x_m\circ H\}$。因此

$$1=\mu(B)\ \geqslant\ \mu(\sqcup_{i=1}^m x_i\circ H)=\sum_{i=1}^m \mu(x_i\circ H)=m\mu(H)=m\epsilon>1,$$

这是不可能的。证明完毕。 □

我们想指出，若 H 是 $(B,+)$ 的博雷尔子群，则前述结果中的结论仍然成立。此外，若 H 是 B的子斜括号，且它是一个博雷尔集，则 $[(B,+)\colon H]$ 与$[(B,\circ)\colon H]$要么同时有限，要么同时无限；若有限，则 $[(B,+)\colon H]=[(B,\circ)\colon H]$。

设 $B:=(B,\ +,\ \circ)$ 是一个紧斜括号，且 $B\neq\mathrm{Ann}(B)$。假设没有元素 $x\in B-\mathrm{Ann}(B)$ 的中心化子指数 $[(B,\ \circ):\mathrm{Cb}_B(x)]$ 属于 B。那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pb}(B) &= (\mu\times\mu)(Z)\\
&= \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \text{ (by Lemma 5.5)}\\
&= \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x)\\
&\leqslant \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x)\\
&= 0 \text{ (by Lemma 5.6).}
\end{aligned}$$

因此我们得到

引理 5.7. 对于一个紧斜括号 B，若 $B\neq\mathrm{Ann}(B)$ 且 $\mathrm{Ann}(B)=\mathrm{FCI}(B)$，则 $\mathrm{Pb}(B)=0$。

现在我们证明 $\mathrm{FCI}(B)$ 是一个博雷尔集。

Pro命题 5.8。 设$(B,+,\circ)$是一个豪斯多夫拓扑斜括号。则$\mathrm{FCI}(B)$是一个博雷尔集 *t.*

证明。设 $F_n := \{y \in B \mid [(B,\circ) : \mathrm{Cb}_B(y)] \leqslant n\}$。则 $\mathrm{FCI}(B) = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$。设 x 是 F_n的一个极限点。则存在一个网 $\{x_\lambda\}$ 在 F_n 中收敛于 x。由于 $x_\lambda \in F_n$，我们看到，对于某个 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $b_i \in B$，有 $B = \sqcup_{i=1}^{k}(b_i \circ \mathrm{Cb}_B(x_\lambda))$。设 $b \in B$ 是任意元素。则对于某个 $1 \leqslant i \leqslant k$，有$b \in b_i \circ \mathrm{Cb}_B(x_\lambda)$。因此 $b_i^{-1} \circ b \in \mathrm{Cb}_B(x_\lambda)$。定义三个函数 $f_1, f_2, f_3 : B \to B$，其满足：$f_1(y) = (b_i^{-1} \circ b) \circ y \circ (b_i^{-1} \circ b)^{-1}$，以及 $f_2(y) = (b_i^{-1} \circ b) * y$，还有 $f_3(y) = y * (b_i^{-1} \circ b)$，对所有 $y \in B$ 均成立。则 f_1, f_2, f_3 是连续函数。因此，对于 $1 \leqslant j \leqslant 3$，$f_j(x_\lambda)$ 收敛于 $f_j(x)$，从而$b_i^{-1} \circ b \in \mathrm{Cb}_B(x)$。这意味着 $b \in b_i \circ \mathrm{Cb}_B(x)$。consequently，$[(B,\circ) : \mathrm{Cb}_B(x)] \leqslant k$，这给出 $x \in F_n$，证明 F_n 在 B 中是闭的。证明完毕。□

现在我们证明定理1的一个括号类比 [23,2]。

定理 5.9。设 $(B, +, \circ)$ 是一个紧斜括号。则下列陈述等价：

(1) $\mathrm{Pb}(B) > 0$。*(2)* $\mathrm{FCI}(B)$ 在 B 中是开的。*(3)* $[(B,\circ) : \mathrm{FCI}(B)] < \infty$。

证明。令 $F := \mathrm{FCI}(B)$。由于对于所有 $x \in B - F$，$\mathrm{Cb}_B(x)$ 在 $(B,\circ)$ 中的指数都是无限的，因此可得 at

$$\mathrm{Pb}(B) = \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) = \int_F \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \leqslant \int_F d\mu(x) = \mu(F).$$

因此，由 (1) 可得 $\mu(F) > 0$。接着由 [21, 推论 20.17] 可知，$F \circ F^{-1}$ 包含一个非空开集。由于 $F \circ F^{-1} = F$，根据 [21, 定理 5.5]，F在 B中是开集。

现在假设 (2)。由于 F 在 B中非空且开，故有 $\mu(F) > 0$。于是，根据引理 5.6，$[(B,\circ) : F] < \infty$。这就证明了 (3)。若 (3) 成立，则根据引理 5.6，$\mu(F) > 0$。若 $\int_F \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) = 0$，则根据 [29, 定理1.39]，$\mu$ 在 F上几乎处处等于 $\mathrm{Cb}_B = 0$。但我们知道，μ Cb_B在 F上处处非零。因此，$\mathrm{Pb}(B) = \int_F \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) > 0$，这就证明了 (1)，证毕。□

现在我们给出一个紧致非平凡斜左圈 B，其 $\mathrm{Pb}(B) = 0$。设 $(G, +)$ 是一个非阿贝尔连通紧致李群。令 $B := (G, +, +_{op})$。注意，如果 $[a, x]^+ = 1$，那么 $a * x = 1$。由此可知，对于所有 $x \in B$，$\mathrm{Cb}_B(x) = \mathrm{C}_{(B,+)}(x) = \mathrm{C}_{(B,\circ)}(x)$。因此我们得到 $\mathrm{Pb}(B) = \mathrm{Pb}(G, +, +)$，它等于群 $(G, +)$ 的交换概率。令 $\Phi(G, +)$ 为所有满足以下条件的有序对 $(x, y) \in (G, +) \times (G, +)$ 的集合：x 和 y 生成 $(G, +)$ 的一个非阿贝尔自由子群。于是由[22, 命题 6.86 和习题 E 6.18.] 可知，$(G, +)$ 中补集 C of $\Phi(G, +)$ 的 Haar 测度为零。由于 Z 包含于 C 中，我们有 $(\mu \times \mu)(Z) = 0$，其中 μ 是概率 Haar 测度。这证明了 $\mathrm{Pb}(B) = 0$。

现在我们得到了紧斜括号 B的 $\mathrm{Pb}(B)$ 的一个下界。

命题 5.10。设$(B, +, \circ)$ 是一个满足 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = d$ 的紧斜括号。那么$\mathrm{Pb}(B) \geqslant \frac{2d-1}{d^2}$。此外，若$d = p$ 是一个素数，则$\mathrm{Pb}(B) = \frac{2p-1}{p^2}$。

证明。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pb}(B) &= \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \text{ (by Lemma 5.5)} \\
&= \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \\
&\geqslant \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Ann}(B))\, d\mu(x) \\
&= \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{d}\mu(B - \mathrm{Ann}(B))) \text{ (by Lemma 5.6)} \\
&= \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{d}\big(\mu(B) - \mu(\mathrm{Ann}(B))\big) \\
&= \tfrac{d-1}{d}\mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{d}\mu(B) \\
&= \frac{d-1}{d^2} + \frac{1}{d} \text{ (by Lemma 5.6)} \\
&= \frac{2d-1}{d^2}.
\end{aligned}$$

现在假设 $d = p$。因此，根据命题 2.1，对于所有 $x \in B$ –Ann(B)，都有 Ann(B) $=$ Cb$_B$(x)。设$\{1, y_1, \ldots, y_{p-1}\}$为 Ann($B$) 在 B 中的一组陪集代表元。则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pb}(B)) &= \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \text{ (by Lemma 5.5.)} \\
&= \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \big(\int_{y_i+\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \big) \\
&= \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \sum_{i=1}^{p-1} \big(\tfrac{1}{p} \mu(y_i + \mathrm{Ann}(B)) \big) \\
&= \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{p-1}{p} \mu(\mathrm{Ann}(B)) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p^2} = \frac{2p-1}{p^2}.
\end{aligned}$$

证明完成。 □

现在我们计算一些上界。

定理 5.11。 设 $(B, +, \circ)$ 是一个紧斜括号。则以下结论成立：

(1) 对所有 $x \in B - \mathrm{Ann}(B)$， $\mu(\mathrm{Cb}_B(x)) \leqslant \frac{1}{2}$。*(2)* $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{3}{4}$。*(3)* 若 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = d$，则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{d+1}{2d}$。

(4) 特别地，若 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = d \geq 3$，则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{5}{8}$。

(5) 若 B 不是 *FCI*，则 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{1}{2}$。

证明。 对于 $x \in B$ –Ann(B)，我们知道 Cb$_B$(x) $\subsetneq B$。由命题 2.1可知，Cb$_B$(x) 是 $(B, \circ)$ 的真子群。由于 Cb$_B$(x) 是闭的，它在 Haar 测度 μ 下有一个值。因此，根据引理 5.6，我们得到

$$\mu(\mathrm{Cb}_B(x)) \leqslant \frac{1}{2}.$$

对于第二个断言，我们计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pb}(B) &= (\mu \times \mu)(Z) \\
&= \int_B \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \text{ (by Lemma 5.5)} \\
&= \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \\
&\leqslant \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{2}\mu(B - \mathrm{Ann}(B))) \text{ (by (1))} \\
&= \mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{2}\big(\mu(B) - \mu(\mathrm{Ann}(B))\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\mu(\mathrm{Ann}(B)) + \tfrac{1}{2}\mu(B) \\
&\leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \text{ (by Lemma 5.6).}
\end{aligned}$$

将 μ(Ann(B)) $= \frac{1}{d}$ 代入前面的计算中，便可轻易得到断言 (3)。断言 (4) 的证明思路与定理 3.8 的证明相同，其中 $d = 3$ 使用命题 5.10，而最后一个断言则利用了在上述不等式中 μ(Ann(B)) $= 0$ (引理 5.6) 这一事实。证明至此完成。□

回顾一下，对于紧斜括号 B， $F_n := \{y \in B \mid [(B, \circ) : \mathrm{Cb}_B(y)] \leqslant n\}$ 是一个博雷尔集。我们考虑一种特定情形： B 是一个紧斜括号，且 $|B/$Ann(B)$| = 4$。此时 $F_2 \subseteq F_4$ 是博雷尔集。定义 $E_4 := F_4 - F_2$，它是 B 中满足 $[(B, \circ) : \mathrm{Cb}_B(x)] = 4\}$ 的所有元素 x 的集合。注意， $E_4 = F_4 \cap (B - F_2)$。由于 F_4 和 $B - F_2$ 都是博雷尔集，因此 E_4 也是博雷尔集，故 Haar 测度 μ 在 E_4 上有定义。现在，我们可以进一步讨论 5 8 作为交换概率的情形。

命题 5.12. 设 B 是一个无限紧斜括号。那么 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$ 当且仅当 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = 4$且 $\mu(E_4) = 0$。

证明。设 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{5}{8}$。那么，根据命题 5.10 和定理 5.11，我们得到 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = 4$。因此$[(B, \circ) : \mathrm{Cb}_B(x)]$ 只能是 2 或 4。现在

$$\begin{aligned}\mathrm{Pb}(B) &= \int_{\mathrm{Ann}(B)} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{B-\mathrm{Ann}(B)-E_4} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) + \int_{E_4} \mu(\mathrm{Cb}_B(x))\, d\mu(x) \\ &= \mu(\mathrm{Ann}(B) + \frac{1}{2}\big(\mu(B) - \mu(\mathrm{Ann}(B) - \mu(E_4)\big) + \frac{1}{4}\mu(E_4) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big(\mu(\mathrm{Ann}(B)) - \frac{1}{4}\mu(E_4)\big) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}\mu(E_4)).\end{aligned}$$

由此得到 $\mu(E_4) = 0$。利用给定的假设，由前述方程可得逆命题。 □

最后，我们得到 [18] 主要结果的括号类比。

定理 5.13. 设$(B, +, \circ)$ 是一个紧斜括号。那么$\mathrm{Pb}(B) > \frac{5}{8}$ 当且仅当 $|B/\operatorname{Ann}(B)| \leqslant 2$。此外，$|B/\operatorname{Ann}(B)| = 2$ 当且仅当$\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$。

证明。若 $B/\mathrm{Ann}(B) = 1$，也就是说，B 是一个平凡 brace，则 $\mathrm{Pb}(B) = 1$。因此，假设 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = 2$。由命题 5.10 可得 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$。反过来，假设 $\mathrm{Pb}(B) > \frac{5}{8}$。若 $\mathrm{Pb}(B) = 1$，则 $B = \mathrm{Ann}(B)$。假设 B 不是一个平凡 brace。则 $|B/\operatorname{Ann}(B)| \geqslant 2$。若 $|B/\mathrm{Ann}(B)| = 2$，则由命题 5.10 可得 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$。因此我们假设 $|B/\operatorname{Ann}(B)| = d \geqslant 3$。由此，根据定理 5.11 (4)，可得 $\mathrm{Pb}(B) \leqslant \frac{5}{8}$，这就证明了第一个断言。第二个断言可由定理 5.11 (3) 得出。□

最后，我们给出一个 $\mathrm{Pb}(B) = \frac{3}{4}$ 的无限斜括号 B 的具体例子。首先注意，对于两个紧斜括号 $(B_1, +, \circ)$ 和 $(B_2, +, \circ)$，可推出 $\mathrm{Pb}(B_1 \times B_2) = \mathrm{Pb}(B_1)\,\mathrm{Pb}(B_2)$。令 $B_1 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +, +)$ 为平凡 brace，其中 $+$ 是模 $\mathbb{Z}$ 的实数上的自然加法，而B_2 是我们在例 3.6 中定义的斜括号。于是 $\mathrm{Pb}(B_1) = 1$，$\mathrm{Pb}(B_2) = 3/4$，因此 $\mathrm{Pb}(B_1 \times B_2) = 3/4$。

致谢： 第二作者感谢 DST-SERB 项目 MTR/2021/000285 的部分资助。

参考文献

[1] Y. Antolin、A. Martino 和 E. Ventura，〈无限群的交换度〉，《美国数学会会刊》145（2017），479-485。[2] A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero 和 V. Perez-Calabuig，〈斜左括号的 Jordan-H¨older 定理及其在杨–巴克斯特方程多置换解中的应用〉，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》154（2024），793-809。[3] A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero、P. Jim´enez-Seral 和 V. P´erez-Calabuig，〈可解斜左括号与可解的杨–巴克斯特方程解〉，《数学进展》455（2024），论文编号 109880，共 27 页。[4] V. G. Bardakov、M. V. Neshchadim 和 Manoj K. Yadav，〈关于 λ-同态斜括号〉，《纯粹与应用代数》226（2022），论文编号 106961，共 37 页。[5] V. G. Bardakov、M. V. Neshchadim 和 Manoj K. Yadav，〈对称斜括号与括号系统〉，《数学论坛》35（2023），713-738。[6] M. Bonatto 和 P. Jedlicka，〈斜括号的中心幂零性〉，《代数与应用代数杂志》22（2023），2350255（16 页）。[7] E. Campedel、A. Caranti 和 I. Del Corso，〈次数为 p^2q 的扩张上的 Hopf-Galois 结构及阶为 p^2q的斜括号：循环 Sylow p-子群情形〉，《代数杂志》556（2020），1165-1210。[8] A. Caranti，〈双斜括号与全纯群的正则子群〉，《代数杂志》562（2020），647-665。[9] F. Cedo、A. Smoktunowicz 和 L. Vendramin，〈幂零型斜左括号〉，《伦敦数学会会刊》118（2019），1367-1392。[10] L. N. Childs，〈双斜括号与 Hopf-Galois 结构〉，《纽约数学杂志》25（2019），574-588。[11] I. Colazzo、M. Ferrara 和 M. Trombetti，〈杨–巴克斯特方程的导出不可分解解〉，《数学出版物》69（2025），171-193。[12] V. G. Drinfeld，〈量子群理论中的若干未解决问题〉，《数学讲义》1510，施普林格出版社，柏林，1992，1-8。[13] P. Erdős 和 P. Turán，〈统计群论中的若干问题 IV〉，《匈牙利科学院数学学报》19（1968），413-435。[14] A. Erfanian、R. Kamyabi-Gol，〈紧群中两两交换的 n-元组〉，《国际代数杂志》1（2007），251-262。[15] P. X. Gallagher，〈有限群中共轭类的数量〉，《数学杂志》118（1970），175-179。[16] GAP 小组，《群、算法与程序设计》，4.15.1 版（2025），网址：http://www.gap-system.org。[17] L. Guarnieri 和 L. Vendramin，〈斜括号与杨–巴克斯特方程〉，《数学计算》86（2017），2519-2534。

[18] W. H. Gustafson，〈两个群元素交换的概率是多少？〉，《美国数学月刊》80（1973），1031-1034。[19] P. Hall，〈素数幂阶群的分类〉，《纯粹与应用数学杂志》182（1940），130-141。[20] P. R. Halmos，《测度论》，Van Nostrand，普林斯顿，新泽西州，1950。[21] E. Hewitt 和 K. A. Ross，《抽象调和分析》第一卷：拓扑群的结构、积分理论、群表示论，《数学科学基础丛书》第 115 卷，施普林格出版社，柏林-哥廷根-海德堡；Academic Press, Inc.，纽约，1963，viii+519 页。[22] K. H. Hofmann 和 S. A. Morris，《紧群的结构——学生入门读物、专家手册》，德格鲁伊特数学研究丛书第 25 卷，德格鲁伊特出版社，柏林，2023，xli+1032 页。[23] K. H. Hofmann 和 F. G. Russo，〈紧群中 x 与 y 交换的概率〉，《剑桥哲学会数学学报》153（2012），第 3 期，557-571。[24] E. Jespers、A. Van Antwerpen 和 L. Vendramin，〈斜括号的幂零性与杨–巴克斯特方程的多置换解〉，《当代数学通讯》25（2023），第 9 期，论文编号 2250064，共 20 页。[25] P. Lescot，〈有限群的同斜类与交换度〉，《代数杂志》177（1995），847-869。[26] T. Letourmy 和 L. Vendramin，〈斜括号的等临〉，《伦敦数学会通报》55（2023），第 6 期，2891-2906。[27] S. Mukherjee，〈基数为 p^5的右幂零 $\mathbb{F}_p$-括号的分类〉，《代数杂志》665（2025），503-537。[28] D. Puljic，〈基数为 p^4的括号的分类〉，《代数杂志》660（2024），1-33。[29] W. Rudin，《实分析与复分析》，麦格劳-希尔图书公司，纽约，1987，xiv+416 页。[30] W. Rump，〈括号、根环与量子杨-巴克斯特方程〉，《代数杂志》307（2007），第 1 期，153-170。[31] W. Rump，〈循环括号的分类〉，《纯粹与应用代数》209（2007），671-685。[32] A. Smoktunowicz、L. Vendramin，〈论斜括号〉（附录由 N. Byott 和 L. Vendramin 撰写），《组合代数杂志》2（2018），47-86。[33] M. C. H. Tointon，〈无限群的交换概率〉，《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）101（2020），1280-1297。[34] L. Vendramin 和 O. Konovalov，Yang-Baxter，0.10.7 版（2025），网址：https://www.gap-system.org/Packages/yangbaxter.html。

哈里什-钱德拉研究所，霍米·巴巴国家研究所的一个 CI，恰特纳格路，琼西，普拉亚格拉吉-211 019，印度电子邮件地址：susantamondal@hri.res.in

哈里什-钱德拉研究所，霍米·巴巴国家研究所的一个 CI，恰特纳格路，琼西，普拉亚格拉吉-211 019，印度电子邮件地址：myadav@hri.res.in