arXiv:2603.16774v1 [math.GT] 17 Mar 2026

树状不是路径上的传递关系

Jeremy Brazas、Gregory R. Conner、Paul Fabel 和 Curtis Kent

Abstract. Hambly 和 Lyons 在其 2010 年《数学年刊》论文中引入了 *tree-like loop* 和 *Lipschitz tree-like loop* 的概念。他们证明，Lipschitz 树状性质在给定度量空间的有界变差路径集合上确定了一个等价关系，随后提出了这一概念能否扩展到不满足 Lipschitz 要求的路径这一问题。我们证明，去除 Lipschitz 要求后，所得关系不再具有传递性，因而不是等价关系。该反例通过分析平面中的一个显式分形构造得到。

1. Introduction

在他们发表于 2010 年《数学年刊》的论文中，Hambly 和 Lyons 研究了有界变差路径具有树状 [5]这一概念。他们的定义使用取值于实线的正连续函数来刻画 $\mathbb{R}$-树，这些函数被称为高度函数。

定义 1.1 ([5])。 度量空间 $(X,\ d)$ 中的连续函数 $\alpha\colon [0,\ 1] \to X$ 若存在正实值连续函数 $h\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ 使得对所有 $s \leqslant t$，则称其为树状，

$$d\big(\alpha(t), \alpha(s)\big) \leqslant h(t) + h(s) - 2 \inf_{u\in[s,t]} h(u).$$

函数 h 是 α的高度函数。如果 $\alpha * \beta$ 是树状的，则称两条路径 $\alpha,\ \beta\colon [0,\ 1] \to X$ 是树状等价的。如果 α 具有有界变差的高度函数，则称路径 α 为利普希茨树状路径。如果 $\alpha * \beta$ 是利普希茨树状的，则称两条路径 $\alpha,\ \beta\colon [0,\ 1] \to X$ 是利普希茨树状等价的。

Hambly 和 Lyons 证明了，利普希茨树状是有界变差路径集合上的等价关系，并且每个等价类都有一个唯一的（在重新参数化意义下）最短长度代表元。随后他们证明，对于 $\mathbb{R}^d$ 中的有界变差路径，路径签名是平凡的，当且仅当该路径是利普希茨树状的[5, 定理 4]。Hambly 和 Lyons 询问有限长度条件究竟有多重要，并提出了以下两个问题。

问题 1.2。 [5, 问题 1.8]树状等价（不要求高度函数是利普希茨的）是否在连续路径集合上定义了一个等价关系?

问题 1.3。 [5, 问题 1.9] 每条连续路径是否都对应唯一的树约化路径?

本文的主要结果定理 6.1 对这两个问题都给出了否定答案。为证明该定理，我们需要采用一种关于“树状”的替代定义，该定义由 Boedihardjo、Geng、Lyons 和 Yang 在 [1] 中提出，适用于不具有有界变差的路径。同一定义也由他人在 [2] 中独立提出，并称为“$\mathbb{R}$-树零伦”。为阐明其对一般

Date：2026年3月18日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 54F50、55R65、57M10。
Key words and phrases. $\mathbb{R}$-树、测地 $\mathbb{R}$-树约化、路径同伦、树状连续统、唯一路径提升、覆盖映射。

路径的区别，我们将使用后一术语（见定义 1.4）。Boedihardjo 等人证明，弱几何粗糙路径的签名平凡，当且仅当该路径是 $\mathbb{R}$-树零伦的。

定义 1.4 ([1, 2])。我们称 $\alpha\colon [0,\ 1] \to X$ 是 $\mathbb{R}$-树零伦的，如果 α 可经由某个 $\mathbb{R}$-树中的环路分解；也就是说，如果存在一个 $\mathbb{R}$-树 E、一个环路 $\pi\colon [0,\ 1] \to E$ 以及一个映射 $g\colon E \to X$，使得 $g \circ \pi = \alpha$。

我们称路径 $\alpha,\ \beta\colon [0,\ 1] \to X$ 是 $\mathbb{R}$-树同伦的，并记作 $\alpha \simeq_{\mathbb{R}} \beta$，如果 $\alpha * \bar{\beta}$是 $\mathbb{R}$-树零伦的。

[2] 的一个主要结果（定理 1.4）是，$\simeq_{\mathbb{R}}$ 在路径空间上不是等价关系；具体而言，$\simeq_{\mathbb{R}}$ 不满足传递性。然而，仅此并未回答 Hambly 和 Lyons 提出的问题，因为尚未证明导致传递性失效的路径具有高度函数。虽然可以通过梳理其中的构造来证明所构造的路径具有高度函数，但本文将介绍一种替代性的几何构造，在该构造中，所构造的环路具有高度函数这一点显而易见。这也将为 [2]的定理 1.4 提供一个独立证明。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们证明每个树状回路都是 $\mathbb{R}$-树零伦的；若经由 $\mathbb{R}$-树 E 的分解可以通过 Lipschitz 映射 $g : E \to X$实现，则反命题也成立。第 3 节中，我们说明如何修改经由单纯树分解的某些分段线性路径。第 4 节中，我们对第 3 节中的构造进行归纳应用，构造两列路径，$g_n \circ \pi_n$ 和 $\tilde{g}_n \circ \tilde{\pi}_n$，它们分别经由规模逐渐增大的单纯树分解。第 5 节中，我们证明这两列路径都收敛到同一条路径 γ，该路径在直角三角形[1]的凸包中空间填充。我们还指出了可确保第 4 节所述构造得出 $\mathbb{R}$-树同伦路径的一般度量条件。第 6 节中，我们通过证明 $\alpha = g_1 \circ \pi_1$与 γ树状等价、$\beta = \tilde{g}_1 \circ \tilde{\pi}_1$ 与 γ树状等价，但 α 与 β并不树状等价，对 Hambly 和 Lyons 的第一个问题给出否定答案。由于路径 α 和 β 是仅在端点相交的可求长弧，它们是约化的，因此也对 Hambly 和 Lyons 的第二个问题给出否定答案。

2. Relation between types of tree-like

我们首先简短证明：树状蕴含 $\mathbb{R}$-树可缩。感兴趣的读者也可参见 [3, 4, 6]，以了解其他证明。回顾一下，以紧致 $\mathbb{R}$-树为底空间的拓扑空间称为树状连续统。等价地，树状连续统是唯一弧连通的皮亚诺连续体。

定义 2.1（由高度函数构造树状连续统）。对于任意连续函数 $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，我们可以在 $[0,1]$ 上定义等价关系 $\sim_h$：若 $h(s) = h(t) = a$ 且s,t包含于 $h^{-1}\big([a,\infty)\big)$的同一个连通分支中，则 $s \sim_h t$。注意，对于 $s < t$，这等价于 $a = h(s) = h(t) = \inf_{u\in[s,t]} h(u)$。于是，对于任意 $t \in [0,1]$，t的等价类为 $[t]_h = C \cap h^{-1}\big(h(t)\big)$，其中 C 是包含 t 的 $h^{-1}\big([h(t),\infty)\big)$ 的连通分支。令$\pi\colon [0,1] \to E$ 为分解映射，其中 $E = [0,1]/{\sim_h}$。

以下两个性质可直接由定义得出。
(*) $h^{-1}\big([a,\infty)\big)$ 的连通分支 C是闭的且 π-饱和。因此，$1]\backslash C$是开且π-饱和的 [0,。

[1]在独立构造出 γ 之后，作者们意识到 γ 是谢尔宾斯基曲线的一种参数化，而我们对它的近似本质上就是 Knopp 表示 [8, 第 4 节。2]

(**) 对于每个 $h^{-1}\big([a,\infty)\big)$的连通分支 C， $C\backslash h^{-1}(a)$ 的连通分支都是开且π-饱和的。

引理 2.2. 等价关系 $\sim_h$ 在 $[0$上诱导出一个上半连续分解$1]$，使得商空间 $\pi\colon\ [0,1]\to E=[0,1]/{\sim_h}$ 是一个树状连续统。

证明。 根据 [7], 中的定理 10.2，我们只需证明 E 是一个连续统，并且对于 E 中的任意两点，在 E中存在第三点将它们分隔开。若 E 是豪斯多夫的，则 π 是一个上半连续分解，且 E 是一个连续统。对于任意 $t\in[0,\ 1]$, $[t]_h=C\cap h^{-1}\big(h(t)\big)$ 是闭集的交，其中 C是$h^{-1}\big([h(t),\ \infty)\big)$中包含 t的连通分支。因此，等价类是闭的。由此，我们只需证明，对于 E 中的任意两点，都存在第三点将它们分隔开。

设 $e=[r]_h$ 和 $e'=[s]_h$ 是 E中的两个不同点。我们将证明，存在一个 $t\in[0,\ 1]$ 使得 e 和 e' 位于 $E\backslash\{\pi(t)\}$的不同开连通分支中。现在我们分两种情况讨论。

情况 1：包含 r 的 $h^{-1}\big([h(r),\infty)\big)$ 的连通分支 C_r 与包含 s 的$h^{-1}\big([h(s),\infty)\big)$ 的连通分支 C_s 不相交。令 $[a,b]$ 为端点位于 $C_r\cup C_s$且满足 $(a,b)\cap(C_r\cup C_s)=\varnothing$的区间。取定 $t\in[a,b]$，使得 $h(t)=\inf h\big([a,b]\big)$。注意$h(t)<\min\big\{h(r),h(s)\big\}$。于是，包含 t 的 $h^{-1}\big([h(t),\infty)\big)$ 的连通分支 C_t 包含$C_r\cup C_s$，而 $[r]_h$, $[s]_h$ 包含在 $C_t\backslash[t]_h$的不同连通分支中。因此 $[0,1]\backslash[t]_h=[0,1]\backslash C_t\cup\Big(\bigcup\limits_{C\in\Lambda_t}C\Big)$，其中 Λ_t 是 $C_t\backslash[t]_h$的连通分支集合。

因此，$\Big\{\pi\big([0、\ 1]\backslash[t]_h\big)、\ \pi(C)\mid C\in\Lambda_t\Big\}$ 是 $E\backslash\pi(t)$ 的一个由两两不相交的开子集构成的集合，而$\pi(r)$ 和 $\pi(s)$ 分别包含在该集合的不同元素中。因此， e和 e' 分别包含在 $E\backslash\pi(t)$的不同开连通分支中。

情形 2： $h^{-1}\big([h(r)$的连通分支 C_r 与 r 相交，而$h^{-1}\big([h(s)$的连通分支 C_s 与 s 相交，但两者不相交。我们不妨假设 $h(r)\leqslant h(s)$。于是，由于 $C_r\cap C_s\neq\varnothing$，可得 $C_s\subset C_r$ 和 $h(r)<h(s)$。那么$[r]_h\cap C_s=\varnothing$。固定 $[a、\ b]\subset C_r$，使得 $[a、\ b]\cap[r]_h=\{a\}$且 $[a、\ b]\cap\overline{C_s}=\{b\}$。取$t\in\big[\frac{a+b}{2}、\ b\big]$，使得 $h(t)=$介于 $h\big(\big[\frac{a+b}{2}$和$b\big]\big)$之间。于是 $h(r)<h(t)<h(s)$。因此，对于包含 t的 $h^{-1}\big([h(t)$的连通分支 C_t，有 $C_s\subset C_t$且 $[r]_h\subset[0、\ 1]\backslash C_t$。于是$\pi\big([0、\ 1]\backslash C_t\big)$ 和 $\pi\big(C_t\backslash[t]_h\big)$ 构成 $E\backslash\{\pi(t)\}$ 的一个开分离，并分别包含元素$\pi(r)$和 $\pi(s)$ 。

□

引理 2.3. 若 $\alpha\colon\ [0,1]\to X$ 是树状的，则 α 是 $\mathbb{R}$-树零伦的。

证明。 由于 α 是树状的，因此存在正实值连续函数 $h\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$，使得对所有 $s\leqslant t$, $d\big(\alpha(t),\alpha(s)\big)\leqslant h(t)+h(s)-2h(u)$，都有 $\inf_{u\in[s,t]}$。由引理 2.2，存在一个连续函数 $\pi\colon\ [0,1]\to E$，其映射到由 $\sim_h$ 诱导的树状连续统。注意，若 $s\sim_h t$ 且 $s\leqslant t$，则 $d\big(\alpha(t),\alpha(s)\big)\leqslant h(t)+h(s)-2\inf_{u\in[s,t]}h(u)=0$。因此，根据商映射的泛性质，存在连续映射 $g\colon\ E\to X$，使得 $g\circ\pi=\alpha$。

□

引理 2.4（来自树状连续统的高度函数）。 设 (X,d) 是一个度量空间，(E,d') 是一个配备测地度量 d' 的树状连续统。假设存在一个环路 $\pi\colon\ [0,1]\to E$，以及一个 ***Lipschitz*** 映射 $g\colon\ E\to X$，那么 $g\circ\pi$ 是树状的。特别地，由 $h(t)=Ld\big(\pi(0),\pi(t)\big)$ 给出的 $h\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 是 $g\circ\pi$ 的高度函数，其中 L 是 g 的 ***Lipschitz*** 常数。

证明。 令 π、 g 和 h 如引理所述。固定 $s,\ t\in[0,\ 1]$，并假设 $s\leqslant t$。分别令 A_s、 A_t 为 E 中从 $\pi(0)$ 到 $\pi(s)$、 $\pi(t)$ 的弧。令 x 为 $A_s\cap A_t$ 上分隔 $\pi(s)$ 和 $\pi(t)$ 的唯一点。由于 x 分隔 $\pi(s)$ 和 $\pi(t)$, 我们有

$\inf_{u\in[s,\ t]} h(u) \leqslant Ld\big(\pi(0),\ x\big)$。由于 $x \in A_s \cap A_t$、$d'\big(\pi(0),\ \pi(u)\big) = d'\big(\pi(0),\ x\big) + d'\big(x,\ \pi(u)\big)$ 对于 $u \in \{s,\ t\}$。于是

$$\begin{aligned} h(t) + h(s) - 2\inf_{u\in[s,t]} h(u) &\geqslant h(t) + h(s) - 2Ld'\big(\pi(0), x\big) \\ &= Ld'\big(\pi(0), \pi(t)\big) + Ld'\big(\pi(0), \pi(s)\big) - 2Ld'\big(\pi(0), x\big) \\ &= Ld'\big(x, \pi(t)\big) + Ld'\big(x, \pi(s)\big) \\ &\geqslant d\big(g(x), g\circ\pi(t)\big) + d\big(g(x), g\circ\pi(s)\big) \geqslant d\big(g\circ\pi(t), g\circ\pi(s)\big) \end{aligned}$$

因此，h 是 $g\circ\pi$的高度函数。

□

注 2.5. 由于我们没有要求 π 是利普希茨的，引理 2.4 并不能推出 $g\circ\pi$是利普希茨树状的。

3. 构造树状体与映射

度量单纯树是赋予了边度量的单纯树，其中边度量通过为每条边指定长度来定义。设 E 是顶点集为 $E^{(0)}$的度量单纯树。连续映射 $\pi\colon [0,1] \to E$ 若所有点的原像都是有限集，且 π 在 $[0,1]\backslash\pi^{-1}(E^{(0)})$的每个连通分支的闭包上都是线性的，则称为单纯映射。连续映射 $g\colon E \to \mathbb{R}^2$ 若所有点的原像都是有限集，且 g 在 E的每条边上都是线性的，则称为单纯映射。

3.1. 三角形边的参数化。 设 T 是欧几里得平面中的一个等腰直角三角形，其顶点为 $\{a,b,c\}$,，直角位于 b处，且给定的顶点顺序为 a,b,c。需要指明这一顶点顺序时，我们用 $\triangle abc$ 表示 T。假设~我们有单纯树 E 和 E，一个区间 $[r,s]$，单纯映射 $\pi\colon [0,1] \to E$、$\tilde\pi\colon [0,1] \to \tilde E$、$g\colon E \to \mathbb{R}^2$以及 $\tilde g\colon \tilde E \to \mathbb{R}^2$，使得

(1) $\pi|_{[r,\ s]}$, $\tilde\pi|_{[r,\ s]}$ 是单射，且 $\pi\big(\{r,\ \frac{r+2}{2},\ s\}\big) \subset E^{(0)}$, $\tilde\pi\big(\{r,\ s\}\big) \subset \tilde E^{(0)}$;

(2) $g\circ\pi(r) = \tilde g\circ\tilde\pi(r) = a$, $g\circ\pi(\frac{r+s}{2}) = b$ 和 $g\circ\pi(s) = \tilde g\circ\tilde\pi(s) = c$; 以及 (3) $g\circ\pi|_{[r,\ \frac{r+s}{2}]}$, $g\circ\pi|_{[\frac{r+s}{2},\ s]}$ 和 $\tilde g\circ\tilde\pi|_{[r,\ s]}$是线性映射。

在这种情况下，我们称 $(\pi,\ \tilde\pi,\ g,\ \tilde g)$ 参数化 $\triangle abc$ 上的 $[r,\ s]$; 见图1。注意，路径 π，$\tilde\pi$ 与 $\triangle abc$的顺序相符。此外请注意，弧$\pi\big([r,\ s]\big)$, $\tilde\pi\big([r,\ s]\big)$ 中可能还包含条件 (1) 未指定的顶点。

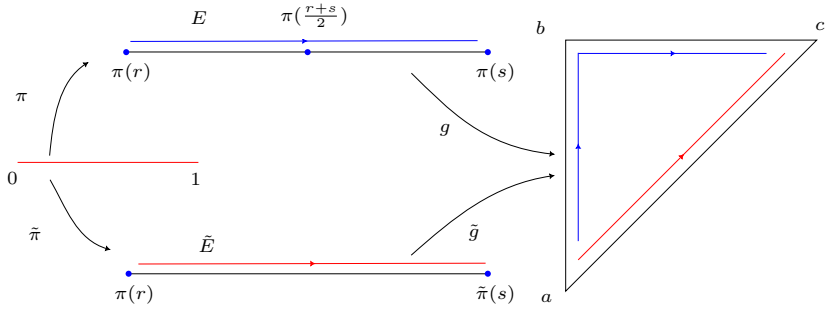

FIGURE 1. 在 $[r,\ s]$上参数化 $\triangle abc$

3.2. 细分步骤。 如果 $(\pi,\ \tilde{\pi},\ g,\ \tilde{g})$ 参数化了 $T=\triangle abc$ 上的 $[r,\ s]$，那么我们可以通过将 $\pi(\frac{3r+s}{4})$ 和 $\pi(\frac{r+3s}{4})$ 设为顶点（如果它们还不是顶点），构造一棵新的单纯树 E_1。我们将为细分后的边赋予长度，使度量在 E 上保持不变。随后，我们会在这些点处添加两条新边，其长度为从 $\pi(r)$ 到 $\pi(\frac{r+s}{2})$ 的弧长的一半；见图 2。我们以类似方式构造 $\tilde{E}_1$：将 $\tilde{\pi}(\frac{r+s}{2})$ 设为顶点（如果它还不是顶点），并在这个（可能是新建的）顶点处连接一条新边。我们将为细分后的边赋予长度，使 E 上的度量保持不变，而新边的长度为从 $\tilde{\pi}(r)$ 到 $\tilde{\pi}(s)$ 的弧长的一半。

然后，我们可以定义收缩映射 ρ_1：$E_1\to E$、$\tilde{\rho}_1$：$\tilde{E}_1\to\tilde{E}$，它们分别将新增的边收缩到 E 或 E 中的顶点。注意，ρ，$\tilde{\rho}$ 是单调收缩，且上确界度量距离 $d^{\sup}(\rho_1,\ id_{E_1})$ 和 $d^{\sup}(\tilde{\rho}_1,\ id_{\tilde{E}_1})$ 等于新增边的直径。

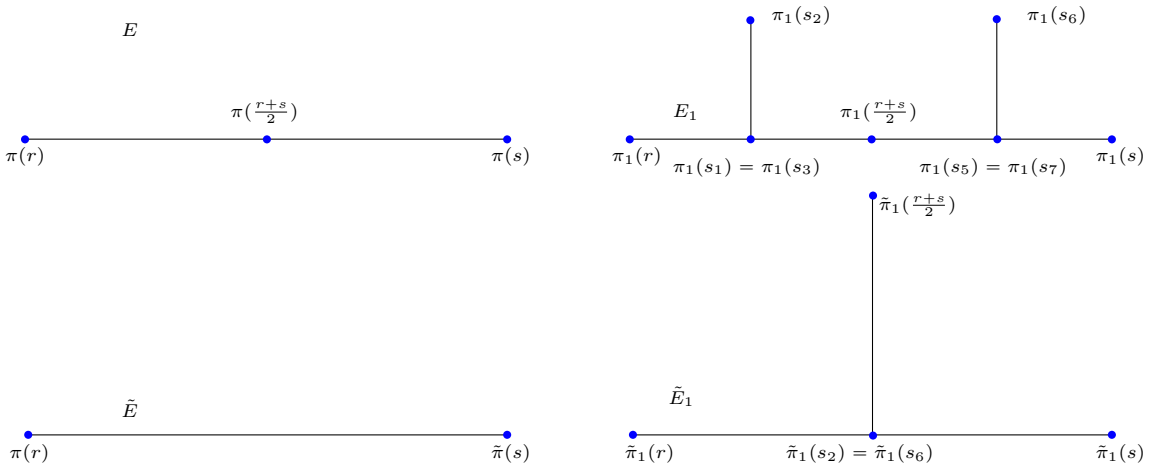

FIGURE 2. 添加和细分边

然后，我们可以通过 $\pi_1|_{[0,\ 1]\setminus(r,\ s)}=\pi|_{[0,\ 1]\setminus(r,\ s)}$、$\tilde{\pi}_1|_{[0,\ 1]\setminus(r,\ s)}=\tilde{\pi}|_{[0,\ 1]\setminus(r,\ s)}$ 定义映射 π_1：$[0,\ 1]\to E_1$ 以及 $\tilde{\pi}_1$：$[0,\ 1]\to E_1$，其中 π_1、$\tilde{\pi}_1$ 如图 3 所示是 $[r,\ s]$ 上的线性映射，其中 $s_i=\frac{(8-i)r+i\cdot s}{8}$。

令 $d=\frac{a+b}{2}$、$e=\frac{b+c}{2}$ 和 $f=\frac{a+c}{2}$ 表示 T 各边的中点。定义 g_1：$E_1\to\mathbb{R}^2$ 和 $\tilde{g}_1$：$\tilde{E}_1\to\mathbb{R}^2$，使其满足 $g_1|_E=g$、$\tilde{g}_1|_{\tilde{E}}=\tilde{g}$、$g_1\circ\pi_1(s_2)=g_1\circ\pi_1(s_6)=f$ 和 $\tilde{g}_1\circ\tilde{\pi}_1(\frac{r+s}{2})=b$，然后将其线性延拓。注意，$(\pi_1$、$\tilde{\pi}_1$、$g_1$、$\tilde{g}_1)$ 分别参数化了 $[r$ 上的 $\triangle adf$、$[\frac{3r+s}{4}$ 上的 $\triangle fdb$、$[\frac{r+s}{2}$ 上的 $\triangle bef$、$[\frac{r+3s}{4}$ 上的 $\triangle fec$，以及 $s]$；其中 $\triangle adf$、$\triangle fdb$、$\triangle bef$ 和 $\triangle fec$ 是顶点有序的等腰直角三角形，其直径均为 T 的一半。π 遍历这些直角三角形直角边的顺序，将在 $\{\triangle adf$、$\triangle fdb$、$\triangle bef$、$\triangle fec\}$ 上诱导出一种排序，我们称之为从 π 继承的自然排序。

4. THE CONSTRUCTION

设 $A=\{T_1,\dots,T_n\}$ 是一个有序集合，其中包含带有给定顶点顺序的等腰直角三角形。若 $(\pi,\tilde{\pi},g,\tilde{g})$ 对 T_i 在 $[s_{i-1},s_i]$ 上进行参数化，则称 $(\pi,\tilde{\pi},g,\tilde{g})$ 是 A（相对于 $S=\{0=s_0<s_1<\cdots<s_n=1\}$）的参数化。

在本文余下部分，我们用 T 表示顶点有序三角形 $\triangle abc$，其顶点为 $a=(0$、$0)$、$b=(0$、$1)$，以及 $c=(1$、$1)$。令 $A_1=\{T\}$。令 E_1 为具有三个顶点 $\{v_0$、$v_{\frac{1}{2}}$、$v_1\}$ 和两条边 $\{(v_0$、$v_{\frac{1}{2}})$、$(v_{\frac{1}{2}}$、$v_1)\}$ 的单纯树，而 $\tilde{E}_1$ 为具有

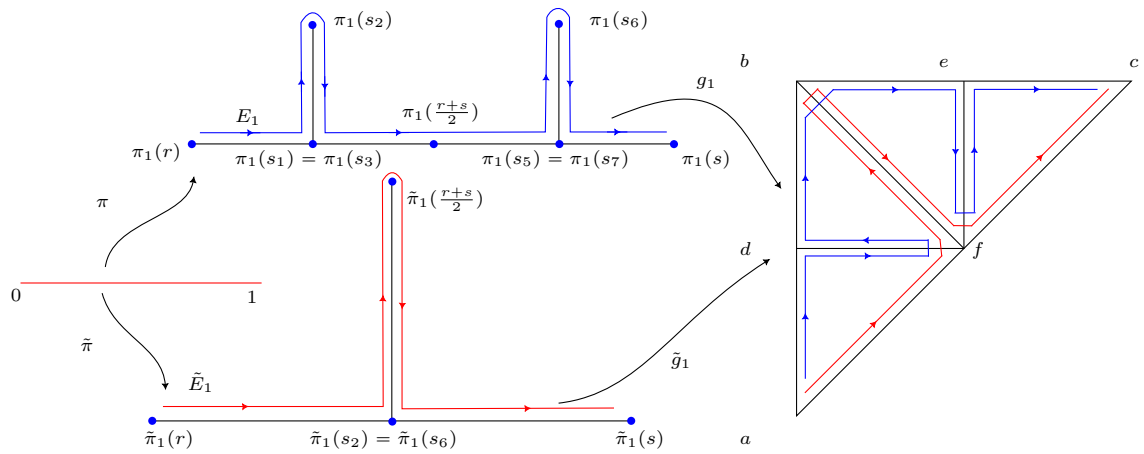

FIGURE 3. 这些映射

两个顶点 $\{\tilde{v}_0, \tilde{v}_1\}$ 和一条边 $\{(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)\}$ 的单纯树。我们赋予 E_1 边度量，其中两条边的长度均为 1；并赋予 E_1 边度量，其中其唯一一条边的长度为 $\sqrt{2}$。

定义 $\pi_1 : [0, 1] \to E_1$, $\tilde{\pi}_1 : [0, 1] \to \tilde{E}_1$ 由 $\pi_1(i) = v_i$ 对 $i \in \{0, 1\}$, $\tilde{\pi}_1(i) = \tilde{v}_i$ 对 $i \in \{0, 1\}$。定义 $g_1 : E_1 \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}_1 : \tilde{E}_1 \to \mathbb{R}^2$ 由 $g_1(v_0) = \tilde{g}_1(\tilde{v}_0) = a$, $g_1(v_1) = b$, 并且 $g_1(v_1) = \tilde{g}_1(\tilde{v}_1) = c$ 并线性延拓。然后 $(\pi_1, \tilde{\pi}_1, g_1, \tilde{g}_1)$ 将 A_1 参数化于 $[0, 1]$。

假设我们通过归纳构造了映射 $\pi_n : [0, 1] \to E_n$, $\tilde{\pi}_n : [0, 1] \to E_n$ 以及 $g_n : E_n \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}_n : \tilde{E}_n \to \mathbb{R}^2$，使得以下条件成立：

(1) $E_n, \tilde{E}_n$ 是带有边度量的单纯树，其中所有边的长度分别为 $\frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$。

(2) E_n, E_n 分别是 E_{n-1}, E_{n-1} 的单调收缩映射。

(3) 对于 $n > 1$, $\rho_n : E_n \to E_{n-1}$, $\tilde{\rho}_n : E_n \to E_{n-1}$ 是单调回缩，使得 $d^{\sup}(\rho_n, id_{E_n}) = \frac{1}{2^{n-1}}$ 以及 $d^{\sup}(\tilde{\rho}_n, id_{\tilde{E}_n}) = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$。(4) $g_n : E_n \to \mathbb{R}^2$ 和 $\tilde{g}_n : \tilde{E}_n \to \mathbb{R}^2$ 是 1-利普希茨的。(5) 对于 $n > 1$, $g_n|_{E_{n-1}} = g_{n-1}$ 和 $\tilde{g}_n|_{\tilde{E}_{n-1}} = \tilde{g}_{n-1}$。(6) A_n 是由 4^{n-1} 个顶点有序的等腰直角三角形组成的有序集合，其直角边长度为 $\frac{1}{2^{n-1}}$。(7) $(\pi_n, \tilde{\pi}_n, g_n, \tilde{g}_n)$ 是相对于 $S = \{0, \frac{1}{4^{n-1}}, \frac{2}{4^{n-1}}, \dots, 1\}$ 对 A_n 的参数化

现在我们可以定义 $A_{n+1}, E_{n+1}, E_{n+1}, \pi_{n+1} : [0, 1] \to E_{n+1}, \tilde{\pi}_{n+1} : [0, 1] \to E_{n+1}$ 以及 $g_{n+1} : E_{n+1} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}_{n+1} : \tilde{E}_{n+1} \to \mathbb{R}^2$，使其满足归纳假设。

记 $A_n = \{T_1, \dots, T_{4^{n-1}}\}$。由于 $(\pi_n, \tilde{\pi}_n, g_n, \tilde{g}_n)$ 在 $[\frac{i-1}{4^{n-1}}$ 上参数化了 T_i，我们可以对每个 i 应用第 3.2 节的细分过程，以定义 $A_{n+1}, E_{n+1}, E_{n+1}, \pi_{n+1} : [0, 1] \to E_{n+1}$, $\tilde{\pi}_{n+1} : [0, 1] \to \tilde{E}_{n+1}$ 以及 $g_{n+1} : E_{n+1} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{g}_{n+1} : \tilde{E}_{n+1} \to \mathbb{R}^2$。在此过程中，将 E_n （以及 E_n）的每条边二等分，并在每个新顶点处添加一条或两条长度为 $\frac{1}{2^n}$ 的新边。验证这满足归纳假设是一个练习。注意，有序集合 $A_{n+1} = \{T'_1, \cdots, T'_{4^n}\}$ 由 A_n 得到，方法是将每个 T_i 替换为序列 $T'_{4(i-1)+1}, T'_{4(i-1)+2}, T'_{4(i-1)+3}, T'_{4(i-1)+4}$；该序列由细分过程中得到的四个顶点有序三角形组成，其顺序沿用 π_n 所继承的自然顺序。

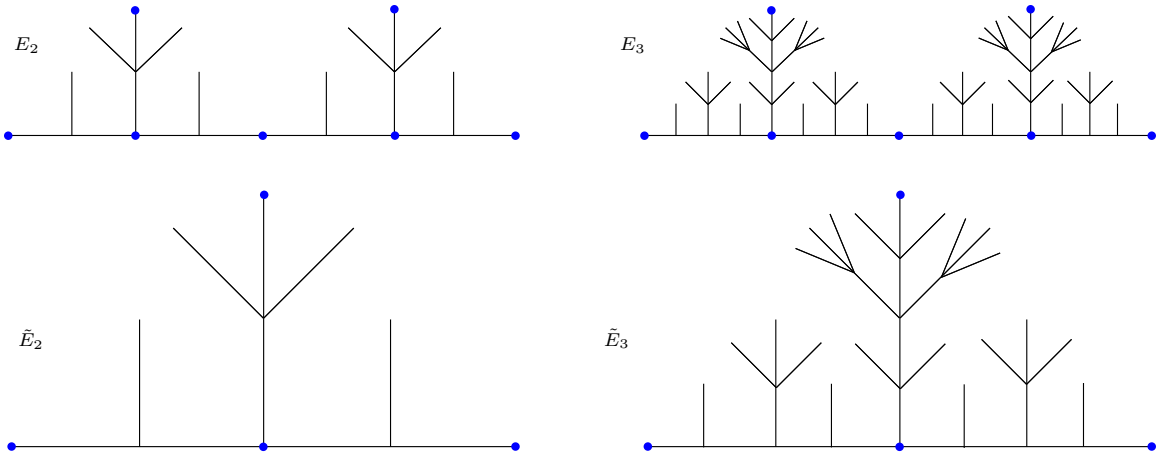

FIGURE 4. 左侧是 E_2 和 $E_{2\circ}$ 右侧是 E_3 和 $E_{3\circ}$

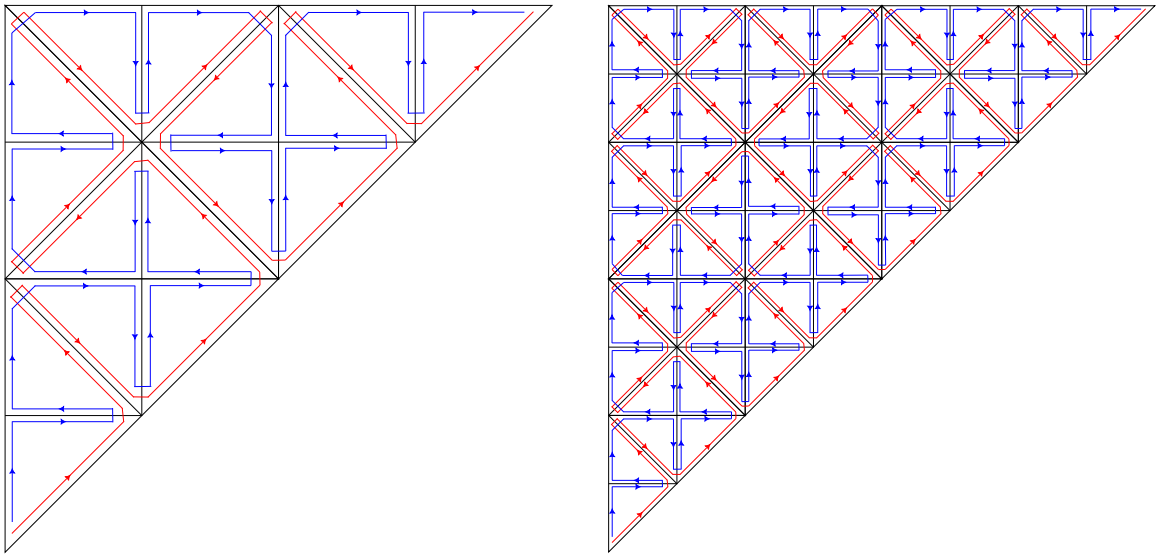

FIGURE 5. 左侧是 $g_2 \circ \pi_2$ （蓝色）和 $\tilde{g}_2 \circ \tilde{\pi}_2$ （红色）的示意图。右侧是 $g_3 \circ \pi_3$ （蓝色）和 $\tilde{g}_3 \circ \tilde{\pi}_3$ （红色）的示意图。

5. LIMITING ARGUMENTS

引理 5.1。 设 E_i 是一个树状连续统的嵌套序列，其测地度量为 d_i，满足 $d_i|_{E_{i-1}\times E_{i-1}} = d_{i-1}$ ，并且假设 $a > 0$。若对于所有 $i > 1$ ，ρ_i ： $E_i \to E_{i-1}$ 都是单调收缩映射，且 上确界 $\sup_{e\in E_i} d_i\big(\rho_i(e), e\big) \leqslant \frac{a}{2^i}$，则 $E =$ 极限$\underleftarrow{}(E_i, \rho_i)$ 是一个树状连续统，并且 E 具有度量 d ，使得 $d|_{E_i\times E_i} = d_i$ （其中我们将 E_i 与其到 E中的自然嵌入等同），且投影 ρ_i ： $E \to E_i$ 一致收敛到 E上的恒等映射。

证明。 </style}由 [7]中的定理10.36可知， E 是一个树状连续统。我们只需证明E 具有满足引理两个条件的度量。

对于 (e_i)， $(f_i) \in E$，设 $d\big((e_i), (f_i)\big) = \sup_i d_i(e_i, f_i)_\circ$ 由于 $\sup_{e\in E_i} d_i\big(\rho_i(e), e\big) \leqslant \frac{a}{2^i}$,

$$d_i(e_i, f_i) \leqslant \sum_{j=2}^{i} d_j(e_j, e_{j-1}) + d(e_1, f_1) + \sum_{j=2}^{i} \big(d_j(f_j, f_{j-1})$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{2^j} + \operatorname{diam}(E_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a}{2^j} = \operatorname{diam}(E_1) + 2a,$$

这意味着 d （作为 $\prod_i E_i$ 的子集的 E 上的一致度量）定义良好。

度量空间乘积上的一致拓扑总是比乘积拓扑更细，因此只需证明逆极限拓扑比由 d 诱导的拓扑更细。令 $(e_n) \in E$ 和 $\epsilon > 0$，并考虑度量空间 (E, d) 中以 $B_d((e_n), \epsilon)$ 为中心、半径为 d 的开球。取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a}{2^j} < \frac{\epsilon}{4}$。令 $U_n = B_{d_n}(e_n, \epsilon/4)$，其中 $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$；并令 $U_n = E_n$，其中 $n > m$。我们断言 $E \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq B_d((e_n), \epsilon)$。给定 $(f_n) \in E \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$，对于所有 $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$，都有 $d_n(e_n, f_n) < \frac{\epsilon}{4}$。固定 $n > m$。那么

$$d_n(e_n, f_n) \leqslant d_n(e_n, e_m) + d_n(e_m, f_m) + d_n(f_m, f_n)$$
$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{n} \frac{a}{2^j} + d_m(e_m, f_m) + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{a}{2^j}$$
$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \leqslant \frac{3\epsilon}{4}$$

由于 $\sup\{d_n(e_n, f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} < \epsilon$，我们有 $(f_n) \in B_d((e_n), \epsilon)$。因此，所需的包含关系得证，并且 d 是与 E上的逆极限拓扑相容的度量。

E_i 到 E_{i-1} 的单调回缩只需将每个连通分支C 的闭包收缩到点 $C \cap E_{i-1}$，也就是说，ρ_i 是从 E_i到 E_{i-1}的最近点投影映射。因此，E_i 中的一条弧经 ρ_i 映射后成为 E_{i-1} 中的一条弧（可能退化），其初始部分和末端部分会被收缩。因此，ρ_i 是 1-利普希茨的。注意，若对于某个 j，有 $(e_i), (f_i) \in E_j$，那么对于所有 $i \geqslant j$，$e_i = e_j$ 且 $f_i = f_j$，这意味着$d\big((e_i), (f_i)\big) = d_j(e_j, f_j)$。因此，$d|_{E_i\times E_i} = d_i$。

固定 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于 $(e_i) \in E$,

$$d\big(\varrho_n\big((e_i)\big), (e_i)\big) = \sup_{i>n} d_i(e_n, e_i) \leqslant \sum_{j=n+1}^{i} d_j(e_j, e_{j-1}) \leqslant \sum_{j=n+1}^{i} \frac{a}{2^n} \leqslant \frac{a}{2^n}.$$

因此，ϱ_n 一致收敛于恒等映射。 □

引理 5.2。设 E_i 是一个带有测地度量 d_j 的树状连续统嵌套序列，使得$d_i|_{E_{i-1}\times E_{i-1}} = d_{i-1}$，并设 $a > 0$。假设我们有映射 $\pi_i\colon [0, 1] \to E_i$ 和 $g_i\colon E_i \to \mathbb{R}^2$ （对于 $i \geqslant 1$），以及映射 $\rho_i\colon E_i \to E_{i-1}$ （对于 $i \geqslant 2$），满足以下性质。

（1） $\rho_i\colon E_i \to E_{i-1}$ 是树状连续统的单调收缩映射（2）上确界 $\sup_{e\in E_i} d_i\big(\rho_i(e), e\big) \leqslant \frac{a}{2^i}$（3）$\pi_i(r) = \pi_j(r)$ 对于所有 i, j 和 $r \in \{0, 1\}$（4）上确界$_t\, d_i\big(\pi_{i-1}(t), \pi_i(t)\big) \leqslant \frac{a}{2^{i-1}}$（5） $g_i\colon E_i \to \mathbb{R}^2$ 是 L-利普希茨的。（6） $g_i|_{E_{i-1}} = g_{i-1}$

对于 $E = \varprojlim(E_i, \rho_i)$，映射 π_i 一致收敛到映射 $\pi\colon [0, 1] \to E$，使得$\pi(r) = \pi_1(r)$ 对 $r \in \{0, 1\}$成立。映射 $g_i \circ \varrho_i$ 一致收敛到一个 L-利普希茨映射$g\colon E \to \mathbb{R}^2$，使得 $g|_{E_i} = g_i$成立。特别地，$g \circ \pi$ 与 $g_1 \circ \pi_1$是 $\mathbb{R}$-树同伦的

证明。由引理 5.1，$E = \varprojlim (E_i, \rho_i)$ 存在一个度量 d，使得 $d|_{E_i \times E_i} = d_i$（其中我们将 E_i 视为嵌入到 E中的自然嵌入），且投影 $\varrho_i : E \to E_i$ 一致收敛到 E上的恒等映射。由 (4)，映射 π_i 构成连续映射 $[0,1] \to E$的一个柯西序列（在上确界度量下）。因此，它们一致收敛到映射$\pi\colon [0,1] \to E$，且由 (3) 可知，对于 $r \in \{0,1\}$，$\pi(r) = \pi_1(r)$ 成立。

令 $e = (e_i) \in E$。那么对于 $k > j$，我们有

$$\begin{aligned} d\big(g_k \circ \varrho_k(e), g_j \circ \varrho_j(e)\big) &= d\big(g_k(e_k), g_j(e_j)\big) \\ &= d\big(g_k(e_k), g_k(e_j)\big) \leqslant \sum_{i=j+1}^{k} d\big(g_k(e_i), g_k(e_{i-1})\big) \\ &\leqslant \sum_{i=j+1}^{k} L \cdot d_k\big(e_i, e_{i-1}\big) \leqslant \sum_{i=j+1}^{k} L\frac{a}{2^i} \leqslant L\frac{a}{2^j}. \end{aligned}$$

因此，$g_k \circ \varrho_k$ 是映射 $E \to \mathbb{R}^2$ 的柯西序列（在上确界度量下），所以收敛到映射 $g\colon E \to \mathbb{R}^2$。注意，对所有 k，$g_k \circ \varrho_k|_{E_k} = g_k$。因此，对所有 $\ell \geqslant k$，$g_\ell \circ \varrho_\ell|_{E_k} = g_k$。由此，$g|_{E_k} = g_k$，这意味着 $g \circ \pi_1 = g_1 \circ \pi_1$。由于 E 是树状连续统，$\pi_1(0) = \pi(0)$，且 $\pi_1(1) = \pi(1)$，路径 $g \circ \pi_1$ 与 $g \circ \pi$是 $\mathbb{R}$-树同伦的。因此，$g_1 \circ \pi_1$与 $g \circ \pi$是 $\mathbb{R}$-树同伦的。

由于 ϱ_i 是 1-利普希茨的，且 g_i 是 L-利普希茨的，所以 $g_i \circ \varrho_i$ 是 L-利普希茨的，这意味着 g 是L-利普希茨的。

□

6. Non-transitivity of tree-like equivalent

定理 6.1. 存在路径 α、β 和 γ，它们位于 $\mathbb{R}^2$ 中，满足 α 与γ树状等价，β 与 γ树状等价，但 α 与 β不树状等价。此外，α 和 β可以选为树状约化路径。

证明. 令 $\pi_n\colon [0,1] \to E_n$, $\tilde{\pi}_n\colon [0,1] \to \tilde{E}_n$, $g_n\colon E_n \to \mathbb{R}^2$，以及 $\tilde{g}_n\colon \tilde{E}_n \to \mathbb{R}^2$ 为第 4 节中构造的映射和单纯树。

注意，$g_1 \circ \pi_1$ 参数化三角形 $T = \triangle abc$ 的两条直角边，而 $\tilde{g}_1 \circ \tilde{\pi}_1$ 参数化其斜边。归纳假设的条件 (3) 保证 $\sup_{e \in E_i} d_i\big(\rho_i(e), e\big) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$ 和 $\sup_{e \in \tilde{E}_i} d_i\big(\tilde{\rho}_i(e), e\big) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{i-1}}$。引理 5.1 给出两个树状连续统 $E = \varprojlim (E_i, \rho_i)$ 和 $E = \varprojlim (E_i, \tilde{\rho}_i)$，其度量分别为 d 和 d，并满足 $d|_{E_i \times E_i} = d_i$，$d|_{\tilde{E}_i \times \tilde{E}_i} = d_i$，使得投影 $\varrho_i\colon E \to E_i$, $\tilde{\varrho}_i\colon E \to E_i$ 一致收敛到相应的恒等映射。然后引理 5.2 给出映射 $\pi\colon [0,1] \to E$, $\tilde{\pi}\colon [0,1] \to \tilde{E}$, $g\colon E \to \mathbb{R}^2$，以及 $\tilde{g}\colon \tilde{E} \to \mathbb{R}^2$，使得 $g \circ \pi$ 与 $g_1 \circ \pi_1$ 树同伦于 $\mathbb{R}$，且 $\tilde{g} \circ \tilde{\pi}$ 与 $\tilde{g}_1 \circ \tilde{\pi}_1$ 树同伦于 $\mathbb{R}$。

令 $d^{\sup}$ 表示 $\mathbb{R}^2$上路径的一致度量。由于 $(\pi_n, \tilde{\pi}_n, g_n, \tilde{g}_n)$ 是相对于 $S = \{0$的 A_n 的参数化，$\frac{1}{4^{n-1}}, \frac{2}{4^{n-1}}, \ldots\ldots, 1\}$ 且A_n 的三角形直径为 $\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$，因此有 $d^{\sup}\big(g_n \circ \pi_n, \tilde{g}_n \circ \tilde{\pi}_n\big) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$。

于是 $g_k \circ \pi_k = g \circ \pi_k$，因为 $g|_{E_k} = g_k$。所以 $d^{\sup}(g_k \circ \pi_k, g \circ \pi) = d^{\sup}(g \circ \pi_k, g \circ \pi)$。由于 π_k一致收敛于 π，且 g是 1-利普希茨的，$g_k \circ \pi_k$一致收敛于 $g \circ \pi$。类似地，$\tilde{g}_k \circ \tilde{\pi}_k$一致收敛于 $\tilde{g} \circ \tilde{\pi}$。由于 $d^{\sup}\big(g_n \circ \pi_n, \tilde{g}_n \circ \tilde{\pi}_n\big) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}$，我们有 $\overline{g \circ \pi} = \tilde{g} \circ \tilde{\pi}$。

设 $\alpha = g_1 \circ \pi_1 = g \circ \pi_1$、$\beta = \tilde{g}_1 \circ \tilde{\pi}_1 = \tilde{g} \circ \tilde{\pi}_1$ 和 $\gamma = g \circ \pi = \tilde{g} \circ \tilde{\pi}$。那么我们可以考虑 $\pi_1 * \pi\colon [0,1] \to E$、$\tilde{\pi}_1 * \tilde{\pi}\colon [0,1] \to \tilde{E}$、$g\colon E \to \mathbb{R}^2$，以及 $\tilde{g}\colon \tilde{E} \to \mathbb{R}^2$。由于 g 和 $\tilde{g}$ 是

1-利普希茨，因此根据引理 2.4，$\alpha * \gamma = \overline{g \circ (\pi_1 * \pi)}$ 和 $\beta * \gamma = \overline{\tilde{g} \circ (\tilde{\pi}_1 * \tilde{\pi})}$ 都是树状的。由于 $\alpha * \beta$ 是一条简单闭曲线，因此它不是 $\mathbb{R}$-树零伦的，所以根据引理 2.3，它不是树状的。注意，α 和 β 参数化弧，因此它们是约化路径。证毕。

□

推论 6.2（定理 1.4，见 [2]）。若 X 是任意拓扑空间，且 $\phi\colon [0$与 $1] \to X$、$\theta\colon [0$与 $1] \to X$ 路径同伦，则存在路径 $\psi\colon [0$、$1] \to X$，使得 ϕ与 ψ 是 $\mathbb{R}$-树同伦的，并且 θ 与 ψ是 $\mathbb{R}$-树同伦的。

证明。定理 6.1 证明中的构造给出了路径 $\alpha\colon [0,1] \to T$，它参数化了 T的直角边；路径 $\beta\colon [0,1] \to T$，它参数化了 T 的斜边；以及路径 $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{conv}(T)$，它位于 T 的凸包中，使得 $\alpha \simeq_{\mathbb{R}} \gamma$和 $\beta \simeq_{\mathbb{R}} \gamma$位于 $\mathrm{conv}(T)$中。由于ϕ 与 θ路径同伦，因此存在映射 $h : \mathrm{conv}(T) \to X$，使得 $h \circ \alpha = \phi$ 和$h \circ \beta = \theta$。令 $\psi = h \circ \gamma$，则有 $\phi \simeq_{\mathbb{R}} \psi$和 $\theta \simeq_{\mathbb{R}} \psi$。□

References

[1] Horatio Boedihardjo、Xi Geng、Terry Lyons 和 Danyu Yang。粗糙路径的签名：唯一性。*Adv. Math.*，293：720–737，2016年。[2] Jeremey Brazas、Gregory R. Conner、Paul Fabel 和 Curtis Kent。论 R-树、同伦与覆盖映射。 *Preprint*。[3] Thomas Duquesne。实值函数对紧实树的编码，2006年。[4] Ben Hambly 和 Terry Lyons。关于树与路径的一些札记。 *Preprint*。[5] Ben Hambly 和 Terry Lyons。有界变差路径的签名及约化路径群的唯一性。 *Ann. of Math. (2)*，171(1)：109–167，2010年。[6] Jean-Fran

Ann. cois Le

Probab. 19 4 1399 1439, 1991

Gall。布朗游程、树与测度值分枝过程。，（）：–。[7] Sam B. Nadler, Jr.

Continuum theory 158 *Monographs and Textbooks in Pure and Applied*，[8] 卷。

Mathematics 1992

Marcel Dekker, Inc.，纽约， *Space-Filling Curves*。导论。Hans Sagan。。Universitext。Springer，纽约州纽约市，1994年。

West Chester University, Department of Mathematics, West Chester, PA 19383, USA
Email address: jbrazas@wcupa.eduBrigham Young University, Department of Mathematics, Provo, UT 84602, USA*Email address*: conner@math.byu.eduMississippi State University, Department of Mathematics and Statistics, Mississippi State,MS 39762, USA*Email address*: fabel@math.msstate.eduBrigham Young University, Department of Mathematics, Provo, UT 84602, USA*Email address*: curtkent@mathematics.byu.edu